

---

## Musique des étoiles : La mélodie du glitch

**Auteur** : Farnir, Martin

**Promoteur(s)** : Dupret, Marc-Antoine

**Faculté** : Faculté des Sciences

**Diplôme** : Master en sciences spatiales, à finalité approfondie

**Année académique** : 2016-2017

**URI/URL** : <http://hdl.handle.net/2268.2/3232>

---

### *Avertissement à l'attention des usagers :*

*Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.*

*Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.*

---



UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT D'ASTROPHYSIQUE, DE GÉOPHYSIQUE ET  
D'OCÉANOGRAPHIE

---

# MUSIQUE DES ÉTOILES : LA MÉLODIE DU GLITCH

---

MARTIN FARNIR

Sart-Tilman  
Liège, Belgique  
Année Académique 2016 – 2017

**Promoteur :**

*Prof. Marc-Antoine Dupret*

*Mémoire réalisé en vue de  
l'obtention du grade de Master  
en Sciences Spatiales*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Temps caractéristiques . . . . .	6
1.2	Oscillations de type solaire . . . . .	7
1.2.1	Campagnes observationnelles . . . . .	8
1.3	16 Cygni . . . . .	9
1.3.1	Paramètres observationnels connus . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Rappels théoriques</b>	<b>11</b>
2.1	Oscillations non radiales . . . . .	11
2.1.1	Relation adiabatique . . . . .	12
2.1.2	Séparation de variables . . . . .	12
2.1.3	Régime asymptotique . . . . .	13
2.2	Lien avec la structure interne . . . . .	16
2.2.1	Modes p . . . . .	16
2.2.2	Principe variationnel . . . . .	17
2.2.3	Glitch de l'hélium . . . . .	18
2.3	Effets de surface . . . . .	20
2.4	Indicateurs sismiques . . . . .	21
2.5	Représentation des fréquences : diagramme à échelle . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Méthodes astérosismologiques</b>	<b>24</b>
3.1	Méthodes inverses . . . . .	24
3.2	Méthodes directes . . . . .	25
3.3	Méthodes de minimisation . . . . .	26
3.3.1	Fonction de mérite générale . . . . .	27
3.3.2	Méthodes de la plus grande pente et de Gauss . . . . .	27
3.3.3	Algorithme de Levenberg Marquardt . . . . .	29
3.4	Traitement du glitch par Verma et al. [38] . . . . .	31
3.5	HeFi : Notre ajustement du glitch . . . . .	32
3.5.1	Point de départ . . . . .	32
3.5.2	Obtention de contraintes indépendantes . . . . .	32
3.5.3	Ajustement de la composante lisse . . . . .	33
3.5.4	Ajustement de la fonction complète . . . . .	36

3.5.5	Précisions quant aux notations . . . . .	36
3.5.6	Détermination des conditions initiales . . . . .	36
3.5.7	Pistes d'amélioration . . . . .	40
3.6	Méthode implémentée . . . . .	41
3.6.1	Détermination du modèle stellaire optimal : fonction de mérite $\chi^2$ .	42
<b>4</b>	<b>Résultats</b>	<b>44</b>
4.1	Paramètres à ajuster . . . . .	44
4.1.1	Comparaison de $\delta_1$ et $\delta_2$ . . . . .	46
4.1.2	Évolution de $\bar{\epsilon}$ . . . . .	46
4.2	Résultats observationnels . . . . .	46
4.2.1	Contraintes . . . . .	47
4.2.2	Valeur par défaut des paramètres . . . . .	48
4.3	Ajustement des paramètres . . . . .	48
4.3.1	Sans diffusion . . . . .	49
4.3.2	Avec diffusion . . . . .	51
4.4	Stabilité de HeFi . . . . .	52
4.4.1	Domaine de validité . . . . .	53
4.4.2	Évolution de l'amplitude . . . . .	53
4.4.3	Constante de lissage et stabilité . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>59</b>
5.1	But du travail de mémoire . . . . .	59
5.2	Résultats et perspectives futures . . . . .	59
	<b>Bibliographie</b>	<b>61</b>

# Remerciements

Je souhaiterais remercier mon promoteur, le professeur Marc-Antoine Dupret, pour son encadrement de qualité, sa patience et son dévouement sans lesquels la réalisation de ce travail de mémoire n'aurait pas été possible. De plus, je souhaiterais remercier ma famille et mes amis pour leur soutien et leur indulgence au long des cinq années d'études m'ayant conduit à la rédaction de ce mémoire et ce, tout spécialement durant les périodes d'examens.

# Chapitre 1

## Introduction

L'étude et l'observation des étoiles a permis de démontrer que les quantités physiques en leur sein peuvent osciller autour d'une valeur d'équilibre. Ces oscillations se font à certaines fréquences précises, les fréquences propres, qui ne sont autres que les solutions d'un problème aux valeurs propres décrivant la dynamique des oscillations qui sera détaillée au chapitre 2. L'étude et la modélisation des oscillations stellaires est un sujet astrophysique à part entière, celui de l'astérosismologie. Au travers de cette discipline, il est possible de sonder la structure interne d'une étoile et ainsi d'accéder à des informations qui ne sont pas disponibles à l'observation directe. Ce n'est donc pas anodin.

Par ailleurs, il a été observé pour certaines étoiles une oscillation des fréquences observées autour des valeurs moyennes prédites par la théorie dite asymptotique sur laquelle nous reviendrons au chapitre 2. C'est ce qu'on appelle les *glitches acoustiques*<sup>1</sup>. Ceux-ci sont la manifestation acoustique d'une variation brutale d'une quantité physique (typiquement, la vitesse du son) au sein de l'étoile : citons une zone d'ionisation partielle de l'hélium ou encore le passage d'une zone radiative à une zone convective. Ainsi, l'observation de ces glitches acoustiques fut une motivation importante pour les astérosismologues dans le but de raffiner leurs modèles et les conclusions en étant tirées. Par exemple, *Monteiro et Thompson* [27] furent parmi les premiers à proposer une technique théorique permettant de déduire des informations du glitch dû à la seconde zone d'ionisation partielle de l'hélium dans le cas du soleil.

Parmi les méthodes d'ajustement du glitch de l'hélium, une méthode très intéressante de par son succès est celle proposée par *Verma et al.* en 2014 [38]. En effet, par son biais, Verma et al. furent en mesure d'extraire l'information du glitch et d'en déduire une estimation de la fraction en masse d'hydrogène présent dans l'enveloppe des étoiles de type solaire 16 Cygni A et B. Plus récemment (2017,[37]), ils ont appliqué cette méthode à 66 des étoiles Kepler reprises dans le projet sismique *LEGACY*. Ceci s'avéra être un succès pour l'analyse du glitch acoustique de l'hélium mais fut moins convaincant en ce qui concerne celui dû à la transition de la zone radiative à la zone convective.

Cependant, cette méthode n'est pas exempte de défauts. De fait, son principal pro-

---

1. Nous n'avons pas trouvé de terme français approprié à la description du mot "glitch".

blème est une utilisation d'informations corrélées lors de la réalisation de l'ajustement. Ceci nuit donc à la qualité des résultats qui restent pourtant plus que convaincants. Cette problématique sera traitée plus en profondeur dans la section 3.4.

Le but de ce mémoire est de proposer une méthode d'ajustement du glitch de l'hélium pour les étoiles de type solaire et plus spécifiquement pour le cas de 16 Cygni A. Dès lors, la méthode de Verma et al. sera notre point de départ et nous tenterons de palier à ses défauts. La nouveauté de la méthode proposée dans le cadre de ce mémoire sera que nous visons à utiliser des informations indépendantes afin d'effectuer un traitement robuste du glitch. Ceci se fait au travers d'une redéfinition de la fonction coût utilisée dans l'ajustement. Nous n'utiliserons plus les fréquences d'oscillations directement, car celles-ci ne sont pas totalement indépendantes dans le régime asymptotique, mais plutôt les indicateurs sismiques porteurs d'informations différentes.

Ce document s'articule en cinq chapitres : l'introduction présentant la problématique et l'état de l'art au sujet de 16 Cygni A ; de brefs rappels théoriques quant aux oscillations stellaires adiabatiques non radiales, les informations quant à la structure interne pouvant en être déduites et le traitement du glitch ; une présentation des méthodes astérosismologiques, celle de Verma et al. et la nôtre ; les résultats obtenus via notre méthode ; et une conclusion quant aux apports de notre méthode, les défauts dont elle souffre toujours et les pistes à explorer pour y remédier.

## 1.1 Temps caractéristiques

Avant d'étudier les oscillations stellaires d'un point de vue mathématique, il est utile de s'intéresser aux différentes échelles de temps caractéristiques des différents phénomènes en présence afin de se faire une idée de leurs importances respectives.

*Temps dynamique*

$$t_{dyn} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \quad (1.1.1)$$

Cette échelle de temps donne l'ordre de grandeur du temps nécessaire à l'étoile pour s'effondrer ou bien exploser s'il y avait un déséquilibre des forces et que l'équilibre hydrostatique était brisé. Ce sera aussi l'échelle de temps typique des oscillations stellaires. Notons cependant déjà qu'affirmer que ceci correspond à l'échelle typique est un peu grossier étant donné qu'il existe une grande variété de modes se répartissant sur un ensemble étendu de périodes. En effet, les étoiles présentent une large gamme de masses et rayons. Dès lors, le temps dynamique et les périodes d'oscillation s'étendent aussi sur un vaste domaine.

Le tableau 1.1 ci-dessous reprend les valeurs du temps dynamique pour des cas typiques telles que fournies par [19].

*Temps thermique ou de Helmholtz - Kelvin*

$$t_{HK} = \frac{GM^2}{2RL} \quad (1.1.2)$$

	$\bar{\rho} = \frac{M}{4/3\pi R^3}$	$t_{dyn}$
Étoile à neutrons	$10^{15} g cm^{-3}$	$0.05ms$
Naine blanche	$10^6 g cm^{-3}$	$2s$
Soleil	$1.41g cm^{-3}$	$26min$
Supergéante rouge	$10^{-9}g cm^{-3}$	$2ans$

TABLE 1.1 – Valeurs typiques du temps dynamique pour différentes classes d'étoiles telles que trouvées dans le support de cours donné par M.A. Dupret à l'université de Liège [19].

Ceci représente cette fois le temps caractéristique des phénomènes pour lesquels l'équilibre thermique est brisé. C'est à dire des phénomènes pour lesquels la production d'énergie par les réactions nucléaires n'égale pas les pertes par radiation. On l'obtient en vertu du théorème du Viriel et en supposant un déséquilibre thermique dû, par exemple, à l'arrêt soudain des réactions nucléaires. On peut aussi montrer que le temps thermique est nettement supérieur au temps dynamique ( $t_{dyn}/t_{HK} = 1.6 \cdot 10^{-12}$  pour le soleil [33]).

*Temps nucléaire*

$$t_{nuc} = \frac{E_{nuc}}{L} \quad (1.1.3)$$

Où  $E_{nuc}$  correspond à l'énergie produite par les réactions nucléaires. Il représente la durée de vie typique d'une étoile sur la séquence principale. Celui-ci est nettement supérieur au temps thermique ( $t_{HK}/t_{nuc} = 3.2 \cdot 10^{-3}$  dans le cas du soleil [33]).

On obtient alors la hiérarchie suivante :  $t_{dyn} \ll t_{HK} \ll t_{nuc}$ . Ceci nous permet d'affirmer que, de manière générale, sur le temps d'une oscillation, il n'est pas nécessaire de prendre en compte les échanges d'énergie et la modification de la composition chimique au sein de l'étoile. Nous travaillerons dès lors dans le cadre dit adiabatique<sup>2</sup>.

## 1.2 Oscillations de type solaire

Parmi les oscillations stellaires, nous distinguons deux sortes : les modes dits de pressions, modes p, et les modes de gravité, modes g<sup>3</sup>. Les étoiles présentant des oscillations de type solaire sont des étoiles pour lesquelles les oscillations observées sont de type p et sont excitées de manière stochastique par les mouvements convectifs de l'enveloppe.

Pour détecter de telles oscillations, il est nécessaire d'observer les cibles sans interruption durant de longues durées. En effet, celles-ci sont de faible amplitude (variation pouvant aller jusqu'au ppm en luminosité) et de longues séries temporelles permettent d'améliorer le rapport *signal sur bruit* et ainsi la confiance quant à la détermination des modes.

2. Nous présentons plus en détails ce qu'implique ce paradigme dans la sous-section 2.1.1.

3. Nous présentons ces concepts en plus de détails à la sous-section 2.1.3.



### 1.2.1 Campagnes observationnelles

Comme indiqué ci-dessus, l'astérosismologie est fortement tributaire des observations. Étant donné le besoin de séries temporelles ininterrompues de longue durée, les observations depuis l'espace semblent être le choix optimal. Par ailleurs, les observations depuis l'espace permettent de se débarrasser des perturbations induites par l'atmosphère ainsi que des interruptions diurnes qui induisent un aliasing (Chaplin et al. [5]).

Par ailleurs, l'astérosismologie profite du succès croissant de l'exoplanétologie. En effet, de nombreuses campagnes observationnelles ont été créées dans le but de détecter d'éventuels mondes habitables voire peuplés. Cependant, l'exoplanétologie seule manque d'informations. Effectivement, certains paramètres de l'étoiles ne peuvent être déduits à l'heure actuelle que par le biais de méthodes tierces telle que l'astérosismologie. Par exemple, l'information quant à la masse n'est pas connue exactement dans la majorité des cas<sup>4</sup>. Seule sa valeur "projetée" est disponible. Cette donnée est pourtant essentielle à la détermination des paramètres orbitaux de la planète. Alors, l'appel à l'astérosismologie se justifie naturellement. C'est d'ailleurs par ce biais que *Gizon et al.* ont été en mesure d'inférer l'inclinaison de l'axe de spin d'une étoile de type solaire hôte d'une Jupiter chaude en 2013 [20].

Ainsi, parmi les missions spatiales, nous citons *CoRoT* et *Kepler* dont le but premier était la détection d'exoplanètes mais qui furent toutes deux d'un grand apport à l'astérosismologie par la quantité importante de données en résultant.

#### CoRoT

*CoRoT*, pour *CO*nvection, *RO*tation and *planetary Transits*, est une mission française dont le but était de fournir des observations des fréquences d'oscillation d'étoiles de types solaire et F ainsi que l'observation de transits planétaires pour ces étoiles. La mission fut lancée le 27 décembre 2006 et, de par son succès, fut prolongée par deux fois avant de recevoir sa dernière commande, peu après avoir été prolongée pour la deuxième fois, le 17 juin 2013 à cause d'une défaillance technique. Durant ses années d'opération, CoRoT effectua 26 périodes d'observation comptabilisant 1981 jours d'observation dans son canal dit d'*étoiles brillantes* ("bright stars channel") et 1919 dans celui des *étoiles peu brillantes* ("faint stars channel"). Il collecta alors plus de 160 000 courbes de lumière [16]. De plus, les observations furent interrompues aussi rarement que possible sur les 2137 jours de la mission. Ainsi, les périodes d'observations durèrent de 20 à 170 jours sans interruption. Ceci permit l'obtention d'un duty cycle élevé, proche de 90% [35]. Alors, l'obtention précise des fréquences d'oscillation des étoiles ciblées fut possible, donnant ainsi l'accès au astérosismologues à des informations précieuses jusque là hors de portée.

Citons par exemple comme avancée notable, la confirmation de l'existence de modes mixtes théoriquement prédits dans les géantes rouges par *Dupret et al.* en 2009 [17].

---

4. La valeur exacte n'est obtenue que pour le cas des binaires à éclipses.

## Kepler

La mission Kepler fut lancée en 2009 et observa durant 4 ans plus de 150 000 étoiles à une cadence d’une image toutes les minutes ou toutes les 30 minutes [28]. Ceci permit la découverte de 4496 exoplanètes candidates dont 2335 confirmées. En effet, contrairement à CoRoT, le but premier de Kepler était la détection de planètes potentiellement habitables en orbite autour d’étoiles de type solaire.

Cependant, comme indiqué précédemment, l’exoplanétologie et l’astérosismologie sont deux disciplines complémentaires profitant chacune de l’autre. En effet, la première a besoin de la seconde pour une meilleure caractérisation de l’étoile hôte et donc de la planète. Alors que la seconde profite de l’intérêt croissant de la communauté scientifique et du public pour l’exoplanétologie afin d’obtenir des courbes de lumière de haute précision et de longue durée.

Dès lors, dans le cadre de la mission Kepler, ce qui est d’un intérêt primordial pour l’astérosismologie est qu’un grand nombre d’étoiles soit observé tout au long de la mission dont certaines plus d’une année complète sans interruption. Les fréquences d’oscillation des étoiles observées sont alors obtenues avec une précision inégalée jusque là.

## 1.3 16 Cygni

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéressons au cas de 16 Cygni A (HD 186408). Celle-ci est une étoile de type G1.5Vb [23] présentant des oscillations de type solaire. Elle appartient à un système ternaire comprenant deux étoiles de type solaire (16 Cyg A et B) et une naine rouge (16 Cyg C).

Ci-dessous, nous reprenons les paramètres observationnels connus.

### 1.3.1 Paramètres observationnels connus

Grandeur	Valeur	Source
$R (R_{\odot})$	$1.22 \pm 0.02$	White et al. [39]
$T_{eff,spec} (K)$	$5830 \pm 7$	Tucci Maia et al. [36]
$T_{eff,phot} (K)$	$5839 \pm 42$	White et al. [39]
$L (L_{\odot})$	$1.56 \pm 0.05$	Metcalf et al. [26]
$[Fe/H] (dex)$	0.096	Ramírez et al. [30]
$Y_f$	[0.23, 0.25]	Verma et al. [38]
$\langle \Delta\nu \rangle (\mu Hz)$	103.78	Davies et al. [12]

Comme nous le voyons au travers de ce tableau, cette étoile est particulièrement intéressante et a déjà été le sujet de nombreuses études. En effet, celle-ci est de type solaire et nous sommes en mesure d’observer un grand nombre de fréquences d’oscillation (aux environs de 50) pour des degrés sphériques allant jusqu’à 3 et des ordres radiaux élevés.

L'étude théorique de ses fréquences peut alors s'effectuer dans un cadre asymptotique, simplifié par rapport au cas plus général<sup>5</sup>.

Par ailleurs, un compagnon de type jovien d'une masse minimale de  $1.5 M_{Jup}$  a été découvert à 16 Cyg B (*Cochran et al.* 1997 [11]). Dès lors, l'intérêt des exoplanétologues pour le système fut suscité et une grande quantité de données à son sujet est désormais disponible.

Enfin, ajoutons que, malgré que les composantes A et B du système sont très semblables, elles présentent de très légères différences (Par exemple, *King et al.* montrent en 1997 que 16 Cyg A est au moins 4.5 fois plus abondante en Li que sa jumelle [24]). Par ailleurs, la composante B présente un disque d'accrétion alors que la A n'en possède pas. Ainsi, comme les deux étoiles possèdent des propriétés presque identiques (âge et masse) dues à leur même lieu de naissance ceci pose la question de l'influence de la présence d'un disque d'accrétion sur l'évolution d'une étoile de type solaire. Cette problématique est traitée par *Deal, Richard et Vauclair* en 2015 [15] qui montrent que la déplétion en Lithium de la composante B proviendrait d'un mécanisme de convection supplémentaire (*fingering convection*) conduisant à la chute du lithium vers le centre de l'étoile et à sa destruction dans les régions suffisamment chaudes pour que sa fusion soit possible.

Les précédents exemples montrent bien tout l'intérêt porté au système 16 Cygni par les astrophysiciens et justifient que nous lui portions un intérêt tout particulier à l'heure actuelle.

Pour conclure cette section, ajoutons que les fréquences que nous avons utilisées pour la réalisation de ce travail sont celles déterminées par *Davies et al.* en 2015 [12].

---

5. Voir le chapitre 2 sur les rappels théoriques pour l'introduction de ces notions.

# Chapitre 2

## Rappels théoriques

### 2.1 Oscillations non radiales

Afin d'obtenir les équations des oscillations non radiales, on doit perturber les équations de l'hydrodynamique. Ceci se fait via la *théorie des petites perturbations* où nous distinguons deux types de perturbations : eulériennes et lagrangiennes. Le premier type représente l'écart entre la valeur d'équilibre d'une grandeur  $X$  et sa valeur instantanée *en un point donné*. On la note  $X'$ . Le second représente l'écart entre la valeur d'équilibre d'une grandeur et sa valeur instantanée *pour un élément de matière donné* et est noté  $\delta X$ .

Ensuite, dans le cadre des oscillations non radiales, on suppose que l'étoile a une structure d'équilibre sphérique. On peut donc réécrire les équations en coordonnées sphériques. Pour ce faire, on décompose tout d'abord le vecteur déplacement comme :  $\delta \vec{r}' = \xi_r \vec{e}_r + \xi_\theta \vec{e}_\theta + \xi_\phi \vec{e}_\phi$ . On aura pour coutume d'appeler les composantes angulaires du vecteur déplacement, la composante horizontale :  $\vec{\xi}_h = \xi_\theta \vec{e}_\theta + \xi_\phi \vec{e}_\phi$ .

Ensuite, on exprime la variation temporelle des grandeurs physiques comme suit :  $X = X(\vec{r}') \sin(\sigma t)$ . Les  $\sigma$  représenteront donc les fréquences d'oscillation propres. On introduit alors ces décompositions dans les équations de l'hydrodynamique perturbées en coordonnées sphériques. De plus, nous profitons du fait que le gradient de la pression n'a de composante que radiale en conséquence de la symétrie sphérique. Nous avons ainsi l'ensemble d'équations suivant :

*La continuité*

$$\frac{\delta \rho}{\rho} + \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \xi_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \xi_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \phi} \right] = 0 \quad (2.1.1)$$

*La conservation de la quantité de mouvement*

$$\sigma^2 \xi_r = \frac{\partial \psi'}{\partial r} + \frac{\rho'}{\rho} \frac{Gm}{r^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial r} \quad (2.1.2)$$

$$\sigma^2 \xi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \psi' + \frac{P'}{\rho} \right) \quad (2.1.3)$$

$$\sigma^2 \xi_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \psi' + \frac{P'}{\rho} \right) \quad (2.1.4)$$

En combinant le mouvement horizontal avec la continuité, on obtient :

$$\frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \xi_r) - \frac{1}{\sigma^2 r^2} \mathcal{L}^2 \left( \psi' + \frac{P'}{\rho} \right) = 0 \quad (2.1.5)$$

Où  $\mathcal{L}^2 = -r^2 \nabla_h^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$  est l'opérateur linéaire appelé le *legendrien*.

L'équation de Poisson

$$\nabla^2 \psi' = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \mathcal{L}^2 \psi' = 4\pi G \rho' \quad (2.1.6)$$

### 2.1.1 Relation adiabatique

Dans le cadre de ce mémoire, on s'intéresse aux oscillations adiabatiques. Ceci est justifié car le temps d'Helmholtz-Kelvin, représentant l'échelle de temps des échanges de chaleur, est nettement supérieur au temps dynamique qui représente l'échelle de temps des oscillations dans la majeure partie de l'étoile :  $t_{HK} \gg t_{dyn}$ . Dès lors, via le théorème du Viriel qui stipule que  $\int_0^M \frac{Gm}{r} dm = 2 \int_0^M u dm$ , on peut montrer que la quantité de chaleur échangée est négligeable par rapport à l'énergie interne de l'étoile. Celui-ci s'exprime alors, en ordre de grandeur, comme  $\frac{GM^2}{R} = 2uM$ . On obtient alors  $t_{HK} = \frac{GM^2}{2RL} \simeq \int_0^M \frac{Gm}{2rL} dm = \frac{\int_0^M u dm}{L} \simeq \frac{uM}{L}$ . Enfin, si  $|dq| = \frac{Lt_{dyn}}{M}$  est l'échange de chaleur au cours d'une oscillation, comme  $t_{HK} \gg t_{dyn}$ , on peut finalement écrire  $|dq| \ll u$ . Les oscillations sont bien adiabatiques.

On a alors, en suivant les variations relatives de pression et densité pour un élément de matière donné au sein de l'étoile pulsante :

$$\frac{d \ln P}{d \ln \rho} = \left. \frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right|_s \equiv \Gamma_1 \quad (2.1.7)$$

Où  $\Gamma_1$  est le coefficient adiabatique. On peut montrer que, pour une grandeur quelconque, on a au premier ordre :  $\delta(\ln X) = \frac{\delta X}{X}$ . Ce qui nous permet d'obtenir la relation adiabatique entre la pression et la densité.

$$\frac{\delta P}{P} = \Gamma_1 \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (2.1.8)$$

### 2.1.2 Séparation de variables

Nous sommes face à un système de 3 équations, auquel s'ajoute la relation adiabatique, pour 4 inconnues. Par ailleurs, nous notons que les variables angulaires ne sont présentes que dans le legendrien et que les différents coefficients présents dans les équations n'ont de dépendance que selon  $r$ . Nous pouvons donc séparer les variables comme suit :

$X'(r, \theta, \phi) = X'(r)F(\theta, \phi)$ . Si nous introduisons cette séparation dans l'équation de Poisson, nous obtenons :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) F(\theta, \phi) - \frac{1}{r^2} \mathcal{L}^2 (F(\theta, \phi)) \psi' = 4\pi G \rho' F(\theta, \phi) \quad (2.1.9)$$

Qui est donc de la forme générale :

$$f(r)F(\theta, \phi) = g(r)\mathcal{L}^2 F(\theta, \phi) \quad (2.1.10)$$

L'égalité n'est possible que si nous avons :

$$\mathcal{L}^2 F(\theta, \phi) = \lambda F(\theta, \phi) \quad (2.1.11)$$

C'est donc un problème aux valeurs propres dont les fonctions propres sont les harmoniques sphériques  $Y_l^m(\theta, \phi) = N P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}$ ,  $P_l^{|m|}$  les fonctions associées de Legendre de degré  $l$  et  $\lambda_l = l(l+1)$  les valeurs propres telles que le problème s'écrit :

$$\mathcal{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \lambda_l Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.1.12)$$

Le problème à résoudre est donc nettement simplifié car il se réduit à un problème unidimensionnel.

Finalement, après remaniement des équations, le système se réécrit comme :

*Mouvement radial*

$$\frac{dP'}{dr} + \rho \frac{d\psi'}{dr} + \frac{g}{c^2} P' = (\sigma^2 - N^2) \rho \xi_r \quad (2.1.13)$$

*Mouvement horizontal et la continuité*

$$\frac{P'}{\rho c^2} \left( 1 - \frac{L_l^2}{\sigma^2} \right) - \frac{l(l+1)}{\sigma^2 r^2} \psi' - \frac{g}{c^2} \xi_r + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \xi_r) = 0 \quad (2.1.14)$$

*Poisson*

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi'}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \psi' = 4\pi G \rho' \quad (2.1.15)$$

Où  $N$  est la fréquence de *Brünt-Väisälä* telle que  $N^2 = \frac{Gm}{r^2} \left( \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right)$  et  $L_l$  la fréquence de *Lamb* telle que  $L_l^2 = \frac{l(l+1)c^2}{r^2}$ .

### 2.1.3 Régime asymptotique

Pour mieux comprendre le comportement des solutions, nous nous plaçons dans le régime asymptotique, c'est à dire pour des ordres radiaux  $n$  élevés, donc des solutions fortement oscillantes<sup>1</sup>. Ceci est justifié car les modes observés sont en général d'ordre élevé. Comme nous nous plaçons à des ordres élevés, la solution oscille fortement et les dérivées des

1.  $n$  représente le nombre de nœuds de la solution dans la direction radiale.

grandeurs l'emportent sur les grandeurs elles-mêmes. Nous négligerons donc ces dernières face aux premières. De plus, nous avons recours à l'approximation de *Cowling* qui nous permet de négliger la perturbation eulérienne du potentiel gravifique. Celle-ci est justifiée car nous sommes dans le régime asymptotique. Nous avons alors l'équation approximative pour le déplacement radial :

$$\frac{d^2\xi_r}{dr^2} + k^2(r)\xi_r \simeq 0 \quad (2.1.16)$$

Avec  $k^2(r) = \frac{\sigma^2}{c^2} \left( \frac{L_l^2}{\sigma^2} - 1 \right) \left( \frac{N^2}{\sigma^2} - 1 \right)$ . C'est un problème de *Sturm-Liouville* qui admet une solution oscillante pour peu que  $k^2 > 0$  ( $\sigma^2 > N^2, L_l^2$  ou  $\sigma^2 < N^2, L_l^2$ ) et une solution évanescence si  $k^2 < 0$ . Il est important de noter que ces comportements oscillants ou évanescents décrivent une évolution spatiale uniquement (l'équation ci-dessus ne présente aucune dépendance temporelle). Ceci met en évidence l'existence de cavités de propagation dans lesquelles les modes peuvent subsister. La Figure 2.1 représente les cavités de propagation calculées par *Christensen-Dalsgaard* en 1996<sup>2</sup> pour un modèle solaire.

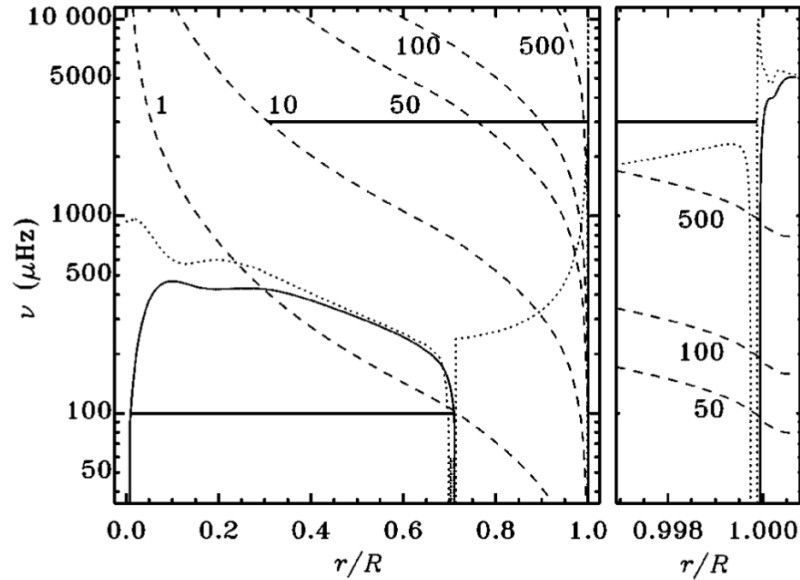


FIGURE 2.1 – Cavités de propagation d'un modèle solaire calculées par *Christensen-Dalsgaard* en 1996. Les lignes discontinues représentent les courbes d'évolution avec le rayon de  $L_l/2\pi$  pour différentes valeurs de  $l$  ; les lignes pointillées  $\omega_c/2\pi$ , l'évolution de la fréquence de cut-off ; la ligne continue  $N/2\pi$  ; et les lignes pleines horizontales représentent les cavités de propagation d'un mode p de fréquence  $3000 \mu Hz$  et d'un mode g de fréquence  $100 \mu Hz$ .

Lorsque la condition  $\sigma^2 \gg N^2, L_l^2$  est validée, nous pouvons réécrire  $k^2(r) \simeq \frac{\sigma^2}{c^2}$  et le problème de Sturm-Liouville auquel nous sommes confrontés admet une *infinité dénombrable* de fréquences propres tendant vers l'infini pour chaque valeur de  $l$  donnée. Ce

2. La version présentée a été trouvée dans un article publié par l'auteur en 2002 [10].

sont les modes p, dits de pression. Ils sont appelés ainsi car la pression agit comme force de rappel dans la production des ondes. En effet, la contraction homologue d'une étoile à l'équilibre hydrostatique conduit à une augmentation de la pression supérieure à celle du poids de la colonne de gaz en un point donné. De même, lors d'une dilatation homologue de cette même étoile, la pression en un point donné diminue plus que le poids de la colonne de gaz en ce même point. Ceci tend alors à ramener l'étoile à sa configuration d'équilibre. On voit ainsi que, dans les deux cas, la pression agit donc comme une force de rappel et on comprend aisément qu'une faible perturbation de la structure d'équilibre conduise à des oscillations.

Lorsque la condition  $\sigma^2 \ll N^2$ ,  $L_l^2$  est validée,  $k$  devient  $k^2(r) \simeq \frac{N^2 L_l^2}{\sigma^2 c^2}$  et le problème de Sturm-Liouville admet cette fois une *infinité dénombrable* de fréquences propres tendant vers zéro<sup>3</sup> pour chaque valeur de  $l$  donnée. Ce sont les modes g, dits de gravité. Ils sont appelés ainsi car c'est la force d'Archimède qui joue ici le rôle de la force de rappel. On peut comprendre le mécanisme responsable des oscillations comme suit. Un élément se trouvant à une profondeur donnée est perturbé et s'élève quelque peu. Celui-ci est alors plus dense que le milieu environnant. La force d'Archimède résultante est alors dirigée vers le bas. Dans le cas présent, le gradient de pression vertical dirigé vers le haut compense la force d'Archimède. Le mouvement vertical est donc de faible amplitude. Par ailleurs, à cause de la création d'un gradient de pression vertical, un gradient de pression horizontal est apparu. Celui-ci conduit à un mouvement oscillatoire horizontal de plus grande amplitude.

Ensuite, pour toute valeur de  $l$  supérieure ou égale à 2, il existe un mode se situant entre les infinités dénombrables de modes p et g, le mode fondamental. Celui-ci est le seul à subsister lorsqu'on est confronté à une sphère de liquide incompressible.

Par ailleurs, à hautes fréquences, en utilisant l'approximation *JWKB*, et en tirant profit de la relation de *Duvall*, il est possible d'obtenir une forme approximative, dite *asymptotique*, des solutions pour  $l \ll n$  :

$$\nu_{n,l} \simeq \left( n + \frac{l}{2} + \frac{1}{4} + \alpha \right) \Delta\nu + (Al(l+1) - \delta_{n,l}) \frac{\Delta\nu_{n,l}^2}{\nu_{n,l}} \quad (2.1.17)$$

Où on peut écrire  $\epsilon = \frac{1}{4} + \alpha$ ,

$$\Delta\nu \simeq \left( 2 \int_0^R \frac{dr}{c} \right)^{-1} \quad (2.1.18)$$

est la grande séparation asymptotique,

$$\delta_{n,l} \simeq -(4l+6) \frac{\Delta\nu}{4\pi^2 \nu_{n,l}} \int_0^R \frac{dc}{dr} \frac{dr}{r} \quad (2.1.19)$$

est la petite séparation asymptotique et on a  $A = \frac{1}{4\pi^2 \Delta\nu} \left[ \frac{c(R)}{R} - \int_0^R \frac{dc}{dr} \frac{dr}{r} \right]$ .  $n$  est l'ordre radial et  $l$  le degré sphérique dénombrant respectivement les nœuds dans la direction radiale

3.  $\sigma^2$  se trouve cette fois au dénominateur dans le problème.



et les lignes de nœuds sur la surface de la sphère. On note ici que l'indice  $m$  présent dans l'expression des harmoniques sphériques n'influe pas dans l'expression des fréquences telle que présentée ci-dessus. Cette dégénérescence sera levée par la rotation mais ces considérations sortent du cadre de ce mémoire. Nous détaillerons plus précisément les déductions que cette formulation permettent d'obtenir quant à la structure interne dans la section 2.2.

On observe grâce à la formulation 2.1.17 que les fréquences présentent un espacement constant dans le régime asymptotique, la grande séparation. Cet espacement est indépendant des ordres radiaux et degrés sphériques. Par ailleurs, celui-ci vaut approximativement le double du temps de propagation d'une onde acoustique depuis la surface jusqu'au centre appelé rayon acoustique. Ainsi, la mesure de celle-ci nous permettra un premier diagnostic quant à la structure interne de l'étoile.

Remarquons cependant que les définitions des grande et petite séparations (2.1.18, 2.1.19) présentées ci-dessus sont valable dans le cadre de la théorie asymptotique. De plus, dans ce cadre, la grande séparation est indépendante de l'ordre radial et du degré sphérique. De manière plus générale, on peut définir leurs pendants locaux, dépendant cette fois de  $n$  et  $l$ , en effectuant des différences entre fréquences et leurs voisines comme suit<sup>4</sup> :

$$\Delta\nu_{n,l} = \nu_{n,l} - \nu_{n-1,l} \quad (2.1.20)$$

$$\delta\nu_{n,l} = \nu_{n,l} - \nu_{n-1,l+2} \quad (2.1.21)$$

## 2.2 Lien avec la structure interne

### 2.2.1 Modes p

On a vu précédemment que, dans le cas des modes p, le nombre d'onde local est donné par  $k(r) \simeq \frac{\sigma}{c(r)}$ . Le spectre de fréquences dépend donc du profil de vitesse du son  $c(r)$  dans l'étoile qui est tel que  $c^2(r) = \Gamma_1 \frac{P(r)}{\rho(r)}$ . Dès lors, la mesure du spectre de fréquences des modes p permettra de sonder le profil de vitesse du son. Il est alors possible de montrer, en profitant de la relation des gaz parfaits, que :

$$c^2 \propto \Gamma_1 \frac{T}{\mu} \quad (2.2.1)$$

Ainsi, la valeur de la vitesse du son donne une indication quant aux valeurs locales du coefficient adiabatique, de la température et du poids moléculaire moyen.

On peut aussi développer une solution locale autour d'un point choisi. Ce qui donne  $\nabla^2 P'(\vec{r}, t) = (k_r^2 + k_h^2) P'(\vec{r}, t)$  où

$$k_r^2 = \frac{\sigma^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (2.2.2)$$

---

4. Les informations pouvant être tirées de ces indicateurs sismiques seront détaillées à la section 2.4.

et

$$k_h^2 = \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (2.2.3)$$

sont les nombres d'onde radial et horizontal.

On remarque immédiatement que  $|\vec{k}|^2 = k_r^2 + k_h^2 = \frac{\sigma^2}{c^2}$ . C'est la relation de dispersion qui revient à supposer que, localement, le front d'onde est plan.  $k$  correspond alors à l'inverse de la longueur d'onde locale de propagation de l'onde acoustique (en vertu de  $c = \nu\lambda$ ). Ensuite, on s'aperçoit que lorsque  $\sigma^2 = L_l^2$ , le nombre d'onde radial s'annule. Ces points sont appelés les points de retournement, ou *turning points* en anglais. C'est à cet endroit que l'onde fait demi-tour d'un point de vue radial. On voit que, plus  $l$  sera grand, moins l'onde sera pénétrante. Dès lors, le sondage de modes différents permet d'accéder à des profondeurs différentes dans l'étoile. On comprend donc tout l'intérêt de l'étude indépendante de différents modes. Il est en effet essentiel que les modes étudiés fournissent des informations indépendantes afin d'obtenir des déductions robustes quant à des régions différentes de l'étoile. Une illustration du concept de turning point est proposée dans la Figure 2.2.

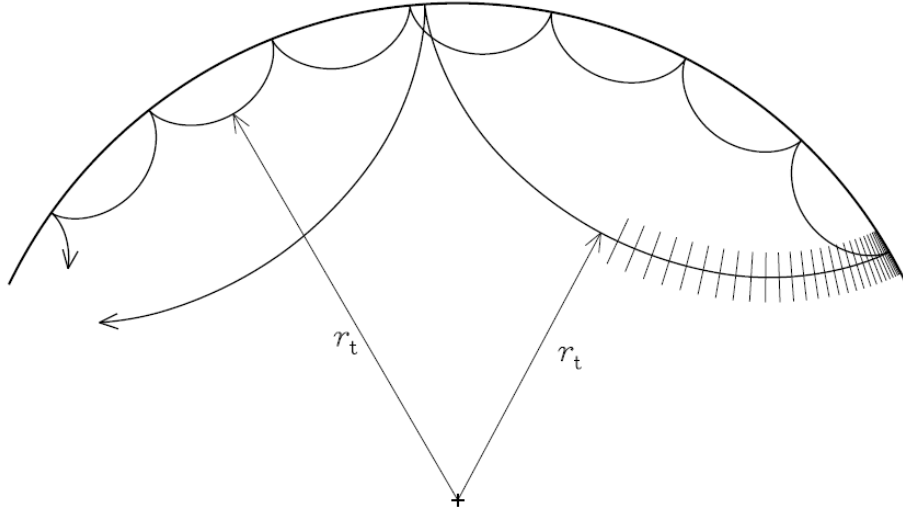


FIGURE 2.2 – Illustration du concept de *turning point*, dénotés  $r_t$ , telle que trouvée dans [6]. On y voit représentés les modes  $l = 30$  (le plus pénétrant) et  $l = 100$  à  $\nu = 3 \text{ mHz}$ .

## 2.2.2 Principe variationnel

En astérosismologie, il est possible de déduire l'effet d'une petite perturbation des conditions physiques sur une solution calculée au préalable. C'est le principe variationnel qui repose sur les propriétés du problème.

Pour y parvenir, nous pouvons tout d'abord exprimer les équations des oscillations adiabatiques de manière générale comme suit :

$$\sigma^2(\xi_r, \xi_h) = \mathcal{L}(\xi_r, \xi_h) \quad (2.2.4)$$

Pour lesquelles l'opérateur  $\mathcal{L}$  est linéaire.

On définit alors le produit scalaire :

$$\left\langle \vec{\xi} \left| \vec{\eta} \right. \right\rangle = \int_V \vec{\xi} \cdot \vec{\eta} \rho dV \quad (2.2.5)$$

Enfin, on définit la fonctionnelle :

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \frac{\left\langle \vec{\xi} \left| \mathcal{L}(\vec{\xi}) \right. \right\rangle}{\left\langle \vec{\xi} \left| \vec{\xi} \right. \right\rangle} \quad (2.2.6)$$

qui, si  $\mathcal{L}$  est auto-adjoint pour le produit scalaire défini plus tôt (c'est notre cas), est stationnaire sur les espaces propres et vaut  $\sigma_i^2$ .

Alors, si l'opérateur  $\mathcal{L}$  est faiblement modifié, i.e. que les coefficients des équations sont changés, on peut obtenir facilement la variation en fréquences induite par rapport au cas non perturbé. En effet, si on écrit  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L}$  et  $\sigma_i = \sigma_{i,0} + \Delta\sigma_i$  les nouvelles valeurs de l'opérateur et des fréquences, on a alors que la variation en fréquences nous est donnée par :

$$\Delta\sigma_i = \frac{\left\langle \vec{\xi}_{i,0} \left| \Delta\mathcal{L}(\vec{\xi}_{i,0}) \right. \right\rangle}{\left\langle \vec{\xi}_{i,0} \left| \vec{\xi}_{i,0} \right. \right\rangle} \quad (2.2.7)$$

L'avantage est que les fonctions impliquées sont les solutions non perturbées. Il n'est donc pas nécessaire de résoudre à nouveau le système d'équations. Le problème est alors nettement plus simple à résoudre.

### 2.2.3 Glitch de l'hélium

On voit de la relation 2.2.1 qu'un changement brusque des quantités  $\Gamma_1$ ,  $T$  ou  $\mu$  au sein de l'étoile aura une influence sur le spectre de fréquences. Ceux-ci sont appelés des *glitches* acoustiques. Les changements brusques peuvent être dus au passage d'une zone convective à une zone radiative pour la température, à un changement brusque de la composition chimique pour le poids moléculaire moyen et au passage par une zone d'ionisation partielle d'un élément donné pour le coefficient adiabatique. Nous nous intéressons ici au changement brusque de  $\Gamma_1$  dû au passage dans une zone d'ionisation partielle de l'hélium. Dans une telle zone, la compression du gaz conduit à une plus faible augmentation de la pression car une partie de l'énergie apportée par la compression est utilisée pour favoriser l'ionisation

au détriment de l'augmentation de température et, ainsi, de pression.  $\Gamma_1$  (Équation 2.1.7) prend alors une valeur plus faible que dans une zone entièrement neutre ou ionisée qui s'apparente à un gaz parfait pour lequel  $\Gamma_1 = \frac{5}{3}$ .

Afin de mieux comprendre l'influence d'une telle variation dans l'apparition du glitch d'hélium, considérons le cas simplifié d'un tuyau d'orgue semi ouvert dans lequel la vitesse du son est variable. Ce cas, bien que purement académique, est particulièrement intéressant car analogue aux oscillations acoustiques au sein d'une étoile unidimensionnelle. Dès lors, il est fort semblable aux cas des oscillations stellaires radiales. Dans une telle configuration, la résolution des équations de l'hydrodynamique nous conduisent à l'équation d'onde pour le déplacement radial suivante :

$$\frac{d}{dr} \left( \Gamma_1 P \frac{d\delta r}{dr} \right) + \sigma^2 \rho \delta r = 0 \quad (2.2.8)$$

Il est possible, en vertu du principe variationnel présenté dans la sous-section 2.2.2 ci-dessus, de montrer qu'une variation brusque d'une de ces quantités introduira une composante oscillante aux fréquences. De fait, le principe variationnel nous dit alors que :

$$\Delta\sigma_n^2 = \frac{\int_0^M \Delta c^2(r) \left( \frac{d\delta r_n}{dr} \right)^2 (r) dm}{\int_0^M \delta r_n^2 dm} \quad (2.2.9)$$

Où  $\delta r_i$  est le déplacement et  $\Delta c^2(r)$  est la perturbation de la vitesse du son. Cette dernière étant très localisée en  $r_0$ , on peut l'assimiler à une distribution delta de Dirac en ce point :  $\Delta c^2(r) = \Delta c^2 \delta(r - r_0)$ . Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\Delta\sigma_n^2 = \frac{\Delta c^2(r_0) \left( \frac{d\delta r_n}{dr} \right)^2 (r_0) M}{\int_0^M \delta r_n^2 dm} \quad (2.2.10)$$

Pour de hautes fréquences,  $k$  et  $n$  sont très élevés et l'approximation *JWKB* est valable. On peut alors exprimer le déplacement comme  $\delta r_n(r) = A c^{\frac{1}{2}} \cos \left( \sigma_n \int_r^R \frac{dr'}{c} \right)$  et sa dérivée  $\frac{d\delta r_n}{dr}(r) \simeq -A c^{-\frac{1}{2}} \sigma_n \sin \left( \sigma_n \int_r^R \frac{dr'}{c} \right)$ . On obtient alors :

$$\Delta\sigma_n^2 \simeq \frac{\Delta c^2(r_0) A^2 M \sigma_n^2 \sin^2 \left( \sigma_n \int_{r_0}^R \frac{dr'}{c} \right)}{A^2 c(r_0) \int_0^M c(r) \cos^2 \left( \sigma_n \int_r^R \frac{dr'}{c} \right) dm} \quad (2.2.11)$$

$$\simeq \frac{\Delta c^2(r_0) A^2 M \sigma_n^2 \left( 1 + \cos \left( 2\sigma_n \int_{r_0}^R \frac{dr'}{c} \right) \right)}{A^2 c(r_0) \int_0^M c(r) \left( 1 - \cos \left( 2\sigma_n \int_r^R \frac{dr'}{c} \right) \right) dm} \quad (2.2.12)$$

Étant donné que nous sommes à hautes fréquences, le terme en cosinus présent au dénominateur oscille rapidement et aura une contribution à l'intégrale faible par rapport à 1. Celle-ci vaudra donc approximativement  $M \langle c \rangle = \int_0^M c dm$ . Enfin, sachant que  $\sigma = 2\pi\nu$ , on a l'expression suivante :

$$\frac{\delta\nu_n}{\nu_n} = \frac{1}{2} \frac{\Delta\sigma_n^2}{\sigma_n^2} = \frac{\Delta c^2(r_0) \left(1 + \cos\left(4\pi\nu_n \int_{r_0}^R \frac{dr'}{c}\right)\right)}{c(r_0) \langle c \rangle} \quad (2.2.13)$$

On comprend donc qu'une composante oscillante sera introduite dans le spectre de fréquence. Cette oscillation représente une variation cyclique de la fréquence par rapport à sa valeur en l'absence de glitch en fonction de la fréquences.

*Houdek et Gough* [22] ont proposé, sur base d'une justification théorique plus rigoureuse, l'expression suivante afin de décrire le glitch dû à la seconde zone d'ionisation de l'hélium dans les étoiles de type solaire :

$$\delta\nu_{n,l} \simeq A_{He} \nu e^{-c_2 \nu^2} \sin(4\pi\tau_{He}\nu + \phi_{He}) \quad (2.2.14)$$

où  $A_{He}$  est l'amplitude du glitch,  $\tau_{He} = \int_{r_{He}}^R \frac{dr}{c}$  sa profondeur acoustique,  $r_{He}$  sa distance au centre,  $\phi_{He}$  sa phase et  $c_2$  représente le taux d'amortissement en fréquence. L'introduction du terme gaussien permet un meilleur accord avec les calculs effectués de manière rigoureuse que l'expression approximative donnée par 2.2.13.

## 2.3 Effets de surface

Il a été montré que lors du calcul des fréquences théoriques d'un modèle donné, il persiste un décalage avec les observations croissant avec la fréquence. Cette différence a alors été prouvée comme trouvant son origine principalement dans les régions les plus superficielles de l'étoile (Voir *Christensen-Dalsgaard, Dappen et Lebreton* [8] par exemple) où les modèles souffrent des plus grandes incertitudes. Ces effets de surface correspondent principalement à une mauvaise modélisation du gradient de température dans la région superadiabatique, la négligence de la pression turbulente ou encore parce que l'interaction entre les oscillations et la convection est très mal décrite.

Enfin, un autre défaut repris dans les effets de surface est le fait que nous travaillons sous l'approximation adiabatique qui n'est plus valable dans les régions superficielles. Dans ces régions non-adiabatiques, le temps thermique est inférieur à la période d'oscillation. En effet, comme la température y est faible (en comparaison avec les régions centrales) et que l'énergie interne vaut approximativement  $u \simeq c_v T$ , avec  $c_v$  la capacité calorifique à volume constant, et que le temps thermique est proportionnel à l'énergie interne, sa valeur est faible dans les régions superficielles. Par ailleurs, dans le contexte non adiabatique, les échelles temporelles des mouvements convectifs sont inférieures à celles des oscillations. Ceci implique alors que la convection peut réagir aux oscillations et un couplage entre les deux phénomènes peut donc apparaître. Il nous faut donc tenir compte des effets non-adiabatiques sur les oscillations dans ces régions.

Des théories ont alors été proposées pour modéliser ce couplage mais elles restent cependant sujettes à de fortes incertitudes. Citons par exemple *Grigahcène, Dupret et al.* en 2005 [21] et [18]. Dès lors, des approches empiriques ont été proposées dans le but de prendre en compte ces effets. Ceci a été fait, entre autres, par *Kjeldsen et al.* en 2008 [25]

et *Ball et al.* en 2014 [2]. Malgré cela, les effets de surface restent une source incontestable d'erreurs dans les modélisations astérosismologiques.

## 2.4 Indicateurs sismiques

Pour conclure les rappels théoriques, voici une liste non exhaustive des différents indicateurs sismiques utilisés en astérosismologie et des informations dont ils sont porteurs. Nous insistons d'ores et déjà sur le fait que ces expressions sont approximatives et que l'information qui en est déduite n'est pas exempte de défauts.

*Grande séparation*

$$\Delta\nu_{n,l} = \Delta_{n,l} = \nu_{n,l} - \nu_{n-1,l} \simeq \left(2 \int_0^R \frac{dr}{c}\right)^{-1} \propto \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \quad (2.4.1)$$

Celle-ci nous permet un sondage de la vitesse du son dans une étoile. En effet, cet indicateur nous informe quant au temps de propagation d'une onde acoustique depuis le centre de l'étoile jusqu'à sa surface. C'est ce qu'on appelle le *rayon acoustique*. Pour être exact, nous obtenons le double du rayon acoustique au travers de cette expression. Par ailleurs, en effectuant des transformations homologues, il est possible de montrer que  $\Delta\nu_{n,l} \propto \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ . La grande séparation est donc principalement porteuse d'une information quant à la densité moyenne  $\bar{\rho}$  de l'étoile.

Cet indicateur représente la première information que nous pouvons obtenir au sujet d'une étoile donnée via l'astérosismologie.

*Petite séparation*

$$\delta_{n,l} = \nu_{n,l} - \nu_{n-1,l+2} \simeq -(4l+6) \frac{\Delta\nu_{n,l}}{4\pi^2\nu_{n,l}} \int_0^R \frac{dc}{dr} \frac{dr}{r} \quad (2.4.2)$$

Nous donne une indication quant au stade évolutif de l'étoile. Effectivement, l'expression précédente (2.4.2) est proportionnelle au gradient de la vitesse du son qui, à son tour est inversement proportionnelle au poids moléculaire moyen  $\mu$ . Ceci signifie alors que, lorsque les réactions nucléaires démarrent au cœur de l'étoile et brûlent 4 atomes d'hydrogène pour en former un d'hélium, le poids moléculaire moyen y augmente. Dès lors, la vitesse du son y diminue et un gradient positif de la vitesse du son est créé. De plus, comme le rayon se trouve au dénominateur de l'intégrand dans l'expression 2.4.2, ce sont les régions centrales qui ont le plus d'importance. Ainsi, la petite séparation est considérablement diminuée. Celle-ci apporte donc un bon indicateur du stade évolutif de l'étoile.

*Petite séparation normalisée*

$$r_{02,n} = \frac{\delta_{n,0}}{\Delta_{n,1}} \quad (2.4.3)$$

Correspond à la petite séparation divisée par la grande. Ceci permet de désensibiliser la petite séparation aux effets de surface tels que la convection qui sont difficiles à traiter. Ceci a été démontré par *Roxburgh* et *Voronstov* en 2003 [32].

*Petit espacement*

$$\delta_{01,n} = \nu_{n,0} - 2\nu_{n,1} + \nu_{n+1,0} \quad (2.4.4)$$

Il permet, entre autres, de distinguer les étoiles à cœur convectif de celles à cœur radiatif par le biais de l'astérosismologie. Nous pouvons, à titre d'exemple, citer  $\alpha$  Centauri, pour laquelle *de Meulenaer* et al. [14] ont calculé en 2010 que la présence d'un cœur radiatif permet un meilleur accord avec les données astérosismologiques que s'il était convectif. Ajoutons qu'il est, de nouveau, préférable de diviser cet indicateur par la grande séparation afin de le désensibiliser aux effets de surface. On définit alors le petit espacement normalisé<sup>5</sup>.

*Petit espacement normalisé*

$$r_{01,n} = \frac{\nu_{n,0} - 2\nu_{n,1} + \nu_{n+1,0}}{\Delta_{n,1}} \quad (2.4.5)$$

*Différence du deuxième ordre*

$$\delta_{2,n,l} = \nu_{n+1,l} - 2\nu_{n,l} + \nu_{n-1,l} \quad (2.4.6)$$

Permet la mise en évidence des glitches.

## 2.5 Représentation des fréquences : diagramme à échelle

Maintenant que les différents indicateurs sismiques sont définis, il est utile d'introduire la notion de *diagramme à échelle*. Un diagramme à échelle permet la représentation des fréquences mesurées (ou calculées dans le cas de modèles).

On y trace les fréquences en fonction d'elles-mêmes modulo la grande séparation. Alors, les fréquences s'organiseront en une série de crêtes, appelées *ridges*, correspondant aux différents degrés sphériques. Via l'Équation 2.1.17 on comprend que deux ridges successifs seront distants d'une petite séparation en fréquences. De même, verticalement, les fréquences d'ordres radiaux successifs seront distantes d'une grande séparation en fréquences.

Cette représentation sera d'une très grande aide dans le diagnostic d'un bon ajustement de nos modèles aux données. En effet, en superposant les diagrammes à échelle observationnel et théorique nous sommes en mesure de vérifier que les fréquences du modèle correspondent bien à celles observées.

---

5. Toujours conformément à [32].

Par ailleurs, ils nous permettent de déceler des phénomènes tels que les glitches qui induisent une oscillation des fréquences le long des ridges.

Enfin, ajoutons que nous pouvons régulièrement rencontrer des diagrammes à échelle où l'axe horizontal correspond aux fréquences divisées par leur grande séparation modulo 1. Ceci revient donc à diviser l'abscisse de la première définition par la grande séparation. Les mêmes déductions peuvent s'effectuer pour les deux variantes du diagramme à échelle. Cependant, l'espacement entre deux ridges successifs ne correspondra pas à la petite séparation ( $\delta\nu_{n,l}$ ) mais à la petite séparation normalisée ( $r_{02,n}$ ).

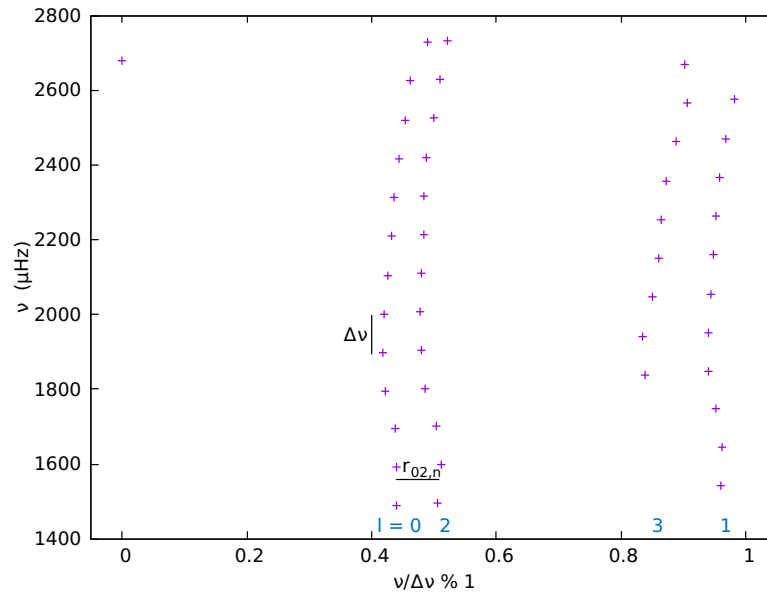


FIGURE 2.3 – Diagramme à échelle obtenu dans le cas de 16 Cygni A.



# Chapitre 3

## Méthodes astérosismologiques

Le but de l'astérosismologie est de tirer profit des informations sismologiques à disposition. Il est alors possible par son biais de sonder la structure interne d'une étoile et d'y contraindre les différents processus physiques qui déterminent cette dernière. Dès lors, des informations inaccessibles à d'autres méthodes peuvent être déduites. C'est le cas, par exemple, du paramètre de longueur de mélange  $\alpha_{conv}$  ou encore de la composition en hélium initiale de l'étoile. Ainsi, c'est là que se situe toute la force de cette discipline car les fréquences d'oscillations observées permettent la déduction immédiate d'informations quant à la structure interne de l'étoile qui n'est évidemment pas accessible à l'observation directe.

On distingue parmi les méthodes astérosismologiques deux familles : les méthodes directes et inverses.

### 3.1 Méthodes inverses

Les méthodes inverses tirent profit du principe variationnel. Celui-ci permet, à partir d'une première solution du problème, de déduire une solution faiblement perturbée.

Grâce au principe variationnel présenté dans la sous-section 2.2.2, nous pouvons déterminer la perturbation des fréquences engendrée par une petite différence d'une des quantités physiques.

De manière pratique, en observant les fréquences d'une cible et en les comparant aux fréquences théoriques d'un modèle supposé proche de la représentation optimale de la cible, on obtient l'écart en fréquence à inverser via le principe variationnel. L'inversion de la relation 2.2.7 nous permet déterminer le profil de variation d'une des quantités physiques conduisant à cette différence par rapport au modèle optimal. Pour ce faire, nous sommes confrontés à une équation intégrale ayant pour inconnues une ou plusieurs fonctions. Cependant, le problème est très mal posé car le nombre de points de mesure ne suffit pas à déterminer une fonction de manière univoque. On combine alors les fréquences considérées afin d'obtenir des informations très localisées. Ces combinaisons servent à former des fonctions que nous appelons noyaux et permettent le sondage en des régions très réduites. La

reconstruction du profil se fait donc au travers d'un ensemble de noyaux judicieusement choisis pour sonder l'étoile sur toute sa profondeur. Le principe variationnel est, dans le cadre des méthodes inverses, exprimé comme suit :

$$\Delta\sigma_i^2 = \sigma_{i,obs}^2 - \sigma_{i,th}^2 = \int_0^R \left( \Delta X(r) K_X^{n,l}(r) + \Delta Y(r) K_Y^{n,l}(r) \right) dr \quad (3.1.1)$$

où  $\Delta X(r)$  et  $\Delta Y(r)$  sont les fonctions inconnues, typiquement  $\frac{\Delta c^2(r)}{c^2(r)}$  et  $\frac{\Delta\rho(r)}{\rho(r)}$ , et  $K_X^{n,l}(r)$  et  $K_Y^{n,l}(r)$  sont les noyaux y étant associés. Ainsi, l'inversion de cette relation donnera accès aux profils de variation de  $X(r)$  et  $Y(r)$  nécessaires pour obtenir l'accord entre la théorie et les observations.

La Figure 3.1 donne un résultat typique d'inversion de la vitesse du son au sein du soleil par *Basu et al.* (1997) [3].

Enfin, il semble évident que, de par le grand nombre de modes que le soleil offre à l'observation, l'héliosismologie est un terrain de choix pour le développement des méthodes d'inversion. Celle-ci est donc particulièrement développée par rapport à l'astérosismologie.

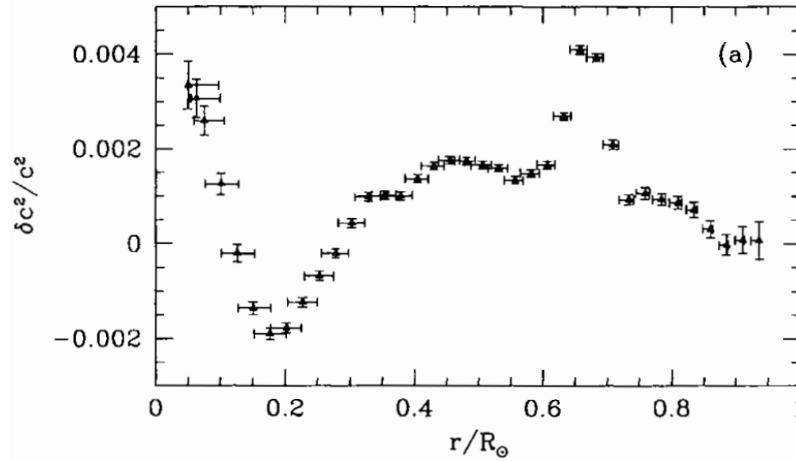


FIGURE 3.1 – Résultat d'inversion la vitesse du son pour un modèle solaire calculé par *Basu et al.* (1997) [3]. Cette différence est la différence relative de vitesse du son nécessaire à l'obtention de l'accord entre la théorie et les observations.

## 3.2 Méthodes directes

Le problème des méthodes inverses est que, bien souvent, nous n'observons pas assez de modes et ne pouvons pas les appliquer facilement. On utilise alors les méthodes directes qui visent à utiliser les fréquences observées comme contraintes. On définit alors une fonction coût, aussi appelée fonction de mérite, représentant l'écart du modèle calculé avec les

observations. Celle-ci comprend aussi bien les contraintes sismiques que non sismiques. Et prend, par exemple, la forme générale :

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(\nu_{th,i} - \nu_{obs,i})^2}{\sigma_i^2} + \sum_\alpha \frac{(b_{th,\alpha} - b_{obs,\alpha})^2}{\sigma_\alpha^2} \quad (3.2.1)$$

Où  $\nu_i$  sont les fréquences,  $b_\alpha$  les autres paramètres (e.g.  $T_{eff}$ ,  $L$ ,...) et  $\sigma_i$  et  $\sigma_\alpha$  les erreurs y étant associées. Notons que nommer  $\chi^2$  la fonction coût consiste généralement en un abus de langage. En effet, celle-ci ne suit une distribution en  $\chi^2$  que si les mesures correspondent à des variables aléatoires indépendantes distribuées selon une loi normale. Ce n'est pas toujours le cas en astérosismologie.

Le but est alors de minimiser la fonction coût afin d'obtenir le jeu de paramètres rendant le mieux compte des observations au sens des moindres carrés. Il existe une variété de méthodes permettant la minimisation de fonctions non linéaires, certaines étant locales, d'autres globales.

Ajoutons que la fonction coût est définie sur un espace de modèles stellaires dont la dimension est finie. Cette dimension correspond alors au nombre de paramètres laissés libres lors de la minimisation. C'est à dire, par exemple, la masse, l'âge, le paramètre de longueur de mélange et la fraction en masse initiale d'hélium de l'étoile.

### 3.3 Méthodes de minimisation

Comme indiqué précédemment, le but du jeu en astérosismologie directe sera de minimiser une fonction dont l'expression analytique nous est inconnue. Il nous faut alors l'évaluer par voies numériques, ce qui a un coût considérable en temps de calcul. En effet, pour l'évaluer, il faut calculer toute la séquence d'évolution de l'étoile jusqu'au point spécifique considéré. Dans le cas du *Code Liégeois d'Évolution Stellaire*, *CLES* [34], ceci peut prendre plusieurs minutes. Avec d'autres codes d'évolution stellaire, cela peut prendre jusqu'à plusieurs heures. C'est donc un facteur limitant important en termes de temps de calcul. Ainsi, la forme analytique de la fonction étudiée n'étant pas accessible, nous sommes contraints d'avoir recours à des méthodes numériques afin d'en déterminer le minimum global. Heureusement, il existe un grand nombre de ces méthodes ayant déjà été éprouvées. Parmi celle-ci, on distingue 2 catégories : les méthodes globales et les méthodes locales.

Les méthodes globales ont l'avantage de rechercher le minimum global de la fonction et ainsi d'assurer que le minimum obtenu est bien celui recherché et non un minimum local dans lequel aurait été piégé l'algorithme de minimisation. Leur défaut est qu'elles demandent des ressources numériques conséquentes et leur convergence peut être relativement longue. On peut citer parmi celles-ci l'*algorithme génétique* et celle dite de *Simulated Annealing*.

Quant aux méthodes locales, comme leur nom le suggère, elles recherchent le minimum local d'une fonction au voisinage d'un point donné. Elles ont alors l'avantage par rapport aux méthodes globales d'être moins gourmandes en ressources et donc de converger plus

rapidement. Néanmoins, celles-ci sont très sensibles au choix du point de départ. Rien ne garantit alors que le résultat (pour peu que l'algorithme ait convergé) soit bien le minimum global. Toute la difficulté de leur utilisation repose dans un choix adapté de conditions initiales permettant la bonne convergence de l'algorithme. Parmi ces méthodes, les plus notables sont l'algorithme de *Levenberg-Marquardt*, la méthode de *la plus grande pente* ou encore la méthode de *Gauss*.

### 3.3.1 Fonction de mérite générale

Dans cette section, nous adopterons la forme générale de la fonction de mérite suivante :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_{obs,i} - y_{th,i}(\vec{a})}{\sigma_i} \right)^2 \quad (3.3.1)$$

Les  $y_{obs,i}$  correspondent aux observations, les  $\sigma_i$  aux erreurs de mesure et  $y_{th,i}(\vec{a})$  au modèle calculé avec le jeu de paramètres  $\vec{a}$ . Nous recherchons donc l'ensemble de paramètres  $\vec{a}$  donnant le meilleur accord avec les observations et minimisant alors la fonction  $\chi^2$ .

### 3.3.2 Méthodes de la plus grande pente et de Gauss

Dans le cadre de ce mémoire, le problème à traiter est hautement non linéaire et nous avons donc choisi d'implémenter la méthode de *Levenberg-Marquardt*. C'est pour cette raison que nous nous attarderons sur celle-ci dans les sous-sections à venir. Mais avant de la présenter, nous devons détailler les méthodes de la plus grande pente et de Gauss dans lesquelles la méthode nous intéressant trouve son origine. En effet, cette dernière consiste en une forme hybride entre ces méthodes.

Dans le présent contexte, nous supposons que la fonction de mérite  $\chi^2$  prend, de manière approximative, une forme quadratique à proximité de ses minimas. En adoptant les notations du *Numerical Recipes* [29] (eq. 14.4.2 p521), cette forme est la suivante :

$$\chi^2 \sim \gamma - \vec{d} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{a} \quad (3.3.2)$$

Où  $\vec{d}$  est un vecteur de longueur  $M$ ,  $\vec{a}$  le vecteur comprenant les valeurs actuelles des  $M$  paramètres,  $\mathbf{D}$  une matrice carrée de dimension  $M$  et  $\gamma$  une constante.

Tout d'abord, plaçons nous dans le cas où l'approximation par une forme quadratique 3.3.2 est valable. Si nous calculons le gradient de la fonction au point actuel et au minimum (sachant que sa valeur doit y être nulle) et que nous prenons la différence entre ces deux valeurs on obtient la forme suivante permettant d'atteindre directement le minimum :

$$\vec{a}_{min} = \vec{a}_i + \mathbf{D}^{-1} \left( -\vec{\nabla} \chi^2(\vec{a}_i) \right) \quad (3.3.3)$$

Cette formulation est celle de *Gauss* ou encore de la *matrice Hessienne inverse* car il se trouve que la matrice  $\mathbf{D}$  correspond bien à la matrice Hessienne. Partant de cette

formulation, il est possible d'implémenter la méthode de minimisation itérative dite de *Newton-Raphson*. C'est alors les racines du gradient de la fonction de mérite qui sont recherchées car celles-ci correspondent aux différents minimums. La grande force de cette méthode est qu'elle converge de manière quadratique [29]. Cependant, cette méthode a pour inconvénient de présenter certains problèmes de convergence lorsqu'elle se retrouve confrontée à une fonction présentant plusieurs minimums locaux, ou vallées, ou n'étant pas lisse. Par ailleurs, la convergence quadratique n'est pas toujours assurée. En effet, l'évaluation des dérivées présentes dans l'expression 3.3.3 représente un facteur limitant important quant au taux de convergence. Leur évaluation par le biais de différences finies 3.3.4<sup>1</sup> conduit à deux évaluations de la fonction par itération et donc à un taux de convergence d'ordre  $\sqrt{2}$ , au mieux.

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \quad (3.3.4)$$

Enfin, notons que le choix du  $dx$  est primordial car une valeur trop petite conduira à la prépondérance des erreurs d'arrondi alors qu'une valeur trop grande rendra la convergence linéaire.

Par ailleurs, dans un cas tout à fait général, l'approximation quadratique n'est pas correcte et ne permet donc pas d'aller directement à la solution. Le meilleur choix est donc de suivre le gradient (ou plutôt son opposé) afin de se diriger vers le minimum *local*<sup>2</sup> le plus proche. Alors, la prochaine estimation des paramètres optimaux est la suivante :

$$\vec{a}_{i+1} = \vec{a}_i - p \vec{\nabla} \chi^2(\vec{a}_i) \quad (3.3.5)$$

Cette égalité est appelé la *formule de la plus grande pente*, où  $p$  est un paramètre dont la taille est ajustée d'une itération à l'autre de telle sorte à ne pas dépasser le minimum.

On comprend aisément que, lorsque l'approximation 3.3.2 n'est pas suffisante, nous prenions seulement un pas dans la direction descendante afin de nous approcher du minimum. Il est cependant important que la taille du pas dans cette direction n'excède pas le minimum sous peine de s'en éloigner à nouveau. Toute la difficulté du problème réside alors dans le choix de la taille du pas, donc du paramètre  $p$ .

Il reste essentiel de noter que la méthode de la plus grande pente a pour avantage premier, lorsque que le pas est choisi judicieusement, d'assurer la convergence vers un minimum local. Néanmoins, celle-ci est nettement plus lente que dans le cas de la méthode de Gauss.

Enfin, si nous notons  $\beta_k \equiv -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi^2}{\partial a_k}$ , l'opposé de la moitié de la composante  $k$  du gradient, et  $\alpha_{kl} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_k \partial a_l}$ , la moitié de la composante  $kl$  de la matrice hessienne de  $\chi^2$ , on peut réécrire les équations de Gauss 3.3.3 et de la plus grande pente 3.3.5 comme :

1. La méthode implémentée dans le cadre de ce mémoire.

2. Il est important de remarquer que les méthodes de minimisation locales (et donc celle de Levenberg-Marquardt) ne permettent que la recherche de minimas locaux et sont donc fort tributaires des conditions initiales. Ce point sera évoqué dans la sous-section 3.5.6.

$$\sum_{l=1}^M \alpha_{kl} \delta a_l = \beta_k \quad (3.3.6)$$

Et

$$\delta a_l = p \beta_l \quad (3.3.7)$$

Où  $\delta a_l$  est la différence entre les nouvelle et ancienne valeurs du vecteur de paramètres  $a$ . C'est sous cette forme matricielle qu'elles seront utilisées.

Ajoutons pour terminer que dans le cadre de ces méthodes, nous n'utiliserons pas la forme exacte de la matrice hessienne mais négligerons les termes comprenant les dérivées secondes du modèle à ajuster car ceux-ci tendent à s'annuler et leur inclusion peut avoir un effet déstabilisant. Dès lors, nous obtenons la forme suivante :

$$\alpha_{kl} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left[ \frac{\partial y_{th,i}(\vec{a})}{\partial a_k} \frac{\partial y_{th,i}(\vec{a})}{\partial a_l} - (y_{obs,i} - y_{th,i}(\vec{a})) \frac{\partial^2 y_{th,i}(\vec{a})}{\partial a_k \partial a_l} \right] \quad (3.3.8)$$

$$\simeq \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left[ \frac{\partial y_{th,i}(\vec{a})}{\partial a_k} \frac{\partial y_{th,i}(\vec{a})}{\partial a_l} \right] \quad (3.3.9)$$

### 3.3.3 Algorithme de Levenberg Marquardt

La méthode de *Levenberg-Marquardt* est en fait un compromis entre les deux méthodes proposées plus tôt. Effectivement, comme indiqué dans la sous-section précédente, la méthode de la plus grande pente a pour énorme avantage de toujours converger vers un minimum local mais de manière relativement lente. Alors que la méthode de Gauss converge de manière quadratique au mieux mais la convergence n'est pas assurée. On comprend ainsi l'intérêt d'un compromis entre ces deux méthodes afin d'obtenir une convergence efficace. En pratique, le passage d'une méthode à l'autre sera contrôlé par un paramètre  $\lambda$ . Si sa valeur est élevée, l'algorithme tend vers l'algorithme de la plus grande pente. Tandis que, pour de faibles valeurs de  $\lambda$ , c'est la forme de Gauss qui domine.

Avant de donner la forme explicite de l'algorithme, il nous faut estimer le paramètre  $p$  de l'Équation 3.3.5. Pour ce faire, on remarque que, sachant que  $\chi^2$  est adimensionnel,  $\vec{\nabla}_k \chi^2(\vec{a}_i)$ , la composante  $k$  du gradient, a les dimensions de  $\frac{1}{a_k}$  où  $a_k$  est une composante du vecteur des paramètres. De plus, compte tenu de cette même équation, le paramètre  $p$  doit avoir les dimensions de  $a_k^2$  afin de pouvoir avoir l'égalité. Seul l'inverse de l'élément  $kk$  de la matrice Hessienne a ces dimensions. Il nous servira donc d'estimateur du paramètre  $p$  pour la composante  $k$ . Néanmoins, cette estimation ne concerne que la dimension du pas qui peut être trop grande. On ajoute donc un paramètre de contrôle  $\lambda$  permettant de réduire considérablement la taille du pas si nous approchons du minimum. Le pas sera donc donné par  $p = \frac{1}{\lambda \alpha_{kk}}$ .

On peut alors écrire l'Équation 3.3.5 comme :

$$\delta a_k = \frac{1}{\lambda \alpha_{kk}} \beta_k \quad (3.3.10)$$

Nous notons ici que nous ne sommes pas en présence de la forme exacte de la méthode de la plus grande pente étant donnée la dépendance de  $p$  en la composante du gradient évaluée. Néanmoins, en vertu de l'Équation 3.3.8, la positivité de  $p$  ainsi que la convergence sont assurés.

Enfin, en redéfinissant la matrice  $\alpha$  comme (avec le delta de Kronecker  $\delta_{jk}$ ) :

$$\alpha'_{jk} = \alpha_{jk}(1 + \delta_{jk}\lambda) \quad (3.3.11)$$

il est possible de combiner les deux méthodes présentées ci-dessus. Nous obtenons alors le système suivant à résoudre :

$$\sum_{l=1}^M \alpha'_{kl} \delta a_l = \beta_k \quad (3.3.12)$$

On voit donc immédiatement que, si  $\lambda$ , le paramètre de contrôle, prend une valeur élevée, c'est la diagonale de la matrice  $\alpha'_{kl}$  qui domine et l'équation se ramène au cas de la plus grande pente. Inversement, au fur et à mesure que le paramètre de contrôle faiblit, les termes non diagonaux prennent de l'importance et on tend vers la méthode de Gauss.

L'algorithme procédera alors de la façon suivante :

1. Étant donnée une première estimation des paramètres optimaux, calculer  $\chi^2$ ,
2. Choisir une valeur relativement faible de  $\lambda$ ,
3. Résoudre le système 3.3.12,
4. Évaluer le nouveau  $\chi^2$ ,
  - Si la nouvelle valeur est plus faible, diminuer  $\lambda$  et mettre à jour la valeur des paramètres,
  - Si la nouvelle valeur est plus grande, augmenter  $\lambda$  en conservant le jeu de paramètres,
5. Retourner à l'étape 3.

Enfin, celui-ci s'arrêtera lorsqu'il remplira une condition de notre choix. Typiquement, lorsque les variations successives de  $\chi^2$  seront plus faibles qu'un certain seuil ou que le nombre d'itérations maximal sera atteint. Cependant, il est important de ne jamais arrêter d'itérer si la fonction de mérite a augmenté car cela signifie que le paramètre  $\lambda$  n'a pas encore convergé vers une valeur optimale.

Par ailleurs, une fois la convergence atteinte, il est possible d'obtenir la matrice de covariance du vecteur des paramètres en prenant l'inverse de la matrice  $\alpha$ . Prendre la racine carrée de ses composantes diagonales nous informera quant aux incertitudes, écarts types, associés à la détermination de chacun des paramètres. Indiquons cependant que l'inverse de la matrice  $\alpha$  n'est la matrice de covariance que dans le cas d'une distribution normale des variables indépendantes. Sinon, c'en est le meilleur estimateur.

Pour conclure avec le principe de l'algorithme de Levenberg-Marquardt, il est nécessaire de remarquer que celui-ci nécessite une connaissance des dérivées de la fonction à ajuster. Dans notre cas, sa forme analytique n'est pas connue et nous devons donc l'estimer numériquement. En ceci consiste donc une source d'erreurs possibles dont il faut être conscient.

Dans notre cas, nous avons approximé les dérivées via la méthode des différences finies qui consiste à mesurer la pente d'un segment de droite entre deux points très proches.

### 3.4 Traitement du glitch par Verma et al. [38]

Maintenant que les méthodes de minimisation ont été présentées, nous pouvons nous intéresser au traitement des glitches acoustiques. Notre point de départ sera l'article de *Verma et al.* (2014) [38]. Dans celui-ci, ils proposent une expression analytique simplifiée tenant compte de l'oscillation en fréquences causée par le glitch d'hélium ainsi que de celle due à la zone de convection :

$$f(n, l) = \sum_{k=0}^4 A_{k,l} n^k + A_{He} \nu e^{-c_2 \nu^2} \sin(4\pi \tau_{He} \nu + \phi_{He}) + \frac{A_{CZ}}{\nu^2} \sin(4\pi \tau_{CZ} \nu + \phi_{CZ}) \quad (3.4.1)$$

Le premier terme correspond à la composante lisse du spectre de fréquences représentée par un polynôme d'ordre 4 en l'ordre radial  $n$ . À chaque degré sphérique  $l$  est associé un de ces polynôme. Les coefficients de ceux-ci sont contenus dans la matrice  $\mathbf{A}$  de dimensions  $5 \times (l_{max} + 1)^3$ . De manière générale, en photométrie, le degré sphérique observé le plus élevé,  $l_{max}$ , vaut 3. Ils notent alors ce polynôme  $P_l(n)$ . Ensuite, le second terme représente le glitch de l'hélium. Le coefficient  $A_{He}$  en est l'amplitude,  $\tau_{He}$  la profondeur acoustique,  $\phi_{He}$  la phase et  $c_2$  le taux d'amortissement en fréquences. Enfin, le dernier terme rend compte du glitch de la zone convective. Les coefficients dénotés par l'indice  $CZ$  ont la même signification que pour le glitch de l'hélium.

Ils définissent alors la fonction de mérite :

$$\chi^2 = \sum_{n,l} \left( \frac{\nu_{n,l} - f(n, l)}{\sigma_{n,l}} \right)^2 + \lambda_c^2 \sum_{n,l} \left( \frac{d^2 P_l(n)}{dn^2} \right)^2 \quad (3.4.2)$$

où le second terme est un terme de lissage et  $\lambda_c^2$  est la constante de lissage à choisir en fonction de l'importance que nous souhaitons accorder au lissage. Plus la valeur de cette dernière sera grande, plus le lissage sera important et le résultat proche d'une ligne droite.

Une fois les paramètres du glitch obtenus, ils peuvent alors rechercher le modèle théorique permettant de représenter au mieux les fréquences observées pour 16 cygni A afin d'en tirer l'abondance d'hélium associée. Pour ce faire, ils définissent une fonction coût sur les fréquences uniquement et réalisent la minimisation sur une grille de modèles calculés. Cette fonction coût est donnée ci-dessous.

$$\chi_\nu^2 = \frac{1}{N} \sum_i^N \left( \frac{\nu_{obs} - \nu_{mod}}{\sigma_{obs}} \right)_i^2 \quad (3.4.3)$$

Où la somme se fait sur les  $N = 12$  modes radiaux observés pour 16 Cyg A et B,  $\nu_{obs}$  sont les fréquences observées,  $\sigma_{obs}$  les erreurs observées et  $\nu_{mod}$  les fréquences du modèle considéré.

---

3. Compte tenu du fait que le mode radial est associé au degré sphérique  $l = 0$ .



Par ailleurs, pour améliorer leurs résultats et contraindre certains paramètres tels que l'âge de l'étoile, Verma et al. définissent une fonction coût hybride prenant en compte les fréquences ainsi que les paramètres à ajuster tels que l'âge, la petite et la grande séparation.

Le principal défaut de cette méthode est l'utilisation conjointe de différentes fonctions coût définies avec les mêmes fréquences. Ceci a pour conséquence que les indicateurs utilisés ne sont alors pas indépendants et l'estimation de leurs poids respectifs dans la sélection de l'ensemble de modèles final est impossible. Ce sera donc le premier point auquel nous tenterons de pallier.

Un second défaut évident est que la correspondance entre la formulation 3.4.1 et 2.2.14 n'est pas évidente et les déductions quant à la structure interne sont d'autant plus difficiles. Ensuite, les différents paramètres présents dans la fonction coût 3.4.3 sont fortement corrélés. En effet, les modes p observés sont d'ordre radial élevé et nous trouvons alors dans le régime asymptotique. La formulation 2.1.17 est alors valable. On voit donc aisément que les valeurs de fréquences successives ne sont pas indépendantes comme elles sont reliées par la grande séparation (Équation 2.4.1). Alors, il semble peu judicieux d'utiliser les fréquences brutes comme contraintes. Dès lors, nous pourrions les remplacer par des combinaisons adéquates telles que la grande séparation ou encore la grande séparation moyennée sur les degrés sphériques.

## 3.5 HeFi : Notre ajustement du glitch

Comme indiqué précédemment, les contraintes utilisées lors du traitement du glitch ne sont pas indépendantes et le résultat n'est pas simple à mettre en lien avec la formulation asymptotique. Ainsi, notre but était de partir de ce que *Verma et al.* [38] ont déjà réalisé dans leur article et d'essayer de palier à ces défauts.

### 3.5.1 Point de départ

Tout d'abord, étant donné que le glitch de la zone convective est d'amplitude négligeable par rapport à celle du glitch de l'hélium, nous n'en tiendrons pas compte dans le cadre de ce mémoire. Ainsi, nous aurons l'expression suivante à ajuster pour les fréquences :

$$\nu_{n,l} \simeq \sum_{k=0}^4 A_{k,l} n^k + A_{He} \nu e^{-c_2 \nu^2} \sin(4\pi \tau_{He} \nu + \phi_{He}) \quad (3.5.1)$$

L'amplitude du glitch pouvant être complexe, nous la décomposerons par la suite en ses parties réelle  $\mathcal{R}_{He}$  et imaginaire  $\mathcal{I}_{He}$ .

La formulation précédente sera notre point de départ.

### 3.5.2 Obtention de contraintes indépendantes

Le premier problème de la méthode proposée par *Verma et al.* est qu'ils utilisent plusieurs fonctions de mérite distinctes simultanément. Ceci rend une interprétation des poids

relatifs de chaque indicateur impossible. En effet, ils considèrent la composante lisse du glitch comme parasite et visent à s'en débarrasser afin d'isoler le glitch seulement. Le résultat est donc la définition de plusieurs fonctions coût. De plus, ils perdent toute l'information dont celle-ci est porteuse. Dès lors, nous utiliserons une fonction de mérite unique<sup>4</sup> afin de traiter simultanément composantes lisse et oscillante. Nous serons alors en mesure de déduire de la composante lisse des informations quant à la structure interne de l'étoile. Cette définition unique est un point central dans ce travail.

Ensuite, l'utilisation de contraintes corrélées est un second défaut à prendre en compte. Pour améliorer ceci, nous procédons en deux étapes. Tout d'abord, nous traitons uniquement l'effet de la composante lisse de la formulation 3.5.1 via une orthogonalisation de Gram-Schmidt. Ainsi, les différents paramètres obtenus seront tout à fait indépendants. Ensuite, en prenant pour point de départ le résultat de l'ajustement de la composante lisse, nous ajusterons la fonction complète décrite par l'Équation 3.5.1.

Remarquons déjà que le fait de réaliser un ajustement complet de la fonction n'est peut-être pas un choix très judicieux car nous perdons l'avantage procuré par l'orthogonalisation à la première étape. Nous y reviendrons à la sous-section 3.5.7.

### 3.5.3 Ajustement de la composante lisse

Pour traiter la composante lisse décrite par les polynômes de degré 4 de l'expression 3.5.1, nous définissons une fonction de mérite spécifique à celle-ci :

$$\chi^2 = \sum_{n,l} \left( \frac{\nu_{n,l} - \sum_{k=0}^4 A_{l,k} n^k}{\sigma_{n,l}} \right)^2 + \lambda_c^2 \sum_{n,l} \left( \sum_{k=2}^4 A_{l,k} k(k-1) n^{k-2} \right)^2 \quad (3.5.2)$$

Où les  $\sigma_{n,l}$  sont les erreurs de mesure de la fréquence  $\nu_{n,l}$  et  $\lambda_c^2$  est un terme de lissage analogue à celui défini par *Verma et al.*. On retrouve alors dans ce dernier l'expression des dérivées seconde des polynômes. Ce terme de lissage influe alors sur la fonction à minimiser. En effet, lorsqu'il est faible, on tend vers un ajustement par moindres carrés classique. Alors que, lorsque  $\lambda_c$  prend des valeurs importantes, on s'approche d'un ajustement des fréquences à une ligne droite. Par ailleurs, le but de ce terme est une stabilisation des ajustements. Ceci a été montré par Verma et al. [38]. On comprend cette stabilisation comme suit. D'une part, lorsque sa valeur est très faible (voire nulle), le polynôme étant de degré 4, il oscille fortement<sup>5</sup>. Dès lors, la composante lisse absorbe une grande partie du glitch. Cependant, nous souhaitons représenter au maximum le glitch par sa composante oscillante. Il est donc intéressant de prendre une valeur plus importante du lissage afin de minimiser la dérivée seconde du polynôme et donc son caractère oscillant. D'autre part, lorsque sa valeur est trop grande, on inhibe le caractère oscillant du polynôme et notre ajustement tend vers celui d'une droite. La figure du glitch ne comportera alors plus

4. Voir la sous-section 3.5.3 pour sa définition.

5. Il peut avoir jusqu'à 4 racines.

qu'une bosse représentative de la courbure des ridges dans les diagrammes à échelle. Une illustration de ce comportement est donnée dans la Figure 4.12 où nous représentons la figure du glitch obtenue pour différentes valeurs de  $\lambda_c$ .

Cette expression peut ensuite être réécrite sous une forme standard comme suit :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - \sum_{j=1}^M a_j X_{j,i}}{\sigma_i} \right)^2 \quad (3.5.3)$$

avec  $y_i$  correspondant aux  $\frac{N}{2}$  fréquences et  $X_{i,j} = n_i^{k_j}$  pour  $i \leq \frac{N}{2}$  et  $y_i = 0$ ,  $X_{i,j} = k_j(k_j - 1)n_i^{k_j-2}$  et  $\sigma_i = \lambda_c^{-1}$  pour  $i \geq \frac{N}{2}$ .

Comme nous recherchons le minimum de la fonction  $\chi^2$ , la procédure est nettement plus simple que celle présentée dans la sous-section 3.3.3 car les dépendances en les paramètres  $a_j$  sont linéaires. Alors, si nous définissons le produit scalaire comme suit <sup>6</sup> :

$$\langle X_j | X_k \rangle \equiv \sum_{i=1}^N \frac{X_{j,i} X_{k,i}}{\sigma_i^2} \quad (3.5.4)$$

Nous pouvons écrire les éléments de matrice du système d'équations minimisant la fonction, c'est à dire respectant l'égalité  $\vec{\nabla} \chi^2 = 0$ , comme suit :

$$\zeta_{k,j} = \langle X_j | X_k \rangle \quad , \quad \eta_k = \langle y | X_k \rangle \quad (3.5.5)$$

L'annulation du gradient de  $\chi^2$  se réécrit alors sous la forme suivante qui est le système d'équations à résoudre :

$$\sum_{j=1}^M \zeta_{k,j} a_j = \eta_k \quad (3.5.6)$$

Pour des variables aléatoires  $y_i$  indépendantes, la matrice  $\zeta_{k,j}$  sera l'inverse de la matrice de covariance des paramètres minimisant la fonction de mérite. On comprend là tout l'intérêt de procéder à une orthogonalisation au préalable. Cette matrice correspond alors à l'identité et es paramètres seront alors indépendants.

Détaillons maintenant la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt dont nous avons fait usage. Pour rappel, celle-ci consiste en des projections successives des vecteurs de base sur la nouvelle base afin de les rendre orthonormés. Nous obtenons alors la base orthonormée des polynômes  $\{Z_{l,k_0}\}$  de degré  $k_0$  et  $V_{l,k,k_0}$  la matrice de transformation de la base des polynômes de degré  $k$  à la base orthonormée de polynômes de degré  $k_0$ . Nous les définissons comme suit :

$$Z_{l,0} \equiv \frac{1}{\|P_0\|} = V_{l,0,0} \quad (3.5.7)$$

---

6. Attention à ne pas confondre avec la définition dans le cadre du principe variationnel 2.2.5. À compter de ce point, nous utiliserons la nouvelle définition.

$$Z_{l,k_0} = \sum_{k=0}^{k_0} V_{l,k,k_0} n^k \quad (3.5.8)$$

Les fréquences de la partie lisse sont alors obtenues par projections successives sur les polynômes orthonormés d'ordre croissant. Si nous notons les monômes de degré 0 à 4  $P_k$  et les polynômes orthonormés pour un degré sphérique  $l$  donné  $q_{l,k}$ ,  $k$  allant de 0 à 4, nous écrivons cette projection comme suit :

$$q_{l,k_0} \equiv P_{k_0} - \sum_{k=0}^{k_0-1} \langle P_{k_0} | q_{l,k} \rangle \cdot q_{l,k} \quad \text{avec} \quad q_{l,k} = \frac{Q_{l,k}}{\|Q_{l,k}\|} \quad (3.5.9)$$

Le gros avantage d'une telle façon de procéder est que, si nous souhaitons approximer la composante lisse par un polynôme d'ordre inférieur à 4, nous pouvons le faire en regardant uniquement les coefficients des ordres d'intérêt. Ceci est possible uniquement grâce au fait que nous avons orthonormé notre base et projeté sur les ordres de manière croissante.

L'expression de l'ajustement de la composante lisse des fréquences est alors :

$$\nu_s(n, l) = \sum_{k=0}^4 a_{l,k} Z_{l,k} \quad (3.5.10)$$

Avec cette expression, il est possible d'établir le lien avec ceux de la composante lisse donnée par l'Équation 2.2.14. Cela est possible au travers du fait que la projection se fait par ordres croissants.

Par exemple, nous calculons aisément<sup>7</sup> que le premier terme de cette expression est :

$$a_{l,0} Z_{l,0} = \frac{\sum_n \nu_{n,l} / \sigma_{n,l}^2}{\sum_n 1 / \sigma_{n,l}^2} \quad (3.5.11)$$

Ceci représente alors l'ajustement des fréquences d'un même degré sphérique par un terme constant. C'est donc la moyenne sur les degrés radiaux des fréquences à un degré sphérique donné. De même, nous avons l'expression au premier degré :

$$a_{l,0} Z_{l,0} + a_{l,1} Z_{l,1} = a_{l,0} V_{l,0,0} + a_{l,1} (V_{l,0,1} + V_{l,1,1} n) \quad (3.5.12)$$

Où le coefficient de  $n$  ( $a_{l,1} V_{l,1,1}$ ) représente la pente de la droite ajustant au mieux les données au sens des moindres carrés. Il nous servira donc d'estimateur pour la grande séparation. Nous reviendrons sur l'utilité de ces deux expressions à la section 4.1.

Par ailleurs, ajoutons que, les paramètres ajustés étant indépendants grâce à cette orthogonalisation, les indicateurs sismiques qui en sont déduits le sont eux aussi. C'est donc d'un intérêt primordial dans la réalisation de nos ajustements.

7. Au vu des définitions du produit scalaire 3.5.4 et de  $Z_{l,k}$  3.5.8 ainsi qu'en tenant compte du fait que  $a_{l,k}$  représente la projection de  $\nu_{n,l}$  sur  $Z_{l,k}$ .

### 3.5.4 Ajustement de la fonction complète

Une fois la composante lisse ajustée, nous pouvons ajuster la fonction dans son intégralité. Nous écrivons alors le  $\chi^2$  correspondant :

$$\chi^2 = \sum_{n,l} \left( \frac{\nu_{n,l} - \sum_{k=0}^4 A_{l,k} Z_{l,k} - \nu e^{-c_2 \nu^2} (\mathcal{R}_{He} \cos(4\pi \tau_{He} \nu) + \mathcal{I}_{He} \sin(4\pi \tau_{He} \nu))}{\sigma_{n,l}} \right)^2 + \lambda_c^2 \sum_{n,l} \left( \sum_{k=2}^4 \frac{d^2 Z_{l,k}}{dn^2} \right)^2 \quad (3.5.13)$$

Remarquons qu'après résolution du système pour cette nouvelle fonction coût, nous n'aurons plus l'identité pour matrice de covariance car nous orthogonalisons seulement sur l'espace des polynômes tandis que nous effectuons un nouvel ajustement aussi bien sur la composante lisse que la composante oscillante non-linéaire du spectre.

Les paramètres à ajuster ne sont plus uniquement présents de manière linéaire dans l'expression. Dès lors, nous faisons appel à la méthode de *Levenberg-Marquardt* présentée à la sous-section 3.3.3.

### 3.5.5 Précisions quant aux notations

Pour plus de clarté, nous détaillons ici quelque peu les notations utilisées quant aux paramètres à ajuster.

Nous notons :

- $a_{l,k}$  si nous faisons référence uniquement aux paramètres de la composante lisse.  $l$  est le degré de l'harmonique sphérique et  $k$  le degré du polynôme orthonormé.
- $a(i)$  si nous faisons référence au jeu de 24 paramètres à ajuster incluant la composante lisse et les 4 paramètres du glitch.

Nous avons ensuite ordonné les paramètres de telle sorte à avoir la relation entre les deux séries d'indices :

- $a(1) = \mathcal{R}_{He}$
- $a(2) = \mathcal{I}_{He}$
- $a(3) = c_2$
- $a(4) = \tau_{He}$
- $a(5l + k + 5) = a_{l,k} \forall l = 0, 3 \ \& \ k = 0, 4$

### 3.5.6 Détermination des conditions initiales

Comme précisé dans la sous-section 3.3.3, la méthode de Levenberg-Marquardt converge efficacement pour peu que l'hypothèse initiale sur les paramètres optimaux soit suffisamment proche de leurs valeurs optimales. Ainsi, toute la difficulté de la réalisation d'un algorithme convergeant de manière automatique lorsque présenté à une étoile de type solaire

réside dans le choix optimal des conditions initiales. Dans notre cas, seuls les paramètres de la composante oscillante posent une difficulté. En effet, l'estimation initiale des paramètres de la composante lisse est obtenue par projection sur la base des polynômes orthonormée calculée via le processus de Gram-Schmidt. Ceci est un problème numérique très stable ne posant pas de réel problème.

Dès lors, nous nous sommes tout particulièrement intéressés à la détermination optimale des conditions initiales pour la composante oscillante. Tout d'abord, nous avons procédé par essai erreur afin d'obtenir une série de paramètres optimaux pour un ensemble de modèles de type solaire. Les ordres de grandeurs furent estimés sur base d'ajustements ayant déjà été réalisés dans le cas de 16 Cygni A. Ceci étant fait, nous avons moyenné les valeurs individuelles de chaque paramètre dans le but de les utiliser comme conditions initiales pour l'algorithme. Cette première hypothèse, bien que fort approximative, permet d'obtenir de bons résultats pour les termes  $\mathcal{R}_{He}$  et  $\mathcal{I}_{He}$  car l'Équation 3.5.1 est linéaire en ceux-ci. Néanmoins, pour ce qui est des paramètres  $\tau_{He}$  et  $c_2$ , la tâche est moins aisée car l'équation est non-linéaire en ceux-ci et donc très sensible à de petites différences. Tout spécialement dans le cas de  $c_2$  qui est en argument d'une exponentielle.

En ce qui concerne l'estimation de  $\tau_{He}$ , une façon simple de procéder est de calculer la valeur de l'intégrale de la vitesse du son jusqu'à la seconde zone d'ionisation partielle de l'hélium car c'est en effet ce que représente ce paramètre, la profondeur acoustique du glitch de l'hélium<sup>8</sup>. La seconde zone d'ionisation de l'hélium est alors caractérisée par la seconde déplétion du coefficient adiabatique. Il suffit donc de rechercher le deuxième minimum de celui-ci en partant de la surface. Cette estimation est assez aisée car le code liégeois d'évolution stellaire, *CLES*, nous donne un accès direct à ces grandeurs. Dès lors, pour un modèle théorique donné, il est possible d'avoir une estimation rapide de ce paramètre.

La Figure 3.2 représente l'évolution de  $\Gamma_1$  dans les régions les plus superficielles. Nous ne traçons pas les régions les plus profondes car elles ont peu d'intérêt dans notre discussion. La barre verticale représente le résultat de la recherche du second minimum. On voit immédiatement qu'il semble bon.

Pour le bon fonctionnement de notre routine d'ajustement du glitch, il est essentiel de s'assurer que l'algorithme de recherche du second minimum effectue un bon travail. En effet, une mauvaise implémentation de celui-ci peut conduire à des conditions initiales trop éloignées de la solution optimale et donc à la non convergence de la méthode. C'est un problème auquel nous avons été confrontés durant la réalisation de ce mémoire. En effet, une mauvaise implémentation, s'intéressant uniquement au signe de la pente de la fonction  $\Gamma_1(r)$  conduisait l'algorithme à confondre certaines irrégularités de la courbe avec des minimas locaux. C'est ce que représente la Figure 3.3. On y remarque que le deuxième minimum a été localisé au niveau du premier. L'encadré représente un agrandissement de la région problématique où on observe bien une irrégularité. Cette mauvaise localisation du minimum conduit donc à une mauvaise estimation du paramètre  $\tau_{He}$ . Le résultat de l'ajustement en souffre alors beaucoup. La Figure 3.4 montre le résultat de l'ajustement

---

8. Pour rappel, ceci est montré à la sous-section 2.2.3 dans le cas d'un tuyau d'orgue semi ouvert dans le régime asymptotique.

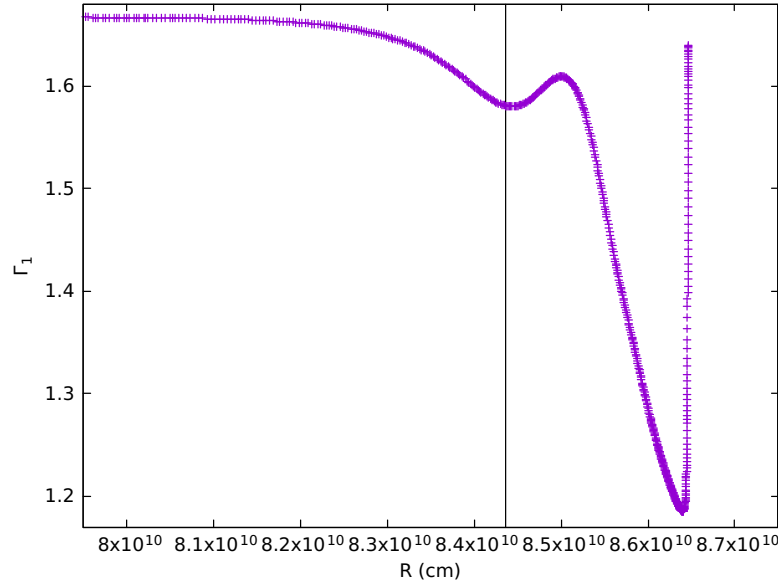


FIGURE 3.2 – Évolution de  $\Gamma_1$  avec le rayon calculée jusqu’au second minimum pour un modèle théorique. La ligne verticale représente la position du minimum calculée par l’algorithme. Celle-ci correspond à un rayon de  $8.434614962689 \cdot 10^{10} \text{ cm}$ . Nous n’affichons pas l’évolution de  $\Gamma_1$  jusqu’au centre car les régions les plus profondes n’ont pas d’intérêt pour cette discussion et nuisent à la lisibilité de la figure.

réalisé avec cette mauvaise estimation.

Pour palier à ce défaut, il suffit de remarquer sur les figures 3.2 et 3.3 que le second minimum est toujours nettement plus faible que le premier. Alors, en plus de la condition comptant les changements de signe la pente implémentée plus tôt. Nous imposons à l’algorithme de valider le second minimum que si celui-ci se trouve à une hauteur supérieure à la moitié de la profondeur du premier minimum. Nous obtenons alors de bien meilleurs résultats. La Figure 3.5 montre le résultat de l’ajustement du glitch pour le même modèle que celui de la Figure 3.4 mais avec la nouvelle routine. On remarque immédiatement que le résultat est nettement meilleur.

Ensuite, le point le plus délicat, comme mentionné précédemment, est le choix d’une valeur initiale pour  $c_2$ . Nous avons, pour ce faire, procédé en plusieurs étapes. Premièrement, pour un modèle donné, nous avons cherché, presque à tâtons, une valeur initiale du paramètre permettant à l’algorithme de converger. L’opération fut alors répétée pour une série de modèles de type solaire de masses différentes. Deuxièmement, ces valeurs initiales étant connues, nous avons cherché, en procédant de proche en proche, l’évolution du paramètre  $c_2$  le long de la séquence principale pour chacune des masses considérées précédemment. Ensuite, afin d’obtenir une estimation robuste du paramètre, nous avons ajusté une loi linéaire de celui-ci en fonction de la fraction en masse initiale d’hydrogène et nous avons

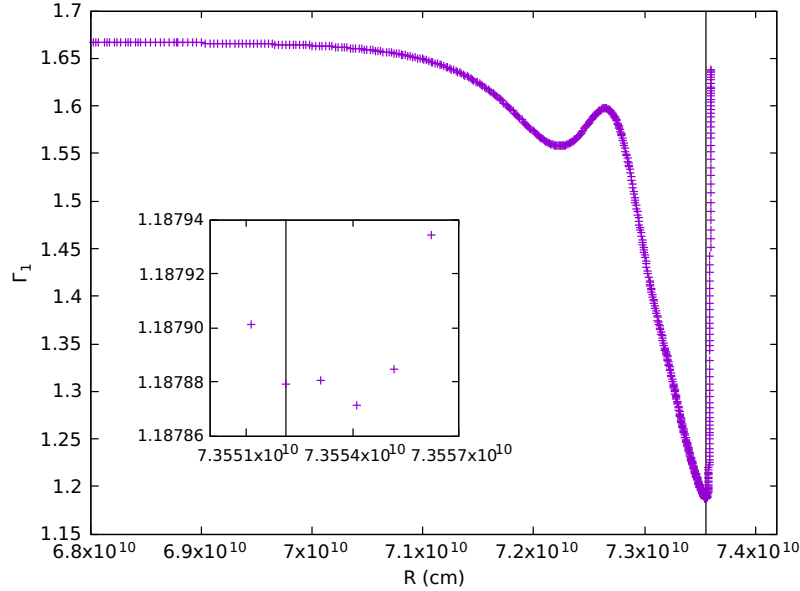


FIGURE 3.3 – Évolution de  $\Gamma_1$  avec le rayon jusqu'au second minimum calculée pour un modèle théorique. La barre verticale représente la position supposée du second minimum ( $7.355211706109 \cdot 10^{10} \text{ cm}$ ). L'encadré est un agrandissement de la région problématique.

obtenu la forme suivante :

$$c_2 = 5.9430963854160039 \cdot 10^{-3} - 4.1031935862492225 \cdot 10^{-3} X \quad (3.5.14)$$

Étant donné que ce paramètre est celui qui pose le plus de risques quant à la stabilité du fit, nous avons ajouté un certain seuil de tolérance à la valeur obtenue par évaluation de la loi linéaire. En effet, si la valeur du  $\chi^2$  est trop élevée<sup>9</sup>, nous réalisons un ensemble d'exécutions de notre algorithme de minimisations pour des valeurs initiales de  $c_2$  comprises dans l'intervalle  $[0.5c_2, 1.5c_2]$  pour lequel nous ne gardons que le meilleur des résultats.

Enfin, il n'était pas rare de rencontrer certains cas de figures où, malgré toutes ces considérations, l'ajustement du glitch n'était pas très convaincant. Effectivement, on observait parfois un décrochage en fréquences pour les degrés sphériques  $l$  et les fréquences les plus élevés. Pour y remédier, nous avons implémenté un seuil en fréquences, limitant les fréquences utilisées lors de la régression à une certaine limite. Ce faisant, nous ne perdons pas d'information utile pour peu que le seuil soit suffisamment élevé car la composante oscillante du glitch est amortie et les fréquences les plus élevées présentent des erreurs observationnelles croissantes. Nous avons alors choisi la valeur du seuil pour des cas où le décrochage en fréquences était important. Ensuite, afin d'éviter de comparer des ensembles de modes différents, et donc des informations incompatibles, nous avons appliqué ce seuil aux données observationnelles et extrait les valeurs des modes correspondants. Ainsi, nous

9. Nous avons choisi 60 comme valeur à ne pas dépasser car nous avons remarqué que les valeurs supérieures conduisaient généralement à de mauvais résultats.



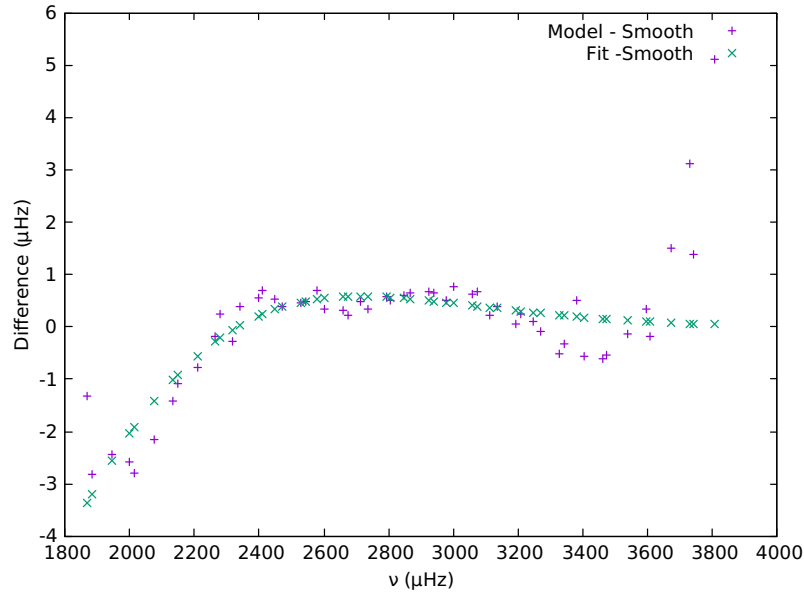


FIGURE 3.4 – Résultats obtenus avec une mauvaise estimation du paramètre  $\tau_{He}$ .

pouvons réutiliser ces valeurs pour limiter l'analyse en fréquences de chacun des modèles considérés et nous assurer d'utiliser de mêmes modes lors de nos ajustements.

### 3.5.7 Pistes d'amélioration

Comme nous l'avons déjà indiqué précédemment, la méthode que nous avons développée n'est pas exempte de défauts et demandera encore du travail avant d'être parfaitement fonctionnelle et optimale. Dans la présente sous section nous présentons quelques possibilités afin de l'améliorer.

Tout d'abord, le fait que nous traitons les composantes lisse et oscillante ensemble lors de la deuxième phase de notre méthode nous fait perdre en partie le bénéfice de l'orthogonalisation. Bien que cette orthogonalisation nous donne un point de départ fiable pour le traitement de la composante oscillante, nous perdons l'indépendance des paramètres de la composante lisse durant l'ajustement global. Il paraît donc plus judicieux de traiter indépendamment les deux composantes. Tout d'abord, réaliser l'ajustement de la composante lisse par projection sur la base orthonormée. Ensuite, conserver les valeurs des paramètres de la composante lisse et ajuster uniquement la composante oscillante via la méthode de Levenberg-Marquardt. De cette façon, nous conserverions l'indépendance des paramètres de la composante lisse. Par ailleurs, ceci pourrait avoir un effet stabilisant pour notre méthode d'ajustement du glitch. Cette stabilisation provient du fait que le nombre de paramètres laissés libres lors de l'ajustement est réduit à 4 (contre 24 pour l'ajustement conjoint des composantes lisse et oscillante). Ceci permet aussi une diminution du temps de calcul. Cependant, comme indiqué précédemment, le facteur limitant se situe dans les

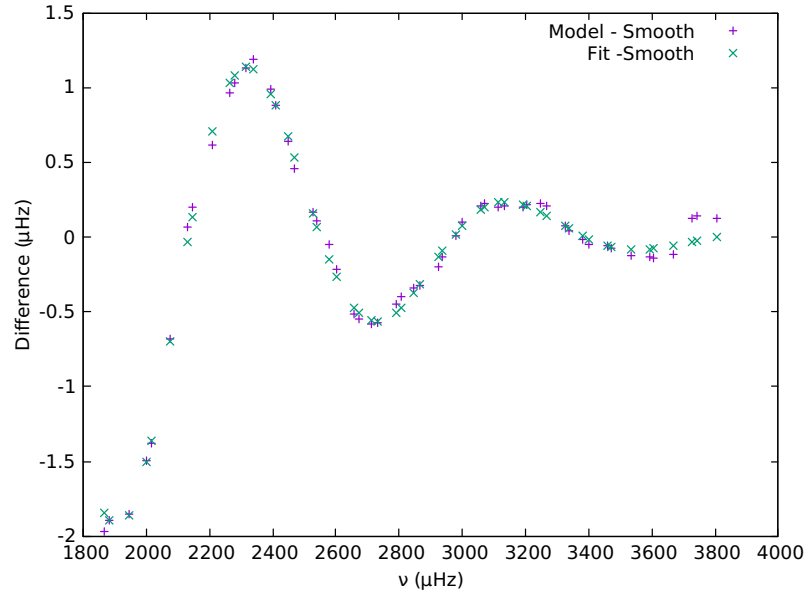


FIGURE 3.5 – Résultats obtenus avec une meilleure estimation du paramètre  $\tau_{He}$ .

calculs de modèles d'évolution stellaire. Ainsi, ce gain de temps de calcul n'a que très peu d'influence pour la réalisation de nos ajustements.

### 3.6 Méthode implémentée

Jusqu'à présent, la méthode détaillée permet uniquement l'obtention des paramètres du glitch à partir d'un modèle donné. Néanmoins, notre objectif est de déterminer au mieux le modèle rendant compte de façon optimale des observations du glitch de l'hélium de 16 Cygni A. Pour ce faire, nous avons implémenté une méthode qui s'inscrit dans le cadre des méthodes astérosismologiques directes. Celle-ci recherche donc le modèle avec le jeu de paramètres physiques permettant de rendre au mieux compte des paramètres du glitch observé via notre méthode d'ajustement du glitch. Comme dans le cas de cette dernière, étant donnée la non linéarité du problème, nous minimisons une fonction coût (définie dans la prochaine sous-section) via l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Ceci signifie que nous faisons appel à cet algorithme à deux niveaux lors de l'ajustement. Au premier niveau dans le but d'obtenir le modèle optimal et au second niveau afin d'obtenir les paramètres du glitch de chaque modèle généré au cours des itérations.

Nous voyons ainsi que le problème traité est hautement non linéaire. Il est donc primordial que notre routine *HeFi* fonctionne de manière robuste afin de permettre à la recherche du modèle optimal de fonctionner efficacement sans être freinée par des erreurs de calculs récurrentes. La discussion présentée dans la section précédente prend alors tout son sens.

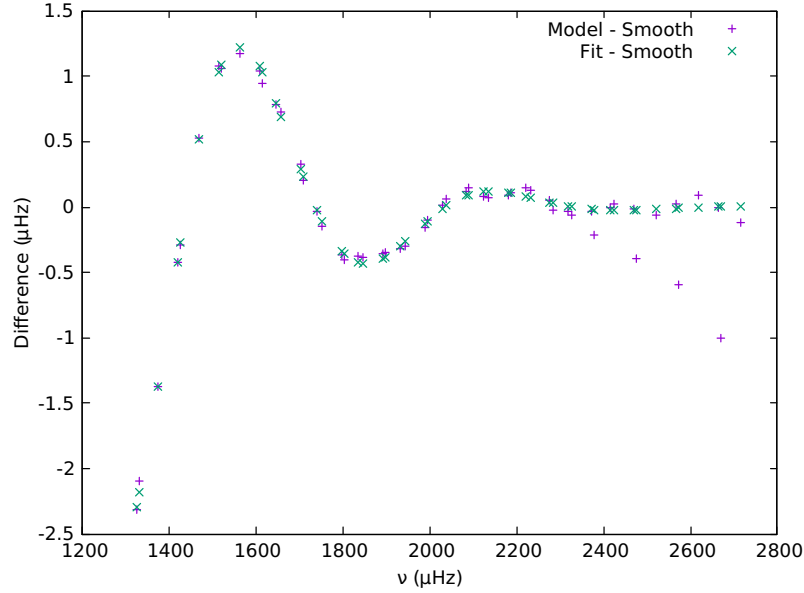


FIGURE 3.6 – Composante oscillante du glitch sans seuil.

### 3.6.1 Détermination du modèle stellaire optimal : fonction de mérite $\chi^2$

Un point qui a jusqu'à présent été ignoré dans les recherches de modèles stellaires optimaux effectués par d'autres auteurs est l'utilisation de paramètres corrélés dans la fonction à ajuster. C'est donc un point que nous visons à améliorer en développant cette méthode. Nous commençons donc par redéfinir une fonction coût plus appropriée. Celle-ci ne prendra pas les fréquences directement en argument mais plutôt les indicateurs sismiques. Si nous dénotons ces indicateurs sismiques par  $\xi_i$ , nous avons l'expression pour la fonction de mérite suivante :

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(\xi_{th,i} - \xi_{obs,i})^2}{\sigma_i^2} \quad (3.6.1)$$

Cette nouvelle forme est fort intéressante si nous définissons nos indicateurs sismiques de telle façon qu'ils soient indépendants ou aussi peu corrélés que possible. C'est pour cela que l'étape d'orthogonalisation (sous-section 3.5.3) est d'une importance capitale.

La difficulté, cependant, est d'obtenir des expressions pour les indicateurs sismiques définis dans la section 2.4 en termes des coefficients  $a_{k,l}$ . En effet, le lien n'est pas direct mais il est possible d'en trouver de bons estimateurs. Ceci est détaillé dans la section 4.1.

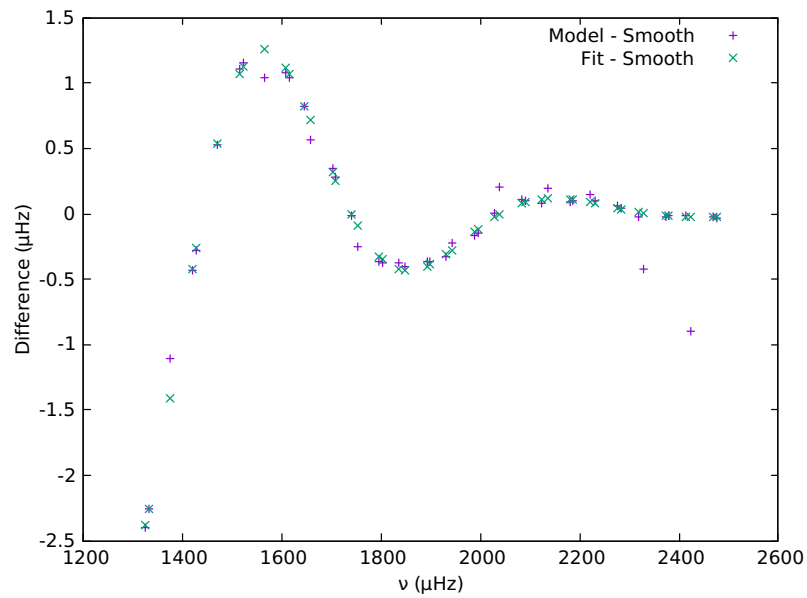


FIGURE 3.7 – Composante oscillante du glitch avec seuil.

# Chapitre 4

## Résultats

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats que nous avons été en mesure d'obtenir par le biais de la méthode décrite au chapitre précédent. Rappelons que l'aspect novateur de notre méthode est l'ajustement d'indicateurs définis en termes des paramètres de la fonction décrivant le glitch dans le but d'estimer les indicateurs sismiques définis à la section 2.4. Ceci permet alors d'utiliser des paramètres indépendants lors de nos ajustements. Ce n'était pas le cas des méthodes classiques qui ajustaient les fréquences et indicateurs sismiques sous leur forme classique. Ils étaient alors fortement corrélés.

### 4.1 Paramètres à ajuster

Étant donnée l'expression des fréquences utilisée (3.5.1), il nous faut d'abord établir les expressions adéquates des différents paramètres à ajuster. Nous présentons dès lors dans cette section les estimateurs des indicateurs sismiques utilisés ainsi que le cheminement permettant d'obtenir leurs expressions.

*La grande séparation :*

$$\overline{\Delta\nu} = \sum_{l=0}^3 \frac{a_{l,1}}{\sqrt{\sum_{l=0}^3 \frac{1}{V_{l,1,1}^2}}} \quad (4.1.1)$$

Pour obtenir cette expression, il suffit de se référer à l'expression asymptotique des fréquences 2.2.14 où on peut voir que  $\Delta\nu$  n'est autre que la pente de  $\nu(n)$ . Alors, en utilisant les expressions 3.5.8 et 3.5.10, on peut calculer la grande séparation pour chaque valeur de  $l$ ,  $\Delta_l = a_{l,1}V_{l,1,1}$ <sup>1</sup>. En calculant ensuite la moyenne de celles-ci, on obtient :

$$\overline{\Delta\nu} = \sum_{l=0}^3 \frac{\frac{\Delta_l}{\sigma^2(\Delta_l)}}{\sqrt{\sum_{l=0}^3 \frac{1}{\sigma^2(\Delta_l)}}} \quad (4.1.2)$$

---

1. Pour rappel, nous montrons dans la sous-section 3.5.3 comment obtenir cette expression.

qui se réduit à l'expression précédente sachant que  $\sigma^2(\Delta_l) = V_{l,1,1}^2$ . Cette dernière égalité provient du fait que  $\sigma^2(\Delta_l) = V_{l,1,1}^2 \sigma^2(a_{l,1})$  et que, étant donné que les paramètres sont indépendants grâce à l'orthogonalisation de Gram-Schmidt, la matrice de covariance des paramètres se réduit à l'identité (voir la sous-section 3.5.3).

*L'amplitude du glitch d'hélium :*

$$A_{He} = \sqrt{\mathcal{R}_{He}^2 + \mathcal{I}_{He}^2} = \sqrt{a(1)^2 + a(2)^2} \quad (4.1.3)$$

*Estimateurs de "petite séparation" :*

$$\delta_1 = \frac{a_{0,0}V_{0,0,0} - a_{2,0}V_{2,0,0}}{a_{1,1}V_{1,1,1}} \quad (4.1.4)$$

$$\delta_2 = \frac{a_{0,0}V_{0,0,0} - a_{1,0}V_{1,0,0}}{\Delta\nu} \quad (4.1.5)$$

Ces deux indicateurs ont pour vocation de trouver un analogue à la petite séparation normalisée  $r_{01}$  et au petit espacement normalisé  $r_{02}$  (voir les expressions 2.4.3 et 2.4.5) dans notre formalisme basé sur la composante lisse seule.

Étant donné le faible nombre de degrés sphériques observés, on se limite à la petite séparation normalisée entre les degrés 0 et 2 pour  $\delta_1$  et au petit espacement normalisé entre les degrés 0 et 1 pour  $\delta_2$ . Compte tenu de l'expression des fréquences après orthogonalisation de Gram-Schmidt 3.5.10, nous avons  $\langle \nu_l \rangle = a_{l,0}V_{l,0,0}^2$ . En effet, comme la projection se fait par ordres croissants, le terme indépendant revient à estimer la fonction représentant les fréquences par une constante. Celle-ci correspond donc à la moyenne des fréquences.

Si on en prend les valeurs moyennes sur tous les ordres radiaux, nous obtenons aux numérateurs, respectivement,  $\langle \nu_0 \rangle - \langle \nu_2 \rangle$  et  $\langle \nu_0 \rangle - \langle \nu_1 \rangle$  où  $\langle \cdot \rangle$  représente la moyenne sur les ordres radiaux<sup>3</sup>. Enfin, nous divisons ces deux expressions par la grande séparation afin d'éviter une mise à l'échelle des indicateurs mais surtout dans le but de rendre ceux-ci aussi peu sensibles aux effets de surface que possible<sup>4</sup>. Notons que nous ne divisons pas exactement par la grande séparation dans le cas de  $\delta_1$  mais par  $\Delta_1$ , son estimation plus grossière afin d'éviter d'utiliser un même paramètre au numérateur et au dénominateur. On reconnaît alors les expressions précédentes.

On voit directement à l'aide de la formulation asymptotique 2.1.17 que la différence  $\langle \nu_2 \rangle - \langle \nu_0 \rangle$  vaut, au terme de glitch près,  $\langle n_2 \rangle - \langle n_0 \rangle + \epsilon_2 - \epsilon_0 + 1$ . Par ailleurs,  $\langle n_2 \rangle$  et  $\langle n_0 \rangle$  sont indépendants des mesures de fréquences et l'expression se réduit à  $\epsilon_2 - \epsilon_0$ . Ce qui représente l'écart entre les crêtes dessinées par les fréquences de degrés sphériques 0 et 2 dans un diagramme à échelle. Ceci correspond donc bien à la petite séparation.

*L'estimateur de  $\epsilon$  :*

$$\bar{\epsilon} = \frac{a_{1,0}V_{1,0,0}}{a_{0,1}V_{0,1,1}} \quad (4.1.6)$$

---

2. L'origine de cette expression est donnée à la sous-section 3.5.3.  
3. Ce qui explique la disparition de l'indice  $n$  dans les expressions.  
4. Voir les sections 2.3 et 2.4 pour plus d'informations.

Enfin, cet indicateur a pour but de reproduire le décalage en fréquences qu’engendre le terme  $\epsilon$  dans la formulation asymptotique des fréquences. Dès lors, en ne prenant cette fois que la moyenne des fréquences de degré sphérique  $l = 1$ , on a :  $\epsilon = \frac{\langle \nu_1 \rangle}{\Delta_0} \simeq \langle n_1 \rangle + \frac{1}{2} + \epsilon_1$ . Ceci permet donc une estimation fiable de  $\epsilon_1$ . Notons que nous pourrions retirer  $\langle n_1 \rangle + \frac{1}{2}$  à l’expression de cet estimateur pour un retrait de l’offset constant. La tendance reste cependant la même.

### 4.1.1 Comparaison de $\delta_1$ et $\delta_2$

Les figures 4.1 et 4.2 montrent respectivement l’évolution des indicateurs  $\delta_1$  et  $\delta_2$  avec la fraction en masse centrale d’hydrogène, donc avec le stade évolutif de l’étoile, pour différentes valeurs de la fraction en masse d’hydrogène initiale et de la masse.

On voit que l’évolution de l’indicateur  $\delta_2$  est décrite par une courbe convexe. Dès lors, il présente une dégénérescence et une même valeur sera associée à deux fractions en masse d’hydrogène différentes. Ce n’est pas le cas des courbes d’évolution de  $\delta_1$  qui croissent de manière monotone avec  $X$ . Le choix de  $\delta_1$  pour nos ajustements semble donc plus judicieux.

Par ailleurs, nous notons qu’aux alentours des valeurs initiales de la fraction en masse d’hydrogène (extrême droite des courbes), la courbe est essentiellement verticale. Cela n’est cependant pas problématique car cette région correspond au début de la séquence principale. En effet, l’appel à notre algorithme requiert que l’étoile atteigne un certain âge et celles-ci ne sont alors pas traitées.

### 4.1.2 Évolution de $\bar{\epsilon}$

Nous nous intéressons maintenant à l’évolution de  $\bar{\epsilon}$  avec la fraction en masse d’hydrogène. La Figure 4.3 représente cette évolution pour différentes valeurs de fractions en masse d’hydrogène initiale et de masse indiquées en légende. La ligne horizontale représentée correspond à la valeur calculée pour 16 Cygni A.

On note déjà que toutes les courbes se situent sous la valeur attendue pour 16 Cyg A. On comprend donc que l’ajustement de ce paramètre ne sera pas une chose aisée.

## 4.2 Résultats observationnels

Dans cette section, nous présentons les résultats de l’ajustement du glitch obtenu avec notre algorithme HeFi. La Figure 4.4 représente la composante oscillante du glitch. On peut y voir les données auxquelles ont été soustraites la composante lisse de l’ajustement ainsi que les fréquences de l’ajustement moins leur composante lisse. Ensuite, la Figure 4.5 représente le diagramme à échelle associé aux fréquences observées, celles du fit et leur composante lisse.

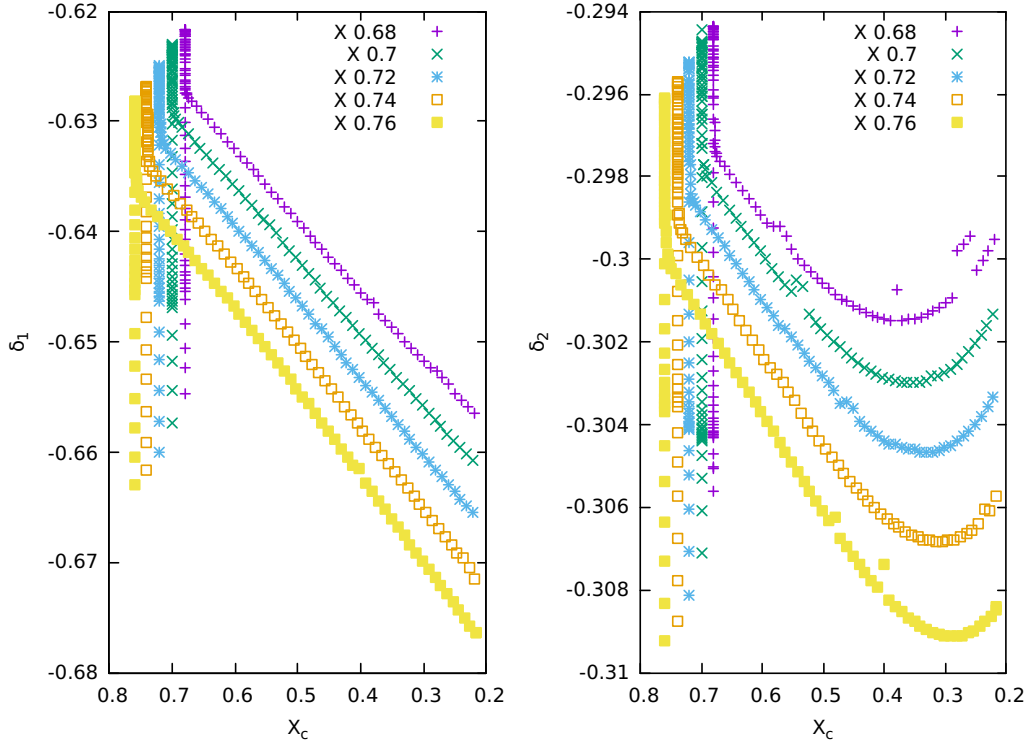


FIGURE 4.1 – Évolution de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  avec  $X_c$  pour différentes valeurs initiales de  $X$ . Ces valeurs sont indiquées en légende. La masse est fixée à  $1.052 M_\odot$

### 4.2.1 Contraintes

Les valeurs des paramètres observés ainsi que les erreurs relatives y étant associées sont reprises dans le tableau 4.1 ci-dessous. Les erreurs relatives aux paramètres sont obtenues par propagation d'erreurs.

Grandeur	Valeur	$\sigma^2$
$\Delta\nu$	$1.03070 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^{-3}$
$A_{He}$	$8.25 \cdot 10^{-3}$	$4.67 \cdot 10^{-3}$
$\delta_1$	$-6.779490 \cdot 10^{-1}$	$10^{-7}$
$\delta_2$	$-2.97046 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-6}$
$\bar{\epsilon}$	$2.004031 \cdot 10$	$2 \cdot 10^{-5}$

TABLE 4.1 – Valeurs des différents paramètres de 16 Cyg A obtenus via notre algorithme HeFi.



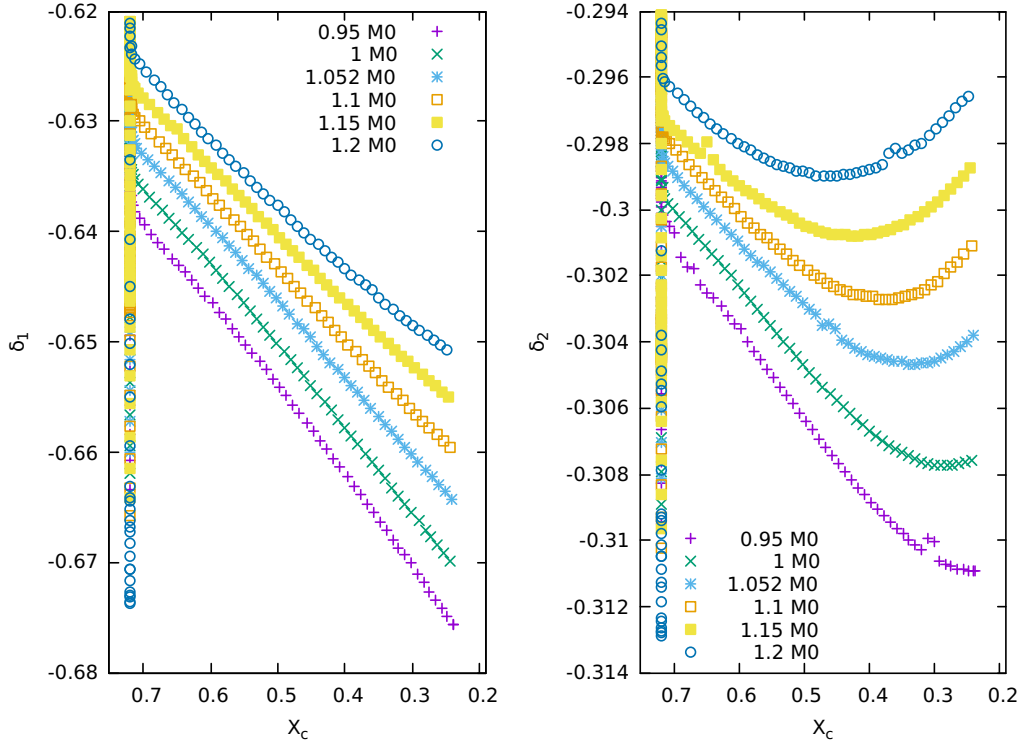


FIGURE 4.2 – Évolution de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  avec  $X_c$  pour différentes valeurs de  $M$ . Les valeurs des masses indiquées en légende sont exprimées en unités solaires. La fraction en masse centrale d’hydrogène initiale est de 0.72.

### 4.2.2 Valeur par défaut des paramètres

Voici un tableau reprenant les valeurs des paramètres utilisées par défaut lorsque celles-ci sont fixées.

Grandeur	Valeur	Source
M	$1.052 M_\odot$	Buldgen et al. [4]
X	0.71	Calibration solaire
Z	0.015762	Tel que $Z/X = 0.022$ comme suggéré par Buldgen et al. [4]
Age	6.7 Gyr	Verma et al. [38]

## 4.3 Ajustement des paramètres

Nous avons réalisé une série d’ajustements avec de plus en plus de paramètres libres afin de tenter de rendre compte des paramètres observationnels de 16 Cygni A. Les séries successives prennent pour point de départ les résultats de la précédente.

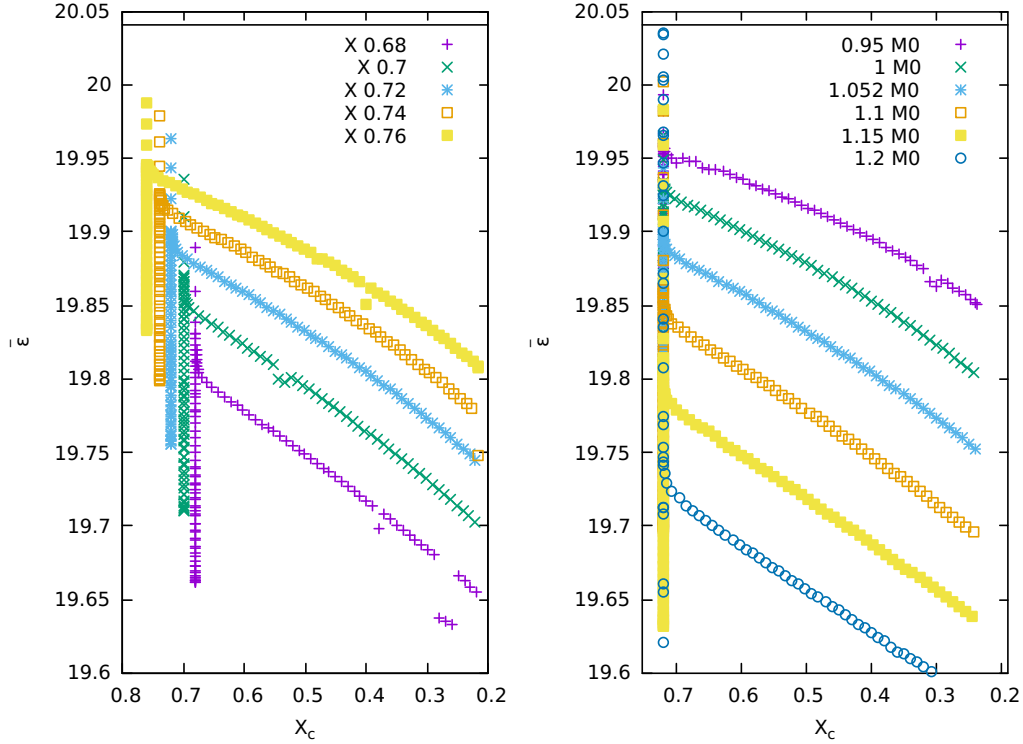


FIGURE 4.3 – Évolution de  $\bar{\epsilon}$  avec  $X_c$  pour différentes valeurs de  $X$  avec  $M = 1.052 M_\odot$  (gauche) et différentes valeurs de  $M$  avec  $X = 0.72$  (droite). Les valeurs variables sont indiquées en légende. La barre horizontale représente la valeur obtenue pour 16 Cygni A.

### 4.3.1 Sans diffusion

Dans un premier temps, nous avons réalisé les ajustements sans tenir compte de la diffusion microscopique.

#### À un paramètre

Pour commencer, nous avons réalisé un ajustement avec pour seule contrainte l'amplitude du glitch d'hélium et pour paramètre libre la fraction en masse d'hydrogène initiale. Le résultat semble bon car la valeur de l'amplitude du glitch est alors de  $A_{He} = 8.25 \cdot 10^{-3}$  avec une erreur de  $4.67 \cdot 10^{-3}$ . De plus, la valeur de notre fonction coût vaut  $0.1155208275179 \cdot 10^{-8}$ . On obtient alors une fraction en masse d'hydrogène initiale valant  $X = 0.7309$  avec pour erreur  $8.4 \cdot 10^{-4}$ . Cependant, la grande séparation n'est pas bonne. Nous obtenons une valeur de  $1.118673 \cdot 10^2$  qui est fort élevée en comparaison avec la valeur  $1.03070 \cdot 10^2$ .

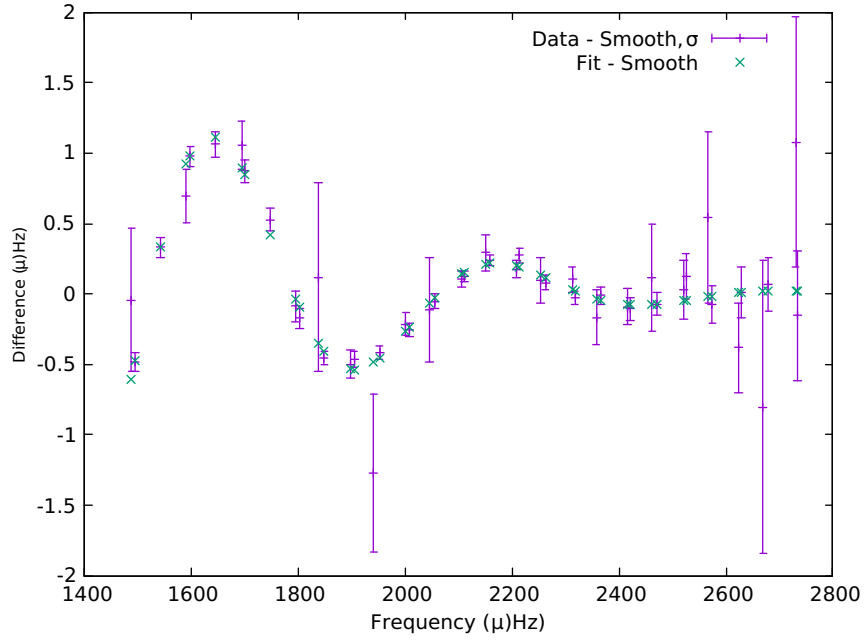


FIGURE 4.4 – Partie oscillante du glitch de l’hélium observationnel de 16 Cyg A obtenue via notre algorithme. Les croix mauves représentent la différence entre les données et la composante lisse du fit et les croix vertes la différence entre le fit et sa composante lisse. Les barres d’erreurs quant aux données sont indiquées.

### À deux paramètres

Ensuite, sur base des résultats précédents, nous avons ajouté la grande séparation aux contraintes et l’âge de l’étoile comme paramètre. On obtient alors les résultats de qualité suivants :

$$\begin{aligned} X &= 0.7290 \pm 0.0091 \\ \text{Age} &= 8.27 \pm 0.64 \text{ Gyr} \\ \chi^2 &= 0.1958244410769 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

### À trois paramètres

Enfin, nous avons ajouté la masse comme paramètre libre afin d’ajuster le paramètre  $\delta_1$  et d’obtenir des résultats plus proches de la réalité.

$$\begin{aligned} X &= 0.7277 \pm 0.2010 \\ \text{Age} &= 8.20 \pm 2.93 \text{ Gyr} \\ M &= 1.05 \pm 0.30 M_{\odot} \\ \chi^2 &= 0.2280263376546 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

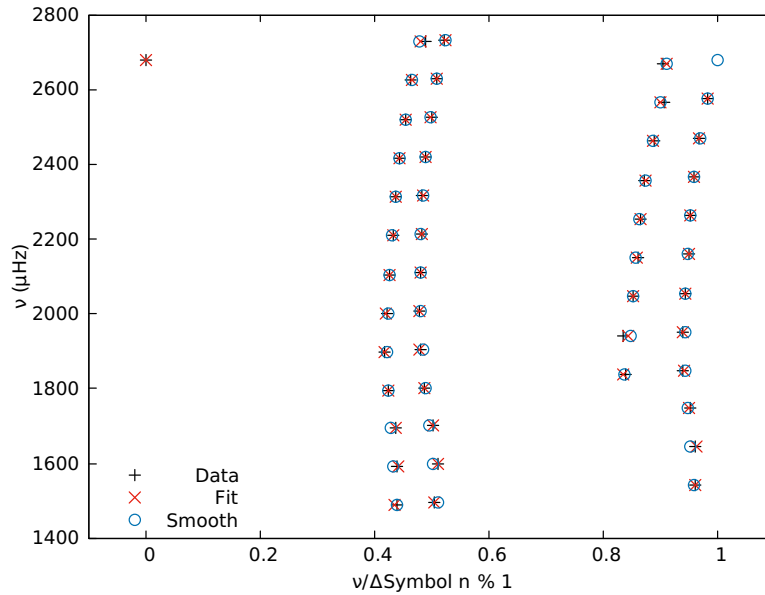


FIGURE 4.5 – Diagramme à échelle observationnel de 16 Cyg A obtenu via notre algorithme. Les croix noires sont les données, les croix rouges le modèle ajusté et les ronds bleus sa partie lisse.

Cependant, nous obtenons un décalage constant des fréquences par rapport celles observées. La Figure 4.6 montre bien ce décalage constant. On y a représenté les fréquences observées divisées par leur grande séparation, en vert, et les fréquences calculées divisées par leur grande séparation, en mauve. L'axe horizontal correspond à un indice grandissant de manière monotone avec l'ordre radial pour les 4 valeurs du degré sphérique considérées. Il n'a pas de signification particulière. On remarque que la grande séparation est constante mais qu'un décalage négatif constant des fréquences calculées est présent. Le fait que ce décalage soit négatif est contraire à celui que produiraient les effets de surface.

Ceci suggère que le paramètre  $\epsilon$  de l'Équation 2.1.17 n'est pas bien ajusté. Il nous faut donc essayer de l'ajuster via l'estimateur  $\bar{\epsilon}$  proposé dans la section 4.1. En effet, si on regarde la valeur calculée pour le modèle optimal, on a  $\bar{\epsilon} = 1.9660 \cdot 10$

Cette différence est aussi très visible si on superpose les diagrammes à échelle théoriques et observationnels comme dans la Figure 4.7

### 4.3.2 Avec diffusion

Nous incluons maintenant la diffusion microscopique afin de vérifier si celle-ci ne permet pas d'obtenir un meilleur accord avec le paramètre  $\epsilon$ .

#### À 3 paramètres

En procédant comme dans le cas sans diffusion, on obtient le jeu de paramètres :

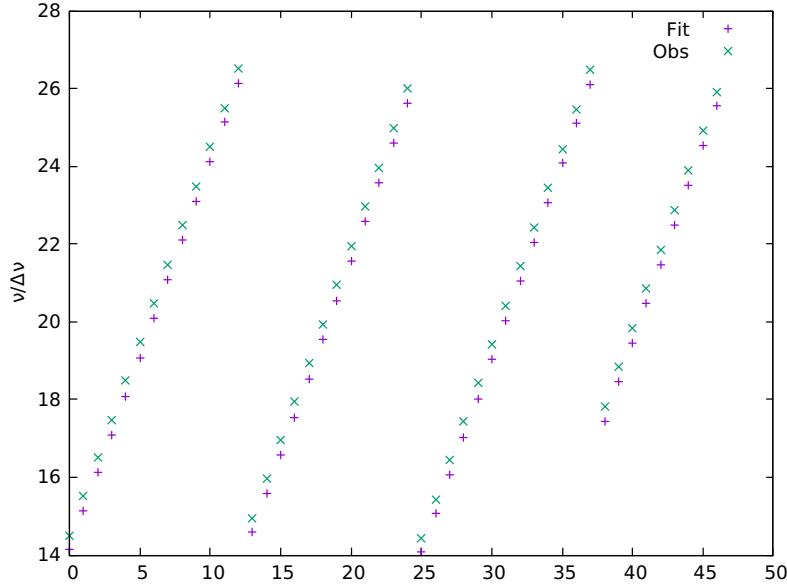


FIGURE 4.6 – Graphique représentant les fréquences divisées par la grande séparation. En vert, nous avons les données observationnelles et, en mauve, les données théoriques. L’axe horizontal n’a pas de signification mais correspond à un indice croissant de manière monotone avec l’ordre radial pour les 4 valeurs du degré sphérique considérées.

$$\begin{aligned}
 M &= 1.06 \pm 0.02 M_{\odot} \\
 X &= 0.7339 \pm 0.0118 \\
 \text{Age} &= 7.84 \pm 0.16 \text{ Gyr} \\
 \chi^2 &= 0.1004201352978 \cdot 10^{-1}
 \end{aligned}$$

Le décalage en fréquences reste présent et on obtient alors  $\bar{\epsilon} = 1.9652 \cdot 10$ . Cette valeur est plus faible que précédemment ( $1.9660 \cdot 10$ ), ce qui renforce faiblement le décalage.

Par ailleurs, on voit dans la Figure 4.3 que pour des valeurs typiques solaires, les courbes d’évolution de  $\bar{\epsilon}$  se situent largement sous la valeur attendue pour 16 Cyg A représentée par la ligne horizontale. Ceci explique alors que nous ne parvenions pas à ajuster ce dernier paramètre.

La Figure 4.8 représente le diagramme à échelle correspondant.

## 4.4 Stabilité de HeFi

En réalisant les différents ajustements, la question de la stabilité de l’algorithme d’ajustement du glitch *HeFi* s’est posée. En effet, il est primordial de s’assurer une bonne convergence de celui-ci à chaque itération de la recherche du modèle optimal car, sinon, les résultats seraient mauvais ou biaisés.

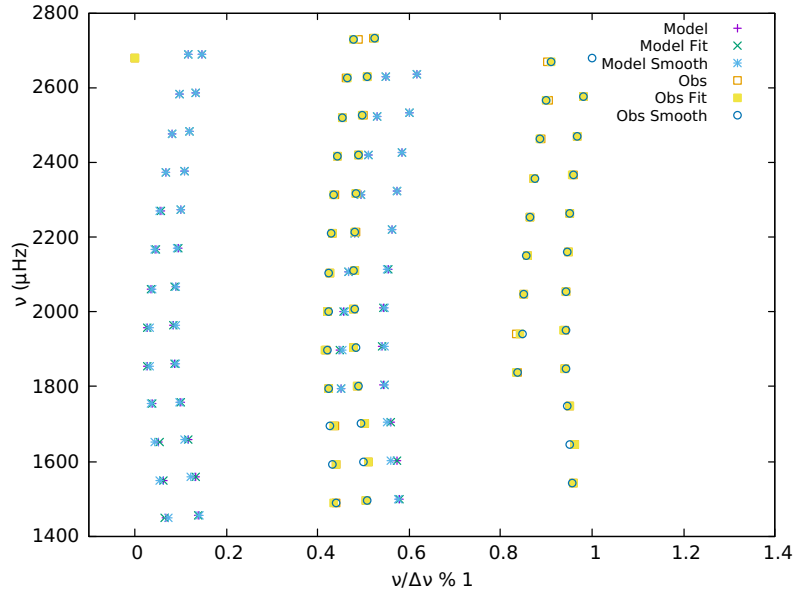


FIGURE 4.7 – Diagrammes à échelle des données observées et théoriques.

#### 4.4.1 Domaine de validité

Tout d’abord, il est important de remarquer que la méthode que nous avons développée n’est valable que pour des modèles de type solaire. C’est à dire de masse proche du soleil et sur la séquence principale. Dès lors, lors des ajustements des paramètres, il est important de s’assurer que notre modèle reste bien sur la séquence principale. En effet, si le modèle considéré sort de la séquence principale, l’algorithme HeFi, sous sa forme actuelle, ne converge pas et les paramètres résultants sont aberrants.

#### 4.4.2 Évolution de l’amplitude

Afin de s’assurer la qualité de nos résultats, nous avons calculé l’évolution de l’amplitude du glitch  $A_{He}$  avec la fraction en masse initiale d’hélium  $Y$  pour  $Y \in [0.18, 0.3]$ . On s’attend à une tendance croissante de l’amplitude avec la fraction en masse d’hélium comme Verma et al. [38] le montrent dans la figure 5 de leur article (voir la Figure 4.9). Ce n’est cependant pas ce que nous observons avec notre méthode. En effet, nous n’observons pas de véritable tendance croissante mais plutôt des oscillations avec un pic très marqué pour  $Y = 0.28$ .

De plus, pour les valeurs extrêmes, à savoir  $Y = 0.18$  et  $Y = 0.3$ , l’amplitude prend des valeurs inattendues semblant inhiber toute tendance. Ceci peut se comprendre par le fait que ces valeurs sont trop extrêmes et s’éloignent déjà du domaine de fonctionnement optimal de notre algorithme.

Ceci pose alors la question de la stabilité et de la validité de nos résultats.

Bien que ce résultat semble peu prometteur, nous souhaitons insister sur le fait que les

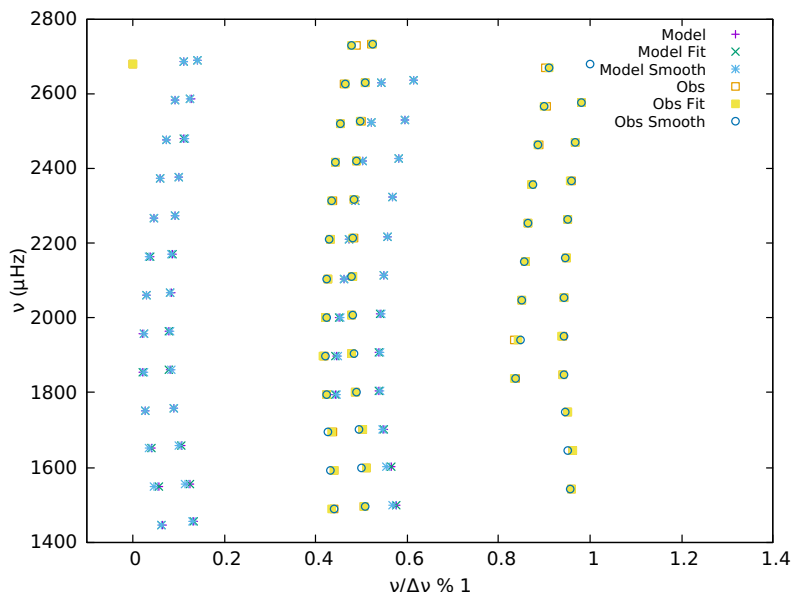


FIGURE 4.8 – Diagrammes à échelle des données observées et théoriques incluant de la diffusion.

ajustements individuels du glitch sont toujours de très bonne qualité. Ce n'est donc pas la qualité à questionner mais bien la stabilité de notre méthode. Ainsi, il sera nécessaire d'y apporter certaines améliorations afin de la stabiliser. Ajoutons qu'une façon simple de stabiliser notre méthode est d'augmenter l'importance du terme de lissage,  $\lambda_c$ , dans l'Équation 3.5.4. En effet, jusqu'à présent, nous utilisons une valeur très faible de celui-ci. Ceci correspond alors à ramener notre ajustement au cas classique d'un ajustement par la méthode des moindres carrés. Ainsi, l'utilisation d'une valeur plus importante de  $\lambda_c$  permettrait une stabilisation de notre méthode mais tendrait vers un ajustement à une ligne droite si elle devenait trop importante. Un bon compromis entre les deux extrêmes devra alors être trouvé. Nous nous pencherons sur cette problématique à la sous-section 4.4.3

### 4.4.3 Constante de lissage et stabilité

Précédemment, nous avons montré que notre méthode pouvait être instable. Nous suggérons alors d'utiliser la constante de lissage ( $\lambda_c$  présente dans l'Équation 3.5.4) afin de palier à ce manque. C'est ce que nous avons fait et que nous présentons dans cette section.

Tout d'abord, nous avons testé l'effet d'une valeur croissante de la constante de lissage sur les ajustements pour un ensemble de modèles donné afin de chercher la meilleure stabilité. La Figure 4.11 illustre l'évolution de la fonction de mérite pour un de ces modèles ( $M = 1.052 M_\odot$ , âge = 10.46 *Gyr*,  $Y = 0.23$  et  $Z/X = 0.022$ ). On y observe deux régimes, le premier, se prolongeant approximativement jusqu'à  $\lambda_c = 10^2$ , une transition abrupte et le second régime débutant aux alentours de  $10^4$ . Les valeurs au delà du premier

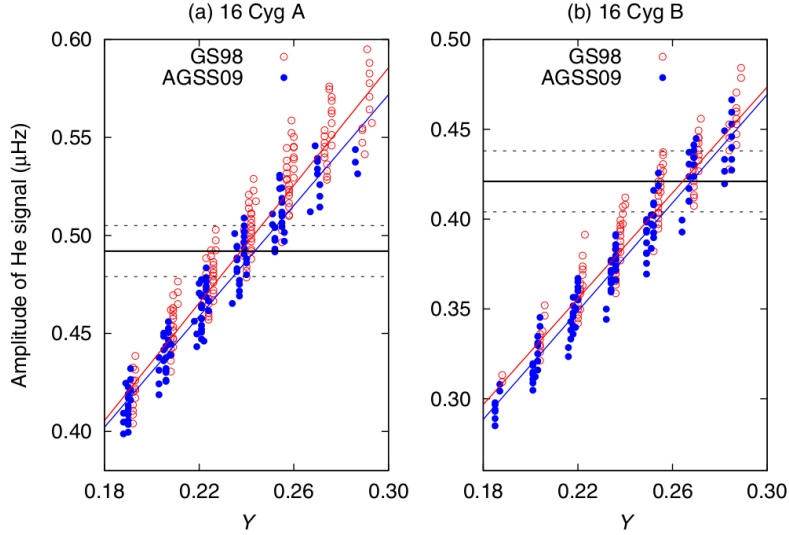


FIGURE 4.9 – Évolution de l’amplitude du glitch d’hélium avec la fraction en masse d’hélium décrite dans l’article de Verma et al. [38].

régime se sont révélées trop élevées et donc inadaptées pour notre travail. En effet, la Figure 4.12 montre l’évolution de la figure du glitch au cours de cette transition. Nous avons donc sélectionné une valeur de  $\lambda_c$  égale à  $10^2$  pour améliorer nos résultats.

Ensuite, notre algorithme étant stabilisé, nous avons à nouveau calculé l’évolution de l’amplitude avec la fraction en masse initiale d’hélium. Le résultat fut alors nettement meilleur et est représenté dans la Figure 4.13 qui est alors nettement plus proche du résultat attendu (voir Figure 4.9). Notons cependant que nous n’avons plus calculé l’amplitude du glitch d’hélium  $A_{He}$  mais plutôt sa forme locale  $\mathcal{A}_{He}(\nu_0) \equiv A_{He}\nu_0 \exp(-c_2\nu_0^2)$  où  $\nu_0$  est une fréquence choisie proche du maximum de la figure du glitch et exprimée en  $\mu Hz$ . On voit en effet dans la formulation 3.5.1 que ceci correspond à l’amplitude du glitch à une fréquence donnée. Par ailleurs, cette combinaison de paramètres nous assure l’obtention d’une tendance croissante pour peu que notre algorithme soit stable. Effectivement, nous voyons grâce à la Figure 4.4 que les erreurs sont nettement plus importantes à haute fréquence qu’à basse fréquence. Il en résulte une mauvaise détermination des paramètres  $A_{He}$  et  $c_2$ . Effectivement, plusieurs combinaisons de ces paramètres permettent l’obtention d’une même amplitude locale  $\mathcal{A}_{He}$ . On comprend ainsi en quoi ce nouveau choix de paramètres est opportun et permet une stabilisation des résultats. Ajoutons que *Verma et al.* font face à ce manque en moyennant l’amplitude locale sur l’intervalle de fréquences considéré. Ceci peut être une piste à explorer afin d’encore stabiliser notre méthode. Ainsi, dans la Figure 4.13, nous retrouvons la tendance croissante avec la fraction en masse d’hélium initiale. Cependant, nous observons un creux pour  $Y = 0.248$  qui doit être dû à d’éventuels problèmes numériques. De plus, une discontinuité de l’amplitude locale est visible en deçà de  $Y = 0.21$ . Celle-ci importe peu car nous n’observons pas d’étoiles pour des



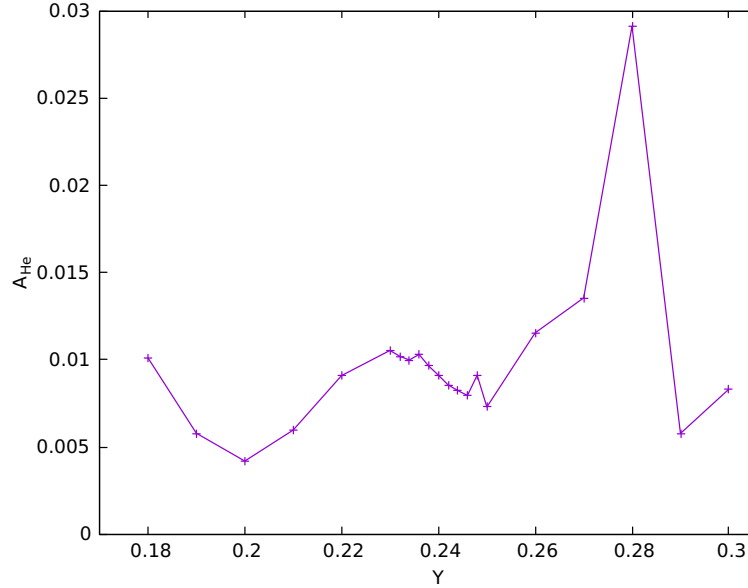


FIGURE 4.10 – Évolution de  $A_{He}$  avec  $Y$  calculée grâce à notre algorithme.

valeurs de  $Y$  si faibles.

Enfin, pour conclure cette section au sujet des apports de la constante de lissage, nous avons de nouveau réalisé des ajustements des paramètres observés chez 16 Cygni A. Notons que les valeurs à ajuster sont légèrement différentes que précédemment de par la présence  $\lambda_c$  dans les ajustements. Celles-ci sont reprises dans le tableau 4.2 ci-dessous. Par ailleurs, au vu de la discussion précédente, nous n'avons plus réalisé nos ajustements avec l'amplitude pour contrainte mais sa forme locale.

Grandeur	Valeur	$\sigma^2$
$\Delta\nu$	$1.03087 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^{-3}$
$\mathcal{A}_{He}(1640)$	1.10	$6 \cdot 10^{-2}$
$\delta_1$	$-6.791475 \cdot 10^{-1}$	$10^{-7}$
$\delta_2$	$-3.15050 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-6}$
$\bar{\epsilon}$	$2.006188 \cdot 10$	$1 \cdot 10^{-5}$

TABLE 4.2 – Valeurs des différents paramètres de 16 Cyg A obtenus via notre algorithme HeFi avec  $\lambda_c = 10^2$ .

Précisons cependant que nous avons dû retirer le seuil en fréquences introduit (voir Équation 4.1.4) car, bien que sans constante de lissage il avait un effet stabilisateur, ce n'est plus le cas avec une valeur plus élevée.

Ces modifications effectuées, nous avons effectué un ajustement à trois paramètres par la même méthodologie que ceux réalisés précédemment. Le résultat est le suivant :

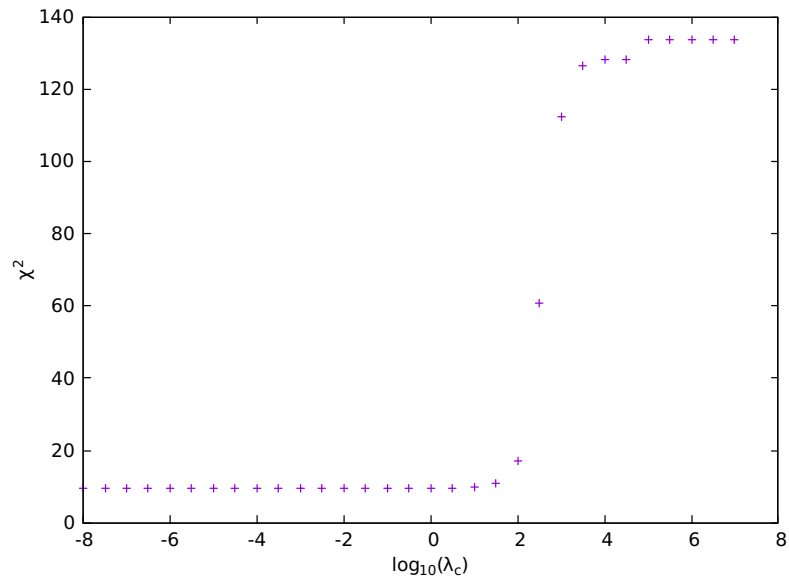


FIGURE 4.11 – Évolution de la fonction de mérite avec la valeur de la constante de lissage.

$$\begin{aligned}
 X &= 0.729 \pm 6 \cdot 10^{-3} \\
 \text{Age} &= 8.49 \pm 0.47 \text{ Gyr} \\
 M &= 1.05 \pm 10^{-2} M_{\odot} \\
 \chi^2 &= 0.9188093180239
 \end{aligned}$$

À nouveau, nous ne fûmes pas en mesure d'ajuster le paramètre  $\bar{\epsilon}$ . Ceci n'est pas surprenant au vu de la Figure 4.3 et pourrait suggérer un désaccord entre théorie et observations. Ce sera donc une question à traiter dans des travaux futurs.

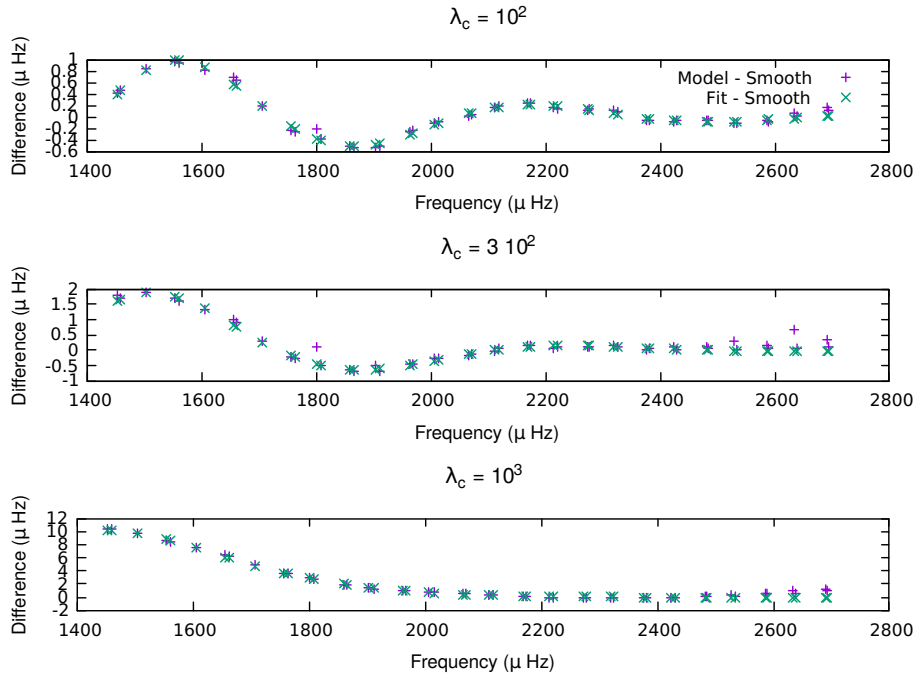


FIGURE 4.12 – Évolution de la figure du glitch avec la constante de lissage. Les figures sont réalisées pour un même modèle de masse  $M = 1.052 M_{\odot}$ , âge  $10.46 Gyr$ , fraction en masse d’hydrogène  $Y = 0.23$  et de rapport  $Z/X = 0.022$ . Les valeurs de  $\lambda_c$  sont, de haut en bas :  $10^2$ ,  $3 \cdot 10^2$  et  $10^3$ .

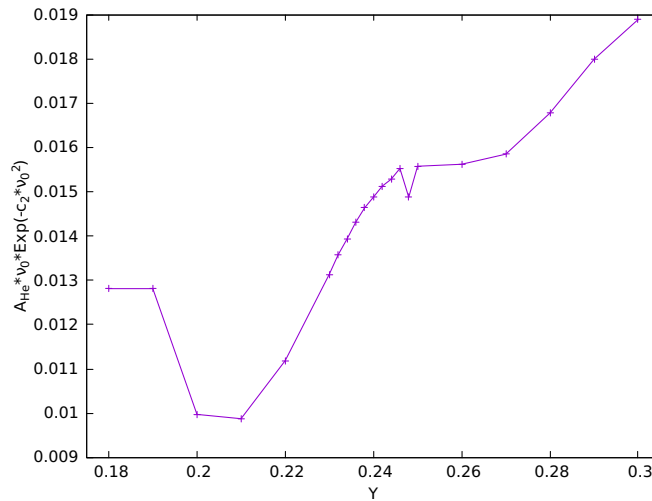


FIGURE 4.13 – Évolution de l’amplitude du glitch avec la fraction en masse d’hélium pour  $\lambda_c = 10^2$ .

# Chapitre 5

## Conclusion

### 5.1 But du travail de mémoire

Ce travail de mémoire avait pour but de proposer une nouvelle méthode d'ajustement du glitch causé par la seconde zone d'ionisation partielle de l'hélium au sein de l'analogue solaire 16 Cygni A. La méthode proposée, *HeFi* pour "Helium Fit", prend pour point de départ la méthode C développée par *Verma et al.* en 2014 [38] et appliquée à 16 Cygni A et B comme premier essai ainsi qu'à d'autres étoiles observées par le satellite Kepler en 2017 [37]. La différence avec cette dernière est que nous visons à en corriger ses défauts qui sont l'utilisation de contraintes à priori corrélées au sein d'une même fonction de mérite lors de l'ajustement, l'utilisation simultanée de plusieurs fonctions de mérite et le traitement de la composante lisse du glitch comme parasite, négligeant alors toute l'information dont elle est porteuse.

Ainsi, nous avons développé la méthode HeFi qui réalise un ajustement sur l'ensemble du signal du glitch simultanément (i.e. les composantes lisse et oscillante). Ceci se fait alors au travers d'une fonction de mérite unique. C'est un point crucial nous permettant d'obtenir des informations aussi peu corrélées que possible. Dès lors, les déductions pouvant en être tirées sont d'autant plus simples.

Ensuite, notre but final était, en utilisant la méthode développée et le Code Liégeois d'Evolution Stellaire, *CLES* [34], de rechercher le modèle stellaire optimal permettant de reproduire les paramètres sismiques ainsi que ceux du glitch d'hélium observés pour 16 Cygni A afin d'en déduire l'abondance en hélium. Ces deux ajustements, du glitch et du modèle stellaire, furent effectués via la méthode de *Levenberg-Marquardt* car ils sont non linéaires.

### 5.2 Résultats et perspectives futures

Nous avons démontré que notre méthode d'ajustement du glitch fonctionne efficacement pour des étoiles de type solaire présentant des oscillations de même type.

Alors, nous avons pu extraire les paramètres observationnels de 16 Cyg A que nous avons listés dans le tableau 4.1.

Cependant, cette méthode s'est montrée instable. Par exemple, la Figure 4.10 démontre bien son comportement inattendu. En effet, une évolution monotone de l'amplitude du glitch est attendue avec l'abondance d'hélium mais la figure a un comportement irrégulier. C'est alors que nous avons introduit à nouveau la constante de lissage dans le but d'améliorer ces résultats. Ce qui fut fructueux. La Figure 4.13 en est la preuve.

Néanmoins, certaines pistes restent encore à explorer afin d'améliorer la robustesse et la stabilité de notre méthode et avant de pouvoir déduire l'abondance en hélium de 16 Cyg A avec précision ainsi que de pouvoir l'appliquer à d'autres étoiles de type solaire. Celles-ci sont :

- l'utilisation d'une méthode d'ajustement globale plutôt que locale. Ainsi, nous nous assurerions de la convergence de notre algorithme vers un minimum global. Cependant, ces méthodes sont plus coûteuses en ressources numériques,
- un gel des paramètres de la composante lisse traitée en premier lieu lors de l'ajustement de la composante oscillante du glitch.

Dès lors, il reste encore du travail avant que la méthode que nous présentons dans ce travail de mémoire soit totalement opérationnelle et que nous puissions en déduire des informations précises quant à, dans un premier temps, 16 Cygni A et, dans la finalité, à d'autres étoiles de type solaire.

# Bibliographie

- [1] T. Appourchaux, H. M. Antia, O. Benomar, T. L. Campante, G. R. Davies, R. Handberg, R. Howe, C. Régulo, K. Belkacem, G. Houdek, R. A. García, and W. J. Chaplin. Oscillation mode linewidths and heights of 23 main-sequence stars observed by Kepler. *Astronomy and Astrophysics*, 566 :A20, June 2014.
- [2] W. H. Ball and L. Gizon. A new correction of stellar oscillation frequencies for near-surface effects. *Astronomy and Astrophysics*, 568 :A123, August 2014.
- [3] S. Basu, J. Christensen-Dalsgaard, W. J. Chaplin, Y. Elsworth, G. R. Isaak, R. New, J. Schou, M. J. Thompson, and S. Tomczyk. Solar internal sound speed as inferred from combined BiSON and LOWL oscillation frequencies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 292 :243, December 1997.
- [4] G. Buldgen, D. R. Reese, and M. A. Dupret. Constraints on the structure of 16 cygni a and 16 cygni b using inversion techniques. *Astronomy and Astrophysics*, 585(A109), 2016.
- [5] W.J. Chaplin and A. Miglio. Asteroseismology of solar-type and red-giant stars. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 51 :353–392, 2013. doi :10.1146/annurev-astro-082812-140938.
- [6] J. Christensen-Dalsgaard. *Stellar oscillations*. may 2003. Lecture notes.
- [7] J. Christensen-Dalsgaard. Stellar model fits and inversions. *Astronomische Nachrichten*, 333(10) :914–925, 2012.
- [8] J. Christensen-Dalsgaard, W. Dappen, and Y. Lebreton. Solar oscillation frequencies and the equation of state. *Nature*, 336 :634–638, December 1988.
- [9] J. Christensen-Dalsgaard, D. O. Gough, and F. Perez Hernandez. Stellar disharmony. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 235 :875–880, December 1988.
- [10] Jørgen Christensen-Dalsgaard. Helioseismology. *Rev. Mod. Phys.*, 74 :1073–1129, Nov 2002.
- [11] W. D. Cochran, A. P. Hatzes, R. P. Butler, and G. W. Marcy. The Discovery of a Planetary Companion to 16 Cygni B. *The Astrophysical Journal*, 483 :457–463, July 1997.
- [12] G. R. Davies, W. J. Chaplin, W. M. Farr, R. A. García, M. N. Lund, S. Mathis, T. S. Metcalfe, T. Appourchaux, S. Basu, O. Benomar, T. L. Campante, T. Ceillier, Y. Elsworth, R. Handberg, D. Salabert, and D. Stello. Asteroseismic inference on rotation, gyrochronology and planetary system dynamics of 16 Cygni. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 446 :2959–2966, January 2015.
- [13] G. R. Davies, V. Silva Aguirre, T. R. Bedding, R. Handberg, M. N. Lund, W. J. Chaplin, D. Huber, T. R. White, O. Benomar, S. Hekker, S. Basu, T. L. Campante, J. Christensen-Dalsgaard, Y. Elsworth, C. Karoff, H. Kjeldsen, M. S. Lundkvist, T. S. Metcalfe, and D. Stello. Oscillation frequencies for 35 Kepler solar-type planet-hosting stars using Bayesian techniques

- and machine learning. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 456 :2183–2195, February 2016.
- [14] P. de Meulenaer, F. Carrier, A. Miglio, T. R. Bedding, T. L. Campante, P. Eggenberger, H. Kjeldsen, and J. Montalbán. Core properties of  $\alpha$  Centauri A using asteroseismology. *Astronomy and Astrophysics*, 523 :A54, November 2010.
- [15] M. Deal, O. Richard, and S. Vauclair. Accretion of planetary matter and the lithium problem in the 16 Cygni stellar system. *Astronomy and Astrophysics*, 584 :A105, December 2015.
- [16] Centre National d’Etudes Spatiales. Corot, juillet 2016. <https://corot.cnes.fr/fr/accueil-22>.
- [17] M.-A. Dupret, K. Belkacem, R. Samadi, J. Montalbán, O. Moreira, A. Miglio, M. Godart, P. Ventura, H.-G. Ludwig, A. Grigahcène, M.-J. Goupil, A. Noels, and E. Caffau. Theoretical amplitudes and lifetimes of non-radial solar-like oscillations in red giants. *Astronomy and Astrophysics*, 506 :57–67, October 2009.
- [18] M.-A. Dupret, A. Grigahcène, R. Garrido, M. Gabriel, and R. Scuflaire. Convection-pulsation coupling. II. Excitation and stabilization mechanisms in  $\delta$  Sct and  $\gamma$  Dor stars. *Astronomy and Astrophysics*, 435 :927–939, June 2005.
- [19] M.A. Dupret. Stabilité stellaire et astérosismologie. Support de cours, 2017.
- [20] L. Gizon, J. Ballot, E. Michel, T. Stahn, G. Vauclair, H. Bruntt, P.-O. Quirion, O. Benomar, S. Vauclair, T. Appourchaux, M. Auvergne, A. Baglin, C. Barban, F. Baudin, M. Bazot, T. Campante, C. Catala, W. Chaplin, O. Creevey, S. Deheuvels, N. Dolez, Y. Elsworth, R. García, P. Gaulme, S. Mathis, S. Mathur, B. Mosser, C. Regulo, I. Roxburgh, D. Salabert, R. Samadi, K. Sato, G. Verner, S. Hanasoge, and K. R. Sreenivasan. Seismic constraints on rotation of Sun-like star and mass of exoplanet. *Proceedings of the National Academy of Science*, 110 :13267–13271, August 2013.
- [21] A. Grigahcène, M.-A. Dupret, M. Gabriel, R. Garrido, and R. Scuflaire. Convection-pulsation coupling. I. A mixing-length perturbative theory. *Astronomy and Astrophysics*, 434 :1055–1062, May 2005.
- [22] G. Houdek and D. O. Gough. An asteroseismic signature of helium ionization. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 375 :861–880, March 2007.
- [23] P. C. Keenan and R. C. McNeil. The Perkins catalog of revised MK types for the cooler stars. *Astrophysical Journal Supplement Series*, 71 :245–266, October 1989.
- [24] J. R. King, C. P. Deliyannis, D. D. Hiltgen, A. Stephens, K. Cunha, and A. M. Boesgaard. Lithium Abundances in the Solar Twins 16 CYG A and B and the Solar Analog alpha CEN A, Calibration of the 6707 Angstrom Li Region Linelist, and Implications. *Astronomical Journal*, 113 :1871, May 1997.
- [25] H. Kjeldsen, T. R. Bedding, and J. Christensen-Dalsgaard. Correcting Stellar Oscillation Frequencies for Near-Surface Effects. *Astrophysical Journal Letters*, 683 :L175, August 2008.
- [26] T. S. Metcalfe, W. J. Chaplin, T. Appourchaux, R. A. García, S. Basu, I. Brandão, O. L. Creevey, S. Deheuvels, G. Doğan, P. Eggenberger, C. Karoff, A. Miglio, D. Stello, M. Yıldız, Z. Çelik, H. M. Antia, O. Benomar, R. Howe, C. Régulo, D. Salabert, T. Stahn, T. R. Bedding, G. R. Davies, Y. Elsworth, L. Gizon, S. Hekker, S. Mathur, B. Mosser, S. T. Bryson, M. D. Still, J. Christensen-Dalsgaard, R. L. Gilliland, S. D. Kawaler, H. Kjeldsen, K. A. Ibrahim, T. C. Klaus, and J. Li. Asteroseismology of the Solar Analogs 16 Cyg A and B from Kepler Observations. *Astrophysical Journal Letters*, 748 :L10, March 2012.

- [27] M. J. P. F. G. Monteiro and M. J. Thompson. On the seismic signature of the HeII ionization zone in stellar envelopes. In F.-L. Deubner, J. Christensen-Dalsgaard, and D. Kurtz, editors, *New Eyes to See Inside the Sun and Stars*, volume 185 of *IAU Symposium*, page 317, 1998.
- [28] NASA. Kepler & k2 science center - mission objectives, mai 2017. <https://keplerscience.arc.nasa.gov/objectives.html>.
- [29] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling. *Numerical Recipes The art of scientific computing*. Cambridge University Press, 1988.
- [30] I. Ramírez, J. Meléndez, and M. Asplund. Accurate abundance patterns of solar twins and analogs. Does the anomalous solar chemical composition come from planet formation? *Astronomy and Astrophysics*, 508 :L17–L20, December 2009.
- [31] I. Roxburgh. Differences between the values of frequencies by different fitters 16cyg&b and kepler legacy values. <https://arxiv.org/abs/1609.00568>, September 2016.
- [32] I. W. Roxburgh and S. V. Vorontsov. The ratio of small to large separations of acoustic oscillations as a diagnostic of the interior of solar-like stars. *Astronomy and Astrophysics*, 411 :215–220, November 2003.
- [33] R. Scuflaire. *Stabilité stellaire. Support de cours*, 2006.
- [34] R. Scuflaire, S. Théado, J. Montalbán, A. Miglio, P.-O. Bourge, M. Godart, A. Thoul, and A. Noels. CLÉS, Code Liégeois d’Évolution Stellaire. *Astrophysics and Space Science*, 316 :83–91, August 2008.
- [35] CoRoT Team. *The CoRoT Legacy Book : The Adventure of the Ultra High Precision Photometry from Space*, chapter I.3, IV.1, pages 11–15,181–195. EDP Science, 2016. Coordination Annie Baglin.
- [36] M. Tucci Maia, J. Meléndez, and I. Ramírez. High Precision Abundances in the 16 Cyg Binary System : A Signature of the Rocky Core in the Giant Planet. *Astrophysical Journal Letters*, 790 :L25, August 2014.
- [37] Kuldeep Verma, Keyuri Raodeo, H. M. Antia, Anwesh Mazumdar, Sarbani Basu, Mikkel N. Lund, and Víctor Silva Aguirre. Seismic measurement of the locations of the base of convection zone and helium ionization zone for stars in the kepler seismic legacy sample. *The Astrophysical Journal*, 837(1) :47, 2017.
- [38] K. Verma et al. Asteroseismic estimate of helium abundance of a solar analog binary system. *The Astrophysical Journal*, 790(2) :138(13pp), August 1 2014.
- [39] T. R. White, D. Huber, V. Maestro, T. R. Bedding, M. J. Ireland, F. Baron, T. S. Boyajian, X. Che, J. D. Monnier, B. J. S. Pope, R. M. Roettenbacher, D. Stello, P. G. Tuthill, C. D. Farrington, P. J. Goldfinger, H. A. McAlister, G. H. Schaefer, J. Sturmann, L. Sturmann, T. A. ten Brummelaar, and N. H. Turner. Interferometric radii of bright Kepler stars with the CHARA Array :  $\theta$  Cygni and 16 Cygni A and B. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 433 :1262–1270, August 2013.