

## **Nouvelle approche de la classification par rigidité des assemblages poutre-colonne en construction métallique**

**Auteur :** Geuzaine, Margaux

**Promoteur(s) :** Jaspard, Jean-Pierre; Demonceau, Jean-Francois

**Faculté :** Faculté des Sciences appliquées

**Diplôme :** Master en ingénieur civil des constructions, à finalité spécialisée en "civil engineering"

**Année académique :** 2017-2018

**URI/URL :** <http://hdl.handle.net/2268.2/4679>

---

### *Avertissement à l'attention des usagers :*

*Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.*

*Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.*

---



Université de Liège - Faculté des Sciences Appliquées

Année académique 2017-2018

# NOUVELLE APPROCHE DE LA CLASSIFICATION PAR RIGIDITÉ DES ASSEMBLAGES POUTRE-COLONNE EN CONSTRUCTION MÉTALLIQUE

Mémoire de fin d'études réalisé par

MARGAUX GEUZAINÉ

en vue de l'obtention du grade de Master en Ingénieur Civil des Constructions

Membres du jury :

J.-P. Jaspart – ULiège

J.-F. Demonceau – ULiège

J.-M. Franssen – ULiège

R. Oly – Astron Buildings S.A.

# Table des matières

Notations.....	5
Remerciements .....	7
Résumé .....	8
Abstract.....	8
CHAPITRE 1 : Introduction .....	9
CHAPITRE 2 : État des connaissances sur la classification par rigidité des assemblages poutre-colonne d'une structure .....	10
1. INTRODUCTION .....	10
2. ANALYSE DES STRUCTURES.....	10
2.1. Introduction .....	10
2.2. Classification des structures (Maquoi & Chabrolin, 1998).....	11
2.3. Formule de Merchant-Rankine (Demonceau, 2008) .....	12
3. CLASSIFICATION PAR RIGIDITÉ DES ASSEMBLAGES .....	13
3.1. Introduction .....	13
3.2. Utilité et principes de base de la classification par rigidité .....	14
3.3. Critères de classification de l'Eurocode 3 .....	16
3.4. Proposition de classification par rigidité de Gomes.....	19
3.5. Proposition de classification par rigidité des recherches COST .....	23
3.6. Principe de la structure équivalente .....	27
4. CONCLUSION .....	29
CHAPITRE 3 : Outil numérique.....	31
1. INTRODUCTION .....	31
2. PROGRAMME ÉLÉMENTS FINIS NON LINÉAIRE FINELG .....	31
2.1. Description de FINELG .....	31
2.2. Hypothèses de modélisation des structures .....	32
3. PROGRAMME MATLAB .....	32
3.1. Principe.....	32
3.2. Appel de FINELG .....	33

3.3. Extraction des résultats de FINELG vers MATLAB .....	33
3.4. Modification de la rigidité des assemblages .....	34
4. ORGANIGRAMMES.....	35
4.1. Critère de stabilité à 95 % .....	35
4.2. Critère de résistance à 95 % .....	35
4.3. Critère de déplacement transversal au premier ordre à 90 % .....	36
4.4. Critère de déplacement transversal au second ordre à 90 % .....	36
5. CONCLUSION .....	37

## CHAPITRE 4 : Étude et validation numérique de critères divers pour choisir le plus approprié..... 38

1. INTRODUCTION .....	38
2. CRITÈRE DE STABILITÉ DE L'EUROCODE 3 .....	38
2.1. Introduction .....	38
2.2. Formulation analytique .....	39
2.3. Comparaison des anciennes et des nouvelles courbes .....	41
2.4. Comparaison analytique/numérique.....	41
3. CRITÈRE DE RÉSISTANCE DE GOMES .....	44
3.1. Introduction .....	44
3.2. Formulation analytique de 4 variantes .....	44
3.3. Comparaison analytique/numérique.....	45
4. CRITÈRE DE DÉPLACEMENT DE GOMES .....	47
4.1. Introduction .....	47
4.2. Formulation analytique .....	48
4.3. Comparaison analytique/numérique.....	51
5. CRITÈRE DE RÉSISTANCE DES RECHERCHES COST .....	53
5.1. Introduction .....	53
5.2. Formulation analytique .....	54
5.3. Comparaison analytique/numérique.....	55
6. CRITÈRE DE DÉPLACEMENT DES RECHERCHES COST.....	56
6.1. Introduction .....	56
6.2. Formulation analytique .....	57
6.3. Comparaison analytique/numérique.....	57
7. CONCLUSION : CHOIX D'UN CRITÈRE À ÉTENDRE.....	60

CHAPITRE 5 : Extension du critère retenu à des structures quelconques .....	64
1. INTRODUCTION .....	64
2. PAR LE PRINCIPE DE LA STRUCTURE ÉQUIVALENTE.....	65
2.1. Introduction .....	65
2.2. Critère équivalent de déplacement à 90 %.....	65
2.3. Structure régulière à plusieurs travées .....	67
2.4. Structure irrégulière à deux travées .....	70
3. PAR « CURVE FITTING » .....	76
3.1. Introduction .....	76
3.2. Exposé de la nouvelle méthode.....	76
3.3. Limites de la méthode .....	83
4. CONCLUSION .....	84
 CHAPITRE 6 : Exemple pratique .....	 86
1. INTRODUCTION .....	86
2. EXEMPLE.....	86
2.1. Structure étudiée .....	86
2.2. Critère de classification de l’Eurocode 3 .....	87
2.3. Critère étendu par le principe de la structure équivalente .....	87
2.4. Comparaison .....	88
3. CONCLUSION .....	88
 CHAPITRE 7 : Conclusions et perspectives.....	 89
1. CONCLUSIONS .....	89
2. PERSPECTIVES.....	92
 Références .....	 93
 ANNEXE 1 : Charge critique d’une colonne.....	 94
MÉTHODE DE L’EUROCODE 3, ANNEXE E.....	94
 ANNEXE 2 : Méthode des rotations.....	 96
MATRICE DE RIGIDITÉ D’UNE POUTRE DOTÉE D’ASSEMBLAGES SEMI-RIGIDES.....	96
 ANNEXE 3 : Méthode « Z », structure irrégulière .....	 99

# Notations

$a_j$	Coefficient de répartition des rigidités d'assemblages
$\mathbf{d}$	Vecteur des inconnues nodales
$D_i$	Inconnue cinématique
$E$	Module de Young de l'acier
$F$	Charge horizontale
$I_b$	Moment d'inertie d'une poutre
$I_c$	Moment d'inertie d'une colonne
$K$	Rapport entre la longueur de flambement et la longueur d'épure
$\mathbf{K}$	Matrice de rigidité
$\mathbf{K}_\sigma$	Matrice des contraintes
$K_b$	Rigidité flexionnelle d'une poutre
$K_b^*$	Rigidité effective d'une poutre avec l'assemblage
$K_{b,\acute{e}q}$	Rigidité flexionnelle de la poutre de la structure équivalente à assemblages rigides
$K_{b,m}$	Valeur moyenne de $I_b/L_b$ pour toutes les poutres à la partie supérieure d'un étage
$K_c$	Rigidité flexionnelle d'une colonne
$K_{c,\acute{e}q}$	Rigidité flexionnelle d'une colonne de la structure équivalente à assemblages rigides
$K_{c,m}$	Valeur moyenne de $I_c/L_c$ pour tous les poteaux de cet étage
$L_b$	Longueur d'une poutre
$L_c$	Longueur d'une colonne
$L_{cr}$	Longueur de flambement
$M$	Moment
$M_j$	Moment résistant d'un assemblage
$M^\infty$	Moment dans la structure à assemblages infiniment rigides
$\mathbf{p}$	Vecteur des charges nodales
$P_{cr}$	Charge critique
$P_{pl}$	Charge plastique
$P_u$	Charge ultime
$S_{j,ini}$	Rigidité en rotation initiale d'un assemblage

$S_{b,i}$	Rigidité identique des assemblages aux deux extrémités d'une même travée
$\bar{S}$	Rigidité adimensionnelle d'un assemblage
$\mathbf{v}_{cr}$	Mode critique
$V_{cr}$	Charge critique
$V_{Ed}$	Charge de calcul
$X$	Rapport entre le multiplicateur critique et le multiplicateur plastique
$\alpha$	Paramètre égal à $2K_b/S_{j,ini}$
$\beta_{cr}$	Sévérité d'un critère de stabilité
$\beta_{\delta}$	Sévérité d'un critère de déplacement
$\beta_{\Delta,1}$	Sévérité d'un critère de déplacement transversal au premier ordre
$\beta_{\Delta,2}$	Sévérité d'un critère de déplacement transversal au second ordre
$\beta_u$	Sévérité d'un critère de résistance ultime
$\Delta$	Déplacement transversal en tête des colonnes
$\lambda_{cr}$	Multiplicateur critique
$\lambda_{pl}$	Multiplicateur plastique
$\lambda_u$	Multiplicateur ultime
$\rho$	Rapport des rigidités flexionnelles d'une poutre et d'une colonne
$\phi$	Rotation relative des éléments assemblés
$\psi_{braced}$	Flexibilité latérale d'une structure contreventée
$\psi_{unbraced}$	Flexibilité latérale d'une structure non-contreventée
$\dots S_{j,ini}$	Paramètre relatif à la structure à assemblages de rigidité finie
$\dots \bar{S}$	Paramètre relatif à la structure à assemblages de rigidité finie
$\dots S_{j,ini \rightarrow \infty}$	Paramètre relatif à la structure à assemblages infiniment rigides
$\dots \bar{S} \rightarrow \infty$	Paramètre relatif à la structure à assemblages infiniment rigides
$\dots \infty$	Paramètre relatif à la structure à assemblages infiniment rigides

# Remerciements

Je profite de ce dernier travail pour remercier toutes les personnes qui ont, de près ou de loin, contribué à sa réalisation ainsi qu'au bon déroulement de mes études.

Tout d'abord, je tiens à remercier mes promoteurs, M. Jaspard et M. Demonceau, qui ont suivi mes recherches avec assiduité, m'ont prodigué de nombreux conseils et m'ont aidée à garder le cap. Leur rôle de guide n'a pas été de tout repos !

Ensuite, mes remerciements vont à Maxime Dumont, à mes parents, Frédérique et Charles-Henri Geuzaine, à mon frère et à ma sœur, Briec et Romane Geuzaine, ainsi qu'à mes grands-parents, Madeleine et Jean Dupont, pour tout le soutien qu'ils m'ont apporté durant ces cinq années d'études.

De plus, je remercie aussi tout spécialement Nicole Dekeyser pour ses relectures attentives de la plupart de mes travaux et surtout de ce travail de fin d'études.

Margaux Geuzaine



# Résumé

Les critères de classification par rigidité des assemblages rigides assurent que le remplacement de leur rigidité réelle finie par une rigidité idéalisée infinie n'influence pas de façon significative le comportement de la structure lors de son analyse. L'analyse de la structure est ainsi simplifiée sans surestimer sa résistance ou sous-estimer ses déplacements. Le critère présent actuellement dans l'Eurocode 3, partie 1-8, est très approximatif. Il oblige donc certains assemblages à être considérés comme semi-rigides ou à être renforcés, avec pour effet l'augmentation des coûts de fabrication, alors qu'ils sont déjà rigides dans les faits. L'objectif de ce travail consiste à définir un nouveau critère, moins restrictif mais toujours sécuritaire. Tandis que le critère de l'Eurocode 3 limite l'influence de l'idéalisation de la rigidité des assemblages sur la stabilité de la structure, les autres critères envisagés dans ce travail se concentrent plutôt sur sa résistance et son déplacement transversal. Ces critères sont établis grâce à la formule de Merchant-Rankine et à la méthode des rotations. Suite à leur étude approfondie, le critère le plus approprié est sélectionné. Il limite l'influence de l'idéalisation de la rigidité des assemblages d'un portique symétrique simple, articulé en pieds, sur son déplacement transversal et indirectement sur sa résistance et sa stabilité. Par le principe de la structure équivalente, avec les règles de transformation approchées, un seul critère est déterminé pour tous les assemblages d'une structure régulière à un étage, puis, une méthode empirique montre que la rigidité demandée à certains assemblages dépend de celle des autres. Pour finir, 3 critères de classification sont définis : pour un ou plusieurs assemblages d'un étage ; pour tous les assemblages d'un étage ; pour tous les assemblages de la structure en considérant le critère d'étage le plus restrictif.

# Abstract

Stiffness classification criteria for rigid joints ensure that the replacement of their actual finite stiffness by an idealised infinite stiffness does not significantly influence the behaviour of the structure during its analysis. The analysis of the structure is thus simplified, without overestimating its strength and underestimating its displacements. The current criterion mentioned in Eurocode 3, part 1-8, is very approximate. Some joints are therefore classified as semi-rigid or stiffened, which increases their cost, even if they are actually already rigid. The purpose of this work is to define a new, less restrictive but still safe, criterion. While the Eurocode 3 criterion limits the influence of the joints stiffness idealisation on the stability of the structure, other criteria focus on its resistance and its transversal displacement. They are established in this work using the Merchant-Rankine formula and the slope deflection method. After their detailed study, the most appropriate criterion is selected. It limits the influence of the stiffness idealisation of joints on the transversal displacement of a symmetrical one-span portal with hinged feet and, indirectly, on its resistance and its stability. Based on the equivalent structure principle with approximate transformation rules, a single criterion is determined for all the joints of a regular one-storey structure, then, an empirical method shows that the stiffness required for some joints depends on other joint stiffnesses. Finally, 3 classification criteria are defined: for one or more joints of a storey; for all the joints of a storey; for all the joints of the structure considering the most restrictive storey criterion.

# CHAPITRE 1 : Introduction

Traditionnellement, les assemblages de constructions métalliques sont considérés comme infiniment rigides ou parfaitement articulés. Cependant, il n'existe en réalité aucun assemblage de rigidité infinie ou de rigidité nulle. Le comportement général des assemblages est appelé « semi-rigide » et les assemblages sont caractérisés par une rigidité en rotation finie non nulle.

Afin d'éviter la complexité liée au comportement semi-rigide des assemblages lors de l'analyse d'une structure, tout en assurant que les résultats de cette analyse mènent à un dimensionnement sécuritaire, le remplacement de la rigidité finie des assemblages par une rigidité idéalisée infinie ou nulle est autorisé à condition que cette idéalisation n'influence pas de façon significative le comportement de la structure. Cette condition est remplie si la rigidité des assemblages est telle qu'ils sont respectivement classés comme rigides ou articulés.

Le critère de classification de l'Eurocode 3, partie 1-8, qui distingue les assemblages rigides des assemblages semi-rigides, est connu pour être très approximatif. Dès lors, alors qu'ils sont déjà rigides dans les faits, les assemblages sont soit considérés comme semi-rigides, soit renforcés, avec pour effet l'augmentation inévitable et sensible des coûts de fabrication.

L'objectif de ce travail de fin d'études est de définir un nouveau critère de classification des assemblages rigides qui reste sécuritaire mais qui soit moins restrictif. L'intérêt de ce travail est d'apporter une réponse simple et pratique, sur base de réflexions d'ordre théorique et de l'étude de portiques divers en acier, à une problématique bien réelle à laquelle les bureaux d'études et les entreprises de construction sont régulièrement confrontés.

Pour ce faire, les principes de base de la classification par rigidité des assemblages sont d'abord établis dans le chapitre 2. Ensuite, le critère de classification rigide/semi-rigide de l'Eurocode 3 est étudié en détails. Il garantit que l'idéalisation des assemblages ne modifie pas significativement la stabilité de la structure.

D'autres critères de classification rigide/semi-rigide sont aussi envisagés dans ce chapitre pour classer les assemblages de structures symétriques à une seule travée. Ils limitent plutôt l'impact de l'idéalisation des assemblages sur la résistance et le déplacement transversal de la structure. Ils sont établis grâce à la formule de Merchant-Rankine et à la méthode des rotations.

La plupart des développements analytiques sont validés numériquement au moyen d'un programme MATLAB/FINELG tout spécialement conçu à cette fin dans le cadre de ce travail (chapitre 3).

Suite à l'étude approfondie de ces critères et à leur validation numérique qui se trouvent au chapitre 4, l'un d'entre eux est sélectionné à la fin de ce chapitre et considéré comme le plus approprié pour rencontrer l'objectif poursuivi.

Au chapitre 5, le critère retenu est alors finalement généralisé pour classer les assemblages de structures qui ne sont pas forcément symétriques et qui comprennent parfois plusieurs travées et plusieurs étages. Cette extension est obtenue grâce au principe de la structure équivalente ou par une méthode développée empiriquement. Un exemple pratique d'application de l'ancien et du nouveau critère est illustré au chapitre 6.

# CHAPITRE 2 : État des connaissances sur la classification par rigidité des assemblages poutre-colonne d'une structure

## 1. INTRODUCTION

Le chapitre 2 introduit d'abord les notions d'analyse des structures (§ 2) essentielles à la bonne compréhension du travail de fin d'études dans son intégralité. Il s'agit du système de classification des structures (§ 2.2) et de la formule de Merchant-Rankine (§ 2.3). Par contre, certaines connaissances de base moins indispensables sont supposées acquises par le lecteur comme, par exemple, la classification des sections, la définition des effets du second ordre ou, encore, les différents types d'analyses, les hypothèses associées à chacune d'entre elles et les informations qu'elles fournissent sur le comportement d'une structure.

Dans la suite du chapitre (§ 3), l'utilité de la classification des assemblages est abordée (§ 3.2) et plusieurs critères de classification par rigidité des assemblages poutre-colonne sont exposés puis critiqués (§ 3.3-3.5). Ils imposent aux assemblages une certaine rigidité minimale (ou maximale) afin d'être classés comme rigides (ou articulés). L'accent est mis sur les critères de classification qui distinguent les assemblages rigides des assemblages semi-rigides étant donné que les critères de classification des assemblages articulés sont peu utilisés en pratique.

Le principe de la structure équivalente à assemblages infiniment rigides est finalement évoqué (§ 3.6) et s'avère crucial pour étendre les critères développés sur des structures simples à des structures plus complexes.

## 2. ANALYSE DES STRUCTURES

### 2.1. Introduction

En principe, le choix de l'un ou l'autre type d'analyse d'une structure est posé en fonction de sa classification et de celle des sections de ses éléments constitutifs. Par exemple, une analyse plastique est envisageable uniquement lorsque les sections sont de classe 1. Dans le même ordre d'idées, une analyse au premier ordre est uniquement adaptée aux structures rigides, insensibles aux effets du second ordre. Selon le type d'analyse choisi, différentes vérifications doivent être menées afin de justifier l'applicabilité de ce choix et de garantir, notamment, que la structure résiste bien aux efforts qui lui sont appliqués, sans se déformer de manière excessive, tout en restant stable.

Les distinctions principales entre tous ces types d'analyses concernent la prise en compte ou non des non-linéarités, matérielles ou géométriques. Une analyse plastique fait intervenir les non-linéarités matérielles, contrairement à une analyse élastique linéaire. Une analyse au second ordre fait intervenir les non-linéarités géométriques, contrairement à une analyse au premier ordre.

Cependant, l'objectif de ce travail n'est pas de dimensionner des structures mais bien de déterminer des critères de classification des assemblages. Dès lors, les différents types d'analyses sont plutôt utilisés afin de calculer certaines valeurs caractéristiques du comportement des structures sur lesquelles les critères de classification se basent comme le multiplicateur critique, le multiplicateur

plastique, le multiplicateur ultime des charges ou, encore, les déplacements élastiques au premier et au second ordre.

De nombreux logiciels sont disponibles pour effectuer tous ces types d'analyses mais des méthodes analytiques simplifiées, adaptées à un calcul à la main ou nécessitant l'aide d'un ordinateur, existent aussi comme, par exemple, la formule de Merchant-Rankine ou bien la méthode des déplacements.

Étant donné que les critères de classification des assemblages dépendent en général du type de structure, le système de classification des structures est avant tout détaillé (§ 2.2) puis la formule de Merchant-Rankine est expliquée et limitée à un certain domaine de validité (§ 2.3). Elle sera utilisée à plusieurs reprises dans la suite du travail afin de formuler des critères de classification.

## 2.2. Classification des structures (Maquoi & Chabrolin, 1998)

Dans l'Eurocode 3 actuel, les critères de classification par rigidité des assemblages présents dans une structure métallique sont définis en fonction du caractère contreventé ou non de cette structure.

Cependant, le concept de structure contreventée n'apparaît plus tel quel dans le reste de l'Eurocode 3 depuis le passage de la version ENV à la version officielle EN en 2005. Il contient maintenant plutôt des distinctions en fonction du caractère rigide ou souple des structures.

C'est pourquoi les critères qui régissent la classification des structures en fonction de leur système de contreventement et leur rigidité sont présentés ici.

### 2.2.1. Structure contreventée ou non-contreventée

En principe, le système de contreventement sert à assurer la stabilité horizontale globale d'une structure en conduisant les charges horizontales comme le vent jusqu'aux fondations. Il sert aussi à rigidifier la structure afin de limiter les déplacements horizontaux qui apparaissent sous ces mêmes charges.

Cependant, il ne suffit pas que la structure soit dotée d'un système de contreventement pour qu'elle soit classée comme contreventée. Ce système de contreventement doit aussi être efficace, c'est-à-dire qu'il doit réduire les déplacements horizontaux à moins de 20 % de ce qu'ils seraient sans aucun système de contreventement.

Autrement dit, une structure est classée comme contreventée lorsque les deux critères suivants sont remplis :

- 1) Elle est équipée d'un système de contreventement.
- 2)  $\psi_{braced} \leq 0,2 \psi_{unbraced}$  où  $\psi_{braced}$  est la flexibilité latérale de la structure équipée du système de contreventement alors que  $\psi_{unbraced}$  est la flexibilité latérale de la structure seule, sans le système de contreventement.

Si un seul de ces deux critères n'est pas respecté, alors la structure est considérée comme non-contreventée.

### 2.2.2. Structure souple ou rigide

Lorsque la réponse d'une structure sous des sollicitations horizontales est telle que les effets du second ordre globaux sont négligeables, cette structure est dite rigide. Dans le cas contraire, il s'agit d'une structure souple.

En pratique, la classification entre les structures rigides et les structures souples se base sur la valeur du ratio entre la première résultante verticale critique élastique  $V_{cr}$  qui provoque l'instabilité d'ensemble de la structure et la résultante verticale totale  $V_{Ed}$  des charges appliquées sur la structure. Plus  $V_{Ed}$  se rapproche de  $V_{cr}$  et plus les effets du second ordre sont importants. Les critères de classification fournis dans l'Eurocode 3 sont les suivants :

- Analyse élastique : la structure est rigide si  $\lambda_{cr} = \frac{V_{cr}}{V_{Ed}} < 10$  et souple sinon.
- Analyse plastique : la structure est rigide si  $\lambda_{cr} = \frac{V_{cr}}{V_{Ed}} < 15$  et souple sinon.

Le critère est plus restrictif lorsque les non-linéarités matérielles sont incluses dans l'analyse puisqu'elles augmentent les effets du second ordre.

### 2.2.3. Résumé

D'habitude, les structures contreventées ont tendance à être plutôt rigides tandis que les structures non-contreventées sont plutôt souples. Cependant, il ne s'agit pas d'une généralité, étant donné, par exemple, qu'une structure extrêmement souple reste souple même si elle est équipée d'un système de contreventement efficace.

Dès lors, il existe 4 combinaisons possibles de classification d'une structure et ces dernières sont résumées à la Figure 1.

	Contreventé	Non-contreventé
Rigide		
Souple		

Figure 1 – Quatre combinaisons de classification d'une structure (Maquoi & Chabrolin, 1998)

## 2.3. Formule de Merchant-Rankine (Demonceau, 2008)

La formule empirique de Merchant-Rankine initiale (2-1) prédit la valeur du multiplicateur ultime des charges de la structure  $\lambda_u$  en fonction du multiplicateur rigide-plastique au premier ordre des charges  $\lambda_{pl}$  et du multiplicateur critique élastique des charges  $\lambda_{cr}$ .

$$\frac{1}{\lambda_u} = \frac{1}{\lambda_{cr}} + \frac{1}{\lambda_{pl}} \quad (2-1)$$

Si la structure est très rigide, les effets du second ordre n'ont que peu d'influence sur son comportement et le multiplicateur critique  $\lambda_{cr}$  est largement supérieur au multiplicateur plastique  $\lambda_{pl}$ . Le multiplicateur ultime  $\lambda_u$  est alors très proche de  $\lambda_{pl}$  et la ruine de la structure est provoquée par l'apparition d'un mécanisme plastique complet. Au contraire, si la structure est très souple, le multiplicateur critique  $\lambda_{cr}$  est de loin inférieur au multiplicateur plastique  $\lambda_{pl}$ . Le multiplicateur ultime  $\lambda_u$  est alors plutôt proche de  $\lambda_{cr}$  et la ruine de la structure est liée à un phénomène d'instabilité.

Plus tard, Wood a suggéré de modifier légèrement cette formule (2-2) pour prendre en compte l'effet bénéfique lié à l'écroissance de l'acier.

$$\frac{1}{\lambda_u} = \frac{1}{\lambda_{cr}} + \frac{0,9}{\lambda_{pl}} \quad (2-2)$$

L'utilisation de cette formule est valable uniquement pour les structures de souplesse limitée, c'est-à-dire que le ratio entre leur multiplicateur critique  $\lambda_{cr}$  et leur multiplicateur plastique  $\lambda_{pl}$  doit être supérieur à 4. Si ce ratio est supérieur à 10, la structure est classée comme rigide. Dans ce cas, seule une analyse rigide-plastique est à effectuer et le multiplicateur plastique obtenu par cette analyse  $\lambda_{pl}$  donne une approximation suffisamment précise du multiplicateur ultime  $\lambda_u$  de la structure.

## 3. CLASSIFICATION PAR RIGIDITÉ DES ASSEMBLAGES

### 3.1. Introduction

Il existe 3 axes principaux de classification des assemblages : la résistance, la ductilité et la rigidité.

Par rapport à leur résistance, les assemblages sont répartis dans trois catégories en fonction de leur moment résistant. Selon l'Eurocode 3, ils sont soit pleinement résistants si leur moment résistant dépasse le moment résistant plastique de tous les éléments assemblés, soit articulés si leur moment résistant n'excède pas 25 % du moment résistant exigé pour un assemblage à résistance complète et à condition qu'ils possèdent également une capacité de rotation suffisante, soit partiellement résistants s'ils ne répondent pas aux critères des deux autres catégories.

Concernant la ductilité, la classification des assemblages ressemble beaucoup à celle des sections. Elle dépend principalement de leur capacité de rotation et de l'apparition d'instabilité ou de rupture fragile avant d'atteindre leur moment résistant.

Ces deux premiers axes ne sont pas investigués plus en détails dans la suite étant donné que la définition de leurs différentes catégories est très claire et ne nécessite pas spécialement d'amélioration, contrairement aux critères de classification par rigidité des assemblages qui rangent les assemblages dans trois groupes : les assemblages rigides, les assemblages semi-rigides et les assemblages articulés.

En effet, la classification par rigidité des assemblages est complexe puisqu'elle est influencée par le contexte structural dans lequel les assemblages sont installés. Les critères sont censés dépendre non seulement des caractéristiques géométriques et mécaniques des assemblages eux-mêmes mais aussi de la géométrie de la structure dans son ensemble.

En premier lieu, l'utilité et les principes de base de la classification par rigidité sont présentés (§ 3.2). Après quoi, les critères de l'Eurocode 3 sont décrits (§ 3.3). Leur origine mathématique est détaillée (§ 3.3.1) puis ils sont critiqués (§ 3.3.2) afin d'apercevoir les possibilités d'amélioration. La même démarche est suivie pour expliciter d'autres critères provenant des recherches de F. Gomes (§ 3.4) et des recherches COST (European Cooperation in Science and Technology) (§ 3.5). Étant donné qu'aucun critère de classification par rigidité des assemblages articulés n'est utilisé en pratique, la plupart des critères énoncés concernent la distinction entre les assemblages poutre-colonne rigides et les assemblages poutre-colonne semi-rigides dans des structures symétriques, à un étage et à une travée.

### 3.2. Utilité et principes de base de la classification par rigidité

En général, le comportement des assemblages est décrit par une courbe exprimant l'évolution du moment  $M$  qui se développe dans l'assemblage en fonction de la rotation relative  $\phi$  entre les extrémités des éléments assemblés (idéalisés par leurs axes).

Traditionnellement, les assemblages ont toujours été répartis dans deux catégories distinctes selon leur rigidité en rotation : les assemblages rigides et les assemblages articulés.

Lorsqu'un assemblage est infiniment rigide, la rotation relative entre les éléments connectés est nulle quel que soit le moment auquel l'assemblage est soumis. Il n'existe aucune différence entre les rotations respectives des extrémités des éléments liés à cet endroit. L'assemblage est globalement soumis à une seule rotation de corps rigide. Dès lors, la courbe de  $M$  en fonction de  $\phi$ , caractéristique du comportement des assemblages rigides, est une droite verticale passant par l'origine (Figure 2).

Lorsqu'un assemblage est articulé ou infiniment souple, le moment dans l'assemblage reste nul quelle que soit la rotation relative entre les extrémités des éléments connectés par cet assemblage. Par conséquent, la courbe de  $M$  en fonction de  $\phi$  représentative du comportement des assemblages articulés est une droite horizontale passant par l'origine (Figure 2).

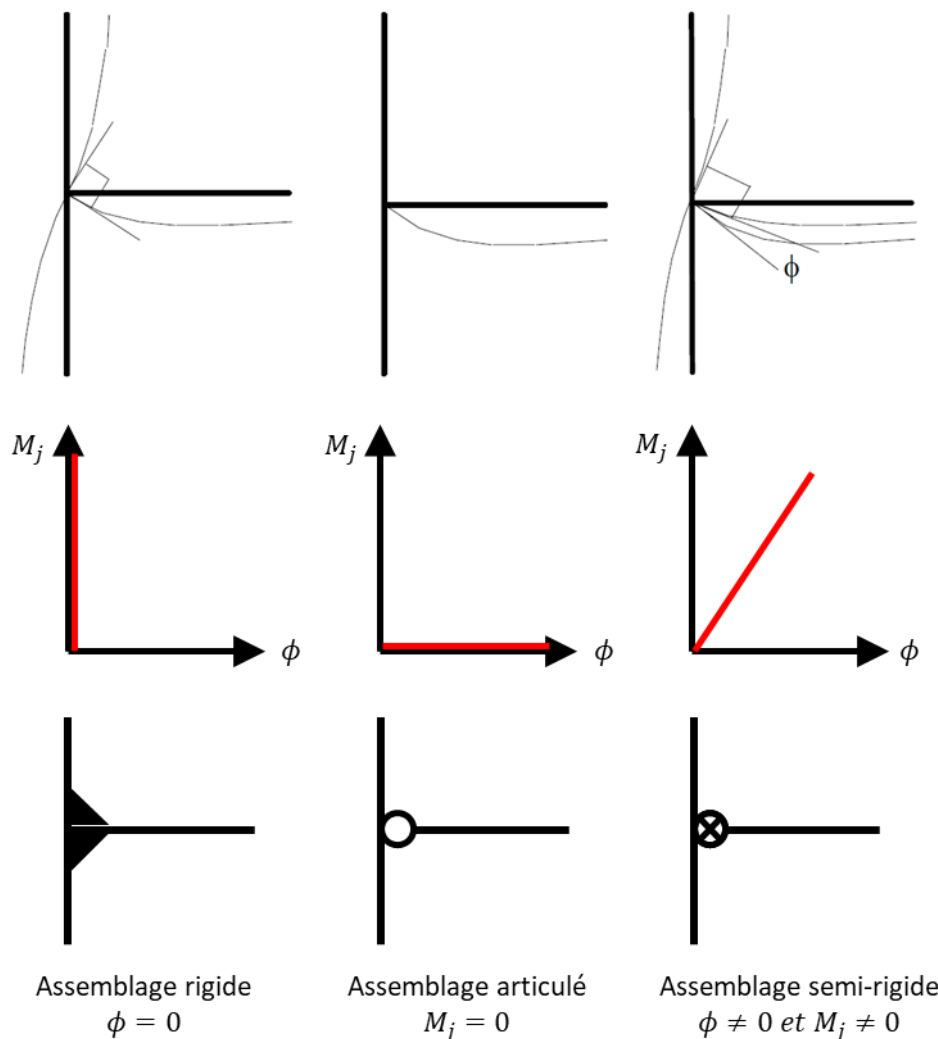


Figure 2 – Comportement et modélisation des assemblages (Maquoi & Chabrolin, 1998)

Cependant, la courbe relative au comportement en rotation d'assemblages réels se trouve toujours quelque part entre ces deux situations extrêmes puisqu'il n'existe en pratique aucun assemblage de rigidité infinie ou de rigidité nulle (Figure 2). Tous les assemblages possèdent une rigidité en rotation initiale propre  $S_{j,ini}$  (pente de la courbe  $M - \phi$ ) qui résulte de la déformabilité de leurs composantes constitutives. Ils appartiennent alors à la catégorie des assemblages semi-rigides.

Évidemment, la modélisation de la semi-rigidité des assemblages reflète mieux la réalité mais elle rend l'analyse de la structure plus complexe. C'est pourquoi, l'Eurocode 3 autorise ses utilisateurs à considérer les assemblages comme rigides ou articulés si certains critères sont respectés.

Ces critères établissent un système de classification par rigidité des assemblages. Ils séparent le plan  $M - \phi$  en trois zones, celles des assemblages rigides, semi-rigides et articulés. Les critères qui distinguent les assemblages rigides ou articulés des assemblages semi-rigides assurent que le remplacement de la rigidité propre de ces assemblages par une rigidité idéalisée infinie ou nulle n'influence pas de façon significative le comportement global de la structure dont ils font partie. L'analyse est ainsi simplifiée sans pour autant trop compromettre l'exactitude des résultats de sorte que le dimensionnement de la structure, basé sur les résultats de cette analyse, reste sécuritaire.

Concernant la distinction entre les assemblages rigides et les assemblages semi-rigides sur laquelle ce travail se concentre, l'influence de l'idéalisation des assemblages sur le comportement de la structure est quantifiée en comparant deux grandeurs identiques (force ou déplacement), l'une provenant de l'analyse de la structure réelle à assemblages de rigidité finie et l'autre issue de l'analyse de la même structure dans laquelle les assemblages à classer comme rigides sont remplacés par des assemblages infiniment rigides (Maquoi, Jaspard, Briquet, Guisse, & Lognard, 1994-1995).

Les critères de classification qui distinguent les assemblages rigides des assemblages semi-rigides sont déterminés en imposant des limites aux rapports entre deux grandeurs identiques. Ces limites sont telles que les différences de comportement entre la structure à assemblages de rigidité finie  $S_{j,ini}$  et la structure à assemblages infiniment rigides  $S_{j,ini} \rightarrow \infty$  sont jugées acceptables. En pratique, cela signifie que la rigidité des assemblages est telle que :

- 1) Le multiplicateur critique des charges  $\lambda_{cr}$  (la charge critique  $P_{cr}$ ) de la structure à assemblages de rigidité finie  $S_{j,ini}$  est supérieur(e) à 95 % du multiplicateur critique des charges (de la charge critique) de la même structure idéalisée avec des assemblages infiniment rigides  $S_{j,ini} \rightarrow \infty$ . Cette condition est appelée « critère de stabilité à 95 % » :

$$\beta_{cr} = \frac{\lambda_{cr}^{S_{j,ini}}}{\lambda_{cr}^{S_{j,ini} \rightarrow \infty}} = \frac{P_{cr}^{S_{j,ini}}}{P_{cr}^{S_{j,ini} \rightarrow \infty}} \geq 0,95 \quad (2-3)$$

- 2) Le multiplicateur ultime des charges  $\lambda_u$  (la charge ultime  $P_u$ ) de la structure à assemblages de rigidité finie  $S_{j,ini}$  est supérieur(e) à 95 % du multiplicateur ultime des charges (de la charge ultime) de la même structure idéalisée avec des assemblages infiniment rigides  $S_{j,ini} \rightarrow \infty$ . Cette condition est appelée « critère de résistance à 95 % » :

$$\beta_u = \frac{\lambda_u^{S_{j,ini}}}{\lambda_u^{S_{j,ini} \rightarrow \infty}} = \frac{P_u^{S_{j,ini}}}{P_u^{S_{j,ini} \rightarrow \infty}} \geq 0,95 \quad (2-4)$$

- 3) Les déplacements  $\delta$  de la structure idéalisée avec des assemblages infiniment rigides  $S_{j,ini} \rightarrow \infty$  sont supérieurs à 90 % des déplacements de la même structure à assemblages de rigidité finie



$S_{j,ini}$ . Cette condition est appelée « critère de déplacement à 90 % ». Elle est moins sévère car elle concerne les états limites de service :

$$\beta_{\delta} = \frac{\delta^{S_{j,ini} \rightarrow \infty}}{\delta^{S_{j,ini}}} \geq 0,90 \quad (2-5)$$

L'établissement de tous ces critères nécessite qu'une même structure soit analysée deux fois, lorsque ses assemblages poutre-colonne sont de rigidité finie et lorsqu'ils sont infiniment rigides. Le nom de chacun de ces critères se termine par un pourcentage. Il s'agit de la sévérité du critère considéré.

### 3.3. Critères de classification de l'Eurocode 3

Selon l'Eurocode 3, un assemblage est classé comme rigide, semi-rigide ou articulé en fonction de sa rigidité en rotation initiale  $S_{j,ini}$  (Figure 3). Les critères de classification des assemblages autres que les pieds de poteaux sont les suivants.

- 1) Un assemblage est rigide si  $S_{j,ini} \geq 8 EI_b/L_b$  pour les ossatures où le système de contreventement réduit le déplacement horizontal d'au moins 80 % (structures contreventées) ou si  $S_{j,ini} \geq 25 EI_b/L_b$  pour les autres ossatures (structures non-contreventées), à condition que  $K_{b,m}/K_{c,m} \geq 0,1$ .
- 2) Un assemblage est nominalelement articulé si  $S_{j,ini} \leq 0,5 EI_b/L_b$ .
- 3) Un assemblage est semi-rigide s'il ne satisfait aucun des critères donnés pour les assemblages rigides et articulés.

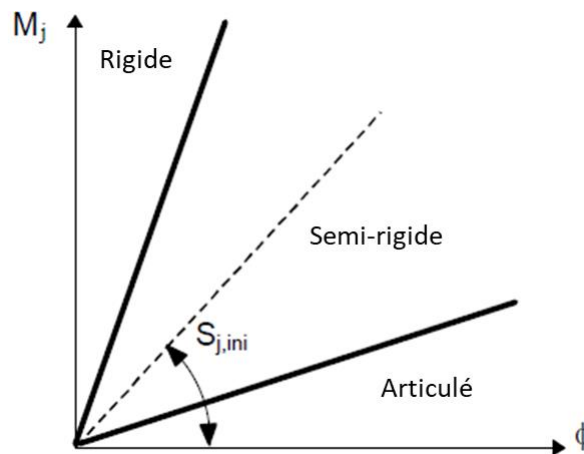


Figure 3 – Diagramme de classification par rigidité des assemblages (Maquoi & Chabrolin, 1998)

Avec

- $I_b$  moment d'inertie de flexion d'une poutre
- $I_c$  moment d'inertie de flexion d'un poteau
- $L_b$  portée d'une poutre (entraxe des poteaux)
- $L_c$  hauteur d'étage d'un poteau
- $K_{b,m}$  valeur moyenne de  $I_b/L_b$  pour toutes les poutres à la partie supérieure de cet étage
- $K_{c,m}$  valeur moyenne de  $I_c/L_c$  pour tous les poteaux de cet étage

Comme il l'a été mentionné précédemment, ce travail étudie de manière plus approfondie le critère de classification des assemblages rigides et non celui des assemblages articulés.

En effet, l'application du critère de classification des assemblages articulés suppose que leur rigidité initiale  $S_{j,ini}$  soit connue. Cependant, il n'existe aucune méthode analytique pour évaluer la rigidité des assemblages dits articulés. Expérimentalement, des résultats d'essais montrent que la plupart des assemblages classiques historiquement considérés comme articulés ne respectent pas le critère de l'Eurocode 3 et devraient être classés comme semi-rigides.

Évidemment, ce critère de classification des assemblages articulés n'arrange pas les praticiens. Heureusement, il a été démontré que l'analyse de la structure avec des rotules à la place des assemblages qu'ils utilisent en pratique et qu'ils jugent articulés donne des résultats acceptables si leur capacité de rotation et leur ductilité sont suffisantes. Ces deux conditions assurent que l'assemblage devienne une véritable rotule après que certaines zones aient plastifié.

### 3.3.1. Critère de stabilité élastique et indirectement de résistance

Le système de classification de l'Eurocode 3 se base sur un critère de stabilité, imposé sur la charge critique élastique de la structure. Lorsque ce critère de stabilité est respecté, le critère de résistance l'est indirectement aussi et les assemblages sont classés comme rigides (Bijlaard & Steenhuis, 1995).

La rigidité initiale  $S_{j,ini}$  des assemblages de la structure déterminée par le critère de stabilité à 95 % (2-6) est telle que la charge critique élastique  $P_{cr}$  de la structure avec ces assemblages de rigidité finie  $S_{j,ini}$  est supérieure ou égale à 95 % de la charge critique élastique de la même structure à assemblages infiniment rigides  $S_{j,ini} \rightarrow \infty$ .

$$P_{cr}^{S_{j,ini}} \geq 0,95 P_{cr}^{S_{j,ini} \rightarrow \infty} \quad (2-6)$$

Ce critère de stabilité est exprimé pour un portique symétrique à une travée et un étage, articulé en pieds, en fonction des paramètres adimensionnels  $\bar{S}$  et  $\rho$  dans le cas où ce portique est contreventé et dans le cas où il ne l'est pas. Les caractéristiques géométriques et matérielles (longueur  $L$ , module de Young  $E$  et moment d'inertie de flexion  $I$ ) des colonnes et des poutres de ces structures sont montrées à la Figure 4.

Le paramètre  $\bar{S}$  (2-7) est le rapport entre la rigidité en rotation initiale de l'assemblage  $S_{j,ini}$  et la rigidité flexionnelle de la poutre  $K_b$  (2-8) connectée aux colonnes par cet assemblage. Il est appelé rigidité adimensionnelle de l'assemblage.

$$\bar{S} = \frac{S_{j,ini}}{K_b} \quad (2-7)$$

$$K_b = \frac{EI_b}{L_b} \quad (2-8)$$

Le paramètre  $\rho$  (2-9) est le rapport entre la rigidité flexionnelle de la poutre  $K_b$  (2-8) et celle d'une colonne  $K_c$  (2-10).

$$\rho = \frac{K_b}{K_c} \quad (2-9)$$

$$K_c = \frac{EI_c}{L_c} \quad (2-10)$$

Deux courbes frontières sont représentées à la Figure 4. Elles correspondent à la rigidité adimensionnelle  $\bar{S}$  établie en fonction de  $\rho$  lorsque  $P_{cr}^{\bar{S}} = 0,95 P_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}$  dans un portique contreventé

ou dans un portique non-contreventé, respectivement. Il s'agit alors de la rigidité adimensionnelle minimale à partir de laquelle les assemblages sont classés comme rigides lorsqu'ils appartiennent à un portique contreventé ou à un portique non-contreventé. Les développements mathématiques qui ont initialement mené à la définition de ces limites proviennent des recherches de Meijer (Meijer, 1990).

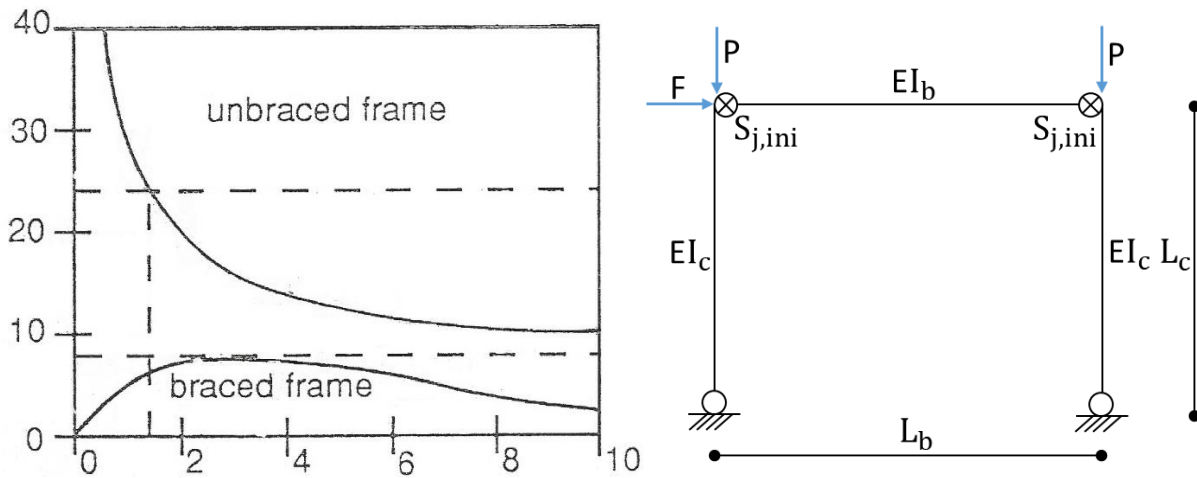


Figure 4 – Relation entre  $\bar{S}$  (ordonnées) et  $\rho$  (abscisses) lorsque  $P_{cr}^{\bar{S}} = 0,95 P_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}$  dans un portique symétrique à une travée, articulé en pieds, contreventé (braced) ou non-contreventé (unbraced) (Bijlaard & Steenhuis, 1995)

Par après, la formule de Merchant-Rankine montre que la charge ultime  $P_u$  de la structure chute de moins de 5 % si la charge critique élastique d'Euler  $P_{cr}$  de la structure est réduite d'exactement 5 %.

$$P_u = \left( \frac{1}{P_{pl}} + \frac{1}{P_{cr}} \right)^{-1} \quad (2-11)$$

Dès lors, en respectant ce critère de stabilité, les assemblages de rigidité finie  $S_{j,ini}$  sont bien assimilables à des assemblages infiniment rigides  $S_{j,ini} \rightarrow \infty$  sans que le comportement global de la structure, à savoir ici sa stabilité élastique et indirectement sa résistance ultime, ne soit modifié de façon significative. Les expressions des courbes frontières obtenues suite à l'application du critère de stabilité donnent la valeur minimale de la rigidité initiale  $S_{j,ini}$  que doit présenter un assemblage poutre-colonne afin d'être classé comme rigide.

Dans l'Eurocode 3, une simplification supplémentaire apparaît. La frontière entre les assemblages rigides et semi-rigides est rendue indépendante du paramètre  $\rho$  en fixant une valeur constante pour  $\bar{S}$ . De cette manière, le critère pour les structures contreventées devient  $\bar{S} \geq 8$ . Il couvre sécuritairement tout le domaine des structures contreventées, quelle que soit la valeur de  $\rho$ . De la même façon, le critère pour les structures non contreventées devient  $\bar{S} \geq 25$ . Il est, quant à lui, en principe insécuritaire lorsque  $\rho \leq 1,4$ .

Cependant, ce problème est rapidement écarté. D'abord, une valeur de  $\rho$  inférieure à 0,1 n'est pas réaliste en pratique. Puis, pour une structure non contreventée où  $\rho$  vaut 0,1 :

$$P_{cr}^{\bar{S}=25} = 0,85 P_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty} \quad (2-12)$$

Pour des structures relativement élancées, la charge ultime  $P_u$  calculée sur base de la formule de Merchant-Rankine diminue de la manière suivante lorsque les assemblages ne sont plus considérés comme infiniment rigides.

$$\text{si } P_{cr}^{\bar{S}=25} = P_{pl} \Rightarrow P_u^{\bar{S}=25} = 0,920 P_u^{\bar{S} \rightarrow \infty} \quad (2-13)$$

$$\text{si } P_{cr}^{\bar{S}=25} = 2P_{pl} \Rightarrow P_u^{\bar{S}=25} = 0,944 P_u^{\bar{S} \rightarrow \infty} \quad (2-14)$$

La valeur  $\bar{S} = 25$  est donc une valeur frontière assez sécuritaire pour la classification des assemblages poutre-colonne des structures non-contreventées pourvu que  $P_{cr}/P_{pl} \geq 1$  et que  $\rho \geq 0,1$ . En pratique, ces deux conditions sont toujours rencontrées.

Les critères de classification présents dans l'Eurocode 3 sont déterminés pour un portique simple à un étage et une travée mais Meijer et Steenhuis ont montré qu'ils restent valables pour des structures à plusieurs étages et/ou à plusieurs travées (Meijer, 1990) (Bijlaard & Steenhuis, 1995).

La limite inférieure sur la valeur de  $\rho$  dans le cas des structures non-contreventées se traduit dans l'Eurocode 3 par la condition selon laquelle  $K_{b,m}/K_{c,m}$  doit être supérieur à 0,1 pour chaque étage.

### 3.3.2. Critique des critères de l'Eurocode 3

- 1) Les critères de classification des assemblages rigides de l'Eurocode 3 sont indépendants de la rigidité flexionnelle des colonnes, du nombre d'étages ou du nombre de travées. Ils dépendent uniquement de la rigidité flexionnelle de la poutre assemblée et du type de structure (contreventée ou non-contreventée). Le critère relatif aux assemblages d'une structure non-contreventée est beaucoup trop restrictif lorsque  $\rho$  augmente.
- 2) Ils sont à vérifier sur chaque assemblage séparément et ne semblent pas considérer le comportement global de tous les assemblages de la structure.
- 3) Ils sont fondés sur un critère de stabilité élastique et indirectement de résistance ultime mais ils ne garantissent pas que les déplacements de la structure à assemblages de rigidité finie restent limités par rapport à ceux de la structure à assemblages infiniment rigides. Or, ces déplacements risquent d'être importants lorsque la structure n'est pas contreventée.
- 4) Ils sont déterminés pour des structures contreventées ou non-contreventées articulées en pieds. D'autres conditions d'appui ne sont pas étudiées.
- 5) Leurs fondements mathématiques restent obscurs malgré l'épluchage des références mentionnées.

## 3.4. Proposition de classification par rigidité de Gomes

Une autre définition de la rigidité limite entre les assemblages rigides et les assemblages semi-rigides est proposée par F. Gomes. Elle se base directement sur un critère de résistance et exprime la rigidité initiale frontière des assemblages en fonction de la charge critique élastique de la structure. Contrairement au système de classification de l'Eurocode 3, la distinction entre les assemblages rigides et semi-rigides ne dépend plus uniquement de la rigidité flexionnelle de la poutre mais bien de l'entièreté de la structure au travers de sa charge critique (Gomes, 1995).

### 3.4.1. Influence de la rigidité des assemblages sur la charge critique

Tout d'abord, analysons l'influence de la rigidité adimensionnelle des assemblages  $\bar{S}$  sur la charge critique élastique  $P_{cr}$  d'un portique non-contreventé, symétrique, à une travée et articulé en pieds (Figure 5).

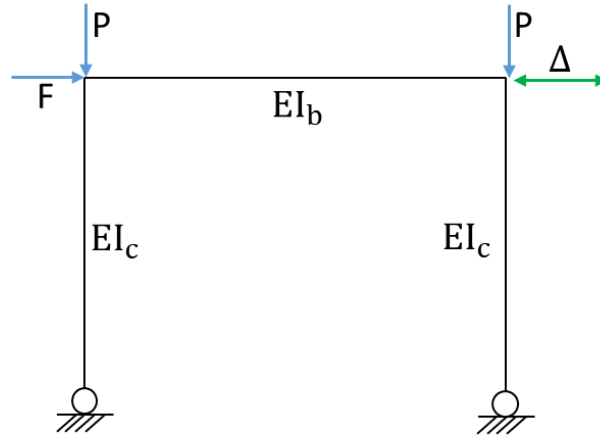


Figure 5 – Portique symétrique à une travée, articulé en pieds et non-contreventé, étudié par Gomes

Le déplacement transversal en tête des colonnes de la structure  $\Delta^{\bar{S}}$  est exprimé comme suit (2-15) sans explication sur l'origine de cette formule. Les travaux de Cosenza sont mentionnés comme référence dans l'article de Gomes.

$$\Delta^{\bar{S}} = \frac{FL_c^3}{12EI_c} \frac{6 + \bar{S}(1 + 2\rho)}{\bar{S}\rho} \quad (2-15)$$

Selon la méthode de Horne (2-16), la charge critique élastique  $P_{cr}^{\bar{S}}$  d'un portique symétrique à une travée et à assemblages de rigidité finie  $\bar{S}$  dépend du déplacement transversal en tête des colonnes de la structure  $\Delta^{\bar{S}}$ .

$$P_{cr}^{\bar{S}} = \frac{0,9FL_c}{\Delta^{\bar{S}}} = \frac{10,8EI_c}{L_c^2} \frac{\bar{S}\rho}{6 + \bar{S}(1 + 2\rho)} \quad (2-16)$$

Lorsque les assemblages sont infiniment rigides ( $\bar{S} \rightarrow \infty$ ), la formule se simplifie (2-17).

$$P_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty} = \frac{10,8EI_c}{L_c^2} \frac{\rho}{1 + 2\rho} \quad (2-17)$$

Le rapport (2-18) entre la charge critique élastique de la structure à assemblages de rigidité finie  $P_{cr}^{\bar{S}}$  et celle de la structure à assemblages infiniment rigides  $P_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}$  montre l'influence sur la stabilité de la structure du remplacement des assemblages de rigidité finie  $\bar{S}$  par des assemblages idéalisés infiniment rigides  $\bar{S} \rightarrow \infty$ . L'évolution du rapport des charges critiques en fonction de la rigidité adimensionnelle  $\bar{S}$  est montrée pour différentes valeurs de  $\rho$  à la Figure 6.

$$\frac{P_{cr}^{\bar{S}}}{P_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}} = \frac{\bar{S}(1 + 2\rho)}{6 + \bar{S}(1 + 2\rho)} \quad (2-18)$$

En principe, ce ratio est inférieur à 1 puisque la charge critique élastique de la structure à assemblages de rigidité finie  $P_{cr}^{\bar{S}}$  est moins élevée que celle de la structure à assemblages infiniment rigides  $P_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}$  à cause de l'affaiblissement des restraints. Plus ce ratio est faible et plus le comportement de la structure est modifié par l'idéalisation infiniment rigide des assemblages. Sa limite inférieure (2-19) exprimée en fonction de la rigidité adimensionnelle des assemblages  $\bar{S}$  est obtenue quand  $\rho \rightarrow 0$ .

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \frac{P_{cr}^{\bar{S}}}{P_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}} \right) = \frac{\bar{S}}{6 + \bar{S}} \quad (2-19)$$

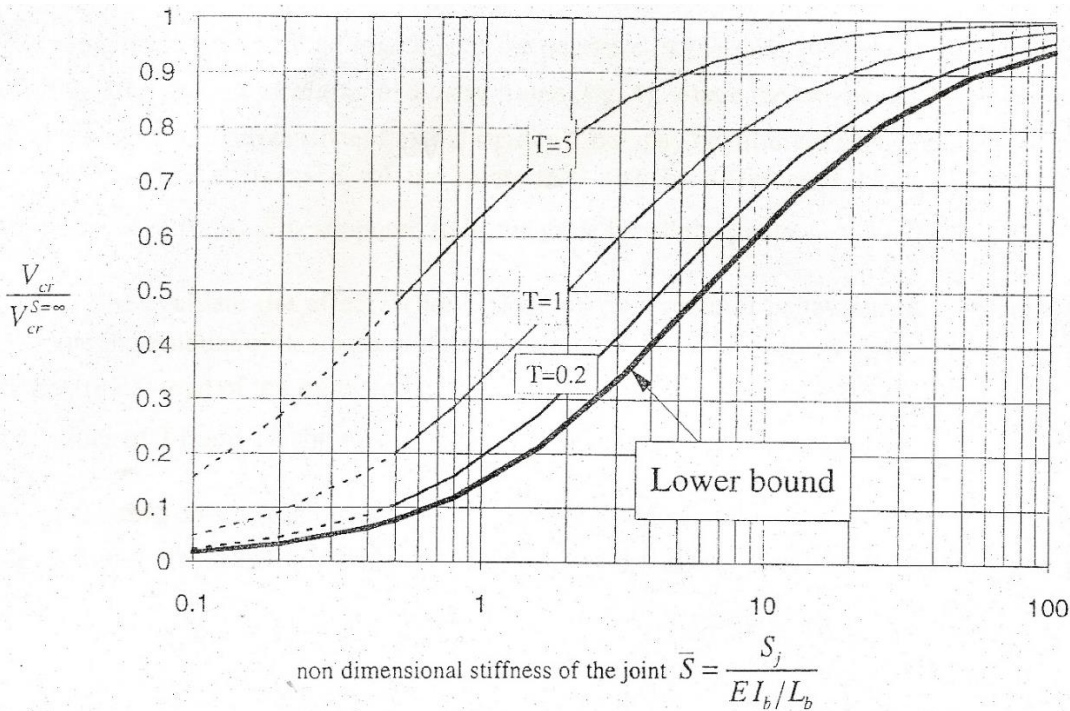


Figure 6 – Rapport entre la charge critique de la structure à assemblages de rigidité finie  $V_{cr}$  et la charge critique de la structure à assemblages infiniment rigides  $V_{cr}^{S \rightarrow \infty}$  en fonction de la rigidité adimensionnelle des assemblages  $\bar{S}$  pour différentes valeurs du paramètre  $\rho$  ( $T$  sur le graphique)

La même démarche est suivie avec les déplacements transversaux en tête des colonnes de la structure à assemblages de rigidité finie  $\Delta^S$  et de celle à assemblages infiniment rigides  $\Delta^{S \rightarrow \infty}$ .

$$\frac{\Delta^S}{\Delta^{S \rightarrow \infty}} = \frac{P_{cr}^{S \rightarrow \infty}}{P_{cr}^S} = \frac{6 + \bar{S}(1 + 2\rho)}{\bar{S}(1 + 2\rho)} \quad (2-20)$$

Contrairement au ratio des charges critiques, ce rapport entre le déplacement transversal en tête des colonnes de la structure à assemblages de rigidité finie  $\Delta^S$  et celui de la structure à assemblages infiniment rigides  $\Delta^{S \rightarrow \infty}$  est supérieur à 1 puisque le déplacement transversal augmente lorsque les restraints s'affaiblissent. Plus ce rapport est important et plus le comportement de la structure est modifié par l'idéalisation infiniment rigide des assemblages. Sa limite supérieure (2-11) exprimée en fonction de la rigidité adimensionnelle des assemblages est obtenue quand  $\rho \rightarrow 0$ .

$$\frac{\Delta^S}{\Delta^{S \rightarrow \infty}} = \frac{6 + \bar{S}}{\bar{S}} \quad (2-21)$$

### 3.4.2. Critère de résistance en fonction de la charge critique élastique

Ensuite, la rigidité minimale à partir de laquelle les assemblages sont classés comme rigides est déduite d'un critère de résistance, c'est-à-dire que la rigidité des assemblages dits rigides est telle que le multiplicateur ultime  $\lambda_u^S$  des charges de la structure avec ces assemblages de rigidité finie est supérieur ou égal à 95 % du multiplicateur ultime  $\lambda_u^{S \rightarrow \infty}$  des charges de la structure à assemblages infiniment rigides.

$$\lambda_u^S \geq 0,95 \lambda_u^{S \rightarrow \infty} \quad (2-22)$$

En écrivant la formule de Merchant-Rankine modifiée pour la structure à assemblages de rigidité finie (2-23) dans le cas limite où  $\lambda_u^{\bar{s}} = 0,95 \lambda_u^{\bar{s} \rightarrow \infty}$  tout en sachant que le multiplicateur plastique de la structure n'est pas influencé par la rigidité des assemblages  $\lambda_{pl}^{\bar{s}} = \lambda_{pl}^{\bar{s} \rightarrow \infty}$  tant qu'ils sont pleinement résistants, puis en lui soustrayant la formule de Merchant-Rankine modifiée appliquée à la structure à assemblages infiniment rigides (2-24), la limite entre les assemblages rigides et les assemblages semi-rigides est établie.

$$\frac{1}{0,95 \lambda_u^{\bar{s} \rightarrow \infty}} = \frac{1}{\lambda_{cr}^{\bar{s}}} + \frac{0,9}{\lambda_{pl}^{\bar{s} \rightarrow \infty}} \quad (2-23)$$

$$\frac{1}{\lambda_u^{\bar{s} \rightarrow \infty}} = \frac{1}{\lambda_{cr}^{\bar{s} \rightarrow \infty}} + \frac{0,9}{\lambda_{pl}^{\bar{s} \rightarrow \infty}} \quad (2-24)$$

Le dernier terme de ces deux équations est éliminé par soustraction puis l'équation résultante est réarrangée.

$$\frac{\lambda_{cr}^{\bar{s}}}{\lambda_{cr}^{\bar{s} \rightarrow \infty}} = \frac{1}{1 + \frac{0,05 \lambda_{cr}^{\bar{s} \rightarrow \infty}}{0,95 \lambda_u^{\bar{s} \rightarrow \infty}}} \quad (2-25)$$

La rigidité des assemblages intervient en posant que cette dernière expression (2-25) est toujours supérieure à la limite inférieure du ratio entre les charges critiques (2-19).

$$\frac{\lambda_{cr}^{\bar{s}}}{\lambda_{cr}^{\bar{s} \rightarrow \infty}} = \frac{\bar{s}}{6 + \bar{s}} \Leftrightarrow \bar{s} = 114 \frac{\lambda_u^{\bar{s} \rightarrow \infty}}{\lambda_{cr}^{\bar{s} \rightarrow \infty}} \quad (2-26)$$

Pour finir, l'équation (2-26) est simplifiée en remplaçant la charge ultime par la charge verticale totale de dimensionnement de la structure.

Finalement, les assemblages poutre-colonne d'une structure sont considérés comme rigides si leurs rigidités initiales satisfont le critère (2-27). L'erreur relative, associée à l'idéalisation infiniment rigide de ces assemblages, obtenue sur la résistance de la structure est alors inférieure à 5 %. La limite  $\bar{s} \geq 8$  est semblable au critère de l'Eurocode 3 pour les structures contreventées.

$$\bar{s} \geq 114 \frac{V_{Ed}}{V_{cr}^{\bar{s} \rightarrow \infty}} \text{ si } \bar{s} \geq 8 \quad (2-27)$$

### 3.4.3. Critique du critère de classification par rigidité de Gomes

- 1) Ce critère de classification des assemblages rigides dépend de la structure dans son ensemble mais il est toujours à vérifier sur chaque assemblage individuel.
- 2) Il est fondé sur un critère de résistance ultime mais il ne garantit pas que les déplacements de la structure à assemblages de rigidité finie restent limités par rapport à ceux de la structure à assemblages infiniment rigides. Or, ces déplacements risquent d'être importants lorsque la structure n'est pas contreventée.
- 3) Il est déterminé pour une structure spécifique, à savoir un portique symétrique simple à un étage articulé en pieds. Rien n'est dit concernant l'extension de ce critère à des structures plus complexes ou à des structures liées différemment à la fondation.

- 4) L'hypothèse selon laquelle la charge ultime de la structure équivaut à la charge totale de calcul de la structure n'est pas sécuritaire étant donné que la charge ultime est souvent supérieure à la charge totale de calcul.
- 5) Le critère de l'Eurocode 3 relatif à des structures contreventées est conservé alors qu'il ne découle pas directement d'un critère de résistance à 95 % mais bien d'un critère de stabilité à 95 %. Ce critère est plutôt local et devient plus restrictif que le critère global lorsque la structure est rigide. Il devrait toujours être associé aux critères globaux comme ici mais pourrait s'exprimer autrement.
- 6) Le critère de classification des assemblages rigides de Gomes semble moins facile à établir puisqu'il nécessite la connaissance de la charge critique de la structure à assemblages poutre-colonne infiniment rigides. Cependant, les règles de dimensionnement de l'Eurocode 3 exigent déjà le calcul de ce rapport entre la charge verticale totale appliquée sur la structure et la première charge d'instabilité d'ensemble de la structure afin de déterminer si les effets du second ordre sont négligeables (structure rigide) ou non (structure souple).

### 3.5. Proposition de classification par rigidité des recherches COST

Les recherches COST relatives au comportement semi-rigide des liaisons structurelles ont été menées afin de déterminer de nouveaux critères de classification pour les structures non-contreventées, plus satisfaisants que le critère de stabilité de l'Eurocode 3 qui n'est d'ailleurs pas à prendre en considération pour établir les limites entre les assemblages rigides, semi-rigides et articulés d'après l'avis des chercheurs participant à ces travaux (Maquoi, Jaspert, Briquet, Guisse, & Lognard, 1994-1995). Un critère de résistance vient s'ajouter à celui de F. Gomes puis les seuls critères de déplacement au premier ordre et au second ordre existant jusqu'à présent sont formulés afin de remédier à une des critiques principales du système de classification de l'Eurocode 3.

#### 3.5.1. Critère de résistance

Comme pour l'établissement du critère de résistance de Gomes, la condition imposée sur la rigidité des assemblages classés comme rigides (2-28) est que le multiplicateur ultime des charges de la structure à assemblages de rigidité finie  $\lambda_u^{\bar{s}}$  soit supérieur ou égal à 95 % du multiplicateur ultime des charges de la structure à assemblages infiniment rigides  $\lambda_u^{\bar{s} \rightarrow \infty}$ .

$$\lambda_u^{\bar{s}} \geq 0,95 \lambda_u^{\bar{s} \rightarrow \infty} \quad (2-28)$$

Le critère de classification par rigidité des assemblages poutre-colonne défini au cours des recherches COST en respectant cette condition est dérivé de la formule de Merchant-Rankine (2-29), comme l'est aussi le critère de F. Gomes mais en suivant un autre développement.

$$\frac{1}{\lambda_u} = \frac{1}{\lambda_{cr}} + \frac{1}{\lambda_{pl}} \quad (2-29)$$

Tant que les assemblages sont pleinement résistants, le multiplicateur plastique de la structure n'est pas affecté par leur changement de rigidité.

La formule de Merchant-Rankine est applicable à des structures dont le multiplicateur critique des charges vaut de 4 à 10 fois le multiplicateur plastique. En posant  $\lambda_{cr} = X \lambda_{pl}$  avec  $X \in [4,10]$  conformément au domaine d'application de la formule de Merchant-Rankine, l'expression du critère de résistance (2-30) ne dépend plus que du paramètre  $X$  et du ratio  $\beta_{cr}$  entre le multiplicateur critique



des charges de la structure à assemblages de rigidité finie et celui de la structure à assemblages infiniment rigides. Il s'affranchit des multiplicateurs plastiques de ces deux structures.

$$\beta_u = \frac{X + \beta_{cr}}{X + 1} \quad (2-30)$$

Le critère de classification qui découle de la condition imposée au critère de résistance, selon laquelle  $\beta_u$  est supérieur ou égal à 0,95 lorsque les assemblages sont classés comme rigides, est établi en fixant une condition moins stricte sur  $\beta_{cr}$ . Le critère de résistance à 95 % est beaucoup moins sévère que le critère de stabilité à 95 % de l'Eurocode 3 comme le montre le Tableau 1.

$\beta_u$	$\beta_{cr}$	
	$X = 4$	$X = 10$
$\geq 0,95$	$\geq 0,75$	$\geq 0,45$

Tableau 1 – Sévérité d'un critère de stabilité  $\beta_{cr}$  équivalente à un critère de résistance  $\beta_u$  à 95 % pour différentes valeurs du paramètre  $X = \lambda_{cr}/\lambda_{pl}$  soit  $X = 4$  ou  $X = 10$

Les deux cas extrêmes pour lesquels  $X = 4$  et  $X = 10$  sont considérés. Le critère est plus restrictif lorsque les structures sont caractérisées par un paramètre  $X$  plus faible, ce qui correspond à des structures plus souples. En pratique, les structures sont dimensionnées de manière à ce que le paramètre  $X$  soit toujours supérieur à 4, sinon les effets du second ordre deviennent vraiment trop dangereux.

### 3.5.2. Critère de déplacement transversal

Contrairement à tous les autres critères de classification développés précédemment dans l'optique de limiter la modification du comportement de la structure en termes de résistance et de stabilité lors de l'idéalisation infiniment rigide des assemblages classés comme tels, les critères suivants assurent que le déplacement transversal en tête des colonnes n'est pas sous-estimé lors de l'analyse de la structure idéalisée à assemblages infiniment rigides par rapport au déplacement transversal déterminé par l'analyse de la structure réelle à assemblages de rigidité finie.

Selon un critère de déplacement à 90 %, les assemblages poutre-colonne d'une structure sont classés comme rigides si leur rigidité est telle que le déplacement transversal en tête des colonnes de la structure à assemblages infiniment rigides dépasse 90 % du déplacement transversal en tête des colonnes de la structure avec ces assemblages de rigidité finie. Ces déplacements sont calculés par une analyse élastique sous charges de service, d'abord au premier ordre et puis au second ordre.

#### Premier ordre

L'expression approchée de Wood & Roberts (2-31) est utilisée pour déterminer le déplacement transversal élastique au premier ordre  $\Delta_1$  en tête des colonnes d'un portique symétrique simple à assemblages de rigidité finie  $S_{j,ini}$  ou à assemblages infiniment rigides  $S_{j,ini} \rightarrow \infty$  (Figure 7). Seul l'effort horizontal de vent  $F$  intervient dans l'équation. Elle dépend aussi d'un facteur de remplissage  $s$  fixé à 0 pour un cadre nu.

$$\Delta_1 = \frac{FL_c^2}{2K_c} \frac{1}{12 + s} \left[ 1 + \frac{3(k_i + k_s - k_i k_s)}{4 - 3k_i - 3k_s + 2k_i k_s + s(1 - k_i k_s/4)/3} \right] \quad (2-31)$$

Les coefficients  $k_i$  et  $k_s$  sont identiques aux coefficients de rigidité qui apparaissent dans les formules de calcul de la longueur critique de flambement de Wood (Annexe 1).

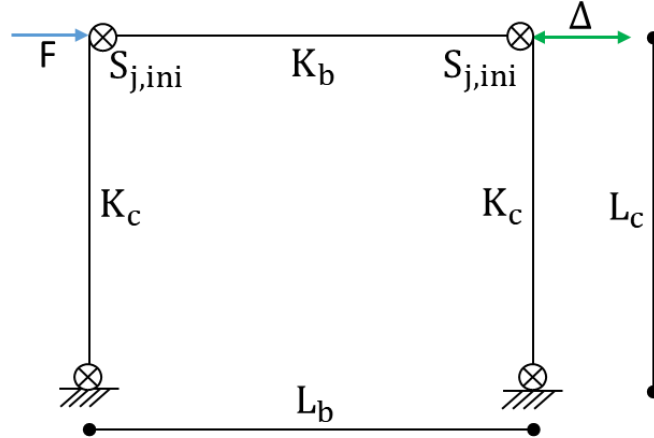


Figure 7 – Portique symétrique simple, articulé ou encastré en pieds, analysé par la formule de Wood

Pour un portique encastré en pieds :

$$k_i^{\bar{s}} = k_i^{\bar{s} \rightarrow \infty} = 1 \quad (2-32)$$

$$k_s^{\bar{s}} = \frac{2}{2 + 3\rho / \left(1 + \frac{6}{\bar{s}}\right)} \Leftrightarrow k_s^{\bar{s} \rightarrow \infty} = \frac{2}{2 + 3\rho} \quad (2-33)$$

$$\Delta_1 = \frac{FL_c}{24EI_c} \frac{4 - k_s}{1 - k_s} \quad (2-34)$$

$$\beta_{\Delta_1} = \frac{\Delta_1^{\bar{s} \rightarrow \infty}}{\Delta_1^{\bar{s}}} = \frac{4 - k_s^{\bar{s}}}{4 - 3k_s^{\bar{s} \rightarrow \infty}} \geq 0,90 \quad (2-35)$$

$$\bar{s} \geq \frac{468\rho - 12}{18\rho^2 + 15\rho + 2} \quad (2-36)$$

Pour un portique articulé en pieds, les équations (2-33) restent semblables :

$$k_i^{\bar{s}} = k_i^{\bar{s} \rightarrow \infty} = 0 \quad (2-37)$$

$$\Delta_1 = \frac{FL_c}{24EI_c} \frac{4}{4 - 3k_s} \quad (2-38)$$

$$\beta_{\Delta_1} = \frac{\Delta_1^{\bar{s} \rightarrow \infty}}{\Delta_1^{\bar{s}}} = \frac{1 - k_s^{\bar{s}}}{4 - k_s^{\bar{s}}} \frac{4 - k_s^{\bar{s} \rightarrow \infty}}{1 - k_s^{\bar{s} \rightarrow \infty}} \geq 0,90 \quad (2-39)$$

$$\bar{s} \geq \frac{54}{1 + 2\rho} \quad (2-40)$$

### Second ordre

La méthode des déplacements est modifiée pour exprimer le déplacement transversal élastique  $\Delta_2$  en tête des colonnes d'un portique simple non-contreventé en intégrant les effets du second ordre et la semi-rigidité des assemblages. Les déformations dues aux efforts normaux et aux efforts tranchants sont négligées devant celles dues à la flexion des éléments constitutifs de la structure étudiée.

Vu la longueur et la complexité des développements mathématiques nécessaires à l'établissement de ces critères pour un portique articulé en pieds ou un portique encastré en pieds (Figure 8), seule la démarche suivie pour les obtenir est détaillée ici.

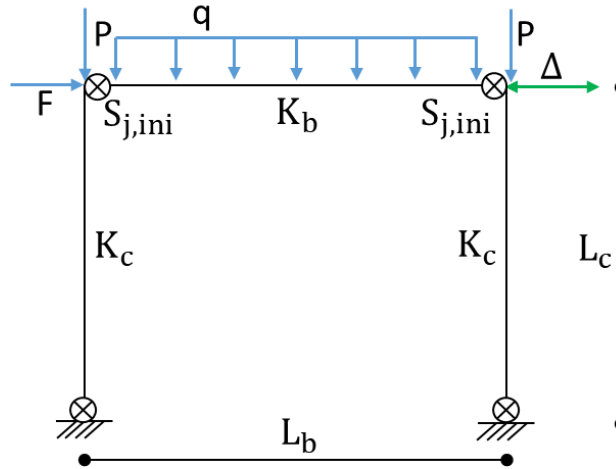


Figure 8 – Portique symétrique simple, articulé ou encastré en pieds, analysé au second ordre

Au second ordre, le déplacement transversal  $\Delta_2$  dépend des charges verticales  $P$  et  $q$  mais le critère de déplacement est de nouveau écrit en fonction des seules variables  $\bar{S}$  et  $\rho$  en admettant que la somme des charges verticales appliquées sur la structure est égale à la charge ultime de la structure divisée par un coefficient de sécurité  $\gamma$  de 1,5. Or, par la formule de Merchant-Rankine et en se plaçant dans le cas le plus défavorable  $X = 4$ , la charge ultime  $P_u$  est liée à la charge critique  $P_{cr}$ .

$$P_u = \frac{P_{cr}}{1 + X} \quad (2-41)$$

$$P + qL_b = P_{service} = \frac{P_{cr}}{\gamma(1 + X)} = \frac{2\pi^2}{7,5} \frac{K_c}{K_{fi}^2 L_c} \quad (2-42)$$

Pour un portique encastré en pieds :

$$\beta_{\Delta,2} = \frac{(2 + 3\rho) \left( 12(6 + \bar{S} + 6\bar{S}\rho) - (12 + 2\bar{S} + 3\bar{S}\rho) \frac{2\pi^2}{7,5} \frac{0,4 + 3\rho}{1,6 + 3\rho} \right)}{(12 + 2\bar{S} + 3\bar{S}\rho) \left( 12(1 + 6\rho) - (2 + 3\rho) \frac{2\pi^2}{7,5} \frac{0,4 + 3\rho}{1,6 + 3\rho} \right)} \geq 0,9 \quad (2-43)$$

Pour un portique articulé en pieds :

$$\beta_{\Delta,2} = \frac{(1 + 2\rho) \left( 12\bar{S}\rho - (6 + \bar{S} + 2\bar{S}\rho) \frac{2\pi^2}{7,5} \frac{0,6\rho}{0,72 + 2,4\rho} \right)}{(6 + \bar{S} + 2\bar{S}\rho) \left( 12\rho - (1 + 2\rho) \frac{2\pi^2}{7,5} \frac{0,6\rho}{0,72 + 2,4\rho} \right)} \geq 0,9 \quad (2-44)$$

### 3.5.3. Critique

- 1) Les critères de classification des recherches COST basés sur un critère de déplacement au second ordre sont très complexes.

- 2) Ils sont déterminés pour des structures spécifiques, à savoir des portiques symétriques simples à un étage articulés ou encastrés en pieds. Rien n'est dit concernant l'extension de ce critère à des structures plus complexes.
- 3) Les recherches COST ont défini des critères de classification rigide/semi-rigide basés sur un critère de déplacement à 90 % mais aussi sur un critère de résistance à 95 %. Elles considèrent que le plus restrictif des critères est appliqué.
- 4) Il n'est pas fait mention d'une quelconque prise en compte d'une borne inférieure de rigidité provenant des critères des structures contreventées.

### 3.6. Principe de la structure équivalente

Le principe de la structure équivalente à assemblages rigides consiste à remplacer une structure réelle à plusieurs travées et à assemblages semi-rigides par un portique symétrique à une seule travée et à assemblages rigides de même déplacement transversal élastique au premier ordre en tête des colonnes (Figure 9). En sens inverse, ce principe sert à étendre les critères de classification déterminés pour un portique symétrique simple à des structures possédant plusieurs travées. Le passage par la structure équivalente à assemblages rigides est une étape intermédiaire utile pour déterminer la palée équivalente, aussi appelée structure de Grinter, d'une structure réelle à plusieurs travées.

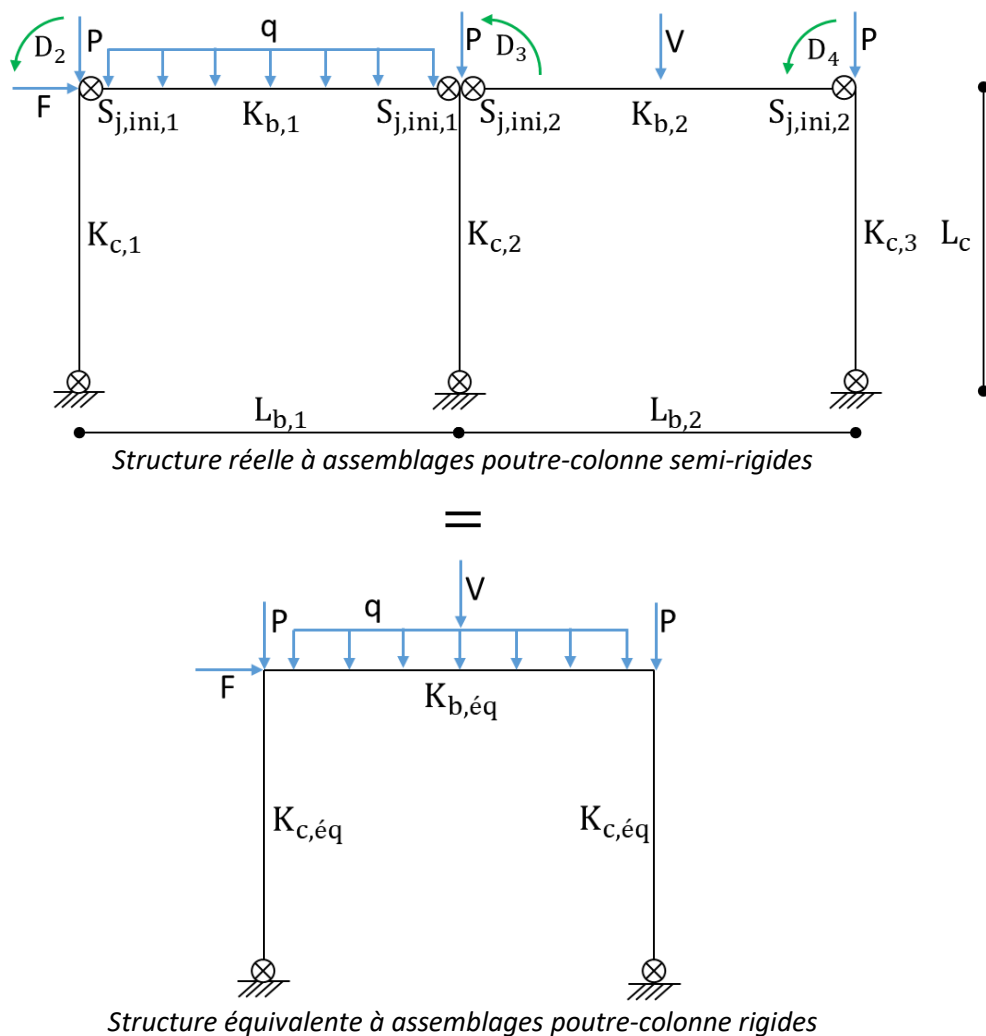


Figure 9 – Principe de la structure équivalente, règles de transformation entre les deux structures

### 3.6.1. Règles de transformation exactes

L'égalité entre le déplacement transversal élastique au premier ordre en tête des colonnes de la structure réelle et celui de la structure équivalente est assurée strictement si : les rigidités des colonnes et de la poutre de la structure équivalente respectent les règles de transformations suivantes ; les conditions d'appui des pieds de colonne de la structure à la fondation sont conservées ; et les charges sont réparties de manière symétrique sur chacune des travées de la structure réelle. Ces règles supposent que les deux assemblages aux extrémités d'une même poutre possèdent la même rigidité.

$$K_{c,\acute{e}q} = \sum_i \frac{K_{c,i}}{2} \quad (2-45)$$

$$K_{b,\acute{e}q} = \sum_i \frac{K_{b,i}}{1 + 3\alpha_i} \frac{D_{i+1} + D_{i+2}}{2D_{2,\acute{e}q}} \quad (2-46)$$

Avec

$$D_{2,\acute{e}q} = \frac{\sum_i K_{c,i} D_{i+1}}{\sum_j K_{c,j}} \quad (2-47)$$

$$\alpha_i = \frac{2K_{b,i}}{S_{j,ini,i}} \quad (2-48)$$

Ces règles de transformation se fondent sur l'analyse des structures selon la méthode des déplacements en négligeant les déformations dues aux efforts normaux et aux efforts tranchants devant celles provenant de la flexion des éléments des structures.

Les règles de transformation sont identiques pour une structure encastree en pieds, une structure articulée en pieds ou, encore, une structure liée de manière semi-rigide à la fondation tant que la structure équivalente présente les mêmes conditions d'appui que la structure réelle et que la rigidité des assemblages aux pieds des colonnes reste la même pour tous les pieds de la structure réelle.

$$\alpha_{c1} = \alpha_{c2} = \alpha_{c3} = \dots \text{ avec } \alpha_{c,i} = \frac{2K_{c,i}}{S_{j,ini,c,i}} \quad (2-49)$$

$$\alpha_{c,\acute{e}q} = \alpha_{c1} = \alpha_{c2} = \alpha_{c3} = \dots \Leftrightarrow S_{j,ini,c,\acute{e}q} = \frac{K_{c,\acute{e}q}}{K_{c,i}} S_{j,ini,c,i} \quad (2-50)$$

### 3.6.2. Règles de transformation approchées

En supposant que les rotations moyennes des deux nœuds aux extrémités de chaque poutre de la structure réelle sont toutes égales à la rotation d'un nœud de la structure équivalente (2-51), les règles de transformation sont simplifiées et ne dépendent plus des rotations aux nœuds de la structure réelle. Ces règles supposent toujours que les deux assemblages aux extrémités d'une poutre possèdent la même rigidité.

Si

$$D_{2,\acute{e}q} = \frac{D_{i+1} + D_{i+2}}{2} \quad (2-51)$$

Alors

$$K_{b,\acute{e}q} = \sum_i \frac{K_{b,i}}{1 + 3\alpha_i} \quad (2-52)$$

Si l'hypothèse à la base de cette simplification n'est pas vérifiée, comme c'est souvent le cas en pratique, l'égalité entre les déplacements transversaux des deux structures n'est plus parfaite. Néanmoins, ces règles de transformation approchées ont déjà fait leurs preuves pour fournir une valeur limite inférieure de la charge critique d'une structure réelle à assemblages semi-rigides (Jaspart, 1988).

Des règles de transformation approchées ont été développées par M. Demonceau dans le cas où les deux assemblages aux extrémités d'une poutre ne présentent plus forcément la même rigidité.

$$\alpha_{g,i} = \frac{2K_{b,i}}{S_{j,ini,g,i}} \quad (2-53)$$

$$\alpha_{d,i} = \frac{2K_{b,i}}{S_{j,ini,d,i}} \quad (2-54)$$

$$K_{b,éq} = \sum_i K_{b,i} \frac{2 + \alpha_{g,i} + \alpha_{d,i}}{2 + 4 \alpha_{g,i} + 4 \alpha_{d,i} + 6 \alpha_{g,i} \alpha_{d,i}} \quad (2-55)$$

## 4. CONCLUSION

Dans la première partie de ce chapitre (§ 2), le système de classification des structures est présenté (§ 2.2). Une structure est dite contreventée si elle est équipée d'un système de contreventement efficace (§ 2.2.1) tandis que la distinction entre les structures souples et les structures rigides dépend de leur sensibilité aux effets du second ordre, qui est associée à leur multiplicateur critique (§ 2.2.2).

Ensuite, dans cette même partie, la signification physique de la formule de Merchant-Rankine est expliquée et liée à son expression mathématique (§ 2.3). Elle donne le multiplicateur ultime des charges d'une structure en fonction de son multiplicateur plastique et de son multiplicateur critique.

Dans la seconde partie de ce chapitre (§ 3), la classification par rigidité des assemblages est abordée et plusieurs critères de classification des assemblages poutre-colonne rigides sont établis.

Lors de l'analyse d'une structure, la rigidité des assemblages dits rigides est considérée comme infinie alors qu'elle est en réalité finie. Les critères de classification des assemblages rigides assurent que cette modification de la rigidité des assemblages n'ait que très peu d'influence sur le comportement de la structure. D'un point de vue global, ils imposent des limites concernant l'impact de l'idéalisation des assemblages rigides sur la stabilité de la structure, sa résistance et son déplacement transversal. L'analyse est simplifiée mais elle décrit toujours avec suffisamment de précision les déplacements de la structure et la distribution réelle des efforts qui s'y développent.

Parmi tous les critères de classification évoqués dans ce chapitre, seuls ceux qui se trouvent actuellement dans l'Eurocode 3 sont définis à partir d'un critère de stabilité à 95 % (§ 3.3.1). Il s'agit aussi des seuls critères de classification étendus à des structures de plus d'une travée. Cependant, leurs fondements mathématiques ne sont pas extrêmement clairs et mériteraient d'être examinés en détails. De plus, ils ont été grossièrement simplifiés pour être rendus indépendants du paramètre  $\rho$  et certains assemblages se voient dès lors renforcés excessivement pour être classés comme rigides. Le but ultime de ce travail est de trouver un nouveau critère de classification des assemblages rigides plus adapté, moins restrictif mais quand même sécuritaire pour remplacer le critère actuel de l'Eurocode 3 relatif aux structures non-contreventées.

D'autres critères de classification, l'un formulé par F. Gomes (§ 3.4.2) et l'autre par les recherches COST (§ 3.5.1), se basent plutôt sur un critère de résistance à 95 % via la formule de Merchant-Rankine. Ces deux critères sont moins restrictifs que celui de stabilité à 95 % mais ils ont plus de sens. Le multiplicateur critique exact de la structure importe peu tant que son multiplicateur ultime n'est pas trop sous-estimé.

Le dernier critère de classification, déduit au cours des recherches COST (§ 3.5.2), est le seul qui provienne d'un critère de déplacement transversal à 90 %. Il se décline en deux versions selon que les effets du second ordre sont pris en compte ou non. Toutefois, l'expression mathématique du critère de classification déterminé en considérant les effets du second ordre est très complexe.

Dans la suite de ce travail, au chapitre 4, tous ces critères seront étudiés de manière plus approfondie et validés numériquement. Un des critères sera finalement choisi pour classer les assemblages poutre-colonne rigides à la place du critère de l'Eurocode 3. Un premier tri sera effectué afin d'écartier les critères les moins adéquats puis le critère le plus restrictif sera sélectionné parmi les critères restants.

Finalement, dans le chapitre 5, le critère retenu sera étendu à des structures à travées multiples, notamment par le principe de la structure équivalente (§ 3.6). En effet, tous les critères mentionnés jusqu'à présent ont d'abord été établis pour les assemblages de la structure la plus simple qui soit, à savoir un portique symétrique à une seule travée. À part le critère de l'Eurocode 3, aucun d'entre eux n'a encore été généralisé pour des structures diverses.

# CHAPITRE 3 : Outil numérique

## 1. INTRODUCTION

Les critères de classification par rigidité des assemblages poutre-colonne intégrés dans un contexte structural précis seront toujours exprimés analytiquement et numériquement. Lorsque ces deux approches coïncident, les développements analytiques mis en place pour établir ces critères de classification sont validés numériquement. En pratique, l'approche analytique est utilisée pour classer les assemblages mais elle doit au préalable avoir été confrontée à des résultats numériques afin de vérifier qu'elle concorde bien avec la réalité. L'approche numérique est considérée comme la référence pour tout calcul d'erreur relative.

Ce chapitre montre comment les critères de classification par rigidité des assemblages rigides sont déduits numériquement d'un critère de stabilité à 95 %, de résistance à 95 % ou de déplacement à 90 % grâce à l'outil numérique que j'ai créé.

Cet outil prend la forme d'un programme MATLAB et utilise fréquemment le programme de calcul par éléments finis non linéaire FINELG pour analyser des structures. FINELG est d'abord présenté puis les hypothèses de modélisation des structures adoptées sont posées. Ensuite, les étapes successives du programme MATLAB sont détaillées. Pour finir, des organigrammes résument le programme MATLAB en fonction du critère envisagé pour la classification par rigidité des assemblages rigides.

## 2. PROGRAMME ÉLÉMENTS FINIS NON LINÉAIRE FINELG

### 2.1. Description de FINELG

Le programme de calcul par éléments finis non linéaire FINELG a été développé conjointement par l'Université de Liège et par le bureau d'études Greisch. La cellule R&D du bureau améliore continuellement le programme. Ce dernier a aussi profité de nombreuses recherches menées à l'Université de Liège pour progresser. Le programme de calcul en lui-même est accompagné d'un programme de pré-traitement MYFIN, de post-traitement SELFIN et de représentation graphique des résultats DESFIN. Il est aussi possible de déterminer les données d'entrée d'une structure et d'écrire le fichier .DAT correspondant à partir d'un fichier EXCEL grâce à des macros mises à disposition dans les dossiers fournis avec le programme en lui-même. Le programme FINELG est capable de modéliser la rigidité finie des assemblages de la structure et la loi constitutive élasto-plastique de l'acier, qui sont des fonctionnalités indispensables à ce travail.

Les différents types d'analyses des structures permis par FINELG et utilisés dans le cadre de ce travail sont tous effectués dans le domaine statique :

- Analyse élastique au premier ordre
- Analyse élasto-plastique au second ordre
- Analyse critique d'Euler

La méthode d'itération par Newton-Raphson avec évaluation des forces hors-équilibre et la méthode d'incrémentation des charges « arc-length » sont choisies lors de toutes les analyses élasto-plastiques au second ordre pratiquées.



## 2.2. Hypothèses de modélisation des structures

Toutes les structures qui seront étudiées dans la suite sont en deux dimensions. Les poutres et les colonnes des structures sont modélisées par des éléments à trois dimensions et les degrés de liberté inactifs sont bloqués par des appuis. Les colonnes sont supposées flamber uniquement selon leur axe fort. De plus, les poutres et les colonnes ne sont pas sujettes au déversement sous ces hypothèses.

La loi constitutive de l'acier est une loi de Hooke lorsque l'analyse est élastique au premier ordre et une loi élastique parfaitement plastique lorsque l'analyse est élasto-plastique au second ordre. Le module de Young est de 210 000 MPa et la limite d'élasticité de l'acier vaut 235 MPa.

Les assemblages de rigidité finie sont modélisés par des ressorts dont la loi constitutive reste indéfiniment élastique puisque les critères de classification par rigidité de ces assemblages portent sur leur rigidité initiale uniquement.

Plusieurs critères sont imposés pour prédimensionner les structures simulées : elles conservent un comportement élastique sous charges de service, leurs déplacements sous charges de service restent limités à des valeurs proches des états limites de service, les charges de ruine de la structure valent environ 2 à 4 fois les charges de service. Le multiplicateur critique des charges  $\lambda_{cr}$  ou le paramètre  $X = \lambda_{cr}/\lambda_{pl}$  est compris entre 4 et 10.

## 3. PROGRAMME MATLAB

### 3.1. Principe

Les critères de classification par rigidité qui distinguent les assemblages rigides des assemblages semi-rigides sont déduits à partir d'une limite acceptable imposée au rapport entre deux grandeurs identiques, l'une provenant de l'analyse de la structure à assemblages de rigidité finie et l'autre issue de l'analyse de la structure à assemblages infiniment rigides :

- Critère de stabilité à 95 % :  $\beta_{cr} \geq 0,95$
- Critère de résistance à 95 % :  $\beta_u \geq 0,95$
- Critère de déplacement à 90 % :  $\beta_\delta \geq 0,90$

Numériquement, la rigidité des assemblages à partir de laquelle ils sont classés comme rigides selon un de ces trois critères est telle que le ratio  $\beta$  associé à ce critère est égal à sa limite inférieure acceptable, à une certaine précision près.

Pour trouver cette rigidité par voie numérique, j'ai écrit un programme MATLAB qui automatise sa variation. Il lance l'analyse de chaque structure simulée numériquement et adapte progressivement la rigidité des assemblages poutre-colonne dans la structure à assemblage de rigidité finie jusqu'à ce que ce que le ratio  $\beta$  atteigne sa limite inférieure.

Pour chaque structure de caractéristiques géométriques fixées (poutres et colonnes), cette valeur est unique mais nécessite l'analyse de deux structures en tous points semblables, si ce n'est que l'une d'entre elles est dotée d'assemblages infiniment rigides tandis que l'autre est dotée d'assemblages de rigidité finie.

Dans la suite du travail, des structures seront simulées numériquement afin d'établir ces valeurs limites de rigidité. Les caractéristiques géométriques de chaque paire de structures seront présentées et ces deux structures seront considérées comme faisant partie d'une seule et même simulation numérique puisqu'elles définissent, à elles deux, une seule valeur limite de rigidité des assemblages.

## 3.2. Appel de FINELG

Afin d'analyser les structures autant de fois qu'il faut pour définir numériquement le critère de classification des assemblages rigides, le programme de calcul par éléments finis non linéaire FINELG est lancé à maintes reprises à l'intérieur même du programme MATLAB que j'ai écrit.

Pour ce faire, une fonction MATLAB spécifique est utilisée. Elle inscrit une ligne de commande dans l'invite de commande de l'ordinateur. En décortiquant les fichiers de commandes .BAT qui constituent le programme FINELG, j'ai compris comment lancer le programme avec un certain fichier .DAT en entrée et où les résultats allaient aller se loger. La ligne de commande qui gère tout cela s'écrit en langage BATCH et contient plusieurs parties. D'abord, elle commence par un appel CALL. Il est suivi du chemin d'accès du fichier PROGBEG.BAT puis du chemin d'accès du dossier dans lequel se trouve le fichier d'entrée. Viennent ensuite le chemin d'accès du répertoire BEG et l'appel final du programme FINELG avec deux variables d'entrée, le nom du fichier de données et le chiffre 1 qui indique qu'il s'agit du premier passage dans le fichier et non de la reprise d'un calcul entamé.

## 3.3. Extraction des résultats de FINELG vers MATLAB

### 3.3.1. Multiplicateur critique

Le multiplicateur critique d'Euler  $\lambda_{cr}$  de la structure est calculé par FINELG en résolvant le problème aux valeurs propres généralisé composé de la matrice de raideur linéaire  $\mathbf{K}$  et de la matrice des contraintes  $\mathbf{K}_\sigma$  de la structure.

$$\begin{cases} \det(\mathbf{K} - \lambda_{cr}\mathbf{K}_\sigma) = 0 \\ (\mathbf{K} - \lambda_{cr}\mathbf{K}_\sigma)\mathbf{v}_{cr} = 0 \end{cases} \quad (3-1)$$

Le programme écrit ensuite cette information en langage binaire dans un fichier .DE3, à un endroit précis. Afin de récupérer le multiplicateur critique et de le convertir en base décimale, un code MATLAB m'a été fourni par M. Denoël.

### 3.3.2. Multiplicateur ultime

Le multiplicateur ultime  $\lambda_u$  de la structure est le multiplicateur de charges le plus élevé qui est atteint au cours d'une analyse élasto-plastique au second ordre. Cette analyse est menée par FINELG. Les charges sont incrémentées petit à petit et les multiplicateurs de charges associés sont enregistrés par le programme. Les déplacements sont calculés par le programme pour chacun de ces multiplicateurs de charges. Toutes ces informations se trouvent dans un fichier .OUT.

Cette fois-ci, M. Denoël n'avait aucun code MATLAB à sa disposition pour aller rechercher la valeur du multiplicateur ultime des charges parmi les fichiers produits par FINELG. Dès lors, j'ai écrit ma propre fonction MATLAB en observant l'organisation du fichier .OUT et en utilisant les fonctions de lecture de fichiers de MATLAB. La fonction que j'ai créée va d'abord récupérer tous les multiplicateurs de charges dans le fichier .OUT et puis elle sélectionne le multiplicateur le plus élevé.

### 3.3.3. Déplacement transversal au premier ordre

Les déplacements élastiques au premier ordre sont déterminés pour chaque degré de liberté de la structure par FINELG au moyen d'une analyse élastique au premier ordre. En écartant le gauchissement des sections, il reste 6 degrés de liberté par nœud du modèle numérique de la structure. Le fichier .DE3 contient toutes leurs valeurs et elles en sont extraites par le code MATLAB de M. Denoël.

Étant donné que les structures possèdent plusieurs colonnes, le déplacement transversal en tête des colonnes de la structure n'est pas unique. Sa valeur varie légèrement d'une tête de colonne à l'autre car FINELG ne néglige pas les déformations axiales qui se développent dans les poutres à cause des efforts normaux. Dès lors, la moyenne des déplacements transversaux en tête des colonnes est calculée et utilisée pour déduire la rigidité limite des assemblages rigides numériquement.

#### 3.3.4. Déplacement transversal au second ordre

Tout comme les déplacements au premier ordre, ceux au second ordre sont déterminés pour chaque degré de liberté mais ils le sont, en plus, pour chaque valeur du multiplicateur des charges grâce à une analyse élasto-plastique au second ordre réalisée par FINELG. Les déplacements sont en général évalués aux états limites de service, c'est-à-dire quand le multiplicateur des charges vaut environ 1. Cependant, rien n'assure que cette valeur du multiplicateur est rencontrée exactement au cours de l'incrémentation des charges. Pour connaître les déplacements au second ordre dans la structure aux états limites de service, une interpolation linéaire est effectuée entre les déplacements relatifs aux deux multiplicateurs les plus proches de 1, le premier supérieur à 1 et le second inférieur à 1. De la même manière qu'au premier ordre, la moyenne des déplacements transversaux obtenus en tête des colonnes est ensuite calculée.

### 3.4. Modification de la rigidité des assemblages

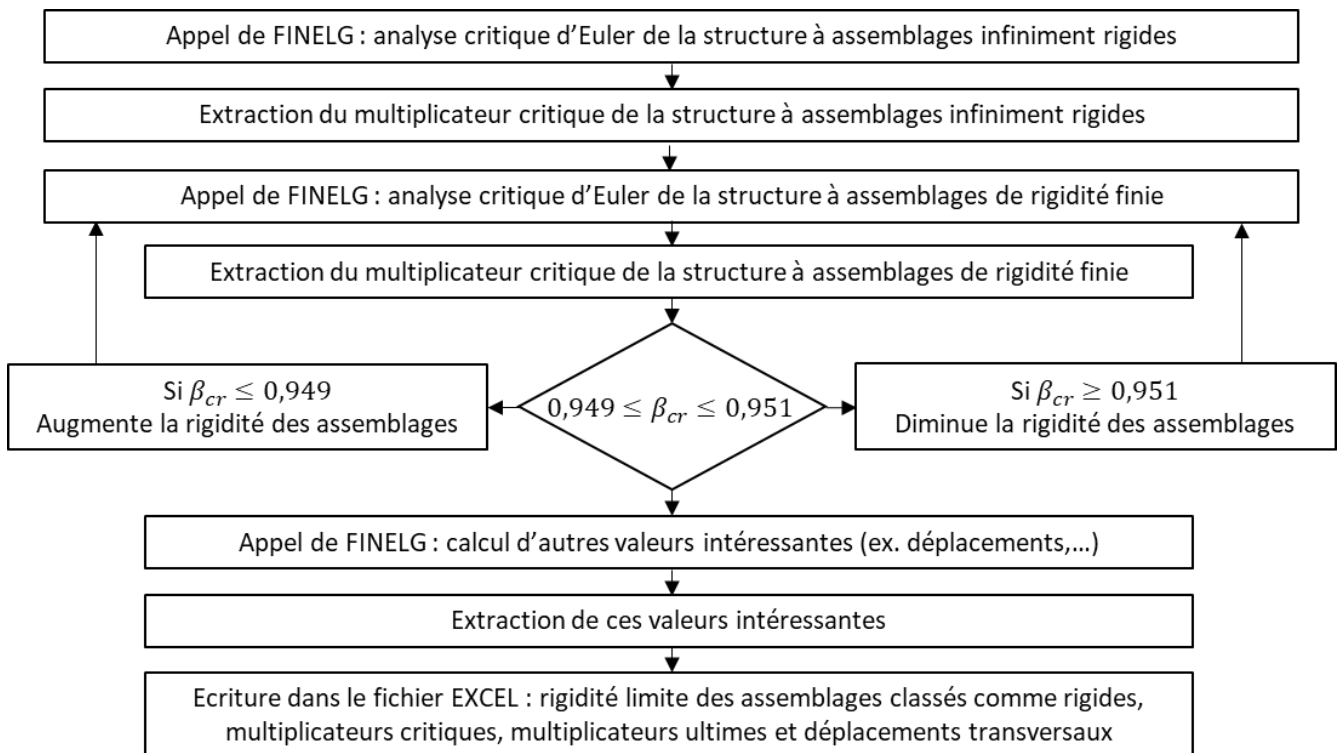
Le but du programme est de trouver la rigidité des assemblages qui est telle que  $\beta_{cr}$ ,  $\beta_u$  ou  $\beta_\delta$  atteignent leur limite inférieure autorisée à 0,1 % près. Les assemblages sont classés comme rigides pourvu que leur rigidité dépasse cette valeur.

Tant que  $\beta_{cr}$ ,  $\beta_u$  ou  $\beta_\delta$  ne sont pas suffisamment proches de leur limite inférieure autorisée, la rigidité des assemblages est diminuée s'ils dépassent la limite et augmentée dans le cas contraire.

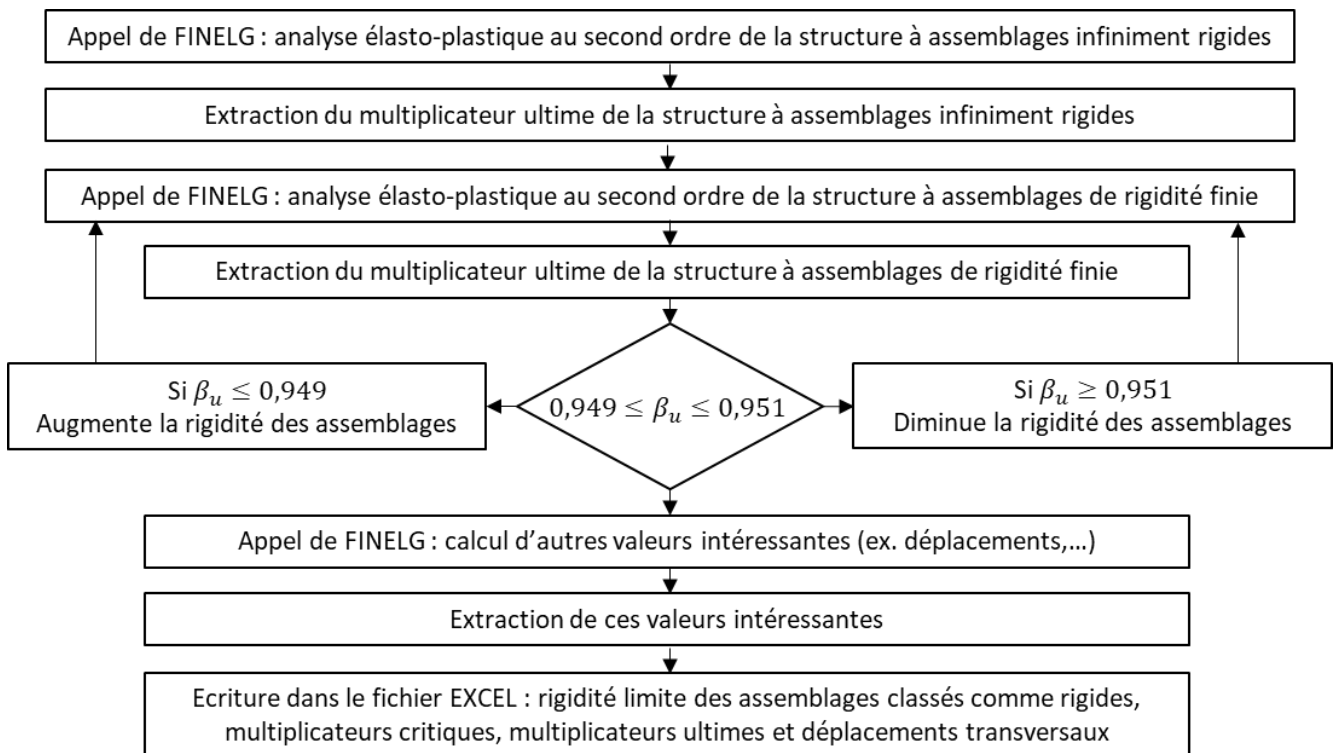
Cette valeur est modifiée dans le fichier .DAT grâce aux fonctions de lecture et d'écriture de MATLAB avant que la structure qu'il contient ne soit analysée de nouveau par FINELG.

## 4. ORGANIGRAMMES

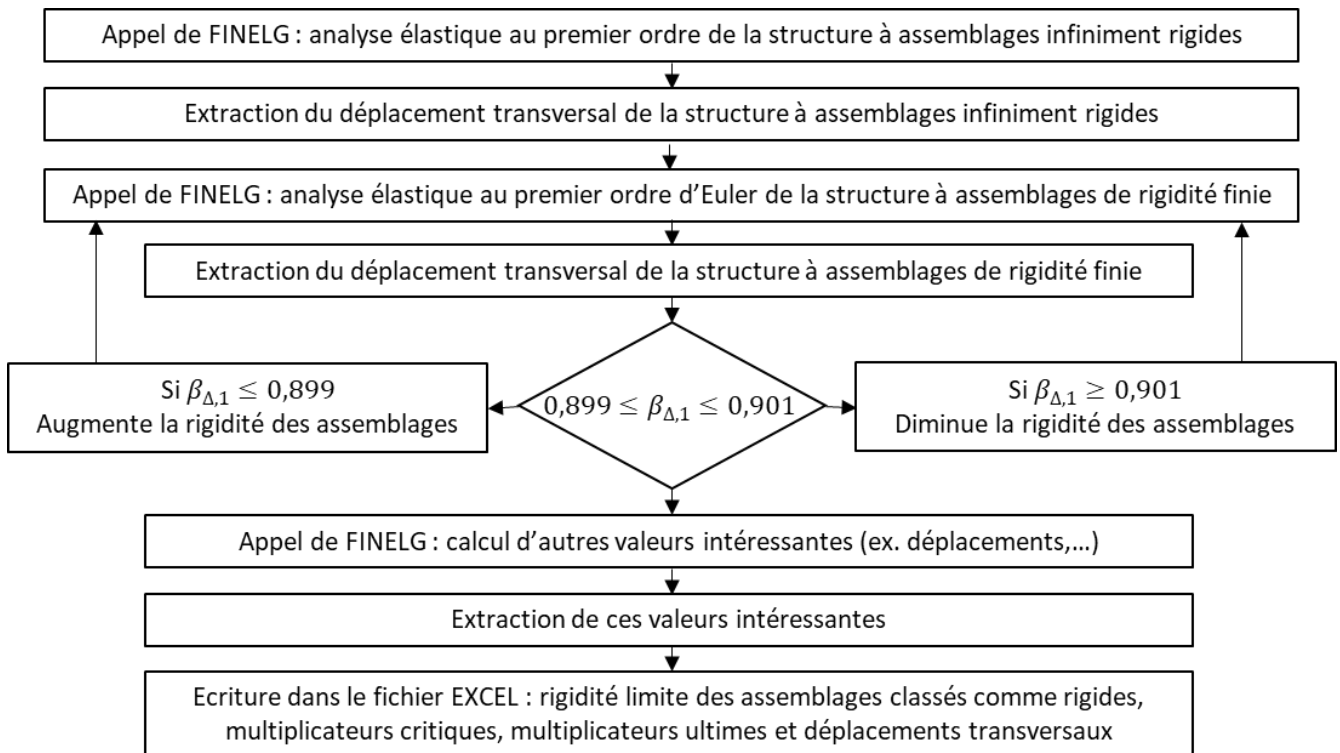
### 4.1. Critère de stabilité à 95 %



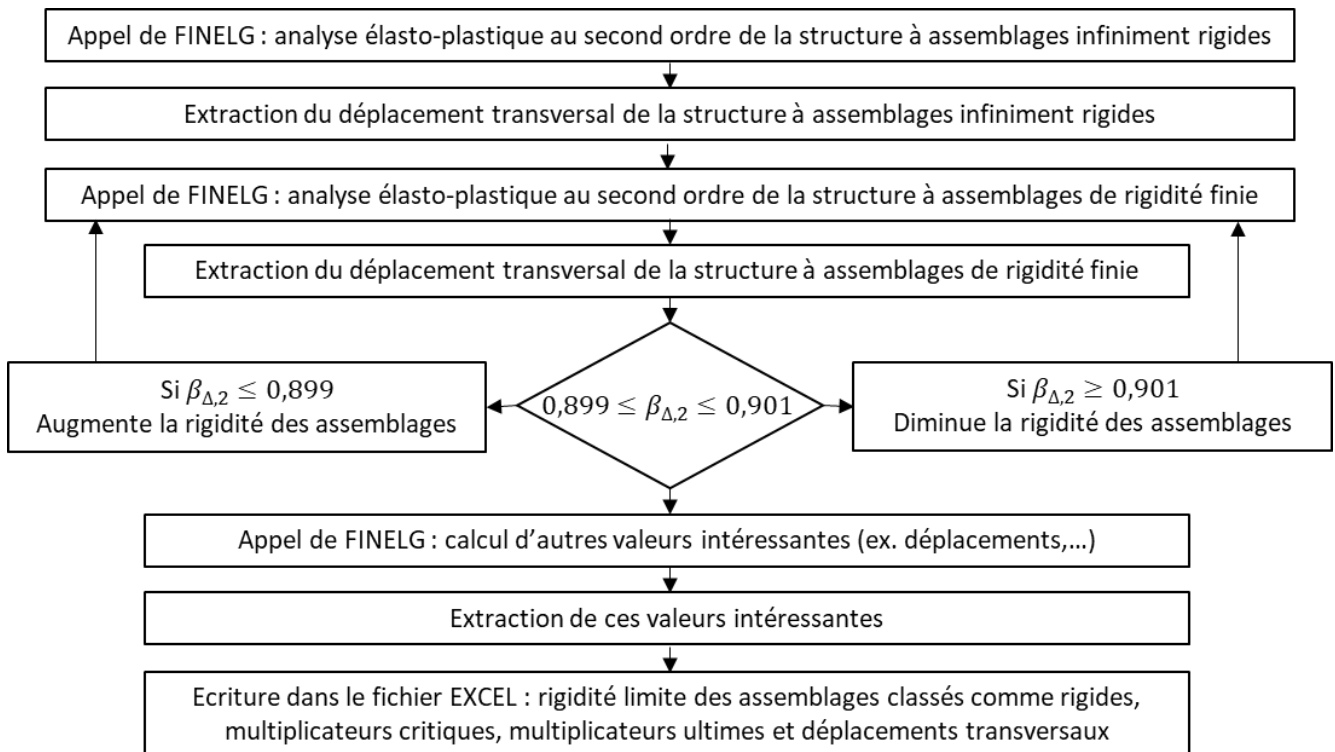
### 4.2. Critère de résistance à 95 %



### 4.3. Critère de déplacement transversal au premier ordre à 90 %



### 4.4. Critère de déplacement transversal au second ordre à 90 %



## 5. CONCLUSION

Le processus de recherche de la rigidité minimale des assemblages nécessaire pour satisfaire un critère est itératif. Il est extrêmement fastidieux de le mener de bout en bout sans avoir recours à un programme qui automatise cette recherche comme le programme MATLAB présenté dans ce chapitre.

Sans ce programme, il n'aurait pas été possible de rassembler tous les résultats qui se trouvent dans ce travail. D'abord, leur nombre aurait été largement inférieur et puis leur précision en aurait pâti afin d'accélérer les choses.

Le programme MATLAB que j'ai implémenté pour automatiser le processus de recherche était indispensable au bon déroulement de ce travail même si ça n'a pas été une tâche facile.

Il est toujours assez compliqué de s'aventurer dans un code déjà écrit (FINELG) par un autre développeur sans pouvoir lui poser des questions. Dans ce cas-ci, il me fallait découvrir non seulement l'organisation du code, de ses entrées et de ses sorties mais aussi le langage informatique dans lequel le code a été écrit.

Heureusement, le gain de temps et de précision qu'il a entraîné ainsi que l'ampleur des résultats qu'il a fournis compensent de loin le temps passé pour le créer

Ce programme MATLAB a été utilisé à de nombreuses reprises au cours de ce travail et amélioré au fur et à mesure pour prendre en compte de plus en plus de variables en avançant dans l'étude d'un nouveau critère de classification des assemblages rigides.

# CHAPITRE 4 : Étude et validation numérique de critères divers pour choisir le plus approprié

## 1. INTRODUCTION

Au cours de ce chapitre, les critères de classification mentionnés dans le chapitre 2 sont abordés l'un après l'autre. Un critère supplémentaire est ajouté en plus des critères du chapitre 2. Il est déterminé à partir d'un critère de déplacement transversal au premier ordre à 90 % grâce à l'expression du déplacement transversal en tête d'un portique symétrique simple, articulé en pieds, qui se trouve dans l'article de Gomes.

- Critère de stabilité de l'Eurocode 3 (§ 2)
- Critère de résistance de Gomes (§ 3)
- Critère de déplacement de Gomes (§ 4)
- Critère de résistance des recherches COST (§ 5)
- Critère de déplacement des recherches COST (§ 6)

En général, leurs expressions mathématiques sont d'abord détaillées plus en profondeur, surtout celles des critères dont les fondements mathématiques ne sont pas parfaitement clairs. Il y a souvent plus d'une expression par critère étant donné que les critères de classification des assemblages rigides dépendent aussi du contexte structural dans lequel ces assemblages s'inscrivent.

En principe, ces critères sont établis pour les assemblages d'une structure très simple, à savoir un portique symétrique à une seule travée, dont les pieds sont soit articulés, soit encastés.

Ensuite, chacun de ces critères est confronté à des résultats numériques obtenus grâce à l'outil numérique présenté dans le chapitre 3 afin d'être validé numériquement.

Après avoir réalisé cette étude approfondie pour tous les critères de la liste, les informations qui en sont retirées servent à choisir le critère de classification des assemblages rigides le plus approprié (§ 7). Ce critère sera étendu pour des structures à plusieurs étages et plusieurs travées dans le chapitre 5.

## 2. CRITÈRE DE STABILITÉ DE L'EUROCODE 3

### 2.1. Introduction

Tout d'abord, le mystère reste entier autour des expressions mathématiques des courbes de rigidité adimensionnelle minimale des assemblages rigides obtenues en fonction du paramètre  $\rho$  à partir d'un critère de stabilité à 95 % pour des structures contreventées et des structures non-contreventées.

Dès lors, elles sont établies à nouveau de manière analytique grâce aux formules de calcul de la charge critique d'une colonne provenant de l'Annexe E de l'Eurocode 3 (Annexe 1) avec différentes combinaisons de conditions d'appui, contrairement aux courbes existantes qui ne traitent que de portiques articulés en pieds.

Ces expressions sont ensuite comparées graphiquement aux courbes existantes et validées au moyen de simulations numériques.

## 2.2. Formulation analytique

Dans la publication de Bijlaard qui présente l'origine du système de classification par rigidité des assemblages de l'Eurocode 3 (Bijlaard & Steenhuis, 1995), un critère de stabilité à 95 % est introduit pour classer les assemblages rigides. Selon ce critère, les assemblages poutre-colonne d'une structure sont considérés comme rigides si leur rigidité est telle que la charge critique de la structure avec ces assemblages de rigidité finie est supérieure ou égale à 95 % de la charge critique de la même structure à assemblages infiniment rigides.

Les relations qui lient  $\bar{S}$  et  $\rho$  à la limite quand  $P_{cr}^{\bar{S}} = 0,95 P_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}$  sont montrées sous forme de courbes à la Figure 11, pour un portique symétrique simple, articulé en pieds, contreventé ou non-contreventé. Leurs fondements sont censés se trouver dans les rapports de recherche de Meijer. Cependant, même après les avoir examinés attentivement, l'origine mathématique de ces courbes n'a pas pu être éclaircie.

Par conséquent, leurs expressions analytiques sont formulées à nouveau en suivant la procédure de calcul de la charge critique d'une colonne proposée à l'Annexe E de l'Eurocode 3 (Annexe 1). Il faut néanmoins rester conscient du fait que les deux formules approchées de Wood (4-2) et (4-6) sont utilisées au cours de cette procédure pour calculer la longueur de flambement d'une colonne à nœuds fixes transversalement ou à nœuds transversalement déplaçables tandis que les courbes de la Figure 11 sont supposées s'appliquer aux assemblages de structures contreventées ou non.

Charge critique d'un portique symétrique simple dans un mode d'instabilité à nœuds déplaçables :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{L_{cr}^2} = \frac{\pi^2 EI_c}{(KL_c)^2} \quad (4-1)$$

$$\frac{L_{cr}}{L} = K = \sqrt{\frac{1 - 0,2(\eta_1 + \eta_2) - 0,12\eta_1\eta_2}{1 - 0,8(\eta_1 + \eta_2) + 0,6\eta_1\eta_2}} \quad (4-2)$$

Lorsque le pied des colonnes est articulé,  $\eta_1$  vaut 1.  
Lorsqu'il est encastré,  $\eta_1$  vaut 0. (4-3)

$$\eta_2 = \frac{K_c}{K_c + K_b^*} \quad (4-4)$$

$$K_b^* = x K_b \frac{1}{1 + \frac{4x}{\bar{S}}} \quad (4-5)$$

Le paramètre  $x$  vaut 1,5 dans ce cas-ci puisque la poutre se déforme en double courbure dans le mode de flambement considéré.

Charge critique d'un portique symétrique simple dans un mode d'instabilité à nœuds fixes :

Les équations sont les mêmes que dans le mode d'instabilité à nœuds déplaçables, excepté la (4-2) qui est remplacée par la (4-6). De plus, le paramètre  $x$  vaut 0,5 dans ce cas-ci puisque la poutre se déforme en simple courbure dans le mode de flambement à nœuds fixes.

$$\frac{L_{cr}}{L} = \frac{1 + 0,145(\eta_1 + \eta_2) - 0,265\eta_1\eta_2}{2 - 0,364(\eta_1 + \eta_2) - 0,247\eta_1\eta_2} \quad (4-6)$$



Critère de stabilité général :

Finalement, la charge critique d'un portique symétrique simple est égale au double de la charge critique d'une seule de ses colonnes et le critère de stabilité à 95 % dépend du rapport entre la charge critique de la structure à assemblages de rigidité finie et celle de la structure à assemblages infiniment rigides.

$$\beta_{cr} = \frac{2P_{cr}^{\bar{s}}}{2P_{cr}^{\bar{s} \rightarrow \infty}} = \left( \frac{K^{\bar{s} \rightarrow \infty}}{K^{\bar{s}}} \right)^2 \geq 0,95 \quad (4-7)$$

En isolant la rigidité adimensionnelle des assemblages d'un côté de cette inéquation (4-7), le critère de stabilité à 95 % se traduit directement par une limite inférieure sur la rigidité adimensionnelle des assemblages classés comme rigides. Ces limites sont déterminées de manière analytique pour 4 portiques symétriques simples, qui se distinguent les uns des autres par leur combinaison de caractéristiques (Figure 10) : mode d'instabilité à nœuds déplaçables et pieds articulés (1) ou encastrés (2), mode d'instabilité à nœuds fixes et pieds articulés (3) ou encastrés (4).

$$(1) \quad \bar{s} \geq \frac{228}{5\rho + 2} \quad (4-8)$$

$$(2) \quad \bar{s} \geq \frac{96(105\rho - 1)}{225\rho^2 + 150\rho + 16} \quad (4-9)$$

$$(3) \quad \bar{s} \geq \frac{82(88777\rho - 10250)}{187322\rho^2 + 570105\rho + 420250} \quad (4-10)$$

$$(4) \quad \bar{s} \geq \frac{2(588470\rho - 93661)}{25000\rho^2 + 98150\rho + 93661} \quad (4-11)$$

L'évolution de la rigidité adimensionnelle minimale des assemblages rigides en fonction du paramètre  $\rho$  est tracée à la Figure 12 pour les 4 types de portiques étudiés. Le domaine de variation de  $\rho$  reste semblable à celui de la Figure 11 afin de comparer aisément les anciennes et les nouvelles courbes.

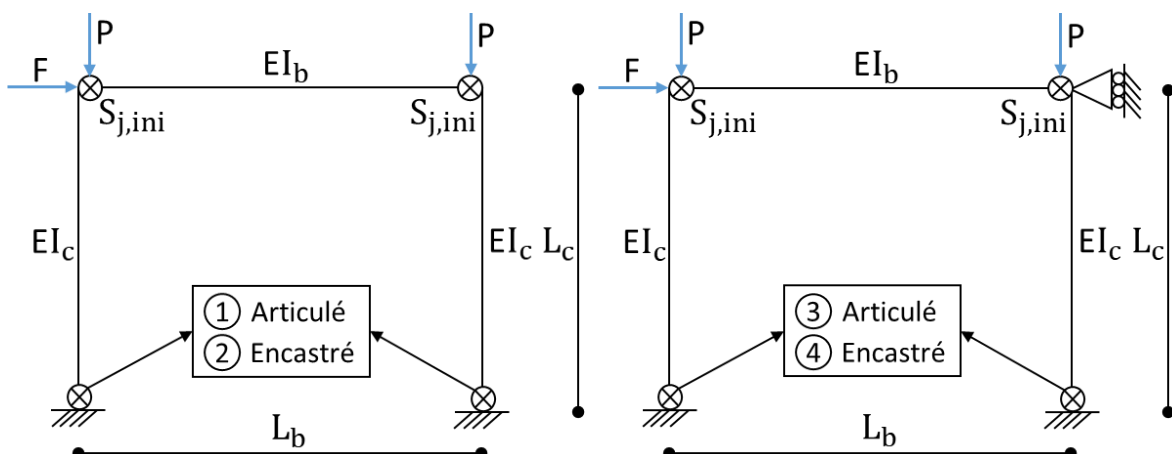


Figure 10 – Schémas statiques des 4 types de portiques pour lesquels des critères de classification par rigidité des assemblages rigides ont été développés à partir d'un critère de stabilité à 95 %

## 2.3. Comparaison des anciennes et des nouvelles courbes

Au premier abord, la comparaison entre les courbes de la Figure 11 et celles de la Figure 12 révèle une surprise. En effet, la relation entre  $\rho$  et la rigidité adimensionnelle minimale, à partir de laquelle les assemblages poutre-colonne d'un portique non-contreventé et articulé en pieds (Figure 11) sont classés comme rigides, est clairement différente de celle établie pour les assemblages poutre-colonne d'un portique articulé en pieds aussi et dont le mode d'instabilité est à nœuds déplaçables (Figure 12, bleu foncé). La première courbe ne descend pas en-dessous du critère constant relatif aux structures contreventées,  $\bar{S} \geq 8$ , alors que la seconde courbe franchit cette limite. Elles s'éloignent d'autant plus l'une de l'autre que  $\rho$  augmente. Cette observation va évidemment à l'encontre des prédictions qui voudraient qu'elles coïncident. Malheureusement, il est difficile de tirer des conclusions à ce propos sans avoir plus d'informations sur l'origine des courbes de la Figure 11.

Néanmoins, malgré cette différence, elles passent toutes les deux par le point  $\bar{S} = 25$  et  $\rho = 1,4$ . Le critère de classification de l'Eurocode 3 reste quand même valable avec cette nouvelle définition des courbes de rigidité adimensionnelle minimale des assemblages rigides.

Concernant la relation entre  $\rho$  et la rigidité adimensionnelle minimale, à partir de laquelle les assemblages poutre-colonne d'un portique contreventé sont classés comme rigides (Figure 11), il est logique qu'elle s'inscrive entre celles des portiques dont le mode d'instabilité est à nœuds fixes et celles des portiques dont le mode d'instabilité est à nœuds déplaçables (Figure 12). Cela se vérifie sur les graphiques et s'explique par la définition même d'une structure contreventée. La mobilité latérale des nœuds d'une structure contreventée est réduite à moins de 20 % de celle des nœuds de la même structure sans système de contreventement. Dès lors, son comportement se rapproche de celui d'un portique dont le mode d'instabilité est à nœuds fixes mais n'est tout de même pas exactement semblable.

## 2.4. Comparaison analytique/numérique

En complément de l'approche plutôt analytique, 4 séries de 10 simulations numériques ont été effectuées, à savoir une série pour chacun des 4 schémas statiques présentés à la Figure 10. Seules les conditions d'appui des structures varient entre ces 4 séries tandis que leur géométrie et leur chargement restent tels que résumés dans le Tableau 2. Les caractéristiques géométriques de ces structures ont été choisies pour que le domaine de variation de  $\rho$  soit couvert comme à la Figure 11.

La rigidité des assemblages poutre-colonne de chaque structure simulée est ajustée par l'outil numérique jusqu'à ce qu'elle atteigne la rigidité minimale à partir de laquelle les assemblages sont classés comme rigides selon un critère de stabilité à 95 %. À ce moment, la charge critique de la structure dotée d'assemblages dont la rigidité est cette rigidité minimale est égale à 95 % de la charge critique de la même structure pourvue d'assemblages poutre-colonne infiniment rigides.

Les rigidités adimensionnelles minimales  $\bar{S}_{num}$  obtenues par l'outil numérique sont comparées à celles  $\bar{S}_{th}$  qui proviennent des expressions analytiques dans le Tableau 3 et dans le Tableau 4. Les résultats relatifs à chaque série de portiques sont aussi représentés par des points à la Figure 12, parallèlement à la courbe analytique définie avec les mêmes conditions d'appui que la série de portiques considérée. Les deux approches concordent bien. Les rigidités adimensionnelles minimales calculées analytiquement sont sécuritaires lorsque l'erreur relative par rapport aux résultats numériques est négative puisque les formules analytiques imposent alors une rigidité plus élevée aux assemblages dits rigides que celle qui est déterminée numériquement.

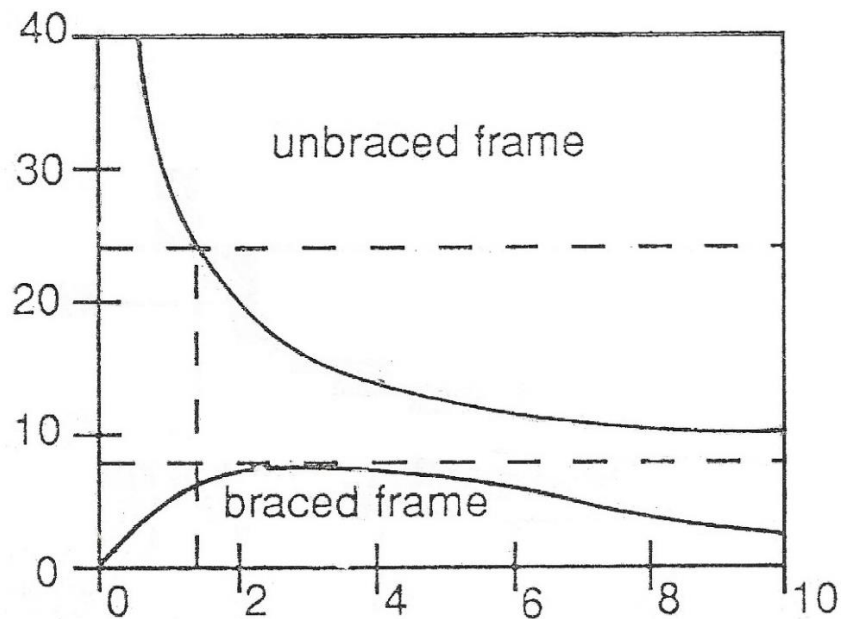


Figure 11 – Relation entre  $\rho$  (abscisse) et la rigidité adimensionnelle minimale  $\bar{S}$  (ordonnée) à partir de laquelle les assemblages poutre-colonne d'un portique symétrique à une travée, articulé en pieds, contreventé (braced) ou non-contreventé (unbraced) sont classés comme rigides selon un critère de stabilité à 95 % (Bijlaard & Steenhuis, 1995)

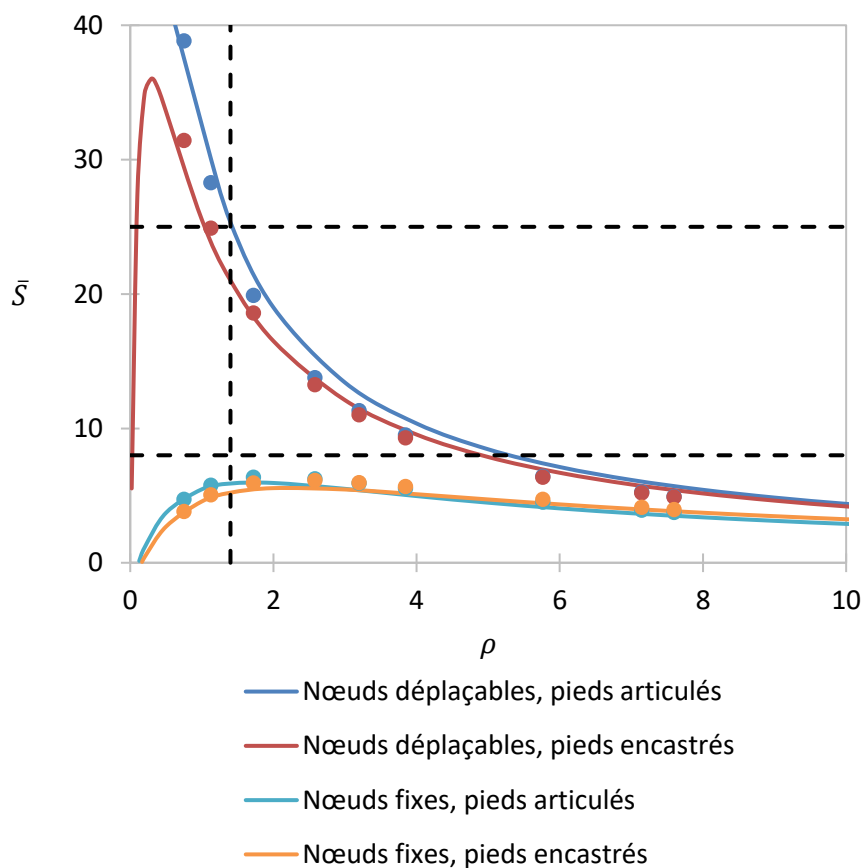


Figure 12 – Relation entre  $\rho$  et la rigidité adimensionnelle minimale à partir de laquelle les assemblages poutre-colonne d'un portique symétrique à une travée, articulé ou encasté en pieds, dont le mode d'instabilité est à nœuds déplaçables ou à nœuds fixes, sont classés comme rigides selon un critère de stabilité à 95 %

Nom	Poutre			Colonne			Chargement ELS	
	Profilé	$I_b$ [cm <sup>4</sup> ]	$L_b$ [m]	Profilé	$I_c$ [mm <sup>4</sup> ]	$L_c$ [m]	P [kN]	F [kN]
C1	HE 400 B	57 680	4	HE 200 B	5 696	4,5	300	10
C2				HE 240 B	11 260	4,5	300	20
C3				HE 300 B	18 690	4,5	900	40
C4				HE 400 B	57 680	4,5	900	70
C5			6	HE 200 B	5 696	4,5	300	10
C6				HE 240 B	11 260	4,5	300	20
C7				HE 300 B	18 690	4,5	900	40
C8				HE 400 B	57 680	4,5	900	70
C9	HE 500 B	107 200	6	HE 300 B	18 690	4,5	600	40
C10				HE 240 B	11 260	4,5	600	20

Tableau 2 – Géométrie et chargement des simulations numériques,  $E = 210\,000$  MPa

Portique symétrique simple à nœuds déplaçables							
Nom	$\rho$	Pieds articulés			Pieds encastés		
		$\bar{S}_{num}$	$\bar{S}_{th}$	Erreur	$\bar{S}_{num}$	$\bar{S}_{th}$	Erreur
CD1	11,392	3,3	3,9	-17 %	3,3	3,7	-12 %
CD2	5,763	6,4	7,4	-15 %	6,4	6,9	-9 %
CD3	2,578	13,8	15,3	-11 %	13,2	13,6	-3 %
CD4	1,125	28,3	29,9	-6 %	24,9	23,9	4 %
CD5	7,595	4,9	5,7	-15 %	4,9	5,4	-11 %
CD6	3,842	9,5	10,7	-13 %	9,3	9,9	-6 %
CD7	1,719	19,9	21,5	-8 %	18,6	18,4	1 %
CD8	0,750	38,8	39,7	-2 %	31,4	29,3	7 %
CD9	3,194	11,3	12,7	-12 %	11,0	11,5	-5 %
CD10	7,140	5,3	6,0	-15 %	5,2	5,7	-10 %

Tableau 3 – Rigidités adimensionnelles minimales numériques et analytiques à partir desquelles les assemblages poutre-colonne sont classés comme rigides selon un critère de stabilité à 95 %

Portique symétrique simple à nœuds fixes							
Nom	$\rho$	Pieds articulés			Pieds encastés		
		$\bar{S}_{num}$	$\bar{S}_{th}$	Erreur	$\bar{S}_{num}$	$\bar{S}_{th}$	Erreur
CF1	11,392	2,8	2,6	5 %	2,9	3,0	-2 %
CF2	5,763	4,5	4,1	8 %	4,7	4,4	6 %
CF3	2,578	6,3	5,7	9 %	6,1	5,6	9 %
CF4	1,125	5,8	5,7	2 %	5,1	4,8	5 %
CF5	7,595	3,8	3,5	7 %	4,0	3,8	3 %
CF6	3,842	5,5	5,0	9 %	5,7	5,2	9 %
CF7	1,719	6,4	6,0	6 %	5,9	5,5	8 %
CF8	0,750	4,7	4,8	-3 %	3,8	3,8	0 %
CF9	3,194	5,9	5,4	9 %	6,0	5,4	10 %
CF10	7,140	3,9	3,6	7 %	4,1	4,0	4 %

Tableau 4 – Rigidités adimensionnelles minimales numériques et analytiques à partir desquelles les assemblages poutre-colonne sont classés comme rigides selon un critère de stabilité à 95 %

### 3. CRITÈRE DE RÉSISTANCE DE GOMES

#### 3.1. Introduction

D'abord, l'expression du critère de classification rigide/semi-rigide des assemblages poutre-colonne d'un portique symétrique simple, articulé en pieds, initialement définie par Gomes est déclinée en 4 variantes selon les hypothèses simplificatrices posées.

Ensuite, la rigidité adimensionnelle minimale, à partir de laquelle les assemblages poutre-colonne d'un portique symétrique simple et articulé en pieds sont classés comme rigides, est déterminée numériquement pour un ensemble de structures et comparée aux résultats provenant de ces 4 variantes issues d'un même critère de résistance à 95 % afin d'identifier le taux de sécurité associé à chacune d'entre elles.

#### 3.2. Formulation analytique de 4 variantes

Selon F. Gomes, les assemblages poutre-colonne d'un portique simple, symétrique et articulé en pieds sont classés comme rigides si leur rigidité dépasse une limite qui dépend du rapport entre la charge verticale de calcul appliquée sur la structure et sa charge critique (Gomes, 1995).

La borne supérieure ( $\rho \rightarrow 0$ ) de cette rigidité frontière entre les assemblages rigides et semi-rigides est dérivée grâce à la formule de Merchant-Rankine modifiée à partir d'une condition imposée sur la résistance de la structure réelle, à savoir que la rigidité des assemblages poutre-colonne de cette structure est suffisante pour que sa résistance soit supérieure à 95 % de la résistance de la même structure idéalisée avec des assemblages infiniment rigides (4-12).

Cette formulation du critère de résistance à 95 % est assez facile à utiliser en pratique étant donné que la classification rigide/souple de la structure est obligatoire pour déterminer si les effets du second ordre sont négligeables et nécessite le calcul préalable du rapport entre la charge verticale de calcul appliquée sur la structure et la première charge critique d'instabilité d'ensemble de la structure.

$$\text{Variante 1} \quad \bar{S} \geq 114 \frac{V_{Ed}}{V_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}} \quad (4-12)$$

Or, la formule de Merchant-Rankine modifiée est applicable à des structures dont le comportement reste dans un certain domaine (4-13) délimité par des valeurs du ratio entre leur multiplicateur critique et leur multiplicateur plastique.

$$\frac{\lambda_{cr}}{\lambda_{pl}} \in [4, 10] \quad (4-13)$$

En principe, les règles de dimensionnement d'une structure font en sorte que son multiplicateur plastique  $\lambda_{pl}$  soit supérieur à 1 afin d'éviter une ruine plastique sous les charges de calcul. Étant donné que le critère de classification des assemblages rigides est plus restrictif lorsque la rigidité demandée est élevée, il est de nouveau borné supérieurement, simplifié et rendu indépendant de  $V_{Ed}/V_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}$  en posant que  $\lambda_{cr}/\lambda_{pl}$  vaut 4 et que  $\lambda_{pl}$  est égal à un (4-14).

$$\lambda_{cr} = \frac{V_{cr}}{V_{Ed}} = 4\lambda_{pl} \Leftrightarrow \frac{V_{Ed}}{V_{cr}} = \frac{1}{4} \quad (4-14)$$

Dès lors, les assemblages sont classés comme rigides pourvu que la limite de rigidité qui en découle (4-14) soit dépassée et que la structure possède un ratio  $\lambda_{cr}/\lambda_p$  supérieur ou égal à 4 (4-15). Dans ce cas, la perte de résistance de la structure liée au fait que les assemblages ne sont en réalité pas infiniment rigides est toujours inférieure ou égale à 5 %, contrairement au critère de l'Eurocode 3 pour les structures non-contreventées,  $\bar{S} \geq 25$ .

$$\bar{S} \geq 28,5 \quad (4-15)$$

En inversant la démarche de simplification et en évitant de borner supérieurement cette limite à deux reprises, la rigidité initiale frontière entre les assemblages rigides et les assemblages semi-rigides ne dépend pas uniquement de la rigidité flexionnelle de la poutre assemblée (4-16).

$$\text{Variante 2} \quad \bar{S} \geq \frac{114}{1 + 2\rho} \frac{V_{Ed}}{V_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}} \quad (4-16)$$

Pour finir, F. Gomes a posé une hypothèse inquiétante lors de ses développements. Il suppose que la charge ultime de la structure est égale à la charge de calcul alors qu'elle lui est normalement supérieure, ce qui n'est pas sécuritaire (4-17).

$$\bar{S} \geq \frac{114}{1 + 2\rho} \frac{\lambda_u^{\bar{S} \rightarrow \infty}}{\lambda_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}} \geq \frac{114}{1 + 2\rho} \frac{V_{Ed}}{V_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}} \quad (4-17)$$

Avant d'utiliser cette hypothèse, la rigidité adimensionnelle minimale des assemblages poutre-colonne dits rigides était exprimée analytiquement en fonction du rapport entre le multiplicateur ultime de la structure à assemblages infiniment rigides et le multiplicateur critique de la même structure. Cette expression est d'ailleurs aussi bornée supérieurement lorsque  $\rho$  tend vers zéro.

$$\text{Variante 3} \quad \bar{S} \geq \frac{114}{1 + 2\rho} \frac{\lambda_u^{\bar{S} \rightarrow \infty}}{\lambda_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}} \quad (4-18)$$

$$\text{Variante 4} \quad \bar{S} \geq 114 \frac{\lambda_u^{\bar{S} \rightarrow \infty}}{\lambda_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}} \quad (4-19)$$

### 3.3. Comparaison analytique/numérique

La charge critique de la structure à assemblages infiniment rigides  $V_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}$  qui intervient dans ces expressions est déterminée par le programme éléments finis non-linéaire FINELG ou bien par la procédure de l'Eurocode 3. En pratique, une structure aussi simple qu'un portique symétrique à une travée articulé en pieds est rarement analysée par un programme de calcul sophistiqué comme FINELG. Dès lors, les formules de l'Eurocode 3 seront plus fréquemment employées pour évaluer la charge critique de ce type de structure.

Les rigidités minimales des assemblages obtenues à partir de toutes ces variantes pour une série de 10 portiques sont regroupées dans le Tableau 6 et présentées à la Figure 13. De plus, elles sont aussi comparées avec des valeurs de référence provenant de la simulation numérique des mêmes portiques dont les données sont fournies dans le Tableau 5.

Cette fois-ci, la rigidité initiale des assemblages poutre-colonne minimale nécessaire pour qu'ils soient classés comme rigides est telle que le multiplicateur ultime des charges de la structure avec ces

assemblages de rigidité initiale finie est quasiment égal à 95 % du multiplicateur ultime des charges de la structure à assemblages infiniment rigides. Leur rigidité  $\bar{S}_{num}$  est donc ajustée au cours des simulations par l'outil numérique jusqu'à ce que cette égalité soit vérifiée avec une précision de 0,1 %.

Nom	Poutre			Colonne			Chargement ELS	
	Profilé	$I_b$ [cm <sup>4</sup> ]	$L_b$ [m]	Profilé	$I_c$ [mm <sup>4</sup> ]	$L_c$ [m]	P [kN]	F [kN]
U1	HE 400 B	57 680	4	HE 200 B	5 696	4,5	50	10
U2				HE 240 B	11 260	4,5	50	20
U3				HE 300 B	18 690	4,5	200	40
U4				HE 400 B	57 680	4,5	200	70
U5			6	HE 200 B	5 696	4,5	50	10
U6				HE 240 B	11 260	4,5	50	20
U7				HE 300 B	18 690	4,5	200	40
U8				HE 400 B	57 680	4,5	200	70
U9	HE 500 B	107 200	6	HE 300 B	18 690	4,5	100	40
U10				HE 240 B	11 260	4,5	100	20

Tableau 5 – Géométrie et chargement des simulations numériques,  $E = 210\,000\text{ MPa}$

Nom	$\rho$	$\lambda_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}$	$\lambda_u^{\bar{S} \rightarrow \infty}$	$\bar{S}_{num}$	$114 \frac{V_{Ed}}{V_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}}$	$\frac{114}{1 + 2\rho} \frac{V_{Ed}}{V_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}}$	$114 \frac{\lambda_u^{\bar{S} \rightarrow \infty}}{\lambda_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}}$	$\frac{114}{1 + 2\rho} \frac{\lambda_u^{\bar{S} \rightarrow \infty}}{\lambda_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}}$
U1	11,392	28	5,2	0,65	4,04	0,17	20,94	0,88
U2	5,763	54	4,9	0,65	2,11	0,17	10,40	0,83
U3	2,578	28	3,7	1,76	4,05	0,66	14,97	2,43
U4	1,125	54	4,1	2,10	2,06	0,63	8,50	2,62
U5	7,595	28	5,2	0,97	4,09	0,25	21,16	1,31
U6	3,842	52	4,9	0,98	2,16	0,25	10,67	1,23
U7	1,719	26	3,7	2,60	4,27	0,96	15,71	3,54
U8	0,750	48	4,1	3,11	2,30	0,92	9,49	3,80
U9	3,194	57	4,4	0,91	1,97	0,27	8,62	1,17
U10	7,140	27	4,3	0,84	4,16	0,27	17,71	1,16

Tableau 6 – Rigidités adimensionnelles minimales numériques et analytiques (4 variantes) à partir desquelles les assemblages poutre-colonne d'un portique symétrique simple, articulé en pieds, sont classés comme rigides selon un critère de résistance à 95 %

L'examen attentif de la Figure 13 mène aux remarques et aux observations suivantes :

- 1) Les **résultats numériques** sont évidemment très proches de la **quatrième variante** puisqu'elle provient uniquement d'une réécriture de la formule de Merchant-Rankine sans autre hypothèse que son applicabilité et que le multiplicateur plastique de la structure n'est pas influencé par la rigidité des assemblages.
- 2) La **troisième variante** est une borne supérieure de la **quatrième** obtenue quand  $\rho \rightarrow 0$ . Elle impose des rigidités minimales largement supérieures et, par la même occasion, sécuritaires.
- 3) La **première variante** perd en partie de cette marge de sécurité quand la charge ultime de la structure est supposée égale à la charge de calcul. En effet, la charge ultime est en réalité supérieure ou égale à la charge de calcul. Dans le cas où elle est supérieure, la remplacer par la charge de calcul dans l'équation rend le critère moins restrictif. Cependant, il semble que la marge

de sécurité engendrée par le fait de borner supérieurement le critère pour  $\rho \rightarrow 0$  compense suffisamment cette perte, sauf lorsque  $\rho$  est trop faible.

- 4) Selon la même logique, la **deuxième variante** est clairement insécuritaire puisque la charge ultime est remplacée par la charge de calcul mais que le critère n'est même pas borné supérieurement pour  $\rho \rightarrow 0$ .

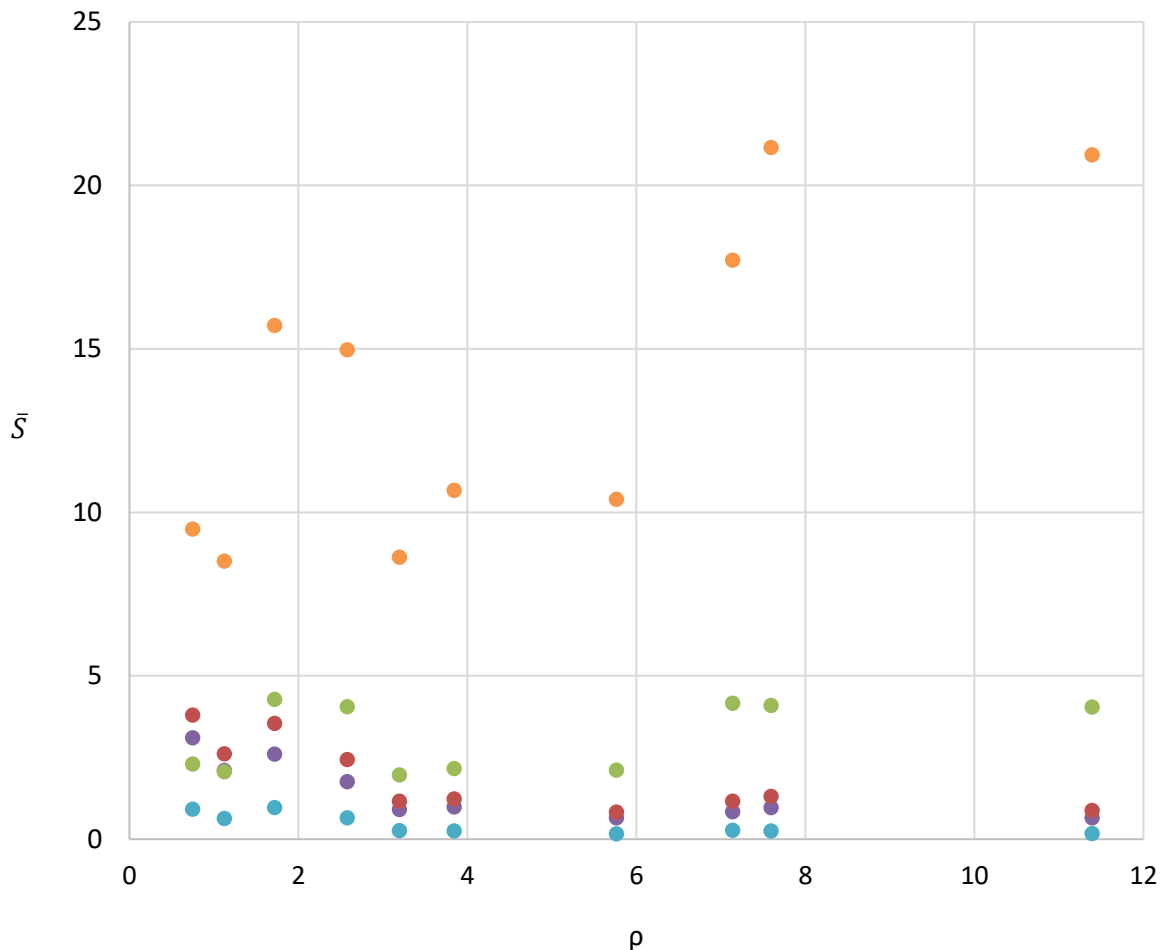


Figure 13 – Rigidité minimale des assemblages poutre-colonne classés comme rigides selon différentes variantes dérivées d'un même critère de résistance à 95 %, légende dans le Tableau 6

## 4. CRITÈRE DE DÉPLACEMENT DE GOMES

### 4.1. Introduction

Pour commencer, l'expression du déplacement transversal en tête des colonnes d'un portique symétrique simple, articulé en pieds et doté d'assemblages de rigidité finie trouvée dans l'article de Gomes est établie en suivant la méthode des déplacements afin de bien comprendre toutes ses implications.

Ensuite, la rigidité adimensionnelle minimale pour classer des assemblages comme rigides est déduite d'un critère de déplacement à 90 % grâce à cette expression. Par la méthode de Horne, cette rigidité limite est exprimée en fonction de la charge critique de la même structure à assemblages infiniment rigides.



Finalement, ces deux frontières analytiques de rigidité adimensionnelle entre les assemblages rigides et les assemblages semi-rigides sont confrontées à des résultats numériques obtenus sur un ensemble de portiques.

## 4.2. Formulation analytique

Aucun critère de déplacement n'est énoncé tel quel dans l'article de F. Gomes. Cependant, il est assez simple d'en déduire un à partir de l'expression du déplacement transversal (4-20) en tête des colonnes d'un portique symétrique simple articulé en pieds et doté d'assemblages de rigidité finie  $\Delta^{\bar{S}}$ .

$$\Delta^{\bar{S}} = \frac{FL_c^3}{12EI_c} \frac{6 + \bar{S}(1 + 2\rho)}{\bar{S}\rho} \quad (4-20)$$

Toutefois, avant d'utiliser cette formule, il est indispensable de connaître son origine mathématique et les hypothèses sur lesquelles elle se fonde. Or, l'article mentionne les travaux de Cosenza comme référence et ces derniers n'ont pas été retrouvés.

Dès lors, la méthode des déplacements est utilisée au premier ordre afin de déterminer les expressions des inconnues cinématiques d'une structure en fonction de sa géométrie et, notamment, l'inconnue qui nous intéresse le plus, à savoir le déplacement transversal en tête des colonnes. Pour ce faire, les déformations dues aux efforts tranchants et aux efforts normaux sont négligées devant celles provenant de la flexion des éléments constitutifs d'une structure.

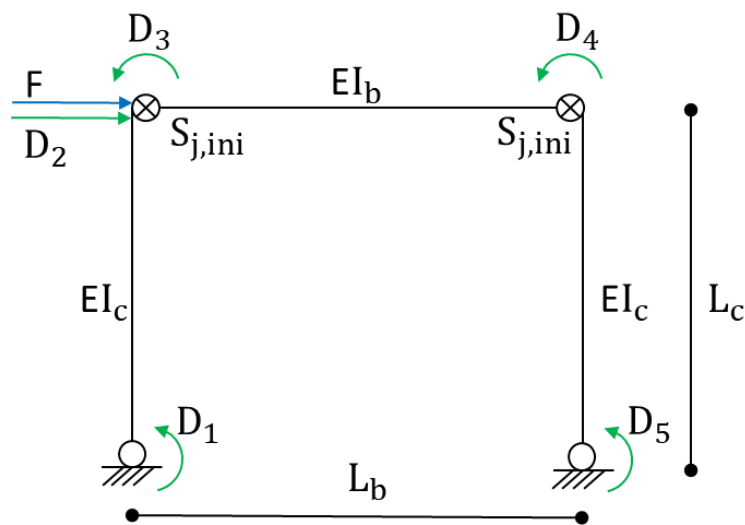


Figure 14 – Définition des inconnues cinématiques d'un portique symétrique simple

Les inconnues cinématiques (déplacement transversal en tête des colonnes  $D_2$  et rotations aux nœuds du portique  $D_1, D_3, D_4$  et  $D_5$ ) sont définies à la Figure 14 et le système d'équations à résoudre pour une structure en général est écrit sous forme matricielle (4-21). Les portiques simples symétriques articulés en pieds présentent 5 degrés de liberté.

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{p} \quad (4-21)$$

Avec :

- $\mathbf{K}$ , la matrice de rigidité de la structure (matrice carrée 5 x 5)
- $\mathbf{d}$ , le vecteur des inconnues cinématiques (vecteur colonne 1 x 5)
- $\mathbf{p}$ , le vecteur des charges nodales (vecteur colonne 1 x 5)

Seul le vecteur des charges nodales est indépendant de la rigidité des assemblages (4-22). Il reste identique quelle que soit la rigidité des assemblages poutre-colonne de la structure.

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4-22)$$

La rigidité flexionnelle des poutres  $K_b$  et celle des colonnes  $K_c$  interviennent dans la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  des structures, de même que la rigidité initiale  $S_{j,ini}$  des assemblages qui est adimensionnalisée  $\bar{S}$  et intégrée à un nouveau paramètre  $\alpha$  (4-23).

$$\alpha = \frac{2}{\bar{S}} = \frac{2K_b}{S_{j,ini}} \quad (4-23)$$

Les expressions mathématiques des éléments de la matrice de rigidité  $\mathbf{K}^{\bar{S}}$  (4-24) et celles du vecteur des inconnues cinématiques  $\mathbf{d}^{\bar{S}}$  (4-25) du portique articulé en pieds à assemblages de rigidité finie sont détaillées.

$$\mathbf{K}^{\bar{S}} = \begin{pmatrix} 4K_c & 6\frac{K_c}{L_c} & 2K_c & 0 & 0 \\ 6\frac{K_c}{L_c} & 24\frac{K_c}{L_c^2} & 6\frac{K_c}{L_c} & 6\frac{K_c}{L_c} & 6\frac{K_c}{L_c} \\ 2K_c & 6\frac{K_c}{L_c} & 4K_c + 4K_b\frac{g(\alpha)}{f(\alpha)} & 2\frac{K_b}{f(\alpha)} & 0 \\ 0 & 6\frac{K_c}{L_c} & 2\frac{K_b}{f(\alpha)} & 4K_c + 4K_b\frac{g(\alpha)}{f(\alpha)} & 2K_c \\ 0 & 6\frac{K_c}{L_c} & 0 & 2K_c & 4K_c \end{pmatrix} \quad (4-24)$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{1 + 4\alpha + 3\alpha^2} \quad \text{et} \quad g(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha + 1$$

$$\mathbf{d}^{\bar{S}} = \begin{pmatrix} -\frac{FL_c}{12} \left( \frac{(1+3\alpha)}{K_b} + \frac{3}{K_c} \right) \\ \frac{FL_c^2}{12} \left( \frac{(1+3\alpha)}{K_b} + \frac{2}{K_c} \right) \\ -\frac{FL_c(1+3\alpha)}{12K_b} \\ -\frac{FL_c(1+3\alpha)}{12K_b} \\ -\frac{FL_c}{12} \left( \frac{(1+3\alpha)}{K_b} + \frac{3}{K_c} \right) \end{pmatrix} \quad (4-25)$$

L'expression du déplacement transversal  $D_2^{\bar{S}}$  (4-26) en tête des colonnes d'un portique symétrique simple, articulé en pieds, à assemblages de rigidité finie est bien semblable à celle montrée sans aucun développement dans l'article de F. Gomes. Il s'agit donc d'un déplacement élastique linéaire au premier ordre.

$$D_2^{\bar{S}} = \Delta^{\bar{S}} = \frac{FL_c^3}{12EI_c} \frac{6 + \bar{S}(1 + 2\rho)}{\bar{S}\rho} \quad (4-26)$$

Après avoir trouvé l'origine mathématique de cette formule, il suffit de conserver les mêmes expressions en faisant tendre la valeur de la rigidité des assemblages vers l'infini (4-27) pour obtenir la matrice de rigidité  $\mathbf{K}^{\bar{S} \rightarrow \infty}$  et le vecteur des inconnues nodales  $\mathbf{d}^{\bar{S} \rightarrow \infty}$  correspondant à la structure à assemblages infiniment rigides.

$$\lim_{S_{j,ini} \rightarrow \infty} \alpha = 0; \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha) = 1; \lim_{\alpha \rightarrow 0} g(\alpha) = 1 \quad (4-27)$$

Un critère de déplacement à 90 % est alors obtenu en isolant  $\alpha$  de l'inéquation qui traduit mathématiquement le fait que le déplacement transversal en tête des colonnes de la structure à assemblages infiniment rigides est supérieur ou égal à 0,9 fois le déplacement transversal en tête des colonnes de la structure calculée en prenant en compte la valeur finie de la rigidité initiale des assemblages poutre-colonne.

$$D_2^{\bar{S} \rightarrow \infty} \geq 0,9 D_2^{\bar{S}} \Leftrightarrow \left( \frac{1}{K_b} + \frac{2}{K_c} \right) \geq 0,9 \left( \frac{(1 + 3\alpha)}{K_b} + \frac{2}{K_c} \right) \quad (4-28)$$

$$\alpha \geq \frac{1 + 2 \frac{K_b}{K_c}}{27} \text{ ou } S_{j,ini} \geq \frac{54}{\frac{1}{K_b} + \frac{2}{K_c}} \quad (4-29)$$

Pour un portique symétrique simple articulé en pieds, la rigidité adimensionnelle minimale des assemblages (4-30) considérés comme rigides est exprimée comme suit en fonction du paramètre adimensionnel  $\rho$ .

$$\bar{S} \geq \frac{54}{1 + 2\rho} \quad (4-30)$$

Il s'agit du même critère sur la rigidité adimensionnelle des assemblages que celui qui a été obtenu via la formule simplifiée de Wood au cours des recherches COST.

Pour un portique symétrique simple encastré en pieds, la méthode des déplacements est aussi utilisée mais la démarche aboutit à une formule très complexe et peu pratique pour déterminer la rigidité adimensionnelle minimale des assemblages classés comme rigides, contrairement à l'expression déterminée par les recherches COST grâce à la formule simplifiée de Wood.

Par la méthode de Horne, la rigidité adimensionnelle des assemblages rigides dans un portique symétrique simple articulé en pieds satisfait la condition suivante (4-32), déduite de la précédente (4-30) en soulignant sa dépendance par rapport à la charge critique de la structure à assemblages infiniment rigides (4-31).

$$V_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty} = \frac{0,9FL_c}{D_2^{\bar{S} \rightarrow \infty}} = \frac{10,8EI_c}{L_c^2} \frac{\rho}{1 + 2\rho} \quad (4-31)$$

$$\bar{S} \geq 5L_c \frac{V_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}}{K_b} \quad (4-32)$$

Grâce à cette même méthode, l'équivalence entre un critère de déplacement à 90 % et un critère de stabilité à 90 % (4-33) est mise en évidence.

$$\beta_{cr} = \frac{V_{cr}^{\bar{s}}}{V_{cr}^{\bar{s} \rightarrow \infty}} = \frac{D_2^{\bar{s} \rightarrow \infty}}{D_2^{\bar{s}}} \geq 0,9 \quad (4-33)$$

Cette équivalence est d'ailleurs confirmée en utilisant une autre procédure simplifiée de calcul du multiplicateur critique des charges d'une structure (4-34) provenant de l'Annexe F du code British Standard BS 5950.

$$\lambda_{cr} = \frac{L_c}{200D_2} \quad (4-34)$$

### 4.3. Comparaison analytique/numérique

La rigidité adimensionnelle minimale des assemblages poutre-colonne d'une série de 10 portiques symétriques simples, articulés en pieds, est déterminée numériquement par l'outil créé. Il s'occupe de modifier la rigidité des assemblages jusqu'à ce que le déplacement transversal élastique au premier ordre en tête des colonnes de la structure à assemblages infiniment rigides soit égal à 90 % de celui de la structure à assemblages de rigidité finie. La géométrie et le chargement de ces 10 portiques symétriques simples, articulés en pieds, sont résumés dans le Tableau 7. Leurs caractéristiques géométriques font qu'ils couvrent toujours le même domaine de  $\rho$  que les simulations précédentes.

Nom	Poutre			Colonne			Chargement ELS	
	Profilé	$I_b$ [cm <sup>4</sup> ]	$L_b$ [m]	Profilé	$I_c$ [mm <sup>4</sup> ]	$L_c$ [m]	P [kN]	F [kN]
D1	HE 400 B	57 680	4	HE 200 B	5 696	4,5	50	10
D2				HE 240 B	11 260	4,5	50	20
D3				HE 300 B	18 690	4,5	200	40
D4				HE 400 B	57 680	4,5	200	70
D5			6	HE 200 B	5 696	4,5	50	10
D6				HE 240 B	11 260	4,5	50	20
D7				HE 300 B	18 690	4,5	200	40
D8				HE 400 B	57 680	4,5	200	70
D9	HE 500 B	107 200	6	HE 300 B	18 690	4,5	100	40
D10				HE 240 B	11 260	4,5	100	20

Tableau 7 – Géométrie et chargement des simulations numériques,  $E = 210\,000$  MPa

Le Tableau 8 contient les coordonnées  $[\rho, \bar{s}_{num}]$  relatives aux 10 simulations numériques. Ces points sont dessinés sur le graphique de la Figure 15 tandis que la courbe continue affichée sur ce même graphique représente la rigidité minimale des assemblages (4-35) classés dans la catégorie des assemblages rigides selon un critère de déplacement à 90 % écrit en fonction du paramètre adimensionnel  $\rho$ .

$$\bar{s}_{th,\rho} = \frac{54}{1 + 2\rho} \quad (4-35)$$

Les erreurs obtenues entre les valeurs de  $\bar{s}_{num}$  provenant des simulations numériques et celles déterminées par le critère analytique  $\bar{s}_{th,\rho}$  sont évaluées et semblent tourner autour de 0,5 %, ce qui est assez faible. Le critère de déplacement à 90 % établi analytiquement en termes de  $\rho$  et  $\bar{s}$  pour un portique symétrique à une seule travée, articulé en pieds est validé et décrit assez fidèlement la réalité. De plus, ce critère est sécuritaire puisqu'il surpasse toujours un peu le critère numérique.

Nom	$\rho$	$\bar{S}_{num}$	$\bar{S}_{th,\rho}$	Erreur relative
D1	11,392	2,26	2,27	-0,5 %
D2	5,763	4,28	4,31	-0,8 %
D3	2,578	8,69	8,77	-0,9 %
D4	1,125	16,38	16,62	-1,4 %
D5	7,595	3,33	3,33	-0,2 %
D6	3,842	6,18	6,22	-0,6 %
D7	1,719	12,11	12,17	-0,5 %
D8	0,75	21,48	21,60	-0,5 %
D9	3,194	7,28	7,31	-0,4 %
D10	9,146	3,51	3,53	-0,6 %

Tableau 8 – Rigidités adimensionnelles minimales numériques et analytiques (en fonction de  $\rho$ ) à partir desquelles les assemblages poutre-colonne d'un portique symétrique simple, articulé en pieds, sont classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 %

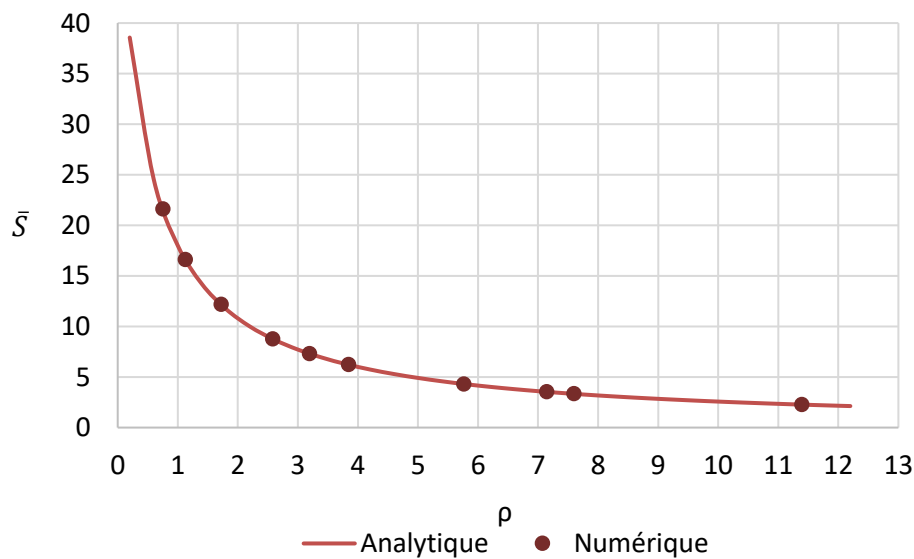


Figure 15 - Relation entre  $\rho$  et la rigidité adimensionnelle minimale à partir de laquelle les assemblages poutre-colonne d'un portique symétrique à une travée, articulé en pieds, sont classés comme rigides selon un critère de déplacement transversal à 90 %

La rigidité minimale des assemblages classés comme rigides est maintenant exprimée en fonction de la charge critique des structures à assemblages infiniment rigides simulées.

$$\bar{S}_{th,cr} = 5 \frac{L_c}{R_b} V_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty} \quad (4-36)$$

La charge critique des structures à assemblages rigides simulées est déterminée de deux manières différentes. La première façon de procéder consiste à récupérer la valeur de la charge critique d'Euler obtenue suite à une analyse critique effectuée par le programme de calcul FINELG. La seconde possibilité est d'utiliser les formules de l'Eurocode qui fournissent la valeur de la charge critique d'Euler des colonnes de la structure en fonction des facteurs  $\eta_1$  et  $\eta_2$ .

Le Tableau 9 et le Tableau 10 contiennent ces valeurs de  $V_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}$  calculées respectivement par le programme FINELG ou par la procédure préconisée dans l'Eurocode. Ils regroupent aussi les rigidités minimales numériques et analytiques au-dessus desquelles le remplacement des assemblages de rigidité finie par des assemblages de rigidité infinie est autorisé pour analyser la structure.

Dans les deux cas, les erreurs relatives sont plus élevées qu'avec l'autre formulation du critère, certainement à cause de l'approximation liée à l'utilisation de la méthode de Horne. Les résultats sont moins sécuritaires puisque les valeurs de  $\bar{S}_{th,cr}$  sont quasiment toujours inférieures à celles de  $\bar{S}_{num}$ . Les erreurs sont aussi supérieures lorsque les charges critiques sont évaluées au moyen de la méthode simplifiée de l'Eurocode 3.

Nom	$V_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}$ FINELG	$\bar{S}_{num}$	$\bar{S}_{th,cr}$	Erreur relative
D1	28	2,26	2,09	7,3 %
D2	54	4,28	4,01	6,3 %
D3	28	8,69	8,37	3,6 %
D4	55	16,38	16,45	-0,4 %
D5	28	3,33	3,10	6,7 %
D6	53	6,18	5,88	5,1 %
D7	27	12,11	11,90	1,8 %
D8	50	21,48	22,10	-2,8 %
D9	58	7,28	6,94	4,6 %
D10	27	3,51	3,29	6,5 %

Tableau 9 – Rigidités adimensionnelles minimales numériques et analytiques (charge critique évaluée via FINELG) à partir desquelles les assemblages poutre-colonne d'un portique symétrique simple, articulé en pieds, sont classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 %

Nom	$V_{cr}^{\bar{S} \rightarrow \infty}$ EUROCODE	$\bar{S}_{num}$	$\bar{S}_{th,cr}$	Erreur relative
D1	28	2,26	2,09	7,4 %
D2	54	4,28	4,00	6,4 %
D3	28	8,69	8,29	4,6 %
D4	54	16,38	16,18	1,2 %
D5	28	3,33	3,09	7,3 %
D6	52	6,18	5,82	6,1 %
D7	26	12,11	11,65	3,8 %
D8	48	21,48	21,46	0,2 %
D9	57	7,28	6,86	5,7 %
D10	27	3,51	3,27	7,0 %

Tableau 10 – Rigidités adimensionnelles minimales numériques et analytiques (charge critique évaluée via l'Eurocode) à partir desquelles les assemblages poutre-colonne d'un portique symétrique simple, articulé en pieds, sont classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 %

## 5. CRITÈRE DE RÉSISTANCE DES RECHERCHES COST

### 5.1. Introduction

En premier lieu, le critère de résistance à 95 % est équivalent à un critère de stabilité dont la sévérité est moindre et dépend du paramètre  $X$ , rapport entre le multiplicateur critique et le multiplicateur plastique. Ce critère de stabilité est alors exprimé en fonction des paramètres adimensionnels  $\bar{S}$  et  $\rho$  tout comme celui de l'Eurocode mais avec une sévérité inférieure à 95 % pour des portiques articulés ou encastés en pieds, dont le mode de flambement est à nœuds déplaçables. Puis, les courbes analytiques de  $\bar{S}$  en fonction de  $\rho$  établies par la limite inférieure de ces critères sont comparées à des résultats numériques obtenus dans les mêmes conditions.

## 5.2. Formulation analytique

En partant de la formule de Merchant-Rankine appliquée à des structures non-contreventées, les recherches COST ont lié la sévérité d'un critère de résistance  $\beta_u$  à celle d'un critère de stabilité  $\beta_{cr}$  ainsi qu'à un paramètre  $X$  qui n'est autre que le ratio entre le multiplicateur critique  $\lambda_{cr}$  de la structure considérée et son multiplicateur plastique  $\lambda_{pl}$ . Le paramètre  $X$  varie entre 4 et 10, conformément au domaine couvert par la formule de Merchant-Rankine.

$$\beta_u = \frac{X + \beta_{cr}}{X + 1} \geq 0,95 \quad (4-37)$$

Dès lors, l'imposition d'un critère de résistance à 95 % pour classer les assemblages comme rigides revient à exiger qu'un critère de stabilité à 75 % soit respecté si  $X = 4$  ou qu'un critère de stabilité à 45 % soit rempli si  $X = 10$ . La formulation des critères de stabilité de l'Eurocode 3 (§ 2.2) a montré qu'ils s'écrivent en toute généralité de la manière suivante.

$$\beta_{cr} = \left( \frac{K^{\bar{s} \rightarrow \infty}}{K^{\bar{s}}} \right)^2 \quad (4-38)$$

Dans cette équation,  $K^{\bar{s}}$  et  $K^{\bar{s} \rightarrow \infty}$  sont les facteurs par lesquels il faut respectivement multiplier les longueurs d'épure des colonnes de la structure à assemblages de rigidité finie ou de la structure à assemblages infiniment rigides pour obtenir leurs longueurs de flambement. Ils sont calculés au moyen des formules empiriques de Wood en fonction des restraints aux extrémités des colonnes et de leur mode de flambement, à nœuds déplaçables ou à nœuds fixes (Annexe 1).

Lorsque les colonnes de la structure flambent dans un mode d'instabilité à nœuds déplaçables :

$$K = \sqrt{\frac{1 - 0,2(\eta_1 + \eta_2) - 0,12\eta_1\eta_2}{1 - 0,8(\eta_1 + \eta_2) + 0,6\eta_1\eta_2}} \quad (4-39)$$

Quand le pied des colonnes est articulé,  $\eta_1$  vaut 1.

Par contre, lorsqu'il est encastré,  $\eta_1$  vaut 0.

$$\eta_2 = \frac{K_c}{K_c + K_b^*} \quad (4-41)$$

$$K_b^* = x K_b \frac{1}{1 + \frac{4x}{S}} \quad (4-42)$$

Le paramètre  $x$  vaut 1,5 puisque la poutre se déforme en double courbure dans le mode de flambement considéré.

Ensuite, des limites inférieures imposées à la rigidité des assemblages classés comme rigides sont extraites de l'équation (4-37) en fonction de la sévérité du critère de stabilité associé à un certain paramètre  $X$  et à un critère de résistance à 95 %.

Elles sont déterminées analytiquement pour deux structures dont le mode de flambement est à nœuds déplaçables, à savoir un portique symétrique simple articulé en pieds (4-43) ou encastré en pieds (4-44).

$$\bar{S} \geq \frac{12\beta_{cr}}{(1 - \beta_{cr})(5\rho + 2)} \quad (4-43)$$

$$\bar{S} \geq \frac{12(15\rho + 8 - 60\beta_{cr}\rho - 8\beta_{cr})}{(\beta_{cr} - 1)(225\rho^2 + 150\rho + 16)} \quad (4-44)$$

Quand  $\beta_u \geq 0,95$  et  $X = 4$ ,  $\beta_{cr} \geq 0,75$  :

$$\bar{S} \geq \frac{36}{(5\rho + 2)} \quad (4-45)$$

$$\bar{S} \geq \frac{48(30\rho - 2)}{(225\rho^2 + 150\rho + 16)} \quad (4-46)$$

Quand  $\beta_u \geq 0,95$  et  $X = 10$ ,  $\beta_{cr} \geq 0,45$  :

$$\bar{S} \geq \frac{9,82}{(5\rho + 2)} \quad (4-47)$$

$$\bar{S} \geq \frac{21,82(12\rho - 4,4)}{(225\rho^2 + 150\rho + 16)} \quad (4-48)$$

Leurs expressions dérivent bien vers celles déjà établies en (4-8) et (4-9) lorsque la sévérité du critère de stabilité est fixée à 0,95.

Les limites inférieures de la rigidité adimensionnelle  $\bar{S}$  déterminées analytiquement par ces formules sont dessinées en fonction du rapport des rigidités flexionnelles  $\rho$  à la Figure 16 pour 4 types de portiques symétriques simples dont les combinaisons de caractéristiques sont respectivement « articulé en pieds/ $X = 4$  », « articulé en pieds/ $X = 10$  », « encastré en pieds/ $X = 4$  » et « encastré en pieds/ $X = 10$  ».

Parmi les courbes tracées à la Figure 16, celles qui sont liées à un paramètre  $X$  de 10 sont assez plates. La résistance ultime des structures caractérisées par cette valeur du paramètre  $X$  n'est que très peu influencée par la rigidité des assemblages poutre-colonne. En effet, le multiplicateur critique de ce genre de structure est beaucoup plus élevé que le multiplicateur plastique et elles périssent généralement suite à la formation d'un mécanisme plastique complet. Or, la pleine résistance des assemblages était supposée au cours des développements mathématiques qui ont mené à la détermination de ces courbes. Par conséquent, le mode de ruine ne dépend pas de la rigidité des assemblages.

### 5.3. Comparaison analytique/numérique

À la Figure 16, les courbes analytiques sont confrontées à des rigidités adimensionnelles minimales  $\bar{S}_{num}$  obtenues par voie numérique en imposant un critère de résistance à 95 % à des structures dont le paramètre  $X$  varie de 4 à 10. Elles sont soit articulées en pieds, soit encastrées en pieds. Leur géométrie et leur chargement sont résumés dans le Tableau 11. Les résultats obtenus numériquement sont bien compris entre les deux courbes analytiques relatives à des structures de mêmes conditions d'appuis en base.



Nom	Poutre			Colonne			Chargement ELS	
	Profilé	$I_b$ [cm <sup>4</sup> ]	$L_b$ [m]	Profilé	$I_c$ [mm <sup>4</sup> ]	$L_c$ [m]	P [kN]	F [kN]
D1	HE 400 B	57 680	4	HE 200 B	5 696	4,5	50	10
D2				HE 240 B	11 260	4,5	50	20
D3				HE 300 B	18 690	4,5	200	40
D4				HE 400 B	57 680	4,5	200	70
D5			6	HE 200 B	5 696	4,5	50	10
D6				HE 240 B	11 260	4,5	50	20
D7				HE 300 B	18 690	4,5	200	40
D8				HE 400 B	57 680	4,5	200	70
D9	HE 500 B	107 200	6	HE 300 B	18 690	4,5	100	40
D10				HE 240 B	11 260	4,5	100	20

Tableau 11 – Géométrie et chargement des simulations numériques,  $E = 210\,000$  MPa

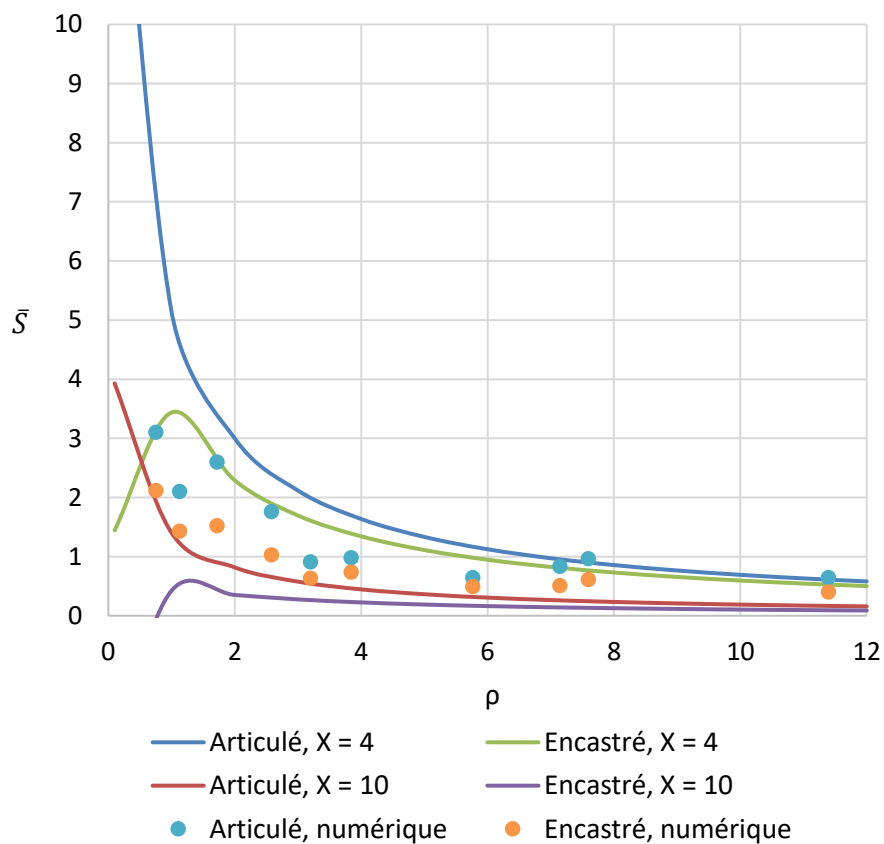


Figure 16 – Relation entre  $\rho$  et la rigidité adimensionnelle minimale  $\bar{S}$  à partir de laquelle les assemblages poutre-colonne d'un portique symétrique à une travée, articulé ou encastré en pieds, dont le paramètre  $X$  vaut 4 ou 10, sont classés comme rigides selon un critère de résistance à 95 %

## 6. CRITÈRE DE DÉPLACEMENT DES RECHERCHES COST

### 6.1. Introduction

Étant donné que les expressions analytiques liées aux critères de déplacement transversal à 90 %, au premier ou au second ordre, ont déjà été complètement déterminées au cours des recherches COST, elles sont uniquement rappelées dans la suite puis comparées à des résultats numériques afin d'évaluer non seulement leur précision mais aussi la différence apportée par la prise en compte des

effets du second ordre. Les critères de déplacement au second ordre sont très complexes. C'est pourquoi, il est intéressant en pratique de négliger cette différence si elle n'est pas trop importante afin d'utiliser des critères plus simples.

## 6.2. Formulation analytique

Au cours des recherches COST, des critères de classification par rigidité qui distinguent les assemblages rigides des assemblages semi-rigides ont été développés à partir d'un critère de déplacement transversal en tête des colonnes à 90 %, appliqué aux déplacements obtenus suite à une analyse élastique au premier ordre ou à ceux résultant d'une analyse élastique au second ordre. Ces critères concernent les assemblages poutre-colonne de portiques symétriques simples, articulés ou encastres en base.

Au premier ordre, les déplacements transversaux en tête des colonnes sont déterminés par la formule approchée de Wood & Roberts et non par la méthode des déplacements. Les assemblages sont rigides si leur rigidité dépasse la limite inférieure (4-49) lorsqu'ils appartiennent à un portique articulé en base et la limite inférieure (4-50) lorsqu'ils font partie d'un portique encasté en base.

$$\bar{S} \geq \frac{54}{1 + 2\rho} \quad (4-49)$$

$$\bar{S} \geq \frac{468\rho - 12}{18\rho^2 + 15\rho + 2} \quad (4-50)$$

Au second ordre, les déplacements transversaux en tête des colonnes sont établis grâce à la méthode des déplacements dans le cas le plus défavorable où  $X = 4$  et où la charge ultime équivaut à 1,5 fois la charge de service. Ils servent à exprimer les critères de déplacement à 90 % pour un portique articulé en pieds (4-51) et pour un portique encasté en pieds (4-52).

$$\beta_{\Delta,2} = \frac{(1 + 2\rho) \left( 12\bar{S}\rho - (6 + \bar{S} + 2\bar{S}\rho) \frac{2\pi^2}{7,5} \frac{0,6\rho}{0,72 + 2,4\rho} \right)}{(6 + \bar{S} + 2\bar{S}\rho) \left( 12\rho - (1 + 2\rho) \frac{2\pi^2}{7,5} \frac{0,6\rho}{0,72 + 2,4\rho} \right)} \geq 0,9 \quad (4-51)$$

$$\beta_{\Delta,2} = \frac{(2 + 3\rho) \left( 12(6 + \bar{S} + 6\bar{S}\rho) - (12 + 2\bar{S} + 3\bar{S}\rho) \frac{2\pi^2}{7,5} \frac{0,4 + 3\rho}{1,6 + 3\rho} \right)}{(12 + 2\bar{S} + 3\bar{S}\rho) \left( 12(1 + 6\rho) - (2 + 3\rho) \frac{2\pi^2}{7,5} \frac{0,4 + 3\rho}{1,6 + 3\rho} \right)} \geq 0,9 \quad (4-52)$$

## 6.3. Comparaison analytique/numérique

Les 4 courbes de la Figure 17 transcrivent l'évolution des rigidités adimensionnelles minimales qui satisfont ces 4 inéquations en fonction du paramètre adimensionnel  $\rho$ . Les points correspondent, quant à eux, aux rigidités adimensionnelles minimales obtenues par voie numérique au moyen de l'outil créé pour les différents cas de portiques étudiés, articulés ou encastres en pieds, en respectant les critères de déplacement à 90 % au premier ou au second ordre.

La géométrie et le chargement de ces portiques articulés ou encastres en pieds sont regroupés respectivement dans le Tableau 12 et le Tableau 13. Le chargement a été adapté de manière à ce que le paramètre  $X$  des structures simulées soit proche de 4 et que leur multiplicateur ultime soit environ égal à 1,5.

Nom	Poutre			Colonne			Chargement ELS	
	Profilé	$I_b$ [cm <sup>4</sup> ]	$L_b$ [m]	Profilé	$I_c$ [mm <sup>4</sup> ]	$L_c$ [m]	P [kN]	F [kN]
DA1	HE 400 B	57 680	4	HE 200 B	5 696	4,5	200	38
DA2				HE 240 B	11 260	4,5	390	64
DA3				HE 300 B	18 690	4,5	800	112
DA4				HE 400 B	57 680	4,5	1550	193
DA5			6	HE 200 B	5 696	4,5	200	39
DA6				HE 240 B	11 260	4,5	380	64
DA7				HE 300 B	18 690	4,5	800	112
DA8				HE 400 B	57 680	4,5	1400	196
DA9	HE 500 B	107 200	6	HE 300 B	18 690	4,5	800	111
DA10				HE 240 B	11 260	4,5	380	62

Tableau 12 – Géométrie et chargement des simulations numériques de portiques articulés en pieds

Nom	Poutre			Colonne			Chargement ELS	
	Profilé	$I_b$ [cm <sup>4</sup> ]	$L_b$ [m]	Profilé	$I_c$ [mm <sup>4</sup> ]	$L_c$ [m]	P [kN]	F [kN]
DE1	HE 400 B	57 680	4	HE 200 B	5 696	4,5	652	62
DE2				HE 240 B	11 260	4,5	1092	89
DE3				HE 300 B	18 690	4,5	1948.8	136
DE4				HE 400 B	57 680	4,5	3047	184
DE5			6	HE 200 B	5 696	4,5	641	62
DE6				HE 240 B	11 260	4,5	1060	89
DE7				HE 300 B	18 690	4,5	1686	124
DE8				HE 400 B	57 680	4,5	2878	191
DE9	HE 500 B	107 200	6	HE 300 B	18 690	4,5	1997	136
DE10				HE 240 B	11 260	4,5	1106	89

Tableau 13 – Géométrie et chargement des simulations numériques de portiques encastrés en pieds

Nom	$\rho$	$\bar{S}_{\Delta,1}$	$\bar{S}_{\Delta,2}$	Erreur $\bar{S}$	$\beta_{\Delta,2}$	Erreur
DA1	11,39	2,27	2,59	12 %	0,89	1 %
DA2	5,76	4,31	4,92	12 %	0,88	2 %
DA3	2,58	8,77	10,07	13 %	0,89	1 %
DA4	1,13	16,62	19,25	14 %	0,88	2 %
DA5	7,59	3,34	3,80	12 %	0,89	1 %
DA6	3,84	6,22	7,12	13 %	0,88	2 %
DA7	1,72	12,17	14,02	13 %	0,89	1 %
DA8	0,75	21,60	25,20	14 %	0,88	2 %
DA9	3,19	7,31	8,37	13 %	0,89	1 %
DA10	7,14	3,53	4,03	12 %	0,89	1 %

Tableau 14 – Rigidité adimensionnelle numérique minimale des assemblages classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 % au premier ou au second ordre pour un portique articulé en pieds et erreur sur le déplacement au second ordre due à l'idéalisation infiniment rigide des assemblages lorsque leur rigidité réelle est fixée à la limite inférieure du critère au premier ordre

La prise en compte des effets du second ordre donne des limites de rigidité minimale légèrement plus sévères mais l'écart avec celles provenant d'un critère de déplacement au premier ordre n'est clairement pas significatif. Afin de s'en assurer, la différence entre le déplacement transversal au second ordre de la structure à assemblages infiniment rigides et celui de la structure à assemblages de rigidité finie est évaluée en attribuant la rigidité minimale provenant des critères de déplacement au

premier ordre aux assemblages de rigidité finie (Tableau 14 et Tableau 15). Cette différence ne dépasse pas 12 %, ce qui n'est en fait que 2 % de plus qu'autorisé alors que les structures sont étudiées sous un chargement qui maximise les effets du second ordre,  $X = 4$  et  $\lambda_u = 1,5$ .

Nom	$\rho$	$\bar{S}_{\Delta,1}$	$\bar{S}_{\Delta,2}$	Erreur $\bar{S}$	$\beta_{\Delta,2}$	Erreur
DE1	11,39	2,12	2,43	13 %	0,89	1 %
DE2	5,76	3,91	4,48	13 %	0,89	1 %
DE3	2,58	7,45	8,56	13 %	0,88	2 %
DE4	1,13	12,35	14,25	13 %	0,89	1 %
DE5	7,59	3,07	3,51	13 %	0,89	1 %
DE6	3,84	5,49	6,29	13 %	0,89	1 %
DE7	1,72	9,79	11,26	13 %	0,89	1 %
DE8	0,75	14,50	16,79	14 %	0,88	2 %
DE9	3,19	6,35	7,28	13 %	0,88	2 %
DE10	7,14	3,24	3,71	13 %	0,89	1 %

Tableau 15 – Rigidité adimensionnelle numérique minimale des assemblages classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 % au premier ou au second ordre pour un portique encasté en pieds et erreur sur le déplacement au second ordre due à l'idéalisation infiniment rigide des assemblages lorsque leur rigidité réelle est fixée à la limite inférieure du critère au premier ordre

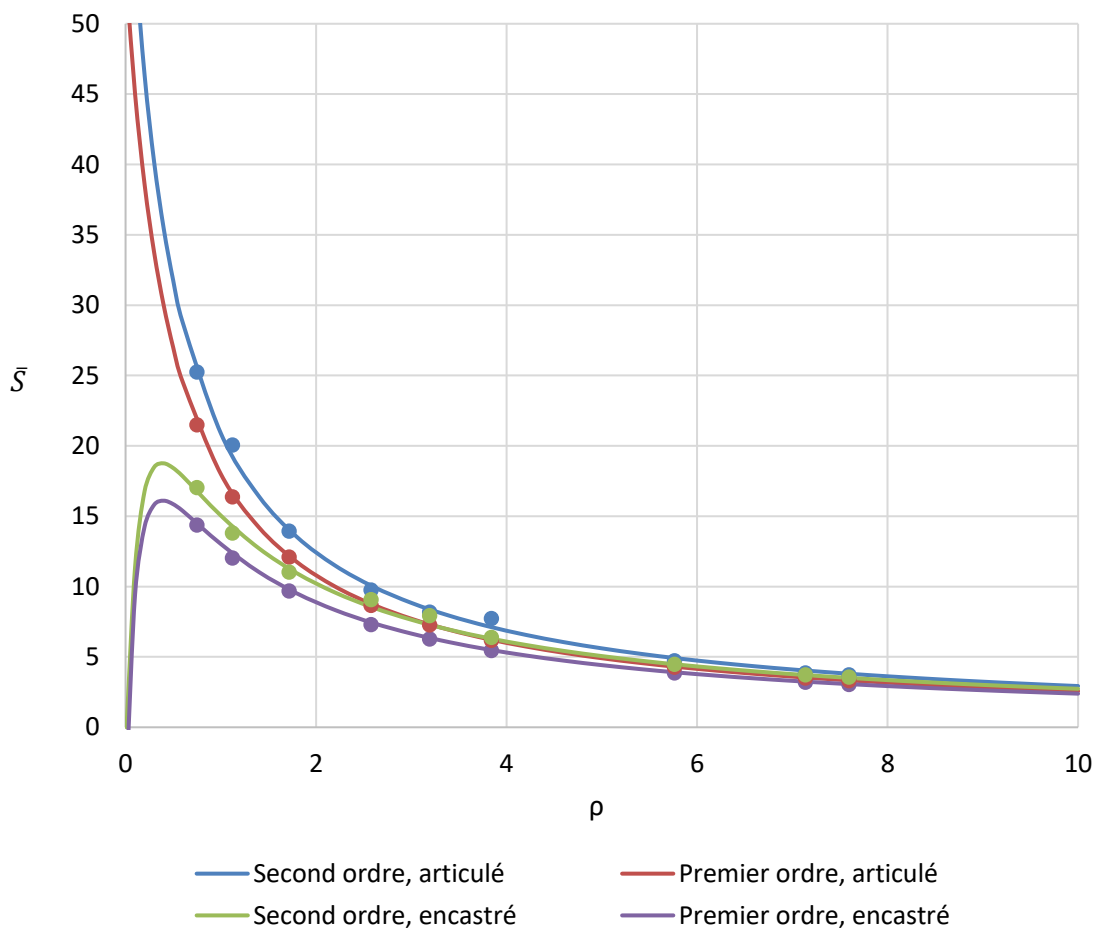


Figure 17 - Relation entre  $\rho$  et la rigidité adimensionnelle minimale  $\bar{S}$  à partir de laquelle les assemblages poutre-colonne d'un portique symétrique à une travée, articulé ou encasté en pieds, sont classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 %, au premier ou au second ordre

## 7. CONCLUSION : CHOIX D'UN CRITÈRE À ÉTENDRE

Parmi les critères de classification par rigidité des assemblages poutre-colonne présentés et examinés sous toutes les coutures dans ce chapitre, il faut maintenant choisir le critère le plus approprié pour classer les assemblages poutre-colonne rigides en pratique et l'étendre à des structures à plusieurs travées. Résumons d'abord les conclusions relatives à l'approfondissement et à la validation numérique de chacun de ces critères.

### Critère de stabilité à 95 % de l'Eurocode 3 (§ 2)

1. Les fondements mathématiques des critères de classification des assemblages rigides obtenus via un critère de stabilité à 95 % sont éclaircis grâce à la procédure de calcul de la longueur de flambement de l'Annexe E de l'Eurocode 3. Ils ne donnent pas exactement les mêmes courbes de rigidité minimale des assemblages rigides que celles qui se trouvent dans l'article initial. Cette différence est justifiable puisque l'article considère des structures contreventées ou non-contreventées tandis que la procédure de l'Eurocode s'intéresse à des structures dont le mode d'instabilité est à nœuds fixes ou à nœuds déplaçables. Cependant, la courbe des structures non-contreventées devrait correspondre à la courbe des structures à nœuds déplaçables.
2. Ces critères de classification ont été développés pour des structures encastrées en pieds. Il s'avère que le critère de classification des assemblages rigides est moins restrictif lorsque les assemblages poutre-colonne appartiennent à une structure encastrée en pieds qu'à une structure articulée en pieds.

### Critère de résistance de Gomes (§ 3)

1. De par son origine mathématique, le critère de classification de Gomes s'applique uniquement à des portiques symétriques simples, articulés en pieds. Dans l'article de Gomes, ce critère est unique mais il se décline en fait en 4 variantes selon les hypothèses posées et les bornes supérieures successives envisagées en fonction de certains paramètres.
2. Le critère de classification unique déterminé par Gomes n'est pas toujours sécuritaire. Pourtant, c'est la seule variante qui soit suffisamment simple à utiliser en pratique puisqu'elle fait intervenir le rapport  $V_{Ed}/V_{cr}$  et non  $\lambda_u/\lambda_{cr}$ . Or, le rapport  $V_{Ed}/V_{cr}$  est déjà demandé par les règles de dimensionnement afin de déterminer si la structure étudiée est souple ou rigide.

### Critère de déplacement de Gomes (§ 4)

1. L'expression du déplacement transversal en tête des colonnes d'un portique symétrique simple articulé en pieds provient de l'application de la méthode des rotations. La même méthode est utilisée pour exprimer ce déplacement pour un portique encastré en pieds. Des critères de classification des assemblages de ces deux structures en sont déduits.
2. Ces critères de classification sont semblables à ceux provenant d'un critère de déplacement au premier ordre à 90 % qui ont été développés au cours des recherches COST.

### Critère de résistance des recherches COST (§ 5)

1. Selon les recherches COST, un critère de résistance à 95 % est équivalent à un critère de stabilité de moindre sévérité. Elle dépend du rapport  $X$  entre la charge critique et la charge plastique de la structure.

2. Les critères de classification associés à un critère de résistance à 95 % sont fort peu restrictifs.

### Critère de déplacement des recherches COST (§ 6)

1. Les critères de classification déduits à partir d'un critère de déplacement transversal au second ordre à 90 % sont extrêmement complexes.
2. La rigidité minimale des assemblages rigides fournie par un critère de déplacement à 90 % au premier ordre n'est pas très éloignée de celle donnée par un critère de déplacement à 90 % au second ordre.

### Choix d'un critère

Dès le départ, les critères de classification qui découlent d'un critère de stabilité à 95 % sont éliminés parce qu'ils ont moins de sens physique que ceux qui proviennent d'un critère de résistance à 95 % ou d'un critère de déplacement à 90 %. Lorsqu'une structure est dimensionnée, sa stabilité est assurée uniquement parce qu'elle est indispensable pour que la structure résiste. Le multiplicateur critique de la structure est autorisé à varier un peu plus tant que la résistance de la structure n'est pas trop surestimée par l'idéalisation infiniment rigide des assemblages.

Ensuite, la rigidité minimale des assemblages rigides est beaucoup moins restrictive lorsqu'elle est déterminée via les critères de classification déduits d'un critère de résistance à 95 % que via ceux établis à partir d'un critère de déplacement à 90 % et ce malgré le fait que le critère de déplacement soit moins sévère.

Selon ces observations, les critères de classification développés en partant d'un critère de déplacement transversal à 90 %, au premier ou au second ordre, font partie de la première sélection.

Lorsque les effets du second ordre sont pris en considération, le critère de classification devient horriblement complexe et difficile à rendre utilisable en pratique. Or, la simplicité d'utilisation est indispensable. Il ne faudrait pas que l'analyse de la structure avec des assemblages de rigidité finie devienne plus simple à effectuer que l'application du critère de classification des assemblages rigides.

De plus, l'attribution de la rigidité minimale limite déterminée grâce à un critère de déplacement transversal au premier ordre à 90 % aux assemblages poutre-colonne d'un portique symétrique simple se solde par une différence de déplacement transversal au second ordre supplémentaire de seulement 1 à 2 % entre celui de la structure à assemblages infiniment rigides et celui de la structure à assemblages de rigidité finie. Un critère de déplacement transversal au premier ordre à 90 % correspond environ à un critère de déplacement transversal au second ordre à 88 ou 89 %. La complexité due aux effets du second ordre n'est pas contrebalancée par un gain de précision suffisant pour justifier de les prendre en compte.

Finalement, le critère de classification des assemblages rigides retenu est celui qui provient d'un critère de déplacement transversal au premier ordre à 90 %. Il s'exprime différemment selon les conditions d'appui des pieds de la structure et il est plus restrictif lorsqu'ils sont articulés.

$$\bar{S} \geq \frac{54}{1 + 2\rho} \quad (4-53)$$

Ce critère de classification des assemblages rigides défini dans un portique symétrique simple, articulé en pieds, est appliqué sécuritairement aux assemblages poutre-colonne de portiques symétriques simples dont les pieds sont encastres ou liés de manière semi-rigide à la fondation.

Ce choix est appuyé par les résultats obtenus suite à l'analyse de 10 portiques symétriques simples, articulés en pieds. Leurs caractéristiques géométriques et leur chargement se trouvent dans le Tableau 17. Le multiplicateur critique, le multiplicateur ultime et les déplacements transversaux au premier ou au second ordre de chacun de ces portiques ont été calculés dans deux cas distincts par FINELG.

1. Quand les assemblages poutre-colonne sont infiniment rigides,  $\bar{S} \rightarrow \infty$ .
2. Quand la rigidité adimensionnelle  $\bar{S}$  des assemblages poutre-colonne est égale à la limite inférieure du critère de classification des assemblages rigides basé sur un critère de déplacement transversal au premier ordre à 90 %.

Tous ces résultats sont regroupés dans le Tableau 16.

D'après eux, le critère de déplacement transversal au premier ordre à 90 % correspond à un critère de résistance d'environ 98 %. Il est bien plus restrictif que le critère de résistance à 95 %.

Sur base des simulations numériques effectuées, le critère de déplacement ne correspond pas exactement à un critère de stabilité à 90 % comme le prédisaient les équations (4-33) et (4-34) mais plutôt à un critère de stabilité à environ 92 %.

Quant au critère de déplacement au second ordre, sa sévérité tourne autour de 88-89 % lorsque celle du critère de déplacement au premier ordre est à 90 %.

Nom	$\rho$	$S_{j,ini}$ [kNm/rad]	$\Delta_1$ [mm]	$\beta_{\Delta,1}$	$\Delta_2$ [mm]	$\beta_{\Delta,2}$	$\lambda_{cr}$	$\beta_{cr}$	$\lambda_u$	$\beta_u$
DC1	11,39	68 800	14,8	0,9	19,2	0,88	4	0,93	2,23	0,97
		$\infty$	13,3		16,9		5		2,31	
DC2	5,76	131 000	15,6	0,9	17,7	0,89	8	0,93	2,70	0,98
		$\infty$	14,1		15,8		9		2,76	
DC3	2,58	266 000	15,4	0,9	18,6	0,89	6	0,92	1,86	0,98
		$\infty$	13,9		16,5		6		1,89	
DC4	1,13	503 000	14,3	0,9	15,7	0,89	11	0,92	2,32	0,99
		$\infty$	12,9		14,0		12		2,34	
DC5	7,59	67 300	15,1	0,9	19,6	0,88	4	0,93	2,21	0,96
		$\infty$	13,6		17,3		5		2,30	
DC6	3,84	126 000	16,2	0,9	18,4	0,89	8	0,93	2,69	0,98
		$\infty$	14,6		16,4		9		2,74	
DC7	1,72	246 000	16,6	0,9	20,3	0,88	5	0,92	1,83	0,98
		$\infty$	14,9		17,9		6		1,87	
DC8	0,75	436 000	16,3	0,9	18,1	0,89	10	0,91	2,28	0,99
		$\infty$	14,7		16,2		11		2,31	
DC9	3,19	274 000	14,8	0,9	16,7	0,89	9	0,92	2,34	0,98
		$\infty$	13,4		14,9		10		2,37	
DC10	7,14	133 000	15,3	0,9	20,1	0,88	4	0,93	1,85	0,98
		$\infty$	13,8		17,7		5		1,89	

Tableau 16 – Résultats des simulations numériques de portiques symétriques simples, articulés en pieds, obtenus en appliquant en critère de déplacement à 90 %

Nom	Poutre			Colonne			Chargement ELS	
	Profilé	$I_b$ [cm <sup>4</sup> ]	$L_b$ [m]	Profilé	$I_c$ [mm <sup>4</sup> ]	$L_c$ [m]	P [kN]	F [kN]
DC1	HE 400 B	57 680	4	HE 200 B	5 696	4,5	300	62
DC2				HE 240 B	11 260	4,5	300	89
DC3				HE 300 B	18 690	4,5	900	136
DC4				HE 400 B	57 680	4,5	900	184
DC5			6	HE 200 B	5 696	4,5	300	62
DC6				HE 240 B	11 260	4,5	300	89
DC7				HE 300 B	18 690	4,5	900	124
DC8				HE 400 B	57 680	4,5	900	191
DC9	HE 500 B	107 200	6	HE 300 B	18 690	4,5	600	136
DC10				HE 240 B	11 260	4,5	600	89

Tableau 17 – Géométrie et chargement des simulations numériques,  $E = 210\,000\text{ MPa}$



# CHAPITRE 5 : Extension du critère retenu à des structures quelconques

## 1. INTRODUCTION

Dans le chapitre 4, un critère de classification des assemblages rigides est finalement retenu. Il découle du critère de déplacement transversal au premier ordre à 90 % établi en fonction de la rigidité des assemblages poutre-colonne dans un portique symétrique simple articulé en pieds.

$$\bar{S} \geq \frac{54}{1 + 2\rho} \text{ avec } \rho = \frac{K_b}{K_c} \quad (5-1)$$

Le paramètre  $\rho$  qui intervient dans ce critère de classification par rigidité correspond au rapport entre la rigidité flexionnelle de la poutre du portique simple et la rigidité flexionnelle d'une des colonnes de ce même portique symétrique.

Cependant, les poutres et les colonnes d'une structure à plusieurs travées et/ou à plusieurs étages sont plus nombreuses et ne sont pas toujours toutes identiques. Que devient ce paramètre  $\rho$  ? Quelles rigidités flexionnelles apparaissent dans son expression ? Le critère reste-t-il identique en adaptant juste la définition de  $\rho$  ?

Il est évident qu'il est toujours possible d'établir un critère de classification exact des assemblages d'une structure quelconque en partant d'un critère de déplacement transversal au premier ordre à 90 % grâce à la méthode des rotations. Cependant, ce critère devient tellement complexe qu'il est plus simple de réaliser directement l'analyse de la structure avec ses assemblages de rigidité finie. Des hypothèses simplificatrices sont indispensables afin de déterminer un critère de classification facile à utiliser en pratique.

Dès lors, dans la première partie de ce chapitre (§ 2), le principe de la structure équivalente est d'abord considéré pour formuler ce critère de classification des assemblages d'une structure quelconque. Pour ce faire, les règles de transformation approchées sont choisies. En effet, les règles de transformation exactes correspondent en fait à la méthode des rotations et ne contiennent aucune hypothèse simplificatrice.

Lorsque les règles de transformation approchées atteignent leur limite de validité, une méthode plutôt empirique est envisagée (§ 3). Le raisonnement qui a mené à cette autre méthode se trouve à la deuxième partie de ce chapitre.

Le domaine de validité de chacune de ces deux approches est défini en comparant le critère de classification obtenu analytiquement au critère numérique fourni par l'outil créé pour des structures diverses. Ce sont initialement des structures régulières puis leurs poutres, leurs colonnes ou leurs assemblages varient.

Jusqu'à présent, un seul critère de classification s'appliquait à tous les assemblages de la structure. Cependant, les deux pistes explorées pour étendre le critère aux assemblages de structures quelconques sont capables de prendre en compte l'existence d'un lien mathématique entre les rigidités des assemblages. Cela semble utile dans certains cas. Par exemple, dans une structure à deux

travées, si la rigidité des assemblages d'une travée est fixée par des considérations techniques ou géométriques, quelle est la rigidité minimale des assemblages de l'autre travée qui permet de classer les assemblages des deux travées comme rigides ? Cette question est aussi abordée dans la suite.

Dans ce chapitre, le critère de classification est étendu à des structures d'un seul étage. Des structures de plusieurs étages sont séparées en plusieurs sous-structures d'un étage sur lesquelles le critère s'applique. Un critère de classification des assemblages est déterminé pour chaque étage et assure qu'un critère de déplacement à 90 % y soit respecté. S'il l'est à chaque étage, alors il le sera aussi dans la structure globale.

## 2. PAR LE PRINCIPE DE LA STRUCTURE ÉQUIVALENTE

### 2.1. Introduction

Pour rappel, le principe de la structure équivalente à assemblages rigides consiste à remplacer une structure réelle à plusieurs travées et à assemblages semi-rigides par un portique symétrique à une seule travée et à assemblages rigides de même déplacement transversal élastique au premier ordre en tête des colonnes.

Dans le cas d'un portique symétrique simple, le critère de déplacement à 90 % engendre un critère de classification par rigidité des assemblages poutre-colonne plus restrictif lorsque ses pieds sont articulés. Ce critère est ensuite applicable en toute sécurité aux assemblages poutre-colonne de structures dont les pieds sont encastres ou liés de manière semi-rigide à la fondation. Dès lors, les pieds de la structure à plusieurs travées sont supposés être articulés lors de l'établissement du critère de classification de ses assemblages poutre-colonne.

Par le principe de la structure équivalente, la structure à plusieurs travées se ramène à un portique symétrique simple articulé en pieds. Connaissant l'expression du déplacement transversal en tête des colonnes de ce type de structure, le critère de déplacement est assez facile à étendre à des structures comportant plusieurs travées en passant par leurs structures équivalentes.

La validité du critère de classification qui résulte de ce critère de déplacement est évaluée numériquement pour différentes configurations de structures : structures régulières et structures irrégulières en termes de poutres, de colonnes ou d'assemblages.

### 2.2. Critère équivalent de déplacement à 90 %

- 1) L'expression du déplacement transversal en tête des colonnes d'un portique symétrique simple articulé en pieds est connue, que ses assemblages poutre-colonne soient infiniment rigides ou de rigidité finie, lorsqu'il est soumis à une charge horizontale  $F$ .

$$\Delta^s = \frac{FL_c^3}{12EI_c} \frac{6 + \bar{S}(1 + 2\rho)}{\bar{S}\rho} \quad (5-2)$$

- 2) La structure dotée d'assemblages poutre-colonne infiniment rigides est transformée en un portique symétrique simple, articulé en pieds et muni d'assemblages poutre-colonne infiniment rigides grâce au principe de la structure équivalente (Figure 18).

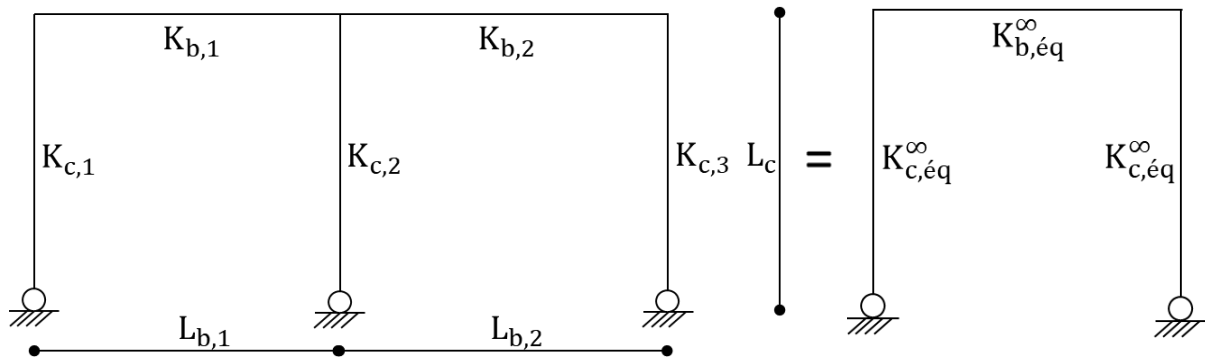


Figure 18 – Structure à assemblages infiniment rigides et structure équivalente correspondante

- 3) Le déplacement transversal en tête des colonnes de la structure à plusieurs travées pourvue d'assemblages infiniment rigides est alors calculé au moyen de l'expression fournie par la méthode des déplacements en négligeant les déformations dues aux efforts tranchants et aux efforts normaux devant celles provenant de la flexion.

$$\Delta^\infty = \frac{FL_c^3}{12EI_c} \frac{1 + 2\rho_{\text{éq}}^\infty}{\rho_{\text{éq}}^\infty} \text{ avec } \rho_{\text{éq}}^\infty = \frac{K_{b,\text{éq}}^\infty}{K_{c,\text{éq}}^\infty} \quad (5-3)$$

- 4) De la même manière, la structure dotée d'assemblages poutre-colonne de rigidité finie est transformée en un portique symétrique simple, articulé en pieds et équipé d'assemblages poutre-colonne infiniment rigides (Figure 19).

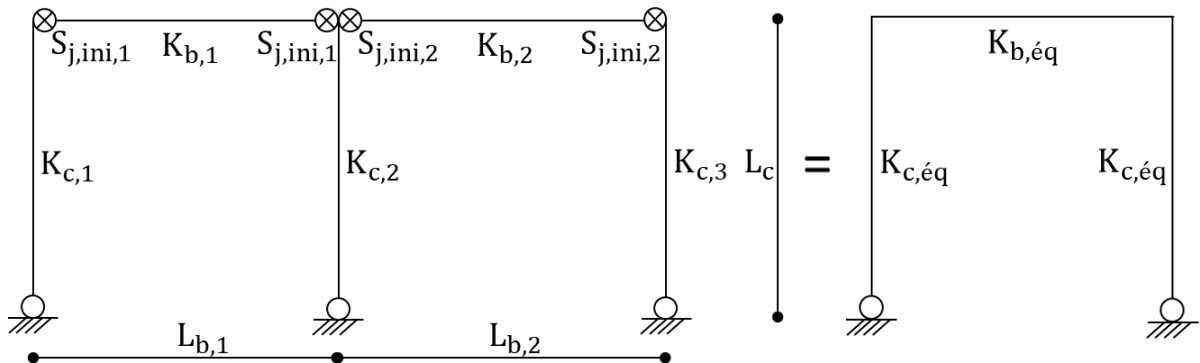


Figure 19 – Structure à assemblages de rigidité finie et structure équivalente correspondante

- 5) Le déplacement transversal en tête des colonnes de la structure à assemblages de rigidité finie est déterminé comme au point 3.

$$\Delta = \frac{FL_c^3}{12EI_c} \frac{1 + 2\rho_{\text{éq}}}{\rho_{\text{éq}}} \text{ avec } \rho_{\text{éq}} = \frac{K_{b,\text{éq}}}{K_{c,\text{éq}}} \quad (5-4)$$

- 6) Pour finir, le critère de déplacement à 90 % est imposé. Le déplacement transversal en tête des colonnes de la structure à assemblages infiniment rigides est supérieur ou égal à 0,9 fois le déplacement transversal en tête des colonnes de la structure à assemblages de rigidité finie.

$$\Delta^\infty \geq 0,9 \Delta \Leftrightarrow \rho_{\text{éq}} \geq \frac{9\rho_{\text{éq}}^\infty}{2\rho_{\text{éq}}^\infty + 10} \quad (5-5)$$

La rigidité des assemblages poutre-colonne se cache dans le paramètre adimensionnel  $\rho_{\text{éq}}$  et une condition sur leur rigidité est extraite de ce critère de déplacement à 90 % en fonction du contexte

structural dans lequel les assemblages se trouvent. Elle détermine à partir de quelle rigidité les assemblages poutre-colonne d'une structure sont classés comme rigides.

Il ne reste plus qu'à choisir entre les règles de transformation exactes ou les règles de transformation approchées pour exprimer les paramètres  $\rho_{\acute{e}q}$  et  $\rho_{\acute{e}q}^{\infty}$ .

Les règles de transformation exactes sont directement écartées à cause d'un inconvénient majeur. Elles font intervenir les rotations élastiques des nœuds des deux structures réelles, à assemblages infiniment rigides ou de rigidité finie, qui proviennent de leur analyse. Or, le but principal du critère de classification des assemblages rigides est justement de remplacer les assemblages de rigidité finie par des assemblages infiniment rigides lors de l'analyse d'une structure et, ainsi, d'éviter de la réaliser en considérant la rigidité finie des assemblages.

Dès lors, les règles de transformation approchées sont suivies pour passer des structures réelles aux structures équivalentes.

$$\rho_{\acute{e}q} = \frac{K_{b,\acute{e}q}}{K_{c,\acute{e}q}} \text{ avec } \begin{cases} K_{b,\acute{e}q} = \sum_i \frac{K_{b,i}}{1 + 6K_{b,i}/S_{j,ini,i}} \\ K_{c,\acute{e}q} = \sum_j \frac{K_{c,j}}{2} \end{cases} \quad (5-6)$$

$$\rho_{\acute{e}q}^{\infty} = \frac{K_{b,\acute{e}q}^{\infty}}{K_{c,\acute{e}q}^{\infty}} \text{ avec } \begin{cases} K_{b,\acute{e}q}^{\infty} = \sum_i K_{b,i} \\ K_{c,\acute{e}q}^{\infty} = \sum_j \frac{K_{c,j}}{2} \end{cases} \quad (5-7)$$

Ces règles approchées sont exactes uniquement si les rotations moyennes des deux nœuds aux extrémités de chaque poutre d'une structure réelle sont égales à la rotation d'un nœud de la structure équivalente correspondante. Or, cette hypothèse est rarement vérifiée en pratique. L'erreur que cette approximation engendre sur les critères de classification est évaluée pour différentes configurations de structures en comparant les résultats analytiques aux résultats numériques.

### 2.3. Structure régulière à plusieurs travées

Dans une structure régulière (Figure 20), toutes les poutres sont caractérisées par la même rigidité flexionnelle  $K_b$ , toutes les colonnes présentent aussi la même rigidité flexionnelle  $K_c$  et tous les assemblages poutre-colonne possèdent la même rigidité  $S$ .

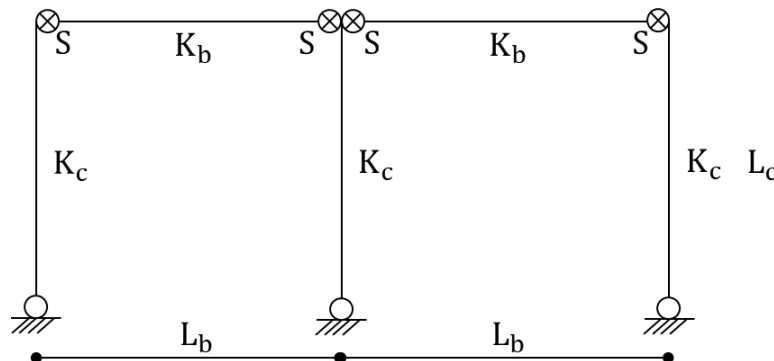


Figure 20 – Structure régulière à deux travées

Le critère de déplacement à 90 % est particularisé pour ce type de structure et est relativement simple.

$$\frac{1}{1 + \frac{6K_b}{S}} \geq \frac{9}{2\rho_{\text{éq}}^{\infty} + 10} \quad (5-8)$$

Le critère de classification des assemblages poutre-colonne rigides qui en découle est en tous points semblable à celui des assemblages poutre-colonne d'un portique symétrique simple à l'exception du paramètre  $\rho$  qui est remplacé par  $\rho_{\text{éq}}^{\infty}$ .

$$\bar{S} \geq \frac{54}{1 + 2\rho_{\text{éq}}^{\infty}} \text{ avec } \bar{S} = \frac{S}{K_b} \quad (5-9)$$

La rigidité adimensionnelle minimale à partir de laquelle les assemblages d'une structure régulière sont classés comme rigides est obtenue grâce à ce critère. Elle est ensuite comparée au résultat numérique fourni par l'outil créé en suivant un critère de déplacement transversal au premier ordre à 90 %. Cela est effectué pour 3 séries de 10 structures régulières (à 2 travées, à 3 travées ou à 4 travées). Les caractéristiques géométriques des poutres et des colonnes de toutes ces structures se trouvent dans le Tableau 18. Les erreurs relatives entre les résultats analytiques et les résultats numériques sont représentées à la Figure 21 avec le résultat numérique comme valeur de référence.

Nom	Poutre			Colonne			$K_b$ [kNm]	$K_c$ [kNm]			
	Profilé	$I_b$ [cm <sup>4</sup> ]	$L_b$ [m]	Profilé	$I_c$ [mm <sup>4</sup> ]	$L_c$ [m]					
E1	HE 400 B	57 680	4	HE 200 B	5 696	4,5	30282	2658			
E2				HE 240 B	11 260	4,5	30282	5255			
E3				HE 300 B	18 690	4,5	30282	11746			
E4				HE 400 B	57 680	4,5	30282	26917			
E5			6	HE 200 B	5 696	4,5	20188	2658			
E6				HE 240 B	11 260	4,5	20188	5255			
E7				HE 300 B	18 690	4,5	20188	11746			
E8				HE 400 B	57 680	4,5	20188	26917			
E9				HE 500 B	107 200	6	HE 300 B	18 690	4,5	37520	11746
E10							HE 240 B	11 260	4,5	37520	5255

Tableau 18 – Géométrie des poutres et des colonnes des structures régulières simulées

Deux travées				Trois travées				Quatre travées			
$\rho_{\text{éq}}^{\infty}$	$\bar{S}_{th}$	$\bar{S}_{num}$	Erreur	$\rho_{\text{éq}}^{\infty}$	$\bar{S}_{th}$	$\bar{S}_{num}$	Erreur	$\rho_{\text{éq}}^{\infty}$	$\bar{S}_{th}$	$\bar{S}_{num}$	Erreur
15,19	1,72	1,85	6,9 %	17,09	1,54	1,68	8,5 %	18,23	1,44	1,57	7,9 %
7,68	3,30	3,48	5,3 %	8,64	2,95	3,18	7,1 %	9,22	2,78	2,98	6,8 %
3,44	6,86	6,98	1,8 %	3,87	6,18	6,47	4,5 %	4,12	5,84	6,09	4,2 %
1,50	13,50	13,23	-2,1 %	1,69	12,34	12,40	0,5 %	1,80	11,74	11,82	0,7 %
10,13	2,54	2,71	6,1 %	11,39	2,27	2,48	8,3 %	12,15	2,13	2,31	7,5 %
5,12	4,80	4,98	3,5 %	5,76	4,31	4,61	6,5 %	6,15	4,06	4,32	6,0 %
2,29	9,67	9,68	0,1 %	2,58	8,77	9,06	3,1 %	2,75	8,31	8,54	2,8 %
1,00	18,00	17,51	-2,8 %	1,13	16,62	16,52	-0,6 %	1,20	15,88	15,80	-0,5 %
4,26	5,67	5,84	2,9 %	4,79	5,10	5,40	5,6 %	5,11	4,81	5,08	5,2 %
9,52	2,69	2,87	6,0 %	10,71	2,41	2,62	8,0 %	11,42	2,26	2,44	7,4 %

Tableau 19 – Comparaison entre les rigidités minimales analytiques et numériques à partir desquelles les assemblages d'une structure régulière à deux, trois ou quatre travées sont classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 %

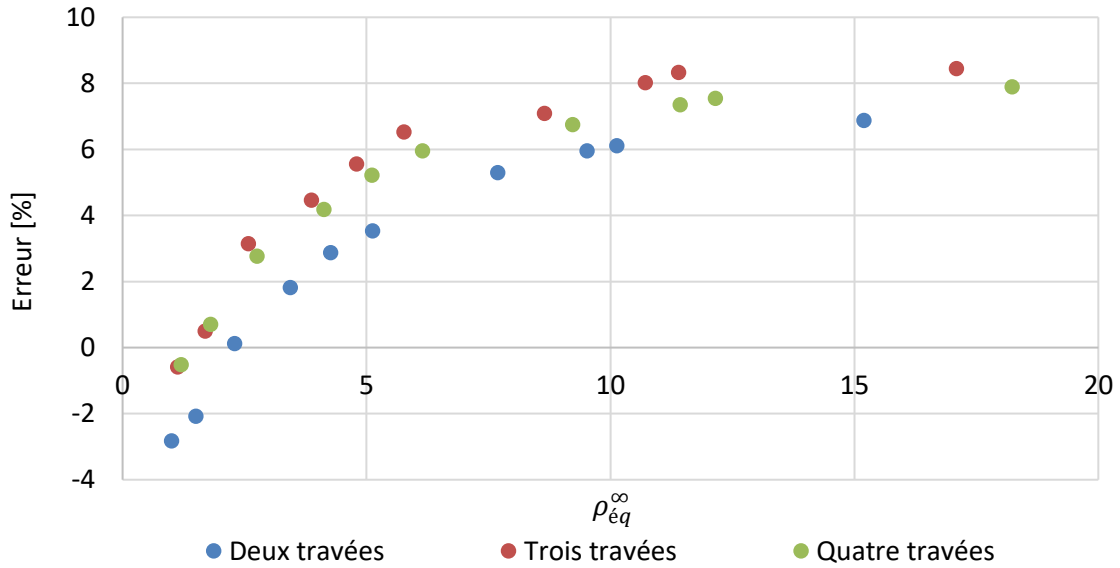


Figure 21 – Erreurs relatives entre les rigidités minimales analytiques et numériques à partir desquelles les assemblages d’une structure régulière à deux, trois ou quatre travées sont classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 %

Les erreurs relatives s’accroissent lorsque le paramètre  $\rho_{\acute{e}q}^{\infty}$  augmente, quel que soit le nombre de travées. En effet, l’utilisation des règles de transformation approchées suppose que les rotations moyennes des deux nœuds aux extrémités de chaque poutre de ces structures sont égales à la rotation d’un nœud de la structure équivalente correspondante.

$$\frac{D_{i+1} + D_{i+2}}{2D_{2,\acute{e}q}} = 1 \quad (5-10)$$

Avec

$$D_{2,\acute{e}q} = \frac{\sum_i K_{c,i} D_{i+1}}{\sum_j K_{c,j}} \quad (5-11)$$

En réalité, ce n’est pas le cas et l’analyse des structures simulées le prouve. Les rapports entre la rotation moyenne des deux nœuds de chaque travée et la rotation équivalente sont calculés pour deux structures à trois travées dotées d’assemblages infiniment rigides (Tableau 20). Ils valent bien 1 sur les deux travées extérieures mais pas sur la travée intérieure. Il semble que plus le rapport de la travée intérieure s’éloigne de 1, plus l’erreur obtenue sur le critère de classification augmente.

$\rho_{\acute{e}q}^{\infty}$	$\frac{D_2 + D_3}{2D_{2,\acute{e}q}}$	$\frac{D_3 + D_4}{2D_{2,\acute{e}q}}$	$\frac{D_4 + D_5}{2D_{2,\acute{e}q}}$	Erreur sur $\bar{S}$
17,09	1	0,38	1	8,5 %
1,13	1	0,66	1	-0,6 %
Hypothèse	1	1	1	-

Tableau 20 – Rapports entre la rotation moyenne des deux nœuds de chaque travée d’une structure à trois travées et la rotation d’un nœud de la structure équivalente

Néanmoins, les erreurs restent acceptables car elles sont inférieures à 10 %. Dans un portique symétrique simple articulé en pieds, une erreur de 10 % sur la rigidité limite des assemblages entraîne seulement 1 % de différence en plus sur le déplacement. Les règles de transformation approchées fournissent un critère de classification correct pour les assemblages poutre-colonne de structures régulières.

## 2.4. Structure irrégulière à deux travées

Qu'advient-il lorsque les règles de transformation approchées sont utilisées pour déterminer un critère de classification des assemblages d'une structure irrégulière à deux travées ?

Trois sources d'irrégularités sont envisagées :

1. Rigidité flexionnelle d'une colonne différente de celle des autres colonnes
2. Rigidité flexionnelle d'une poutre différente de celle de l'autre poutre
3. Rigidité des assemblages différente d'une travée à l'autre

Lorsqu'une de ces trois sources d'irrégularité est implémentée dans une structure, les deux autres ne le sont pas afin d'isoler convenablement leur effet. Pour chacune d'entre elles, l'expression du critère de déplacement à 90 % est d'abord particularisée. La rigidité minimale à partir de laquelle les assemblages des structures considérées sont classés comme rigides est calculée grâce à ce critère analytique et par l'outil numérique créé pour une série de structures irrégulières. Ces deux résultats sont alors comparés et l'approche analytique est validée numériquement ou non en conséquence.

### 2.4.1. Variation de la rigidité flexionnelle des colonnes

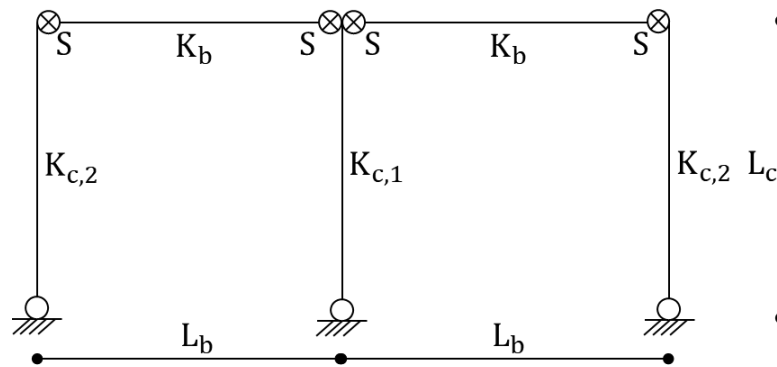


Figure 22 – Structure à deux travées, colonnes irrégulières

Critère de déplacement à 90 % :

$$\frac{K_b}{1 + 6K_b/S} \geq \frac{9}{2\rho_{\acute{e}q}^{\infty} + 10} \quad (5-12)$$

Critère de classification par rigidité :

$$\bar{S} \geq \frac{54}{1 + 2\rho_{\acute{e}q}^{\infty}} \quad (5-13)$$

Le critère de classification reste semblable à celui d'une structure régulière mais la différence se trouve à l'intérieur du paramètre  $\rho_{\acute{e}q}^{\infty}$ .

$$K_{c,\acute{e}q}^{\infty} = \sum_{j=1}^3 \frac{K_{c,j}}{2} \neq \frac{3K_c}{2} \quad (5-14)$$

Les résultats analytiques et numériques sont comparés pour 20 structures dans le Tableau 21 et à la Figure 23. Les caractéristiques géométriques de ces 20 structures représentées à la Figure 22 se trouvent dans le Tableau 21. La rigidité flexionnelle de la colonne intérieure vaut environ 0,5 fois ou 2 fois celle des colonnes extérieures.

$K_{c,1}/K_{c,2}$	$K_b$ [kNm]	$K_{c,1}$ [kNm]	$K_{c,2}$ [kNm]	$\rho_{\acute{e}q}^{\infty}$	$\bar{S}_{th}$	$\bar{S}_{num}$	Erreur
0,5	30282	2658	5255	9,20	2,78	3,38	18 %
	30282	5255	11746	4,05	5,93	6,54	9 %
	30282	11746	26917	1,81	11,67	11,56	-1 %
	30282	26917	50027	0,96	18,43	16,81	-10 %
	20188	2658	5255	6,13	4,07	4,76	14 %
	20188	5255	11746	2,70	8,43	8,82	4 %
	20188	11746	26917	1,21	15,79	14,81	-7 %
	20188	26917	50027	0,64	23,62	20,95	-13 %
	37520	11746	26917	2,25	9,82	10,07	2 %
	37520	5255	11746	5,02	4,89	5,52	11 %
2	30282	5255	2658	7,68	2,26	2,25	-0,2 %
	30282	11746	5255	3,44	4,96	4,95	-0,2 %
	30282	26917	11746	1,50	9,66	9,65	-0,1 %
	30282	50027	26917	0,81	15,89	15,80	-0,6 %
	20188	5255	2658	5,12	3,32	3,31	-0,1 %
	20188	11746	5255	2,29	7,11	7,04	-1,1 %
	20188	26917	11746	1,00	13,30	13,26	-0,3 %
	20188	50027	26917	0,54	20,78	20,76	-0,1 %
	37520	26917	11746	1,86	8,07	8,07	0,0 %
	37520	11746	5255	4,26	4,08	4,05	-0,7 %

Tableau 21 – Rigidités flexionnelles des éléments des structures simulées et comparaison entre les rigidités minimales analytiques et numériques à partir desquelles les assemblages d’une structure aux colonnes irrégulières sont classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 %

Lorsque la colonne intérieure est deux fois plus rigide que les colonnes extérieures, l’hypothèse à la base des règles de transformation approchées est toujours vérifiée. Les erreurs sur le critère de classification des structures sont quasiment nulles pour toutes les structures simulées dans ces conditions. Ce n’est pas la configuration de structure la plus propice pour déterminer si le critère de classification analytique est valide avec cette source d’irrégularité.

Au contraire, lorsque la colonne intérieure est deux fois moins raide que les colonnes extérieures, les erreurs sont plus importantes et dépassent même 10 %. Selon cette configuration, les règles de transformation approchées ne semblent pas capables de fournir un critère de classification correct.

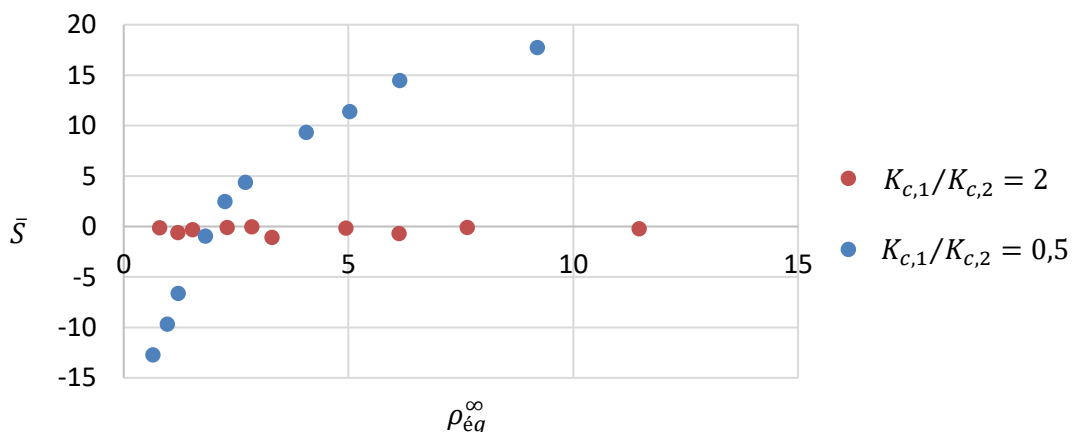


Figure 23 – Erreurs relatives entre les rigidités minimales analytiques et numériques à partir desquelles les assemblages d’une structure aux colonnes irrégulières sont classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 %



### 2.4.2. Variation de la rigidité flexionnelle des poutres

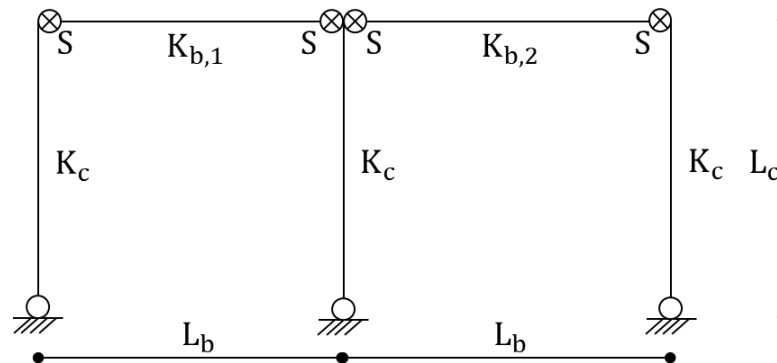


Figure 24 – Structure à deux travées, poutres irrégulières

Critère de déplacement à 90 % :

$$\frac{K_{b,1}}{1 + 6K_{b,1}/S} + \frac{K_{b,2}}{1 + 6K_{b,2}/S} \geq \frac{9}{2\rho_{\text{éq}}^{\infty} + 10} \quad (5-15)$$

Le critère de classification qui en découle est assez long. Il n'est pas détaillé ici car le critère de déplacement est plus clair.

Les rigidités minimales analytiques et numériques sont adimensionnalisées en les divisant par la rigidité flexionnelle de la poutre de la première travée  $K_{b,1}$ . Elles sont comparées pour 10 structures dans le Tableau 22 et à la Figure 25. Les caractéristiques géométriques de ces 10 structures représentées à la Figure 24 se trouvent dans le Tableau 22. La rigidité flexionnelle d'une poutre vaut environ 2 fois celle de l'autre.

Les erreurs relatives sont toutes négatives donc les résultats analytiques sont sécuritaires. Les règles de transformation approchées semblent convenir pour déterminer le critère de classification des assemblages d'une structure dont les irrégularités proviennent des poutres.

$K_{b,1}/K_{b,2}$	$K_{b,1}$ [kNm]	$K_{b,2}$ [kNm]	$K_c$ [kNm]	$\rho_{\text{éq}}^{\infty}$	$\bar{S}_{1,th}$	$\bar{S}_{1,num}$	Erreur
2	30282	14537,25	2658	9,20	3,37	3,32	-2 %
	30282	14537,25	5255	4,05	7,00	6,54	-7 %
	30282	14537,25	11746	1,81	13,43	12,16	-10 %
	30282	14537,25	26917	0,96	19,86	17,96	-11 %
	20188	9691,5	2658	6,13	4,92	4,73	-4 %
	20188	9691,5	5255	2,70	9,80	8,99	-9 %
	20188	9691,5	11746	1,21	17,60	15,90	-11 %
	20188	9691,5	26917	0,64	24,57	22,39	-10 %
	37520	19124	11746	2,25	11,63	10,53	-10 %
	37520	19124	5255	5,02	5,87	5,53	-6 %

Tableau 22 – Rigidités flexionnelles des éléments des structures simulées et comparaison entre les rigidités minimales analytiques et numériques à partir desquelles les assemblages d'une structure aux poutres irrégulières sont classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 %

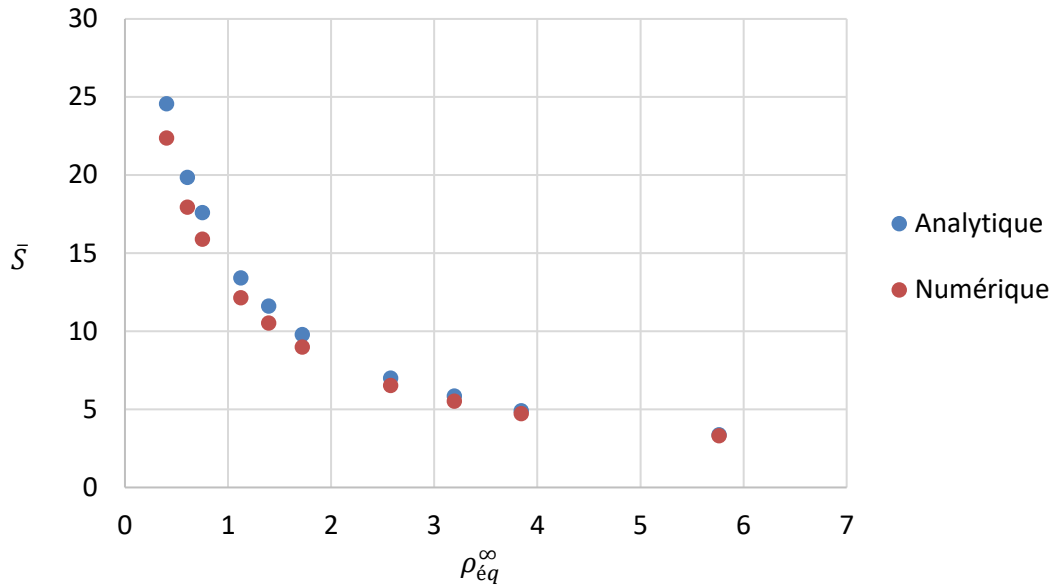


Figure 25 – Comparaison entre les rigidités minimales analytiques et numériques à partir desquelles les assemblages d’une structure aux poutres irrégulières sont classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 %

#### 2.4.1. Variation de la rigidité des assemblages par travée

Les règles de transformation d’une structure réelle à assemblages de rigidité finie ou infinie en une structure équivalente à assemblages infiniment rigides ont été développées en supposant que les assemblages aux deux extrémités d’une poutre possèdent la même rigidité tandis que leur variation est autorisée d’une poutre à l’autre.

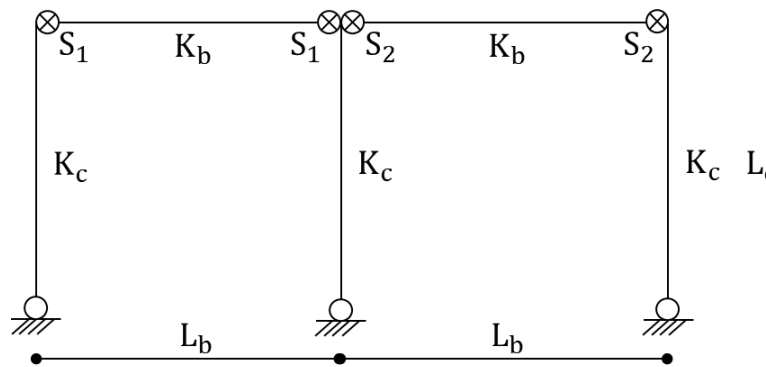


Figure 26 – Structure à deux travées, rigidités d’assemblages irrégulières

Critère de déplacement à 90 % :

$$\frac{K_b}{1 + 6K_b/S_1} + \frac{K_b}{1 + 6K_b/S_2} \geq \frac{18K_b}{2\rho_{\text{eq}}^{\infty} + 10} \quad (5-16)$$

Deux inconnues, une rigidité d’assemblage par travée, sont alors susceptibles d’apparaître dans le critère de classification des assemblages poutre-colonne d’une structure à deux travées et une équation supplémentaire est nécessaire afin de se ramener à la résolution d’une inéquation à une inconnue. Elle consiste simplement à dire que  $S_2 = cS_1$  avec le rapport entre les rigidités des assemblages des deux travées  $c$  qui est soit connu, soit l’inconnue du problème si une des rigidités est fixée à une valeur constante.

$$\frac{1}{1 + 6K_b/S} + \frac{1}{1 + 6cK_b/S} \geq \frac{9}{2\rho_{\text{éq}}^{\infty} + 10} \quad (5-17)$$

Les rigidités minimales numériques sont calculées pour 4 séries de 10 structures et sont représentées à la Figure 27. Elles sont ensuite comparées aux résultats analytiques. Les erreurs relatives obtenues entre les deux sont regroupées à la Figure 28. Les 4 séries de structures se distinguent les unes des autres par des rapports  $c$  différents : 1, 2, 3 ou 4. Le reste de leurs caractéristiques sont semblables d'une série à l'autre. Elles se trouvent dans le Tableau 23.

Plus le rapport  $c$  s'éloigne de 1 et plus les erreurs deviennent importantes. Le critère de classification des assemblages les plus rigides est aussi de plus en plus restrictif pour compenser la diminution de rigidité des autres assemblages. Les règles de transformation approchées ne sont clairement pas appropriées pour traiter ce genre d'irrégularités.

Nom	Poutre			Colonne			$K_b$ [kNm]	$K_c$ [kNm]
	Profilé	$I_b$ [cm <sup>4</sup> ]	$L_b$ [m]	Profilé	$I_c$ [mm <sup>4</sup> ]	$L_c$ [m]		
E1	HE 400 B	57 680	4	HE 200 B	5 696	4,5	30282	2658
E2				HE 240 B	11 260	4,5	30282	5255
E3				HE 300 B	18 690	4,5	30282	11746
E4				HE 400 B	57 680	4,5	30282	26917
E5			6	HE 200 B	5 696	4,5	20188	2658
E6				HE 240 B	11 260	4,5	20188	5255
E7				HE 300 B	18 690	4,5	20188	11746
E8				HE 400 B	57 680	4,5	20188	26917
E9	HE 500 B	107 200	6	HE 300 B	18 690	4,5	37520	11746
E10				HE 240 B	11 260	4,5	37520	5255

Tableau 23 – Géométrie des poutres et des colonnes des structures simulées

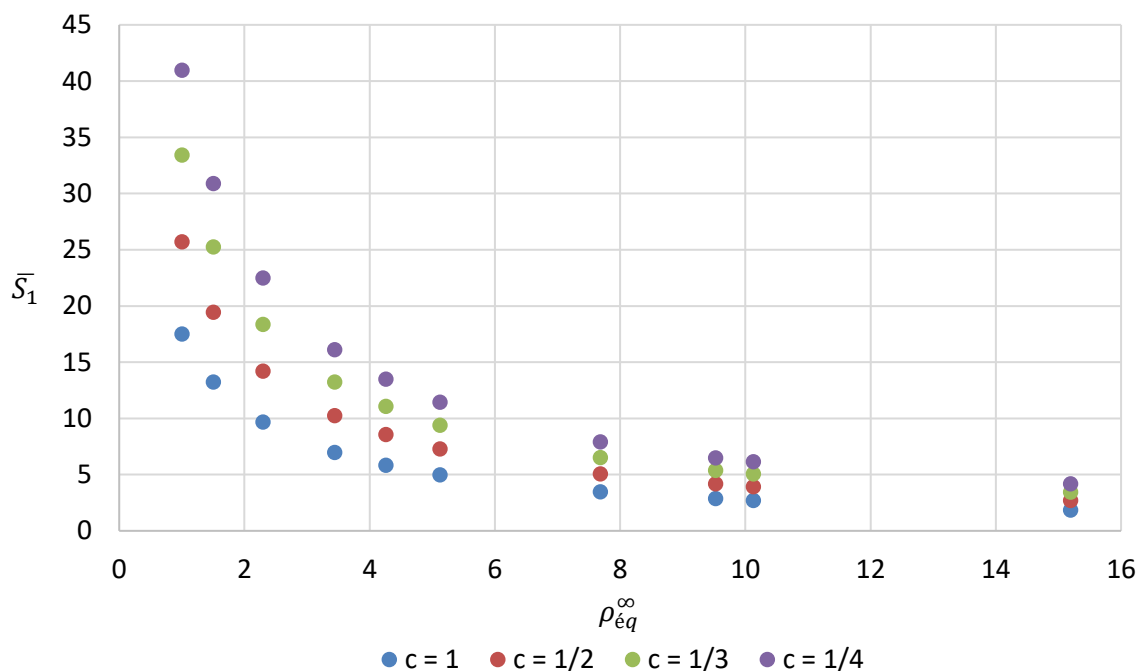


Figure 27 – Rigidités minimales numériques à partir desquelles les assemblages d'une structure aux rigidités d'assemblages irrégulières sont classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 % pour différents rapports  $c$

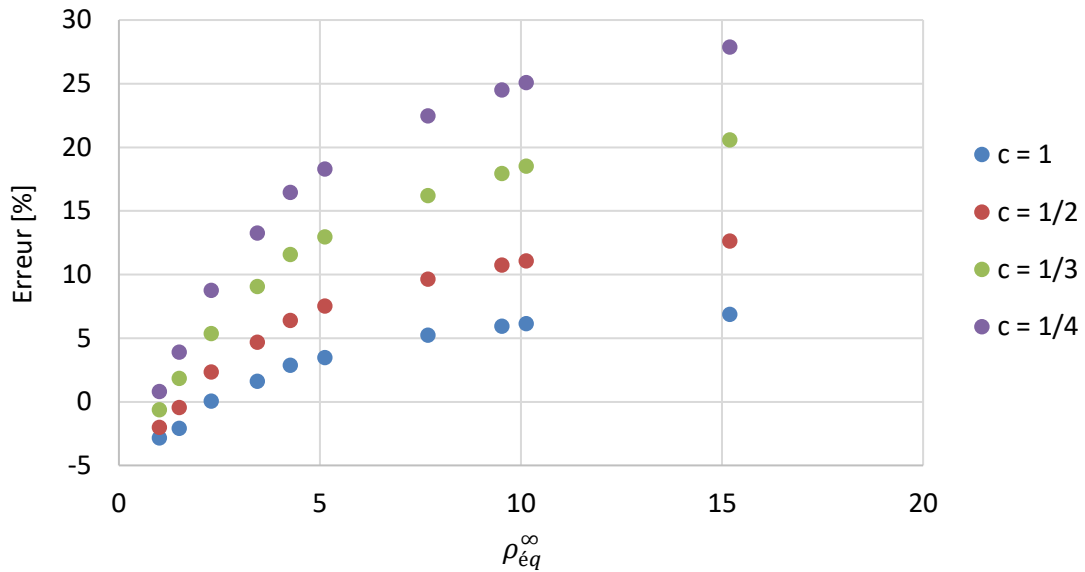


Figure 28 – Erreurs relatives entre les rigidités minimales analytiques et numériques à partir desquelles les assemblages d’une structure aux rigidités d’assemblages irrégulières sont classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 % pour différents rapports  $c$

L’irrégularité de la structure provenant de la rigidité des assemblages est poussée à l’extrême en considérant que les assemblages d’une travée sont infiniment rigides et pas les autres. Les résultats numériques et analytiques obtenus pour les 10 structures présentées dans le Tableau 23 sont comparés à la Figure 29. Ils sont extrêmement différents et certains résultats analytiques sont même négatifs. Cela signifie que les assemblages sont censés être moins rigides qu’une rotule et aider la structure à se déplacer.

Heureusement, ce cas spécifique ne sera jamais considéré en pratique puisque le critère de classification sert à déterminer si les assemblages de rigidité finie peuvent être remplacés par des assemblages infiniment rigides lors de l’analyse de la structure. Les rigidités des assemblages qui interviennent dans le critère sont donc toujours finies.

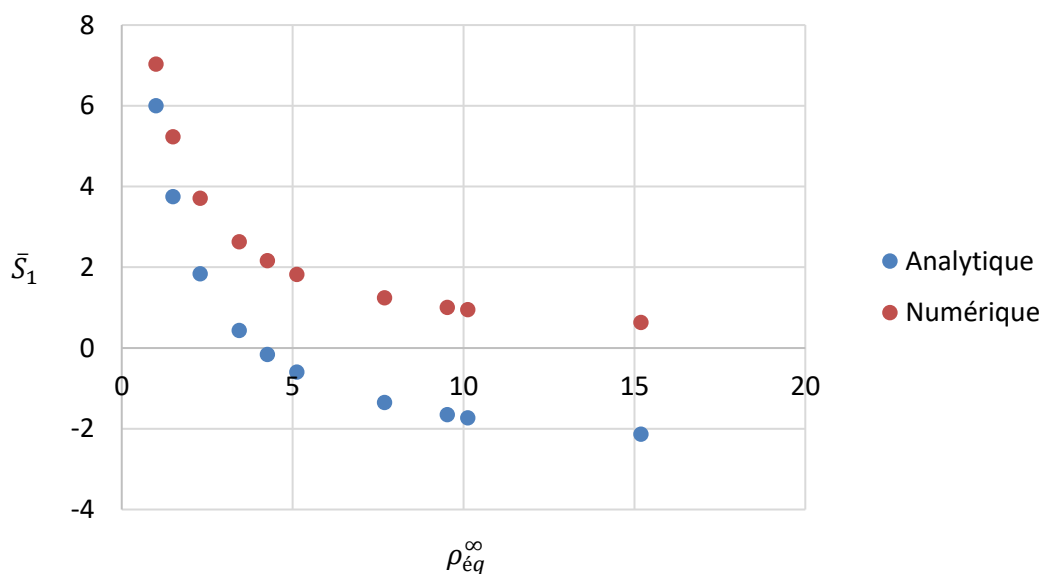


Figure 29 - Comparaison entre les rigidités minimales analytiques et numériques à partir desquelles les assemblages d’une travée d’une structure à deux travées sont classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 % lorsque les assemblages de l’autre travée sont infiniment rigides

### 3. PAR « CURVE FITTING »

#### 3.1. Introduction

Comme le montrent les résultats obtenus pour une structure à deux travées, la détermination d'un critère de classification des assemblages poutre-colonne d'une structure grâce au principe de la structure équivalente pose problème lorsque la rigidité des assemblages aux extrémités d'une des poutres est différente de celle des assemblages aux extrémités d'une autre poutre. Le critère analytique ne donne pas des rigidités minimales sécuritaires pour classer les assemblages rigides par rapport à l'approche numérique.

Pourtant, un critère de classification de ce type, qui prend en compte cette différence de rigidité serait utile dans certains cas courants. Par exemple, si la rigidité des assemblages d'une travée est fixée par des considérations techniques ou géométriques, que devient le critère de classification rigide/semi-rigide des assemblages des autres travées ? Ou bien, s'il est plus aisé de renforcer les assemblages d'une travée, le critère de classification rigide/semi-rigide des assemblages des autres travées devient-il moins restrictif ?

Afin de trouver une réponse à ces questions et de quantifier ces impacts, une nouvelle méthode est envisagée. Elle est présentée et ses limites sont pointées dans cette partie du travail.

#### 3.2. Exposé de la nouvelle méthode

##### 3.2.1. Une même rigidité d'assemblages par travée

Intéressons-nous à une structure à deux travées, dont les caractéristiques sont représentées à la Figure 30, en supposant que la rigidité flexionnelle des poutres  $K_b$  et celle des colonnes  $K_c$  sont constantes. Seule la rigidité des assemblages varie d'une travée à l'autre et le rapport  $c$  entre la rigidité des assemblages de la première travée  $S_{b,1}$  et la rigidité des assemblages de la seconde travée  $S_{b,2}$  est connu.

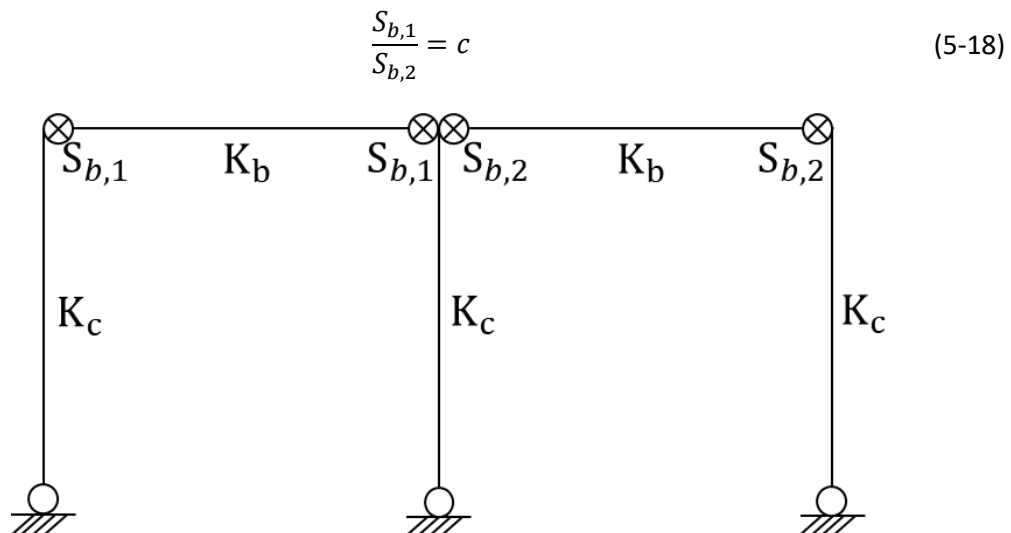


Figure 30 – Structure à deux travées, rigidité unique pour les deux assemblages d'une même poutre mais différente d'une poutre à l'autre

Les assemblages poutre-colonne de cette structure sont considérés comme rigides si leur rigidité est telle qu'un critère de déplacement transversal à 90 % est satisfait : le déplacement transversal en tête

des colonnes de la structure à assemblages infiniment rigides est supérieur ou égal à 0,9 fois le déplacement transversal en tête des colonnes de la structure à assemblages de rigidité finie.

La rigidité minimale des assemblages nécessaire pour satisfaire ce critère est calculée numériquement par l'outil créé pour une série de 10 structures à deux travées avec un rapport  $c$  de 2. Dans chaque structure, la rigidité flexionnelle des poutres et celle des colonnes ne varie pas mais ces paramètres changent d'une structure à l'autre. Leurs caractéristiques géométriques sont regroupées dans le Tableau 24. Ces structures sont soumises à une charge horizontale  $F$  appliquée en tête des colonnes.

$c = 2$	Poutre			Colonne			$K_b$ [kNm]	$K_c$ [kNm]
	Profilé	$I_b$ [cm <sup>4</sup> ]	$L_b$ [m]	Profilé	$I_c$ [mm <sup>4</sup> ]	$L_c$ [m]		
R1	HE 400 B	57 680	4	HE 200 B	5 696	4,5	30282	2658
R2				HE 240 B	11 260	4,5	30282	5255
R3				HE 300 B	18 690	4,5	30282	11746
R4				HE 400 B	57 680	4,5	30282	26917
R5			6	HE 200 B	5 696	4,5	20188	2658
R6				HE 240 B	11 260	4,5	20188	5255
R7				HE 300 B	18 690	4,5	20188	11746
R8				HE 400 B	57 680	4,5	20188	26917
R9	HE 500 B	107 200	6	HE 300 B	18 690	4,5	37520	11746
R10				HE 240 B	11 260	4,5	37520	5255

Tableau 24 – Géométrie et chargement des simulations numériques,  $E = 210\,000$  MPa

Puisqu'il connaît le rapport  $c$  entre la rigidité des assemblages des deux travées, l'outil numérique modifie petit à petit la rigidité des assemblages de la première travée  $S_{b,1}$  et la rigidité des assemblages de la seconde travée  $S_{b,2}$  en parallèle jusqu'à ce que le déplacement transversal en tête des colonnes de la structure à assemblages infiniment rigides soit égal à 0,9 fois le déplacement transversal en tête des colonnes de la structure à assemblages de rigidité finie, à 0,1 % près.

Les résultats  $\bar{S}_{num,b,1}$  obtenus par l'outil numérique pour ces 10 structures caractérisées chacune par un paramètre  $\rho_{\acute{e}q}^{\infty}$  spécifique se trouvent dans le Tableau 25 et sont représentés par des points rouges à la Figure 31.

L'évolution de la rigidité minimale  $\bar{S}_{num,b,1}$  des assemblages classés comme rigides en fonction du paramètre  $\rho_{\acute{e}q}^{\infty}$  semble suivre la même allure que la limite inférieure du critère de classification des assemblages d'une structure régulière en termes de poutres, de colonnes et d'assemblages (5-18). Elles se correspondent exactement lorsque ce critère est multiplié par une constante  $Z$  (5-19). Évidemment, le facteur  $Z$  associé à une structure régulière vaut toujours 1 et le critère se ramène à celui obtenu via le principe de la structure équivalente.

$$\bar{S}_{th,b,1} = Z \frac{54}{1 + 2\rho_{\acute{e}q}^{\infty}} = Z \cdot T \quad (5-19)$$

La valeur du facteur  $Z$  est calculée en minimisant la moyenne des erreurs relatives absolues  $ERA$  obtenues entre les résultats numériques  $\bar{S}_{num,b,1}$  et ceux  $\bar{S}_{th,b,1}$  provenant de l'équation (5-19). Pour ce type de structure à deux travées avec un rapport  $c$  de 2,  $Z$  est égal à 1,5.

$$ERA = \left| \frac{\bar{S}_{num} - \bar{S}_{th}}{\bar{S}_{num}} \right| \quad (5-20)$$

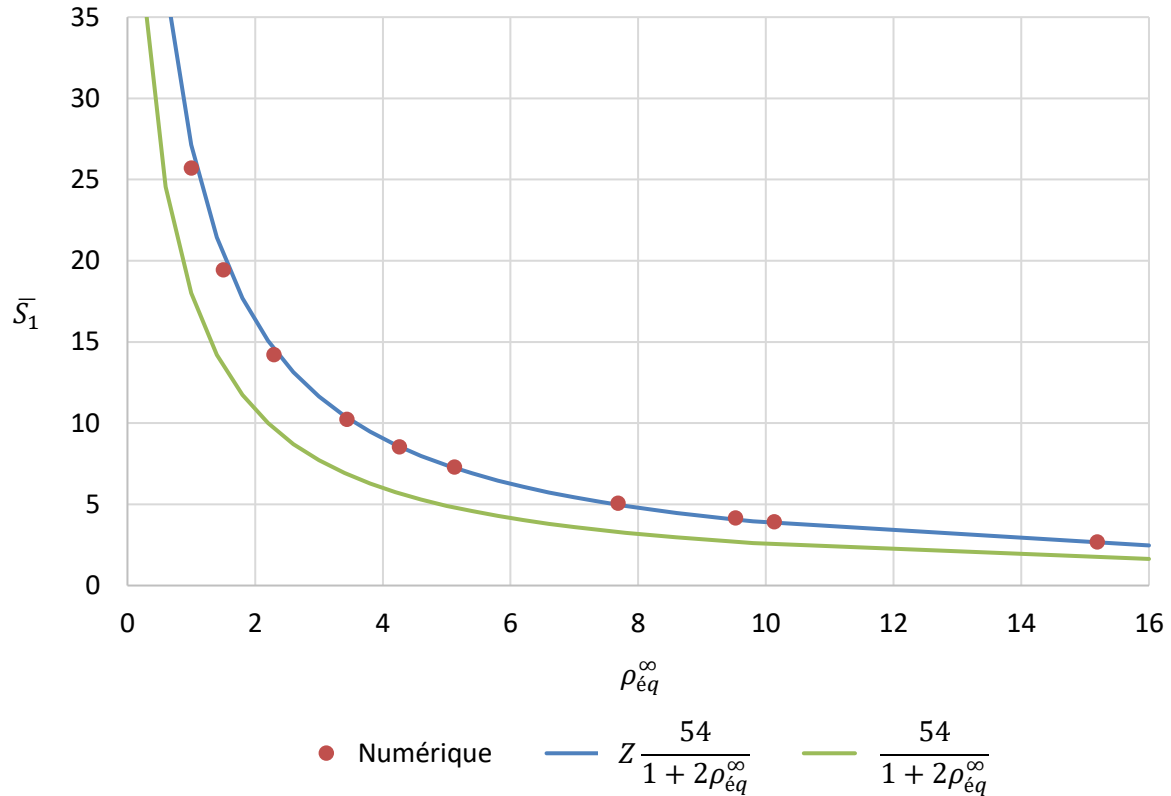


Figure 31 – Relation entre  $\rho_{\text{éq}}^{\infty}$  et la rigidité adimensionnelle minimale à partir de laquelle les assemblages poutre-colonne de la première travée d'une structure régulière à deux travées sont classés comme rigides selon un critère de déplacement à 90 %.

$c = 2$ $Z = 1,5$	$K_b$	$\rho_{\text{éq}}^{\infty}$	$S_{\text{num},b,1}$	$\bar{S}_{\text{num},b,1}$	$\bar{S}_{\text{th},b,1}$	ERA
R1	30282	15,19	81600	2,69	2,60	3,7 %
R2	30282	7,68	153741	5,08	4,98	2,0 %
R3	30282	3,44	309984	10,24	10,34	1,0 %
R4	30282	1,50	589121	19,45	20,36	4,6 %
R5	20188	10,13	79581	3,94	3,83	2,8 %
R6	20188	5,12	147345	7,30	7,24	0,8 %
R7	20188	2,29	287000	14,22	14,58	2,6 %
R8	20188	1,00	519258	25,72	27,14	5,5 %
R9	37520	4,26	321000	8,56	8,56	0,0 %
R10	37520	9,52	156569	4,17	4,06	2,6 %

Tableau 25 – Détermination du facteur  $Z$  associé à une structure à deux travées, lorsque le rapport  $c$  entre les rigidités des assemblages de chaque travée vaut 2, par minimisation de l'ERA entre les résultats numériques et analytiques

Il faudrait arriver à prédire la valeur de ce facteur  $Z$ , autrement que numériquement, afin d'établir un critère de classification des assemblages utilisable en pratique. Il est déjà clair que la valeur de ce coefficient dépend du rapport  $c$  puisque le facteur  $Z$  vaut 1,5 lorsque  $c$  est égal à 2 mais il vaut 1 lorsque tous les assemblages sont les mêmes,  $c = 1$ , pour retomber sur le critère de classification des assemblages d'une structure régulière. La démarche a été suivie pour la même série de 10 structures avec un rapport  $c$  de 4. Le facteur  $Z$  associé à ce rapport  $c$  est estimé et vaut 2,4.

Ces points  $[c, Z]$  sont dessinés à la Figure 32. La relation entre  $Z$  et  $c$  semble linéaire. L'équation d'une droite est établie par régression linéaire pour décrire cette relation.

$$Z = 0,46 c + 0,54 \quad (5-21)$$

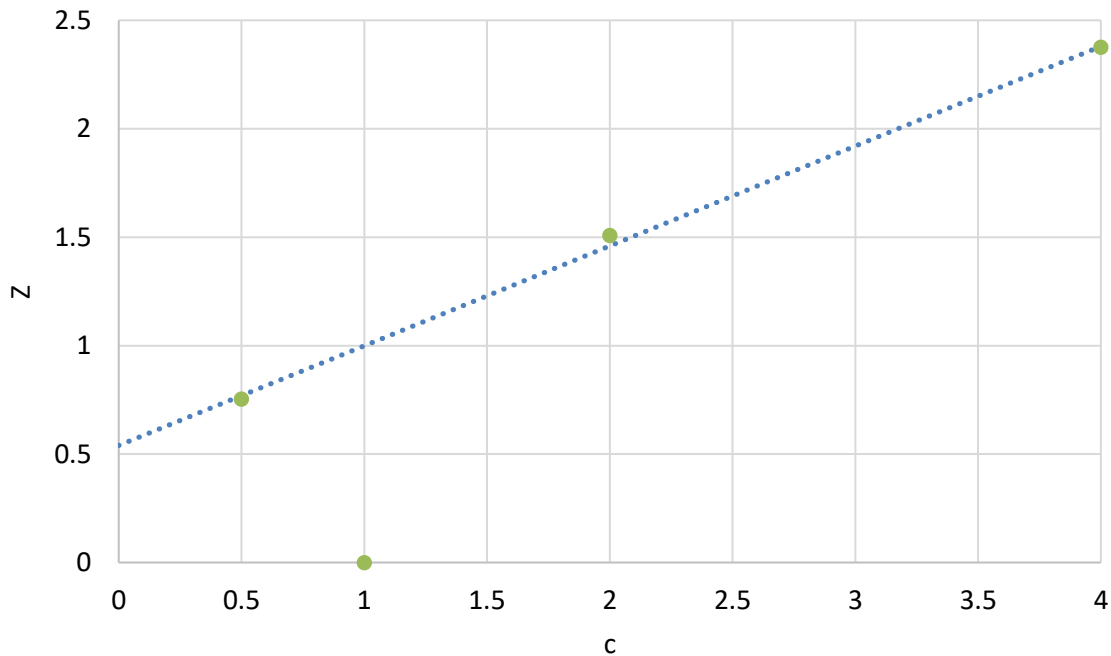


Figure 32 – Évolution du facteur  $Z$  en fonction du rapport  $c$  entre les rigidités des assemblages des deux travées et droite de régression linéaire entre ces deux variables

Or,

$$Z = \frac{\bar{S}_{b,1}}{T} \text{ avec } T = \frac{54}{1 + 2\rho_{\text{éq}}^{\infty}} \quad (5-22)$$

$$c = \frac{S_{b,1}}{S_{b,2}} \quad (5-23)$$

Les poutres des structures étudiées ici présentent la même rigidité flexionnelle  $K_b$ .

$$c = \frac{\bar{S}_{b,1}}{\bar{S}_{b,2}} \text{ car } \bar{S}_{b,i} = \frac{S_{b,i}}{K_{b,i}} \quad (5-24)$$

Dès lors, la relation entre  $Z$  et  $c$  est réarrangée et simplifiée par symétrie.

$$\frac{1}{T} = \frac{0,5}{\bar{S}_{b,1}} + \frac{0,5}{\bar{S}_{b,2}} \quad (5-25)$$

Cette équation sert à déterminer à partir de quelle rigidité les assemblages poutre-colonne sont classés comme rigides lorsqu'ils appartiennent à une structure à deux travées, avec deux poutres de rigidité flexionnelle  $K_b$ , trois colonnes de rigidité flexionnelle  $K_c$  et la rigidité des assemblages d'une des deux travées égale à  $c$  fois celle des assemblages de l'autre travée. Une des deux rigidités intervient dans le critère de classification. Ce critère agit ensuite aussi sur l'autre rigidité mais via la relation établie entre les deux rigidités grâce au rapport  $c$ .



$$\begin{cases} S_{b,1} \geq \frac{1+c}{2} TK_b \\ S_{b,2} = \frac{S_{b,1}}{c} \end{cases} \quad (5-26)$$

Dans l'optique où le rapport  $c$  est inconnu mais la rigidité des assemblages d'une travée, par exemple  $S_{b,1}$ , est fixée par des considérations géométriques ou techniques, cette équation est remaniée et donne un critère de classification pour les assemblages de l'autre travée.

$$\begin{cases} c \leq \frac{2S_{b,1}}{TK_b} - 1 \\ S_{b,2} = \frac{S_{b,1}}{c} \end{cases} \quad (5-27)$$

Pour des structures à trois travées, il est assez logique de penser que la relation établie en (5-25) s'allongera simplement d'un terme et ainsi de suite pour des structures à encore plus de travées, par exemple  $i$  travées.

$$\frac{1}{T} = \sum_i \frac{a_{b,i}}{S_{b,i}} \quad (5-28)$$

Afin de la généraliser pour des structures à plus de deux travées, il est indispensable de trouver un moyen de prédire les coefficients  $a_{b,i}$  qui apparaissent dans cette équation.

### 3.2.2. Deux rigidités d'assemblages différentes par travée

Poussons le raisonnement encore un cran plus loin : quelles conclusions sont tirées lorsque les rigidités des assemblages aux extrémités d'une poutre ne sont plus forcément semblables ?

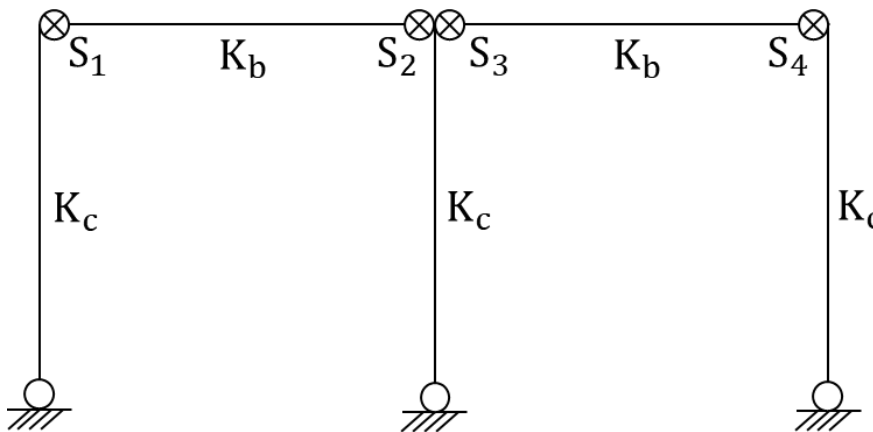


Figure 33 – Structure à deux travées avec des rigidités d'assemblages toutes différentes

De manière synthétique, la méthode utilisée reste la même et se résume en quelques étapes. Elle est appliquée à 6 types de structures à deux travées. Ils se distinguent les uns des autres par le lien qui existe entre les rigidités de leurs assemblages poutre-colonne. Ces informations sont regroupées dans le Tableau 26. Afin de réduire le nombre de variables, la rigidité d'un assemblage est soit  $S$ , soit  $S/c$ . Pour chaque type de structure, il s'agit de :

- 1) Calculer numériquement les rigidités minimales nécessaires pour classer comme rigides les assemblages poutre-colonne de 10 structures du même type caractérisées chacune par une valeur différente du paramètre  $\rho_{\text{éq}}^{\infty}$ .

- 2) Déterminer le facteur  $Z$  sur base de ces résultats numériques pour plusieurs rapports  $c$  par minimisation de la moyenne des erreurs relatives absolues entre les résultats numériques  $\bar{S}_{num}$  et les résultats analytiques provenant de l'équation suivante.

$$\bar{S}_{th} = Z \frac{54}{1 + 2\rho_{\acute{e}q}^{\infty}} \quad (5-29)$$

- 3) Établir la relation entre  $Z$  et  $c$  par régression linéaire puis la réécrire sous une forme plus simple.

Les facteurs  $Z$  et les relations entre  $Z$  et  $c$  obtenus en suivant cette procédure pour 6 types de structures sont rassemblés dans le Tableau 26.

TYPE	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$c$	$Z$	Équation
A	$S$	$S$	$S$	$S$	-	1	$\frac{1}{T} = \frac{1}{\bar{S}}$
B	$S$	$\frac{S}{c}$	$\frac{S}{c}$	$\frac{S}{c}$	2	1,7	$\frac{1}{T} = \frac{0,36}{\bar{S}} + \frac{0,64 c}{\bar{S}}$
					4	2,9	
C	$\frac{S}{c}$	$S$	$\frac{S}{c}$	$\frac{S}{c}$	2	1,9	$\frac{1}{T} = \frac{0,14}{\bar{S}} + \frac{0,86 c}{\bar{S}}$
					4	3,6	
D	$S$	$\frac{S}{c}$	$S$	$\frac{S}{c}$	2	1,5	$\frac{1}{T} = \frac{0,5}{\bar{S}} + \frac{0,5 c}{\bar{S}}$
					4	2,4	
E	$S$	$S$	$\frac{S}{c}$	$\frac{S}{c}$	2	1,5	$\frac{1}{T} = \frac{0,5}{\bar{S}} + \frac{0,5 c}{\bar{S}}$
					4	2,4	
F	$S$	$\frac{S}{c}$	$\frac{S}{c}$	$S$	2	1,3	$\frac{1}{T} = \frac{0,72}{\bar{S}} + \frac{0,28 c}{\bar{S}}$
					4	1,8	

Tableau 26 – Facteurs  $Z$  associés à un type de structure et à un rapport  $c$ , équation qui lie le facteur  $Z$  au rapport  $c$  pour chaque type de structure

Finalement, une seule équation générale est déterminée à partir de tous ces résultats. Elle est valable pour tous les types de structures à deux travées considérés.

$$\frac{1}{T} = \frac{0,36}{\bar{S}_1} + \frac{0,14}{\bar{S}_2} + \frac{0,14}{\bar{S}_3} + \frac{0,36}{\bar{S}_4} \quad (5-30)$$

Pour s'en assurer, essayons de retrouver l'équation du type B, celle du type D et celle du type F.

$$\text{TYPE B : } \frac{0,36}{\bar{S}} + \frac{0,14}{\bar{S}/c} + \frac{0,14}{\bar{S}/c} + \frac{0,36}{\bar{S}/c} = \frac{0,36}{\bar{S}} + \frac{0,64 c}{\bar{S}} \quad (5-31)$$

$$\text{TYPE D : } \frac{0,36}{\bar{S}} + \frac{0,14}{\bar{S}/c} + \frac{0,14}{\bar{S}} + \frac{0,36}{\bar{S}/c} = \frac{0,5}{\bar{S}} + \frac{0,5 c}{\bar{S}} \quad (5-32)$$

$$\text{TYPE F : } \frac{0,36}{\bar{S}} + \frac{0,14}{\bar{S}/c} + \frac{0,14}{\bar{S}/c} + \frac{0,36}{\bar{S}} = \frac{0,72}{\bar{S}} + \frac{0,28 c}{\bar{S}} \quad (5-33)$$

Cette équation s'étend assez facilement à des structures qui comportent plus de travées tant que la rigidité flexionnelle de toutes leurs poutres reste  $K_b$  et celles de toutes leurs colonnes reste  $K_c$ . Le nombre d'assemblages poutre-colonne d'une structure  $j$  est le double du nombre de travées  $i$ .

$$\frac{1}{T} = \sum_{j=2i} \frac{a_j}{S_j} \quad (5-34)$$

### 3.2.3. Prédiction des coefficients $a_j$

Les coefficients  $a_j$  semblent liés à la distribution des moments dans la structure à assemblages infiniment rigides  $M^\infty$  soumise à une charge horizontale uniquement. Il est légitime de se référer à la structure à assemblages infiniment rigides étant donné que le comportement de la structure à assemblages de rigidité finie classés comme rigides est censé rester proche de celui de la structure à assemblages infiniment rigides.

$$a_j = \frac{|M_j^\infty|}{\sum_j |M_j^\infty|} \quad (5-35)$$

L'analyse de structures à une, deux ou même trois travées le confirme bien. Pour chaque nombre de travées, les coefficients  $a_j$  sont calculés à partir de l'équation (5-35) pour 10 structures dont la géométrie et le chargement sont résumés dans le Tableau 27. Ils sont ensuite confrontés aux coefficients déterminés par la méthode précédente, appelée méthode « Z ». La rigidité flexionnelle de toutes les poutres des structures analysées est  $K_b$  et celle de toutes les colonnes est  $K_c$ .

Nom	Poutre			Colonne			$K_b$ [kNm]	$K_c$ [kNm]	F [kN]
	Profilé	$I_b$ [cm <sup>4</sup> ]	$L_b$ [m]	Profilé	$I_c$ [mm <sup>4</sup> ]	$L_c$ [m]			
M1	HE 400 B	57 680	4	HE 200 B	5 696	4,5	30282	2658	10
M2				HE 240 B	11 260	4,5	30282	5255	20
M3				HE 300 B	18 690	4,5	30282	11746	40
M4				HE 400 B	57 680	4,5	30282	26917	70
M5			6	HE 200 B	5 696	4,5	20188	2658	10
M6				HE 240 B	11 260	4,5	20188	5255	20
M7				HE 300 B	18 690	4,5	20188	11746	40
M8				HE 400 B	57 680	4,5	20188	26917	70
M9	HE 500 B	107 200	6	HE 300 B	18 690	4,5	37520	11746	40
M10				HE 240 B	11 260	4,5	37520	5255	20

Tableau 27 – Géométrie et chargement des simulations numériques,  $E = 210\ 000\ \text{MPa}$

Pour les structures à une travée, les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  déterminés par la méthode « Z » ou par la distribution des moments sont tous égaux à 0,5. En effet, sous une charge horizontale, les moments aux deux extrémités de la seule poutre de la structure à une travée sont équivalents à un signe près.

$$\frac{1}{T} = \frac{0,5}{S_1} + \frac{0,5c}{S_1} \quad (5-36)$$

Le critère de classification des assemblages rigides qui découle de cette équation se compose de deux parties, une par rigidité d'assemblage. Il n'est utilisable en pratique que si le rapport  $c$  est connu ou si une des rigidités est fixée.

$$\begin{cases} S_1 \geq \frac{1+c}{2} TK_b \\ S_2 \geq \frac{1+c}{2c} TK_b \end{cases} \quad \text{avec } c = \frac{S_1}{S_2} \quad (5-37)$$

$$\begin{cases} c \leq \frac{2S_1}{TK_b} - 1 \\ S_2 \geq \frac{S_1 TK_b}{2S_1 - TK_b} \end{cases} \quad \text{avec } c = \frac{S_1}{S_2} \quad (5-38)$$

Dans le cas extrême où un des assemblages est infiniment rigide, le rapport  $c$  tend vers zéro, l'équation perd un terme et  $Z$  semble valoir 0,5. Numériquement,  $Z$  a été établi à 0,45. Cela signifie qu'une petite marge de sécurité est disponible.

$$\frac{1}{T} = \frac{0,5}{\bar{S}_1} \Leftrightarrow Z = 0,5 \quad (5-39)$$

Pour les structures à deux ou trois travées, les coefficients obtenus par la méthode «  $Z$  » correspondent bien à ceux calculés grâce à la distribution des moments, comme le montre le Tableau 28. Les caractéristiques géométriques et le chargement des 10 structures testées se trouvent dans le Tableau 27.

	Deux travées		Trois travées		
	$a_1 = a_4$	$a_2 = a_3$	$a_1 = a_6$	$a_2 = a_5$	$a_3 = a_4$
Méthode « $Z$ »	0,35	0,15	0,28	0,14	0,08
$\frac{ M_j }{\sum_j  M_j }$	0,33	0,17	0,24	0,16	0,10
	0,32	0,18	0,24	0,16	0,10
	0,31	0,19	0,23	0,16	0,11
	0,29	0,21	0,22	0,16	0,12
	0,32	0,18	0,24	0,16	0,09
	0,32	0,18	0,24	0,16	0,10
	0,30	0,20	0,22	0,17	0,11
	0,29	0,21	0,21	0,17	0,13
	0,31	0,19	0,23	0,16	0,10
	0,32	0,18	0,24	0,16	0,10

Tableau 28 – Coefficients  $a_j$  obtenus par la méthode «  $Z$  » ou par la distribution des moments dans la structure soumise à une charge horizontale

### 3.3. Limites de la méthode

Actuellement, cette méthode de classification des assemblages rigides reste limitée aux assemblages poutre-colonne de structures spécifiques. Toutes leurs poutres possèdent la même rigidité flexionnelle  $K_b$  et toutes leurs colonnes ont la même rigidité flexionnelle  $K_c$ .

Lorsque ces rigidités flexionnelles de poutres et de colonnes se mettent à varier à l'intérieur même de la structure, les coefficients  $a_j$  ne suivent plus vraiment la distribution des moments. Des recherches supplémentaires mériteraient d'être menées afin de découvrir le maillon manquant pour étendre cette méthode à toutes les structures.

Néanmoins, tant que la méthode ne prend pas en compte des rigidités d'assemblages différentes, le facteur  $Z$  reste égal à 1 si la rigidité flexionnelle des colonnes varie car la somme des coefficients  $a_j$  vaut 1. Par contre,  $Z$  diffère de un lorsque la rigidité flexionnelle des poutres varie et il n'est pas possible de prédire sa valeur sans connaître les coefficients  $a_j$  (Annexe 3).

$$\frac{1}{T} = \sum_j \frac{a_j}{S_j} = \sum_j \frac{a_j K_{b,j}}{S} = \frac{\sum_j a_j K_{b,j}}{S} \quad (5-40)$$

$$\text{Si } K_{b,j} = K_b \forall j \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{K_b}{S} \sum_j a_j \frac{K_b}{S} \Leftrightarrow Z = 1 \quad (5-41)$$

De plus, les facteurs  $Z$  ont été déterminés en considérant que les structures étaient soumises à une charge horizontale en tête de leurs colonnes uniquement. Il serait intéressant de voir l'influence du chargement vertical sur ces facteurs.

Selon le principe de superposition, dans les structures régulières, un chargement symétrique ne devrait pas modifier le facteur  $Z$  puisqu'il n'induit aucun déplacement transversal supplémentaire et que le critère de classification des assemblages rigides est basé sur un critère de déplacement transversal à 90 %. Si le déplacement ne change pas, le critère non plus.

Par contre, le déplacement transversal d'une structure n'est pas nul lorsqu'elle est soumise à un chargement vertical dissymétrique de sorte que le facteur  $Z$  ne devrait plus être égal à 1.

C'est en effet bien ce qui ressort lorsqu'un chargement vertical est appliqué sur une structure à deux travées, régulière en termes de poutres, de colonnes et d'assemblages. Le facteur  $Z$  associé à ce type de structures est égal à 1 sous une charge horizontale uniquement. Il le reste tant que le chargement vertical est symétrique mais il devient inférieur (ou supérieur) à 1 quand une seule des deux travées est chargée verticalement et que la présence de ce chargement vertical diminue (ou augmente) le déplacement transversal de la structure.

## 4. CONCLUSION

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'extension du critère de classification par le principe de la structure équivalente (§ 2). Il sert à établir l'expression du critère de déplacement à 90 % pour des structures quelconques.

$$\rho_{\acute{e}q} \geq \frac{9\rho_{\acute{e}q}^{\infty}}{2\rho_{\acute{e}q}^{\infty} + 10} \quad (5-42)$$

Les paramètres  $\rho_{\acute{e}q}$  et  $\rho_{\acute{e}q}^{\infty}$  qui apparaissent dans ce critère sont exprimés en utilisant les règles de transformation approchées car les règles de transformation exactes nécessitent que l'analyse de la structure soit réalisée en considérant la rigidité finie de tous ses assemblages. Avec les règles exactes, la classification des assemblages ne servirait plus à rien.

Un critère de classification est tiré du critère de déplacement (§ 2.2). L'erreur engendrée sur le critère de classification par l'approximation associée aux règles de transformation est évaluée dans différents contextes structuraux. D'après les erreurs obtenues, cette approche est valable pour déterminer un critère de classification des assemblages poutre-colonne d'une structure régulière (§ 2.3) mais pas pour ceux d'une structure irrégulière (§ 2.4).

Dans la deuxième partie de ce chapitre (§ 3), une autre méthode est envisagée pour essayer de trouver un critère de classification adapté aux assemblages d'une structure irrégulière. Elle a été développée empiriquement en remarquant dans les résultats numériques que la courbe de rigidité minimale des assemblages en fonction de  $\rho_{\text{éq}}^{\infty}$  avait toujours la même allure, à un facteur  $Z$  près (§ 3.2).

Ce facteur  $Z$  a d'abord été calculé sur base de résultats numériques pour des structures dotées de poutres de rigidité flexionnelle  $K_b$  et de colonnes de rigidité flexionnelle  $K_c$ . Ces structures sont régulières en termes de poutres et de colonnes mais pas d'assemblages qui ont chacun leur rigidité propre. Les valeurs du facteur  $Z$  ont mené à la détermination d'un critère de classification assez général.

$$\frac{1 + 2\rho_{\text{éq}}^{\infty}}{54} \geq \sum_{j=2i} \frac{a_j}{\bar{S}_j} \quad (5-43)$$

Les coefficients  $a_j$  résultent de l'analyse de la structure dans laquelle la rigidité des assemblages voulus rigides est infinie (§ 3.2.3).

$$a_j = \frac{|M_j^{\infty}|}{\sum_j |M_j^{\infty}|} \quad (5-44)$$

En fonction du nombre de travées  $i$  de la structure considérée, le critère de classification contient  $j$  inconnues : la rigidité initiale de chacun des assemblages de la structure. Afin de résoudre cette inéquation, des informations supplémentaires sont requises. Il s'agit soit de la rigidité initiale de certains assemblages, soit d'un lien mathématique entre leurs rigidités.

Cette méthode fournit un critère de classification intéressant dans certains cas pratiques. Lorsque la rigidité de quelques assemblages est fixée, par exemple, ce critère de classification détermine la rigidité minimale des autres assemblages qui permet de tous les classer comme rigides. Toutefois, cette méthode ne donne toujours pas un critère de classification valable pour classer les assemblages d'une structure dont les poutres ou les colonnes varient (§ 3.3).

De plus, ces deux approches ont été validées pour des structures soumises à un chargement horizontal uniquement. Or, un chargement vertical symétrique appliqué sur une structure dissymétrique ou un chargement vertical dissymétrique appliqué sur n'importe quelle structure influence aussi le critère de classification des assemblages de la structure. En effet, la présence de ce chargement provoque un déplacement transversal de la structure et le critère de classification de ses assemblages varie en fonction de la combinaison de charges considérée. Cet effet devrait être étudié dans le futur.

Selon le degré de raffinement souhaité :

1. Un critère de classification est déterminé spécifiquement pour un ou plusieurs assemblages d'un étage. Il requiert le calcul des coefficients  $a_j$  et la connaissance de la rigidité des autres assemblages ou du lien mathématique qui existe entre elles.
2. Un critère de classification est déterminé pour tous les assemblages d'un étage grâce aux règles de transformation approchées utilisées pour appliquer le principe de la structure équivalente.
3. Un critère de classification est déterminé pour tous les assemblages de la structure. Il s'agit du critère d'étage le plus restrictif.

# CHAPITRE 6 : Exemple pratique

## 1. INTRODUCTION

Les critères de classification des assemblages rigides déterminent la rigidité minimale des assemblages d'une structure à partir de laquelle le remplacement de leur rigidité propre par une rigidité idéalisée infinie n'influence plus trop le comportement de la structure.

Les rigidités minimales nécessaires pour classer les assemblages d'une structure réelle comme rigides sont obtenues en appliquant le critère de classification des assemblages rigides de l'Eurocode 3 ou le nouveau critère développé dans ce travail. Elles sont ensuite comparées afin de vérifier que le nouveau critère est avantageux par rapport au critère de l'Eurocode 3.

## 2. EXEMPLE

### 2.1. Structure étudiée

La structure représentée à la Figure 34 a été prédimensionnée avec des assemblages infiniment rigides dans le cadre du cours GCIV0644-1 « Structures métalliques et mixtes acier-béton », dispensé en 2017 par M. Jaspart et M. Demonceau et suivi par les étudiants en première année du Master Ingénieur civil des constructions à l'Université de Liège. Cette structure fait partie des quelques exemples dont le dimensionnement avec des assemblages semi-rigides est détaillé dans l'ouvrage « EUROCODE 3 EN 1993, exemples d'application au calcul des structures en acier ».

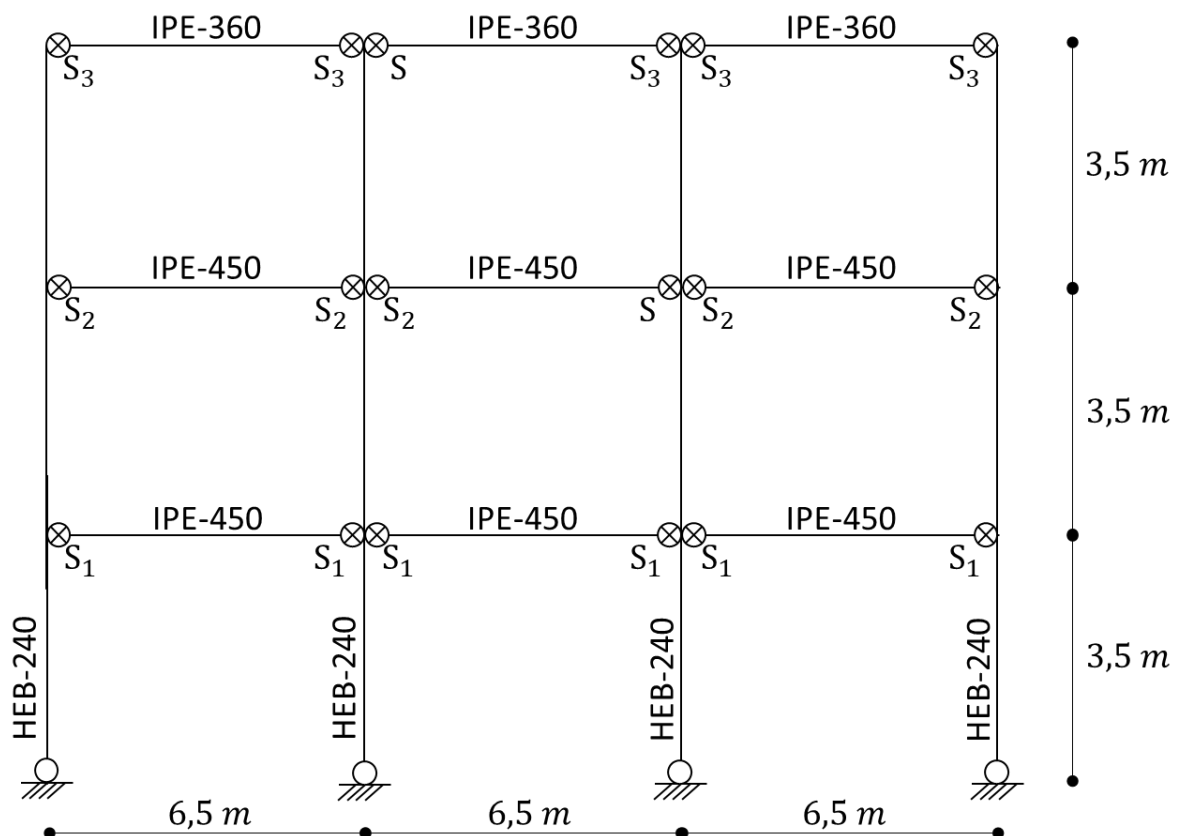


Figure 34 – Structure à trois étages et trois travées, articulée en pieds et non-contreventée

Il s'agit d'une ossature plane non-contreventée. Elle est constituée de trois étages de 3,5 m de haut et de trois travées de 6,5 m de long. Les colonnes sont continues et ont les pieds articulés. La structure résiste aux efforts transversaux par effet cadre. C'est pourquoi les assemblages poutre-colonne sont censés être suffisamment rigides en rotation, voire être considérés comme infiniment rigides.

Quelle est la rigidité minimale à partir de laquelle les assemblages poutre-colonne de cette structure sont classés comme rigides, d'après le critère de classification des assemblages poutre-colonne rigides de l'Eurocode 3 ou d'après le nouveau critère de classification développé dans ce travail ?

## 2.2. Critère de classification de l'Eurocode 3

Le critère de classification des assemblages rigides de l'Eurocode 3 dépend de la rigidité flexionnelle des poutres  $K_{b,i}$ .

$$S_i \geq 25 K_{b,i} \quad (6-1)$$

Premier et deuxième étages :

$$\begin{cases} I_{b,1\&2} = 33\,710.10^4 \text{ mm}^4 \\ L_{b,1\&2} = 6,5 \text{ m} \\ E = 210\,000 \text{ MPa} \end{cases} \Leftrightarrow K_{b,1\&2} = 10\,901 \text{ kNm} \Leftrightarrow S_{1\&2} \geq 272\,525 \text{ kNm/rad}$$

Troisième étage :

$$\begin{cases} I_{b,3} = 16\,270.10^4 \text{ mm}^4 \\ L_{b,3} = 6,5 \text{ m} \\ E = 210\,000 \text{ MPa} \end{cases} \Leftrightarrow K_{b,3} = 5\,256 \text{ kNm} \Leftrightarrow S_3 \geq 131\,400 \text{ kNm/rad}$$

## 2.3. Critère étendu par le principe de la structure équivalente

Dans une structure symétrique comme celle-ci, où les poutres de chaque étage possèdent toutes la même rigidité flexionnelle, le nouveau critère de classification des assemblages rigides développé tout au long de ce travail s'exprime comme suit pour chaque étage, si le chargement vertical est symétrique.

$$S_i \geq \frac{54 K_{b,i}}{1 + 2\rho_{\acute{e}q}^{\infty}} \quad (6-2)$$

Premier et deuxième étages :

Colonnes,

$$\begin{cases} I_c = 14\,920.10^4 \text{ mm}^4 \\ L_c = 3,5 \text{ m} \\ E = 210\,000 \text{ MPa} \end{cases} \Leftrightarrow K_c = 8\,952 \text{ kNm}$$

Critère de classification,

$$\rho_{\acute{e}q}^{\infty} = \frac{3K_{b,1\&2}}{2K_c} = 1,82 \Leftrightarrow S_{1\&2} \geq 126\,506 \text{ kNm/rad}$$

Troisième étage :

Critère de classification,

$$\rho_{\acute{e}q}^{\infty} = \frac{3K_{b,3}}{2K_c} = 0,88 \Leftrightarrow S_3 \geq 102\,782 \text{ kNm/rad}$$



## 2.4. Comparaison

Critère de l'Eurocode 3 :  $S_{1\&2} \geq 272\,525 \text{ kNm/rad}$  et  $S_3 \geq 131\,400 \text{ kNm/rad}$

Nouveau critère :  $S_{1\&2} \geq 126\,506 \text{ kNm/rad}$  et  $S_3 \geq 102\,782 \text{ kNm/rad}$

Le nouveau critère de classification divise par plus de deux la rigidité minimale demandée pour classer les assemblages des deux premiers étages comme rigides. Les possibilités d'économie de matériau qu'il engendre sont moindres lorsque le paramètre  $\rho_{\text{éq}}^{\infty}$  est petit, comme pour les assemblages du troisième étage. Si ce paramètre est inférieur à 0,58 alors le nouveau critère devient plus restrictif que celui de l'Eurocode 3. Heureusement, en pratique, il reste souvent supérieur à 1.

## 3. CONCLUSION

Ce court exemple d'application des critères de classification montre l'intérêt économique lié à la définition d'un nouveau critère de classification des assemblages poutre-colonne rigides envisagée dans ce travail.

L'habitude qu'ont les ingénieurs de simplifier l'analyse des structures en considérant certains assemblages comme infiniment rigides est toujours très ancrée. Or, les assemblages sont souvent renforcés afin de respecter le critère de classification des assemblages rigides. Cependant, ce critère est actuellement trop restrictif, dans la plupart des cas.

Le nouveau critère semble plus approprié et moins restrictif, tout en restant sécuritaire. La rigidité demandée pour classer des assemblages comme rigides est plus faible. Les assemblages ont besoin de moins de raidisseurs et cela entraîne une économie de matériau et de main d'œuvre.

Toutefois, l'étude de ce nouveau critère de classification n'est pas encore terminée puisqu'il a été vérifié pour des structures régulières sous des chargements verticaux symétriques uniquement mais il semble prometteur.

# CHAPITRE 7 : Conclusions et perspectives

## 1. CONCLUSIONS

Les critères de classification par rigidité des assemblages rigides assurent que le remplacement de leur rigidité réelle finie par une rigidité idéalisée infinie n'influence pas de façon significative le comportement de la structure lors de son analyse. L'analyse de la structure est ainsi simplifiée sans surestimer sa résistance ou sous-estimer ses déplacements.

D'un point de vue global, les critères de classification par rigidité des assemblages poutre-colonne rigides dérivent soit d'un critère de stabilité à 95 %, soit d'un critère de résistance à 95 %, soit d'un critère de déplacement transversal à 90 %.

Les critères de classification qui découlent d'un critère de stabilité/résistance à 95 % déterminent la rigidité minimale des assemblages poutre-colonne d'une structure à partir de laquelle la stabilité/résistance de la structure dotée d'assemblages de rigidité finie devient supérieure à 95 % de la stabilité/résistance de la structure pourvue d'assemblages infiniment rigides. L'idéalisation infinie de la rigidité des assemblages rend la structure légèrement plus stable et plus résistante qu'en réalité. Dès lors, l'influence de cette idéalisation sur le comportement de la structure doit rester négligeable afin de la dimensionner de manière sécuritaire, sans surestimer sa stabilité et sa résistance.

Le même raisonnement s'applique à propos du critère de déplacement transversal à 90 %. Cependant, le déplacement de la structure à assemblages de rigidité finie est, lui, sous-estimé lorsqu'il est évalué en analysant la structure à assemblages infiniment rigides.

Actuellement, les deux critères de classification de l'Eurocode 3 s'appliquent aux assemblages de structures contreventées ou non-contreventées. Ils ont été définis d'abord en fonction de  $\rho$  à partir d'un critère de stabilité à 95 % mais ils apparaissent dans l'Eurocode sous une forme simplifiée, indépendante du paramètre  $\rho$ .

$$S \geq 25 \frac{EI_b}{L_b} = 25 K_b \quad (7-1)$$

Cependant, le critère de classification des assemblages d'une structure non-contreventée exprimé en fonction de  $\rho$  descend largement en-dessous du critère simplifié lorsque la valeur du paramètre  $\rho$  dépasse 1,4. Le critère simplifié oblige les ingénieurs à renforcer les assemblages, ce qui augmente les coûts, afin de les classer comme rigides alors qu'ils le sont en réalité déjà selon le critère raffiné. Le comportement de la structure réelle est suffisamment bien décrit par l'analyse de la structure à assemblages infiniment rigides lorsque la rigidité des assemblages est plus faible que celle demandée par le critère simplifié.

C'est pourquoi, l'objectif de ce travail de fin d'études était de développer un nouveau critère de classification des assemblages qui soit toujours sécuritaire mais moins restrictif.

Plusieurs critères de classification ont ainsi été exposés dans le chapitre 2. Ils ont été définis pour classer les assemblages poutre-colonne des structures les plus simples qui soient, à savoir des portiques symétriques simples, articulés ou encastrés en pieds. Ces critères ont formulés puis étudiés de manière approfondie dans le chapitre 4. Ils ont aussi été validés numériquement grâce à l'outil numérique créé dans le cadre de ce travail et présenté au chapitre 3.

D'abord, les critères simplifiés de l'Eurocode 3 ont été raffinés. Les fondements mathématiques qui mènent à la définition de ces critères en fonction de  $\rho$  étaient obscurs. Ces critères sont uniquement représentés sous forme de deux courbes dans un graphique, une pour les assemblages d'une structure contreventée et l'autre pour ceux d'une structure non-contreventée. Ils ont été établis à nouveau à partir de la procédure de calcul de la longueur de flambement de l'Annexe E de l'Eurocode 3. Par contre, ils s'appliquent alors à des structures dont le mode d'instabilité est à nœuds déplaçables ou à nœuds fixes et non à des structures contreventée ou non-contreventées. Contre toute attente, le critère de classification des assemblages d'une structure non-contreventée ne correspond pas à celui d'une structure dont le mode d'instabilité est à nœuds déplaçables. Pourtant, les nouvelles formulations semblent correctes puisqu'elles ont été validées numériquement.

Deux autres critères de classification, un formulé par F. Gomes et l'autre par les recherches COST, ont été définis, quant à eux, à partir d'un critère de résistance à 95 % via la formule de Merchant-Rankine.

Le critère de classification de Gomes a été écrit pour classer les assemblages d'un portique symétrique simple, articulé en pieds, uniquement. En effet, il se base sur l'expression du déplacement transversal en tête des colonnes d'une telle structure. Cette expression est établie par la méthode des rotations puis modifiée par la méthode de Horne pour dépendre du multiplicateur critique. Afin de rendre son critère facile à utiliser en pratique, Gomes a supposé que la charge ultime de la structure équivaut à sa charge de dimensionnement. Cette hypothèse lui permet de remplacer  $\lambda_u/\lambda_{cr}$  par  $V_{Ed}/V_{cr}$ , qui doit déjà être évalué pour déterminer si la structure est souple ou rigide, mais elle n'est pas sécuritaire.

Les recherches COST ont montré qu'un critère de résistance à 95 % équivaut en fait à un critère de stabilité moins sévère. La sévérité du critère de stabilité correspondant dépend du paramètre  $X$ , le rapport entre la charge critique de la structure et sa charge plastique. Ce paramètre est en général supérieur à 4. Dans le pire des cas, s'il est égal à 4, la sévérité du critère de stabilité équivalent à un critère de résistance à 95 % est de 75 %.

Les deux derniers critères de classification envisagés ont été déduits d'un critère de déplacement transversal à 90 %, respectivement au premier ordre ou au second ordre. Ils ont été établis grâce à la méthode des rotations. Premièrement, ils sont plus restrictifs que ceux obtenus à partir d'un critère de résistance à 95 %. Deuxièmement, le déplacement transversal d'un portique est proportionnel à sa charge critique. Dès lors, le respect d'un critère de déplacement transversal à 90 % induit toujours le respect d'un critère de résistance à 95 % et celui d'un critère de stabilité à 90 %.

Puis, le critère de classification qui prend en compte les effets du second ordre est très complexe. Lorsque ces effets sont négligés, le critère est beaucoup plus simple, tout en restant très proche de l'autre. Même si les effets du second ordre ne sont pas toujours négligeables lors de l'évaluation du déplacement transversal d'une structure, ils se neutralisent dans le critère de déplacement à 90 % puisqu'il dépend du rapport entre le déplacement transversal d'une structure à assemblages infiniment rigides et le déplacement transversal de la même structure à assemblages de rigidité finie.

Ce dernier critère de classification est finalement considéré comme le plus approprié pour classer les assemblages rigides. Il est simple et il entraîne le respect d'un critère de déplacement transversal au premier ordre à 90 %, celui d'un critère de résistance à 95 % et celui d'un critère de stabilité à 90 %. Étant donné que la stabilité de la structure est assurée pour qu'elle résiste, le multiplicateur critique de la structure est autorisé à varier un peu plus qu'avec les critères de l'Eurocode tant que la résistance n'est pas trop modifiée par l'idéalisation infiniment rigide des assemblages.

La version de ce critère déclinée pour les portiques articulés en pieds est toujours plus restrictive que celle des portiques encastres en pieds. Elle est donc conservée et appliquée en toute sécurité aux assemblages poutre-colonne de structures dont les pieds sont articulés, encastres ou liés de manière semi-rigide à la fondation. Le critère de classification des assemblages retenu s'exprime comme suit :

$$S \geq \frac{54 K_b}{1 + 2\rho} \quad (7-2)$$

Une fois choisi, ce critère de classification est adapté pour classer les assemblages poutre-colonne de structures quelconques.

Par le principe de la structure équivalente, le critère de déplacement à 90 % est établi pour une structure quelconque.

$$\rho_{\acute{e}q} \geq \frac{9\rho_{\acute{e}q}^{\infty}}{2\rho_{\acute{e}q}^{\infty} + 10} \quad (7-3)$$

Les règles de transformation approchées sont utilisées pour exprimer les paramètres  $\rho_{\acute{e}q}$  et  $\rho_{\acute{e}q}^{\infty}$  qui apparaissent dans ce critère car les règles de transformation exactes nécessitent que l'analyse de la structure à assemblages de rigidité finie soit réalisée. Il ne sert alors plus à rien de classer les assemblages pour simplifier l'analyse en les considérant comme infiniment rigides puisqu'elle est déjà effectuée.

Un critère de classification est tiré de ce critère de déplacement et particularisé pour des structures diverses. Les rigidités minimales analytiques des assemblages à partir desquelles le critère de déplacement à 90 % est respecté sont différentes de celles déterminées numériquement. Ces erreurs proviennent de l'approximation liée aux règles de transformation approchées.

D'après les erreurs obtenues, les règles de transformation approchées sont valables uniquement tant que les structures sont régulières. Dans ce cas précis, le critère de classification des assemblages est assez simple.

$$S \geq \frac{54 K_b}{1 + 2\rho_{\acute{e}q}^{\infty}} \quad (7-4)$$

Une autre méthode est envisagée pour développer un critère de classification valable pour classer les assemblages d'une structure irrégulière. Ce critère a été formulé empiriquement en constatant qu'une certaine fonction  $f(\rho_{\acute{e}q}^{\infty})$ , multipliée par un facteur  $Z$ , colle en général assez bien aux rigidités minimales des assemblages rigides déterminées numériquement à partir d'un critère de déplacement à 90 % pour plusieurs structures caractérisées par différentes valeurs du paramètre  $\rho_{\acute{e}q}^{\infty}$ .

$$\frac{1 + 2\rho_{\acute{e}q}^{\infty}}{54} \geq \sum_{j=2i} \frac{a_j}{\bar{S}_j} \quad (7-5)$$

Les coefficients  $a_j$  résultent de la distribution des moments obtenue suite à l'analyse de la structure dans laquelle la rigidité des assemblages voulus rigides est infinie.

$$a_j = \frac{|M_j^{\infty}|}{\sum_j |M_j^{\infty}|} \quad (7-6)$$

Ce critère de classification est intéressant puisqu'il considère qu'il existe une interaction entre les assemblages d'une structure. Par exemple, si certains assemblages sont déjà extrêmement rigides, la rigidité demandée aux autres assemblages est moindre.

Afin de réduire le nombre d'inconnues  $j$  qui interviennent dans ce critère (deux fois le nombre de travées  $i$  de la structure considérée), la rigidité de  $n$  assemblages et/ou le lien mathématique entre les rigidités de  $m$  assemblages doivent être connus, avec  $(n + m) = (j - 1)$ . Cela rend l'utilisation du critère un peu plus compliquée en pratique.

Cependant, cette autre méthode ne donne toujours pas un critère de classification valable pour classer les assemblages d'une structure dont les poutres ou les colonnes varient.

En résumé, selon le degré de raffinement souhaité :

1. Un critère de classification est déterminé spécifiquement pour un ou plusieurs assemblages d'un étage. Il requiert le calcul des coefficients  $a_j$  et la connaissance de la rigidité des autres assemblages ou du lien mathématique qui existe entre elles.
2. Un critère de classification est déterminé pour tous les assemblages d'un étage grâce aux règles de transformation approchées utilisées pour appliquer le principe de la structure équivalente.
3. Un critère de classification est déterminé pour tous les assemblages de la structure. Il s'agit du critère d'étage le plus restrictif.

Si le critère de déplacement transversal à 90 % est vérifié à chaque étage à travers le critère de classification, alors il l'est aussi pour la structure globale.

## 2. PERSPECTIVES

Actuellement, les deux approches envisagées pour étendre le critère de classification à des structures quelconques sont valables uniquement pour des structures régulières. Des recherches supplémentaires mériteraient d'être menées afin de découvrir comment ce critère s'exprime lorsque les poutres ou les colonnes varient, le maillon manquant pour pouvoir généraliser ce critère aux assemblages de structures quelconques.

De plus, ces deux approches ont été validées pour des structures soumises à un chargement horizontal uniquement. Cependant, un chargement vertical symétrique appliqué sur une structure dissymétrique ou un chargement vertical dissymétrique appliqué sur n'importe quelle structure influence aussi le critère de classification des assemblages de la structure. En effet, la présence de ce chargement provoque un déplacement transversal de la structure et le critère de classification de ses assemblages varie en fonction de la combinaison de charges considérée. Cet effet devrait être étudié en profondeur dans le futur. Une piste de recherche serait d'essayer de remplacer le chargement vertical par un chargement horizontal qui induit le même déplacement transversal et de voir comment le critère s'exprime alors. Cette idée pourrait aussi s'appliquer pour traiter la dissymétrie des structures.

Pour finir, il faudrait envisager le fait que des critères plutôt locaux (flèche d'une poutre) sont susceptibles de devenir plus restrictifs que les critères globaux dans certaines conditions.

# Références

- Bijlaard, F., & Steenhuis, C. (1995). Prediction of the influence of connection behaviour on the strength, deformations and stability of frames, by classification of connections.
- Demonceau, J.-F. (2008). *Steel and composite building frames: sway response under conventional loading and development of membrane effects in beams further to an exceptional action*. University of Liège: Unpublished doctoral thesis.
- Gomes, F. (1995). *Proposal for the classification of beam-to-column joints*. University of Coimbra, Department of Civil Engineering. Coimbra: CEN.
- Jaspart, J.-P. (1988). Extending of the Merchant-Rankine Formula for the Assessment of the Ultimate Load of Frames with Semi-rigid Joints. *Journal of Constructional Steel Research*, 283-312.
- Maquoi, R., & Chabrolin, B. (1998). *Frame Design Including Joint Behaviour*. Brussels, Belgium: Commission of the European Communities.
- Maquoi, R., Jaspart, J.-P., Briquet, C., Guisse, S., & Lognard, B. (1994-1995). Rapports semestriels. Dans R. Maquoi, J. Jaspart, C. Briquet, S. Guisse, & B. Lognard, *Recherche COST C1 relative au comportement semi-rigide des liaisons structurelles*. Liège: Convention Région Wallonne - Université de Liège.
- Meijer, H. (1990). *Influence of the rotational stiffness of column-beam connections on the behaviour of braced and unbraced frames (in Dutch)*. Technical University Eindhoven.

# ANNEXE 1 : Charge critique d'une colonne

## MÉTHODE DE L'EUROCODE 3, ANNEXE E

La longueur de flambement  $L_{cr}$  d'une barre comprimée dont les extrémités sont restreintes d'une manière quelconque est la longueur d'une barre qui a la même charge critique de flambement élastique et les mêmes caractéristiques (matériau, section, moment d'inertie,...) mais dont les extrémités sont articulées. Or, le calcul de la charge critique d'une barre bi-articulée correspond au cas de référence de la théorie d'Euler pour lequel les résultats sont connus.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{cr}^2} \quad (0-1)$$

Des formules empiriques existent et expriment le rapport entre la longueur de flambement et la longueur d'épure d'une colonne comprimée en fonction des restreintes aux deux extrémités de la barre pour le mode d'instabilité à nœuds fixes et le mode d'instabilité à nœuds déplaçables.

$$\frac{L_{cr}}{L} = \frac{1 + 0,145(\eta_1 + \eta_2) - 0,265\eta_1\eta_2}{2 - 0,364(\eta_1 + \eta_2) - 0,247\eta_1\eta_2} \quad (0-2)$$

$$\frac{L_{cr}}{L} = \sqrt{\frac{1 - 0,2(\eta_1 + \eta_2) - 0,12\eta_1\eta_2}{1 - 0,8(\eta_1 + \eta_2) + 0,6\eta_1\eta_2}} \quad (0-3)$$

Dans ces expressions, les coefficients de distribution  $\eta_1$  et  $\eta_2$  représentent les restreintes appliquées respectivement à chaque extrémité de la colonne considérée.

$$\eta_1 = \frac{K_c + K_1}{K_c + K_1 + K_{11}^* + K_{12}^*} \quad (0-4)$$

$$\eta_2 = \frac{K_c + K_2}{K_c + K_2 + K_{21}^* + K_{22}^*} \quad (0-5)$$

Où :

- $K_c$  est le coefficient de rigidité de la colonne  $EI_c/L_c$ .
- $K_1$  et  $K_2$  sont les coefficients de rigidité des colonnes adjacentes.
- $K_{11}^*$ ,  $K_{12}^*$ ,  $K_{21}^*$  et  $K_{22}^*$  sont les coefficients de rigidité effective des poutres avec les assemblages.

$$K_{mn}^* = K_{mn} \frac{1}{1 + \frac{4K_{mn}}{S_{j,mn}}} \quad (0-6)$$

- $K_{mn}$  est le coefficient de rigidité effective de la poutre  $mn$  seule, donnée par le Tableau 29 en fonction des conditions de maintien en rotation à son extrémité opposée.
- $S_{j,mn}$  est la rigidité initiale de dimensionnement de l'assemblage qui lie la poutre  $mn$  à la colonne comprimée étudiée.

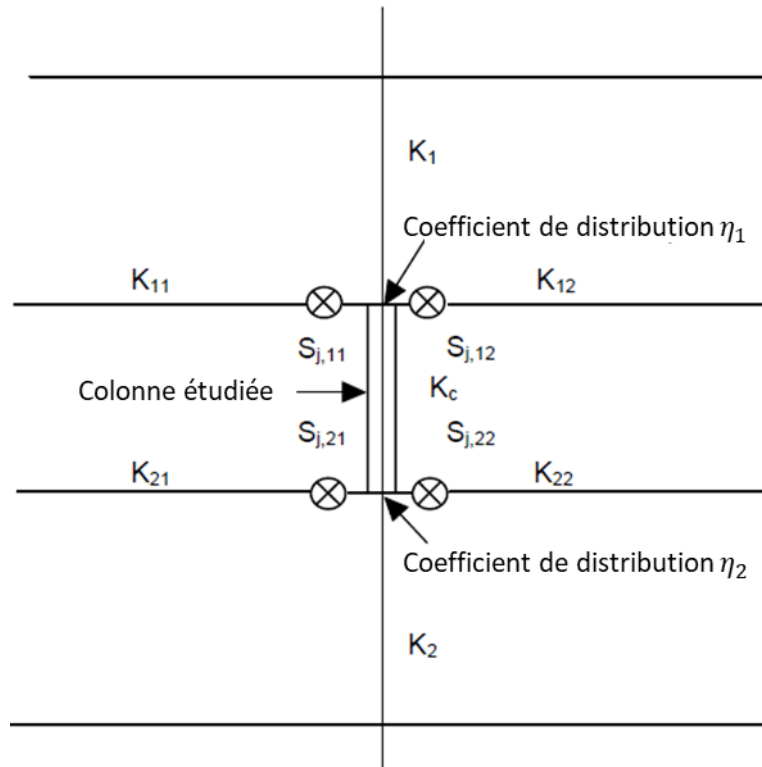


Figure 35 – Définition des paramètres

Si l'extrémité  $i$  de la colonne comprimée est articulée, alors  $\eta_i$  vaut 1 parce qu'il revient à  $K_c/K_c$ . Par contre, si l'extrémité  $i$  de la colonne comprimée est encastree, alors  $\eta_i$  vaut 0 car la restreinte engendree par l'encastrement est similaire au cas où  $K_i \rightarrow \infty$ .

Conditions de maintien en rotation à l'extrémité opposée de la poutre	Rigidité effective $K$ de la poutre (à condition qu'elle reste élastique)
Encastree à l'extrémité opposée	$EI_b/L_b$
Articulée à l'extrémité opposée	$0,75 EI_b/L_b$
Rotation égale à celle de l'extrémité adjacente (double courbure)	$1,5 EI_b/L_b$
Rotation égale et opposée à celle de l'extrémité adjacente (simple courbure)	$0,5 EI_b/L_b$
Cas général, rotation $\theta_a$ à l'extrémité adjacente et $\theta_b$ à l'extrémité opposée	$(1 + 0,5 \theta_b/\theta_a) EI_b/L_b$

Tableau 29 – Coefficients de rigidité effective des poutres



# ANNEXE 2 : Méthode des rotations

## MATRICE DE RIGIDITÉ D'UNE POUTRE DOTÉE D'ASSEMBLAGES SEMI-RIGIDES

(Jaspart, 1988) Les différents termes de la matrice de rigidité en flexion  $\mathbf{K}$  de la poutre (0-7) représentée à la Figure 36 sont calculés ci-dessous. Cette matrice est symétrique en raison de la symétrie des assemblages et de la poutre elle-même. Les coefficients  $k_{ij}$  sont égaux à la réaction au degré de liberté  $i$  créée par un déplacement unitaire au degré de liberté  $j$ .

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (0-7)$$

Les assemblages semi-rigides sont assimilés à des ressorts élastiques de rigidité  $S_{j,ini}$  et les paramètres  $\alpha$  et  $K$  sont définis (0-8) pour être utilisés dans les calculs.

$$\alpha = \frac{2K_b}{S_{j,ini}} \text{ et } K_b = \frac{EI}{L} \quad (0-8)$$

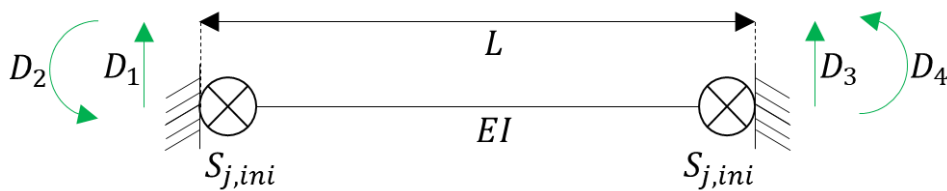
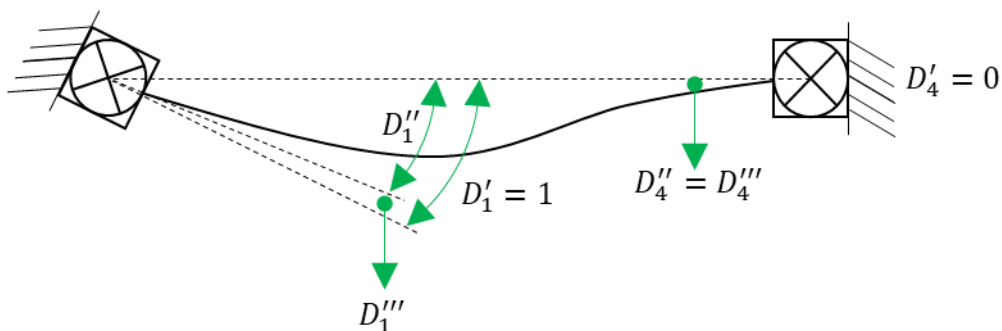


Figure 36 – Poutre avec deux ressorts élastiques aux extrémités

Dans les développements suivants :

- $D_i''$  est dû à la déformation de la poutre
- $D_i'''$  est dû à la déformation du ressort
- $D_i'$  est la déformation due à ces deux contributions

• 
$$k_{22} = k_{44} = 4K_b \left( \frac{1 + 3\alpha/2}{1 + 4\alpha + 3\alpha^2} \right) \quad (0-9)$$



a. Déformation de la poutre

Si  $(-b)$  représente le coefficient de répartition du moment  $k_{22}$  le long de la poutre,

$$M(x) = k_{22} - k_{22} \frac{1+b}{L} x \quad (0-10)$$

$$\begin{cases} v(x) = \iint -\frac{M(x)}{EI} dx \Leftrightarrow v(x) = \frac{k_{22}x}{2EI} (L-x) + \frac{k_{22}(1+b)x}{6EI} \left(\frac{x^2}{L} - L\right) \\ v(0) = 0 \text{ et } v(L) = 0 \end{cases} \quad (0-11)$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{k_{22}}{2EI} (L-2x) + \frac{k_{22}(1+b)}{6EI} \left(\frac{3x^2}{L} - L\right) \quad (0-12)$$

$$D_2'' = \left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=0} = \frac{k_{22}L}{2EI} - \frac{k_{22}(1+b)L}{6EI} \quad (0-13)$$

$$D_4'' = \left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=L} = \frac{k_{22}(1+b)L}{3EI} - \frac{k_{22}L}{2EI} \quad (0-14)$$

b. Déformation du ressort en B

$$M_B = SD_4''' \Leftrightarrow -bk_{22} = S(D_4'' - D_2'') = S\left(\frac{k_{22}(1+b)L}{3EI} - \frac{k_{22}L}{2EI}\right) \quad (0-15)$$

$$b = \frac{1}{2+3\alpha} \quad (0-16)$$

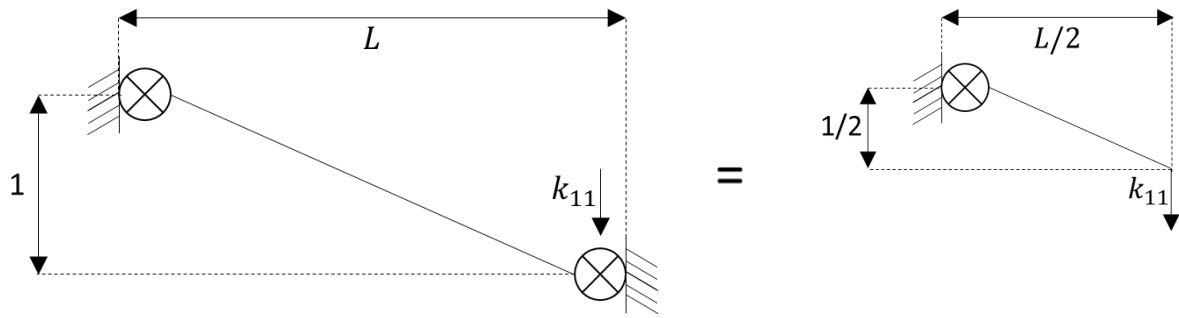
c. Déformation du ressort en A

$$M_A = SD_2''' \Leftrightarrow k_{22} = S(D_2' - D_2'') = S\left(1 - \left(\frac{k_{22}L}{2EI} - \frac{k_{22}(1+b)L}{6EI}\right)\right) \quad (0-17)$$

$$k_{22} = 4K_b \left(\frac{1+3\alpha/2}{1+4\alpha+3\alpha^2}\right) \quad (0-18)$$

- $$k_{24} = k_{42} = 2K_b \left(\frac{1}{1+4\alpha+3\alpha^2}\right) = bk_{22} \quad (0-19)$$

- $$k_{11} = k_{33} = \frac{12K_b}{L^2} \left(\frac{1}{1+3\alpha}\right) = -k_{13} = -k_{31} \quad (0-20)$$



a. Déplacement de la poutre en  $x = L/2$  à cause de sa propre déformation

$$D_3'' = \frac{FL_b^3}{3EI} = \frac{k_{11}L^3}{24EI} \quad (0-21)$$

b. Déplacement de la poutre en  $x = L/2$  à cause de la rotation du ressort

$$M_{x=0} = SD_2 \Leftrightarrow -k_{11} \frac{L}{2} = S(D_2' - D_2'') = -SD_2'' \quad (0-22)$$

$$D_2'' = \frac{k_{11}L}{2S} \quad (0-23)$$

$$D_3''' = \frac{k_{11}L}{2S} \cdot \frac{L}{2} = \frac{k_{11}L^2}{4S} \quad (0-24)$$

c. Déplacement total connu, équation à une inconnue  $k_{11}$

$$D_3 = D_3'' + D_3''' = \frac{1}{2} \quad (0-25)$$

$$k_{11} = \frac{12K_b}{L^2} \left( \frac{1}{1+3\alpha} \right) \quad (0-26)$$

$$\bullet \quad k_{12} = k_{21} = k_{14} = k_{41} = \frac{6K_b}{L} \left( \frac{1}{1+3\alpha} \right) = -k_{23} = -k_{32} = -k_{34} = -k_{43} \quad (0-27)$$

$$k_{12} = k_{11} \cdot \frac{L}{2}$$

$$K = \frac{2K_b}{L^2} \begin{bmatrix} 6f(\alpha) & 3Lf(\alpha) & -6f(\alpha) & 3Lf(\alpha) \\ 3Lf(\alpha) & 2L^2 f_w(\alpha) & -3Lf(\alpha) & L^2 f_{bw}(\alpha) \\ -6f(\alpha) & -3Lf(\alpha) & 6f(\alpha) & -3Lf(\alpha) \\ 3Lf(\alpha) & L^2 f_{bw}(\alpha) & -3Lf(\alpha) & 2L^2 f_w(\alpha) \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} f(\alpha) = \frac{1}{1+3\alpha} \\ f_w(\alpha) = \frac{1+3\alpha/2}{1+4\alpha+3\alpha^2} \\ f_{bw}(\alpha) = \frac{1}{1+4\alpha+3\alpha^2} \end{cases}$$

## ANNEXE 3 : Méthode « Z », structure irrégulière

Colonnes différentes (Figure 22)				Poutres différentes (Figure 24)			
$K_{c,1}/K_{c,2}$	$K_b$ [kNm]	$K_{c,1}$ [kNm]	$K_{c,2}$ [kNm]	$K_{b,1}/K_{b,2}$	$K_{b,1}$ [kNm]	$K_{b,2}$ [kNm]	$K_c$ [kNm]
0,5	30282	2658	5255	2	30282	14537,25	2658
	30282	5255	11746		30282	14537,25	5255
	30282	11746	26917		30282	14537,25	11746
	30282	26917	50027		30282	14537,25	26917
	20188	2658	5255		20188	9691,5	2658
	20188	5255	11746		20188	9691,5	5255
	20188	11746	26917		20188	9691,5	11746
	20188	26917	50027		20188	9691,5	26917
	37520	11746	26917		37520	19124	11746
	37520	5255	11746		37520	19124	5255

Tableau 30 – Rigidités flexionnelles des poutres et des colonnes des structures simulées

	Colonnes différentes		Poutres différentes			
	$a_1 = a_4$	$a_2 = a_3$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
Méthode « Z »	0,43	0,07	0,33	0,13	0,18	0,37
$\frac{ M_j }{\sum_j  M_j }$	0,38	0,12	0,33	0,20	0,17	0,30
	0,36	0,14	0,33	0,23	0,17	0,27
	0,35	0,15	0,33	0,26	0,17	0,24
	0,32	0,18	0,33	0,29	0,17	0,21
	0,38	0,12	0,33	0,22	0,17	0,28
	0,35	0,15	0,34	0,25	0,17	0,25
	0,34	0,16	0,34	0,28	0,16	0,22
	0,31	0,19	0,34	0,30	0,16	0,20
	0,36	0,14	0,33	0,25	0,17	0,25
	0,37	0,13	0,33	0,22	0,17	0,28

Tableau 31 – Coefficients de répartition obtenus par la méthode « Z » et par la distribution des moments dans la structure à assemblages infiniment rigides