

Codes identifiants de graphes

Auteur : Vandermeer, Marion

Promoteur(s) : Rigo, Michel

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité spécialisée en statistique

Année académique : 2017-2018

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/5008>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Codes identifiants de graphes

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de master en sciences
mathématiques

Finalité spécialisée en statistiques

Année académique 2017-2018

Présenté par : Marion VANDERMEER

Promoteur : Michel RIGO

Remerciements

"Il y a plus de courage que de talent dans la plupart des réussites." F.Leclerc.

Parce qu'on ne peut pas parcourir un si beau et grand chapitre de sa vie seul...

Je tiens à remercier :

- Elise VANDOMME pour m'avoir permis de découvrir ce sujet qui me passionne depuis maintenant presque trois ans et surtout pour son aide si précieuse lors de mes quelques blocages, ses remarques, ses conseils et son dévouement de dernière minute ;
- Mon promoteur, Michel RIGO, pour tout le temps accordé à la correction/vérification de ce mémoire ainsi qu'à nos différents rendez-vous (parfois causés par mon stress), pour m'avoir accompagnée, conseillée et corrigée durant ces deux années... Et surtout pour avoir pris la peine de se prendre la tête autant que moi à certains moments ;
- Anne LACROIX, pour sa relecture pointilleuse et attentive, pour son temps ainsi que pour ses nombreux conseils on ne peut plus précieux ;
- Mes professeurs, leurs assistants ainsi que toutes les personnes faisant partie de cette belle et grande "famille du B37" : merci pour votre disponibilité, vos conseils, votre humanité et votre compréhension. Merci aussi de m'avoir permis de me dépasser, de réfléchir, de douter mais surtout de grandir tout au long de ces années. J'en sors grandie, fière et heureuse d'avoir pu faire partie de cette "famille des maths". Enfin, merci de m'avoir transmis votre amour et votre passion des mathématiques, c'est probablement grâce à elle que je serai contente de me lever chaque matin durant de nombreuses années encore.
- Mes "copines de math" pour les fous-rires, les ragots, les voyages, la solidarité, l'entraide (jusqu'au bout du bout!) et le girl-power qui nous caractérisent. Les cours ont été bien moins difficiles à suivre que ce qu'ils ne sont réellement grâce à vous : vous avez rendu mes études encore plus amusantes et passionnantes. C'est ça aussi (et même surtout) les maths ;
- Mes "copines de toujours", ou plutôt mes **AMIES**, pour leur soutien, leur présence sans faille dans les bons comme dans les mauvais moments, nos études collectives, leur motivation, leur folie et tant d'autres choses depuis toujours et ... POUR TOUJOURS. Je me demande chaque jour ce que je serais sans vous, vous êtes ma deuxième famille ;

- Ma famille, en particulier mes grands-parents, qui d'ici ou d'ailleurs, ont toujours été fiers de moi, quoiqu'il arrive, et qui, surtout, ont toujours cru en moi : vous avez été ma principale source de motivation ;
- Enfin, sans aucun doute le meilleur pour la fin, mon papa et ma maman pour TOUT : leur soutien lors de mes crises de larmes, leur motivation lorsque je baissais les bras, leur foi en moi chaque heure, chaque minute, chaque seconde depuis bientôt 24 ans, leur patience (surtout) lorsque je suis devenue (un peu) infernale en période d'examens (et pas que), leur écoute, leurs conseils, leurs encouragements, leur stress, les larmes de Papa (qui ne sont probablement pas les dernières), la relecture de Maman (désolée pour les maux de tête...), leur humour et leur respect de chacun de mes choix. Pour tout ça et surtout pour tout le reste : **MERCI.**

Table des matières

Introduction	1
1 Quelques définitions	7
2 Produits de graphes	11
2.1 Produit direct de deux cliques	11
2.2 Produit cartésien	49
2.2.1 Cliques de même taille	50
2.2.2 Cliques de tailles différentes	64
3 Généralités sur les codes identifiants	75
3.1 Des codes identifiants... Qui, quand, pourquoi?	75
3.2 Quelques variantes	76
3.2.1 Codes r -identifiants et $(r, \leq l)$ -identifiants	76
3.2.2 Codes localisateurs-dominateurs	76
3.2.3 Codes arêtes-identifiants	77
3.3 Un peu de complexité	77
3.4 Bornes	78
3.5 A quoi ça sert?	79
3.5.1 Modélisation d'un problème de localisation par des réseaux de capteurs	79
3.5.2 Problème de recherche binaire : les jeux de Rényi	79
3.5.3 Et encore...	80

Introduction

Au début de l'année académique 2015-2016, dans le cadre du *Projet* de bloc 3, j'ai eu l'occasion de découvrir les *codes identifiants* en travaillant sur un article ([12]) de Sylvain GRAVIER, Julien MONCEL et Ahmed SEMRI. Ce sujet m'a directement passionnée, à tel point que j'ai décidé d'en faire le sujet de mon mémoire dès l'année suivante. N'en ayant jamais assez des codes identifiants, je me suis de plus concentrée sur un article ([9]) très récent de Valentin GLEDEL et Aline PARREAU dans le cadre du *Projet de combinatoire* lors de cette année académique 2017-2018. Lors de ce second projet, j'ai étudié un aspect plus géométrique des codes identifiants que ce qui sera présenté dans la suite de ce travail. Mais que sont les *codes identifiants*? A quoi peuvent-ils bien servir? Tentons tout d'abord de répondre à cette question par un exemple concret.

Plaçons-nous quelques instants dans la peau de gardiens de musée : nous aimerions équiper notre musée de détecteurs de fumée de manière à ce que si un incendie se déclenche, nous puissions le détecter et le localiser directement. Par ailleurs, la sensibilité des capteurs est telle qu'ils vont détecter un incendie de façon identique que ce dernier se produise dans la pièce où le détecteur se trouve ou dans une pièce voisine.

Un plan de notre musée se trouve à la Figure 1. Partons du principe que deux pièces sont *voisines* s'il existe une porte entre les deux. Ainsi, nous pouvons dès lors représenter le musée en dessinant les différents accès existants entre les pièces (Figure 2).

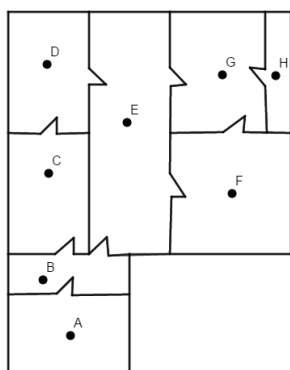


FIGURE 1 – Musée.

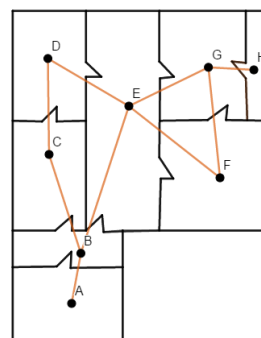


FIGURE 2 – Musée avec liens entre les pièces.

La problème se résume alors à la question suivante : où doit-on placer nos détecteurs pour pouvoir localiser de manière unique la pièce dans laquelle s'est déclaré l'incendie le jour où un(des) détecteur(s) se déclenche(nt) ?

La particularité des détecteurs de fumée dont nous disposons est qu'ils sont capables de détecter la fumée dans la pièce dans laquelle ils se trouvent ainsi que dans ses pièces voisines (i.e. les pièces par lesquelles nous pouvons nous rendre en empruntant une porte). Par exemple, un détecteur de fumée placé dans la pièce *E* détectera un incendie qui se déclare dans les pièces *B*, *D*, *E*, *F* ou *G* mais pas dans la pièce *C* (ni dans la pièce *A* ni dans la pièce *H* d'ailleurs non plus) qui n'est pas une pièce voisine de la pièce *E* au sens *voisin* que nous venons de définir ci-dessus (bien que ces deux pièces soient côte à côte sur le plan). Par ailleurs, toutes les pièces de notre musée sont équipées d'un dispositif permettant à un détecteur de fumée d'être installé : nous n'avons donc aucune restriction quant à l'installation pratique des détecteurs dans telle ou telle pièce. Ainsi, vu notre exemple ci-dessus, si un détecteur est placé dans la pièce *E*, nous pouvons dire que les pièces *B*, *D*, *E*, *F* et *G* sont *couvertes* par ce détecteur : en cas d'incendie dans l'une de ces pièces, le détecteur de fumée placé dans la pièce *E* sera capable de le détecter et ainsi de signaler le départ d'incendie dans notre musée. La Figure 3 ci-dessous représente cette situation.

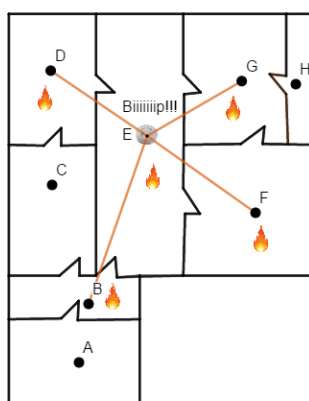


FIGURE 3 – Représentation de la situation.

C'est pourquoi, nous devons placer suffisamment de détecteurs dans les différentes pièces de notre musée de manière à couvrir toutes les pièces. Si ce n'est pas le cas, un incendie risque de ne pas pouvoir être signalé. Dans notre cas, placer les détecteurs dans les pièces *B*, *E* et *H* suffit : de cette façon, toutes les autres pièces seront couvertes par au moins l'un de ces trois détecteurs en cas d'incendie. En voici une représentation à la Figure 4.

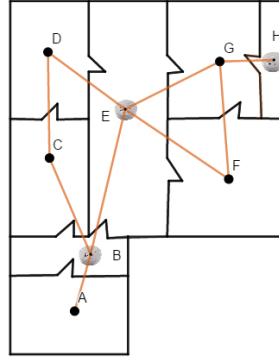


FIGURE 4 – Représentation de la situation avec trois détecteurs.

Par ailleurs, nous pouvons voir notre musée comme un graphe dont les sommets sont les différentes pièces et les arêtes sont les liens entre ces pièces (i.e. s'il existe ou non une porte entre deux pièces). Nous pouvons dès lors dire que l'ensemble des sommets $\{B, E, H\}$ forme un ensemble *couvrant* (ou *dominant*) du graphe associé à notre musée : tous les sommets du graphe sont voisins d'au moins un des sommets de l'ensemble $\{B, E, H\}$. Cette propriété de couverture (ou domination) est nécessaire à la résolution de notre problème de départ mais ne suffit pas ! En effet, outre le fait de vouloir être alerté par le déclenchement d'un incendie dans notre musée, nous espérons également pouvoir localiser directement la pièce où a lieu l'incendie. Pour ce faire, nous avons besoin de connaître précisément les détecteurs qui se sont déclenchés : ceux-ci doivent donc en plus être disposés de manière à pouvoir localiser chaque incendie de manière unique. Dans notre cas, imaginons ne placer que trois détecteurs dans les pièces B , E et H et qu'uniquement le détecteur de la pièce B sonne. Deux configurations s'offrent à nous : le feu peut provenir soit de la pièce A , soit de la pièce C .

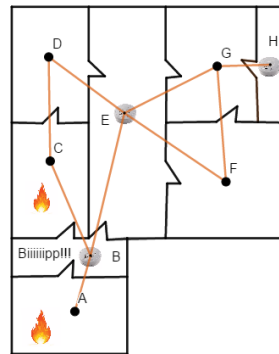


FIGURE 5 – Si uniquement le détecteur B sonne.

En effet, si le feu provenait d'une autre pièce que de la pièce A ou C , un (ou des) autre(s) détecteur(s) se serai(en)t également déclenché(s). Nous sommes dès lors incapables d'identifier la pièce d'où provient l'incendie : *y a-t-il le feu dans la pièce A ou dans la pièce C ?* En bons gardiens de musée que nous sommes, nous n'avons pas le temps de tergiverser si une telle situation se présente à nous. Il vaut donc mieux prévenir en ajoutant un détecteur supplémentaire dans notre musée : celui-ci nous permettrait alors d'obtenir directement l'information sur la pièce dans laquelle se situe l'incendie si celui-ci vient à se déclarer. Plaçons donc un quatrième détecteur dans la pièce C . Dès lors, nous pourrions localiser un incendie se déclenchant dans n'importe quelle pièce de notre musée grâce à la manière dont nous avons placé nos quatre détecteurs de fumée. En effet, le tableau suivant parcourt les différents cas d'incendies possibles ainsi que les détecteurs qui se déclenchent. Nous pouvons remarquer que pour chaque pièce ce sont des combinaisons différentes de détecteurs qui se déclenchent. Par exemple, si uniquement les détecteurs des pièces C et E se déclenchent, nous savons directement que l'incendie se situe dans la pièce D .

Pièce dans laquelle se déclare l'incendie	Détecteur(s) déclenché(s)
A	B
B	B, C, E
C	B, C
D	C, E
E	B, E
F	E
G	E, H
H	H

Il en va de même avec n'importe quelle pièce : nous pourrions dès lors toujours localiser l'incendie de notre musée ! Ainsi, l'ensemble des détecteurs placés dans les pièces B, C, E et H *sépare* chaque pièce de notre musée. Nous pouvons dès lors dire que notre ensemble de sommets $\{B, C, E, H\}$ du graphe associé à notre musée possède la propriété de *séparation* : deux sommets quelconques du graphe ne sont jamais couverts par le même ensemble de sommets issus de l'ensemble $\{B, C, E, H\}$. Finalement, l'ensemble $\{B, C, E, H\}$ est un ensemble *dominant* et *séparant* du graphe associé à notre musée. Nous appelons ces ensembles dominants et séparants d'un graphe des *codes identifiants* d'un graphe. Ainsi, pour pouvoir localiser de manière unique un incendie dans notre musée, il "suffit" de construire un code identifiant du graphe associé au musée.

Dans ce travail, nous nous intéressons à des musées dont les pièces ont une configuration particulière. En effet, le prix d'un détecteur de fumée étant élevé, nous tenterons de déterminer le nombre minimum de détecteurs à placer dans un musée suivant le nombre de pièces qu'il contient c'est-à-dire la taille minimale d'un code identifiant en fonction du nombre de sommets du graphe considéré.

Le sujet principal de ce travail est l'étude des codes identifiants. Ceux-ci ont été introduits en 1998 par KARPOVSKY, CHAKRABARTY et LEVITIN ([2]) dans le but de modéliser un problème d'identification de processeurs défectueux dans des réseaux multiprocesseurs. Nous en reparlerons plus en détails dans le chapitre 3. Ce travail s'articule essentiellement autour de trois articles discutant de la taille minimale d'un code identifiant d'un graphe et plus précisément de produits (cartésien ou direct) de cliques ([18], [12] et [10]).

Nous pouvons vite nous rendre compte que ce problème est un problème dit *difficile* au sens de la complexité : c'est pourquoi, après avoir introduit les définitions nécessaires dans le chapitre 1, nous ne considérons, dans le chapitre 2, que des graphes à configurations particulières. Plus spécifiquement, nous nous concentrons sur des graphes qui sont le résultat de produits de graphes, voire même de cliques, i.e. un ensemble de sommets deux à deux adjacents.

D'une part, nous considérons le produit direct de cliques, i.e. il existe une arête entre deux sommets s'ils ne sont ni sur la même ligne, ni sur la même colonne. Dans ce cas, en fonction des tailles m et n des cliques considérées, le cardinal minimum d'un code identifiant du produit direct de ces cliques est situé entre $\lfloor \frac{2m+2n}{3} \rfloor$ et $\lceil \frac{2m+2n}{3} \rceil$. Nous considérons également les cas particuliers. D'autre part, nous nous intéressons à un deuxième produit de cliques : le produit cartésien, i.e. il existe une arête entre deux sommets s'ils sont situés sur la même ligne ou sur la même colonne. Pour celui-ci, nous distinguons deux cas : le produit cartésien de cliques de même taille et le produit cartésien de cliques de tailles différentes. Dans le premier cas, nous démontrons que le cardinal d'un code identifiant d'un tel graphe vaut $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ lorsque les cliques sont de taille n . Dans le deuxième cas, nous montrons que le cardinal d'un code identifiant minimum de ce graphe vaut $\max\{m + \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor, 2m - n\}$ pour des cliques de tailles m et n . Enfin, dans le chapitre 3, nous présentons quelques généralités sur les codes identifiants : leur origine, quelques variantes et applications... Le problème des codes identifiants ayant été largement étudié dans la littérature (et étant encore étudié à l'heure actuelle), le but de ce troisième et dernier chapitre est de survoler et d'exposer une bonne partie des recherches effectuées sur le sujet jusqu'à présent afin de clore ce travail. Nous parlons également de la complexité de ce problème. En effet, ici plus haut, nous avons avancé qu'il était *difficile* de trouver le nombre minimum de détecteurs à placer dans un musée quelconque. Nous en reparlons en détails dans le chapitre 3.

Chapitre 1

Quelques définitions

Afin de pouvoir parvenir à la définition d'un *code identifiant* mentionné ci-dessus, plusieurs notions sont à définir ou à rappeler.

Tout d'abord, commençons par effectuer quelques rappels des principales notions de théorie des graphes.

Soient V un ensemble (fini ou infini) et E une partie de $V \times V$ (i.e. une relation binaire sur V). Le *graphe* $G = (V, E)$ est la donnée du couple (V, E) : les éléments de V sont appelés les *sommets* ou *noeuds* de G tandis que les éléments de E sont appelés les *arcs* ou *arêtes* de G . Si V est un ensemble fini, on parlera alors de *graphe fini*. Tous les graphes considérés dans la suite de ce travail sont non orientés i.e. E est une relation symétrique sur V .

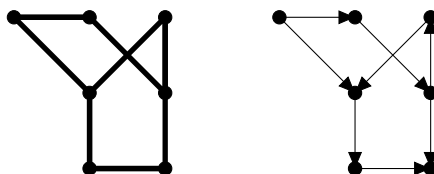


FIGURE 1.1 – Graphes non-orienté et orienté.

Soient $G = (V, E)$, un graphe et $a = v_i v_j$ une de ses arêtes. On dit que a est *incident* aux sommets v_i et v_j . Le nombre d'arêtes incidentes à un sommet v_i est appelé le *degré* de v_i , noté $d(v_i)$. Par ailleurs, un *chemin* de longueur $k \geq 1$ est une suite ordonnée de k arêtes incidentes (e_1, \dots, e_k) . On dit que le chemin (e_1, \dots, e_k) *pass*e par les arêtes e_1, \dots, e_k . Un graphe est *connexe* si pour toute paire de sommets il existe un chemin les joignant.

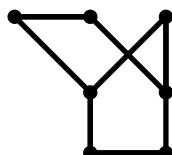


FIGURE 1.2 – Graphe connexe.

Un sommet u est *voisin* d'un sommet v s'il existe une arête entre u et v . On dira aussi que u et v sont *adjacents*. L'ensemble de tous les voisins d'un sommet u est son *voisinage*, noté $N(u)$. Le *degré* d'un sommet u est aussi égal au cardinal de $N(u)$. L'ensemble $N[u]$ désigne le *voisinage fermé* de u , c'est-à-dire $N(u) \cup \{u\}$.

Considérons un graphe $G = (V, E)$ où V désigne l'ensemble des sommets de G (également noté $V(G)$) et E désigne l'ensemble des arêtes de G (également noté $E(G)$).

Après ces quelques rappels de notions de théorie des graphes, nous pouvons dès lors passer aux définitions qui nous seront utiles par la suite afin de parvenir à la définition du concept de *code identifiant*.

Définition 1.1. Un sommet $v \in N[u]$ est dit *couvert* (ou *dominé*) par le sommet u .

Définition 1.2. Un sous-ensemble de sommets $D \subseteq V$ est un *code couvrant* (ou *dominant*) du graphe G si tout sommet de V est couvert par au moins un sommet de D .

Exemple 1.1.

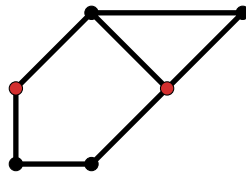


FIGURE 1.3 – Code couvrant.

Le sous-ensemble de sommets rouges du graphe de la Figure 1.3 est un code couvrant (ou dominant) du graphe car tout sommet du graphe appartient au voisinage fermé d'au moins un sommet de ce sous-ensemble de sommets rouges.

Définition 1.3. Deux sommets u et v sont dits *séparés par* w si celui-ci couvre l'un des sommets u ou v mais pas l'autre. En d'autres termes, u et v sont séparés par w si w appartient à $N[u] \triangle N[v]$, la différence symétrique de $N[u]$ et $N[v]$.

Définition 1.4. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un *code séparant* du graphe G si deux sommets distincts de V sont séparés par au moins un sommet de S .

Exemple 1.2.

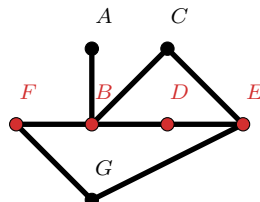


FIGURE 1.4 – Code séparant.

Le sous-ensemble de sommets rouges, notons le R , du graphe de la Figure 1.4 est un code séparant de ce graphe. En effet, lorsqu'on regarde le voisinage fermé de chaque sommet intersecté avec ce sous-ensemble de sommets rouges, il vient :

- pour le sommet A : $N[A] \cap R = \{B\}$,
- pour le sommet B : $N[B] \cap R = \{B, D, F\}$,
- pour le sommet C : $N[C] \cap R = \{B, E\}$,
- pour le sommet D : $N[D] \cap R = \{B, D, E\}$,
- pour le sommet E : $N[E] \cap R = \{D, E\}$,
- pour le sommet F : $N[F] \cap R = \{B, F\}$,
- pour le sommet G : $N[G] \cap R = \{E, F\}$.

Ainsi, il n'existe pas deux sommets qui ont le même voisinage fermé intersecté avec le sous-ensemble choisi. Ce sous-ensemble est donc un code séparant.

Définition 1.5. Un sous-ensemble $C \subseteq V$, qui est à la fois un code couvrant et un code séparant du graphe G , est appelé *code identifiant* de G . Tout sommet de C est appelé *mot code*.

Notation 1.1. Pour plus de facilités, nous noterons $I(x) = N[x] \cap C$, l'ensemble des éléments du code qui sont dans le voisinage fermé d'un sommet x .

Notation 1.2. Le cardinal minimum d'un code identifiant de G est noté $\gamma^{ID}(G)$.

Exemple 1.3. L'ensemble $\{A, D, E, F\}$ est un code identifiant du graphe donné dans la Figure 1.5.

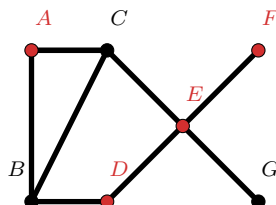


FIGURE 1.5 – Exemple de code identifiant.

En effet, d'une part, cet ensemble est dominant car chaque sommet du graphe est couvert par au moins un sommet de cet ensemble, par exemple :

- les sommets A, B, C sont couverts par le sommet A ,
- le sommet D se couvre lui-même, tout comme le sommet E ,
- les sommets F et G sont couverts par le sommet E .

Il s'agit donc bien d'un ensemble couvrant (ou dominant).

D'autre part, l'ensemble $R = \{A, D, E, F\}$ est également un ensemble séparant. En effet, lorsqu'on regarde le voisinage fermé de chaque sommet intersecté avec ce sous-ensemble de sommets rouges, il vient :

- pour le sommet A : $I[A] = N[A] \cap R = \{A\}$,
- pour le sommet B : $I[B] = N[B] \cap R = \{A, D\}$,
- pour le sommet C : $I[C] = N[C] \cap R = \{A, E\}$,
- pour le sommet D : $I[D] = N[D] \cap R = \{D, E\}$,
- pour le sommet E : $I[E] = N[E] \cap R = \{D, E, F\}$,
- pour le sommet F : $I[F] = N[F] \cap R = \{E, F\}$,
- pour le sommet G : $I[G] = N[G] \cap R = \{E\}$.

Ainsi, il n'existe pas deux sommets qui ont le même voisinage fermé intersecté avec le sous-ensemble choisi. Ce sous-ensemble est donc un code séparant.

Finalement, l'ensemble $\{A, D, E, F\}$ est un code dominant et séparant, il s'agit donc bien d'un code identifiant du graphe.

Définition 1.6. Une *clique* est un ensemble de sommets 2 à 2 adjacents. Il s'agit d'un sous-graphe complet. Une clique à n sommets est notée K_n .

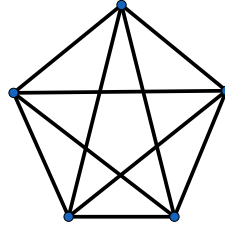


FIGURE 1.6 – K_5 .

Définition 1.7. Deux sommets ayant le même voisinage fermé sont appelés *jumeaux*.

Remarque 1.1. Tout graphe possédant des sommets jumeaux ne possède pas de code identifiant.

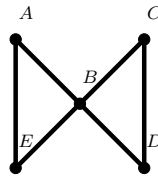


FIGURE 1.7 – Sommets jumeaux.

Dans la Figure 1.7, les sommets A et E sont jumeaux. En effet, on a $N[A] = \{A, B, E\} = N[E]$. Ainsi, quel que soit l'ensemble de départ choisi, nous ne pourrions jamais trouver un ensemble identifiant pour ce graphe : les sommets A et E auront toujours le même voisinage fermé intersecté avec l'ensemble choisi. Il ne s'agira donc jamais d'un ensemble séparant (et donc pas identifiant).

Nous pouvons également noter que, dans l'exemple ci-dessus, les sommets C et D sont aussi des sommets jumeaux.

Chapitre 2

Produits de graphes

Tout au long de ce deuxième chapitre, nous allons chercher à déterminer le cardinal minimum d'un code identifiant de certaines familles de graphes. En effet, comme discuté dans l'introduction, le nombre minimum de détecteurs de fumée nécessaires pour être certains de toujours pouvoir localiser un incendie dans un musée de manière unique dépend du nombre de pièces de ce musée et surtout de la façon dont elles sont agencées les unes par rapport aux autres (i.e. des accès qui les relient). Ainsi, nous obtiendrons un graphe différent d'un musée à un autre et il ne sera pas toujours aisé de déterminer le nombre de détecteurs que nous devons acheter pour équiper notre musée. Nous devons en fait trouver le cardinal minimum d'un code identifiant du graphe associé au musée. Il s'agit d'un problème *difficile*, nous en reparlerons plus tard, dans la Section 3.3.

Cependant, dans certains cas, il est plus aisé de déterminer le cardinal minimum d'un code identifiant d'un graphe. Dans ce chapitre, nous considérons des musées dont les pièces sont dans des configurations particulières : le graphe du musée est en fait un produit de graphes. Nous regardons deux produits de graphes différents, le produit cartésien et le produit direct, et nous les appliquons aux cliques pour tenter de déterminer le cardinal minimum d'un code identifiant d'un tel graphe.

Par la suite, nous tentons de généraliser ces résultats à d'autres graphes ou, du moins, de trouver des bornes pour le cardinal minimum d'un code identifiant d'un graphe quelconque.

2.1 Produit direct de deux cliques

Le premier produit de graphes considéré est le produit direct, défini de la manière suivante :

Définition 2.1. Soient deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$. Le *produit direct* de G_1 et G_2 , noté $G_1 \times G_2$, est le graphe dont l'ensemble des sommets est le produit cartésien $V_1 \times V_2$ et dont l'ensemble des arêtes est $E(G_1 \times G_2) = \{(u_1, u_2)(v_1, v_2) | u_1v_1 \in E_1 \text{ et } u_2v_2 \in E_2\}$.

Dans cette partie, nous déterminons le cardinal minimum d'un code identifiant du produit direct de deux cliques. Ceci a été introduit et démontré en 2014 par D. RALL et K. WASH ([18]). Pour ce faire, introduisons d'abord quelques définitions et propriétés.

Notation 2.1. L'ensemble des sommets du graphe complet K_n (i.e. la clique) à n sommets est noté $\{1, \dots, n\}$.

Notation 2.2. Par ailleurs, nous numérotions les sommets de nos graphes comme dans une matrice : nous donnons d'abord le numéro de la ligne dans laquelle il se trouve et ensuite, le numéro de la colonne. Nous garderons cette convention tout au long de ce travail.

Exemple 2.1. Ci-dessous, nous représentons le produit direct $K_4 \times K_3$. Ce graphe est ainsi composé de 4 lignes et de 3 colonnes. Cependant, pour une question de visualisation, toutes les arêtes de ce graphe ne sont pas représentées.

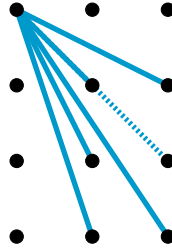


FIGURE 2.1 – $K_4 \times K_3$

Dans la Figure 2.1, nous avons uniquement représenté les arêtes incidentes au sommet $(1,1)$ (i.e. celui situé sur la première ligne et la première colonne). Ainsi, nous pouvons remarquer que, par définition du produit direct, un sommet est voisin d'un autre s'ils ne sont pas situés sur la même ligne, ni sur la même colonne.

Définition 2.2. Dans $K_m \times K_n$, la colonne C_j est déterminée par

$$C_j = \{(i, j) | i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

La ligne L_i est donnée par

$$L_i = \{(i, j) | j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Dès lors, le graphe $K_m \times K_n$ comportera toujours m lignes et n colonnes.

Notation 2.3. Soit C un code identifiant d'un graphe $G = K_m \times K_n$. Notons $E_c(C)$ (resp. $E_l(C)$) l'ensemble de toutes les colonnes (resp. les lignes) de G qui ont une intersection non vide avec C . Le cardinal de $E_c(C)$ est noté $cs(C)$ tandis que le cardinal de $E_l(C)$ est noté $ls(C)$.

Définition 2.3. Un sommet $v = (i, j)$ de G est *colonne-isolé* dans C si $C \cap C_j = \{v\}$. Il s'agit donc du seul élément du code sur sa colonne. Un sommet $v = (i, j)$ de G est *ligne-isolé* dans C si $C \cap L_i = \{v\}$. De même, il s'agit du seul élément du code sur sa ligne. Si v est à la fois ligne-isolé et colonne-isolé, on dit que v est *isolé* dans C .

Dans cette section, plusieurs propositions et théorèmes sont introduits et démontrés afin de parcourir les différentes configurations possibles du produit direct de deux cliques. Pour ce faire, nous introduisons plusieurs résultats, notations et définitions au fur et à mesure. Nous incitons le lecteur à ne pas hésiter à relire ces notations et définitions régulièrement afin d'être plus à l'aise dans la compréhension des démonstrations plus techniques.

Lemme 2.1. Si C est un code identifiant de $K_m \times K_n$, alors on a $cs(C) \geq n - 1$ et $ls(C) \geq m - 1$. En particulier, $|C| \geq m - 1$.

Démonstration. Montrons le résultat pour les lignes.

On cherche à montrer que $ls(C) \geq m - 1$, c'est-à-dire montrer qu'il y a au moins $m - 1$ lignes contenant un élément du code. Procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe $r \neq s$ tels que

$$C \cap L_r = \emptyset = C \cap L_s,$$

c'est-à-dire deux lignes sans élément du code (on aurait alors $ls(C) \leq m - 2$).

Les lignes L_r et L_s sont donc des lignes ne contenant pas d'élément du code.

Alors, il vient

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, I[(r, i)] = C \setminus C_i = I[(s, i)].$$

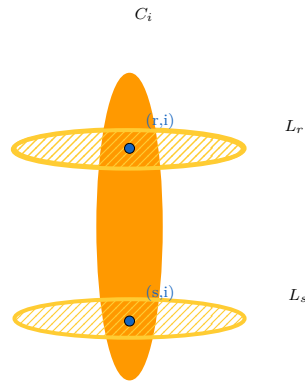


FIGURE 2.2 – $I[(r, i)] = I[(s, i)]$.

En effet, comme illustré à la Figure 2.2, il n'y a pas d'élément du code dans L_r ni dans L_s (i.e. les parties hachurées jaunes) et par définition du produit direct, (r, i) a ses sommets adjacents partout sauf dans la même ligne et la même colonne que lui, c'est-à-dire la ligne L_r et la colonne C_i (en orange). Ainsi, tous les éléments du code qui sont dans le voisinage

de (r, i) sont dans une autre ligne que la ligne L_r et une autre colonne que la colonne C_i . Or, la ligne L_s n'a pas d'élément du code. Par le même raisonnement sur (s, i) , on obtient :

$$I[(r, i)] = I[(s, i)].$$

Ceci mène à une contradiction car C est un code identifiant, il est donc en particulier séparant.

Donc C a au plus une ligne sans élément du code, c'est-à-dire $ls(C) \geq m - 1$.

Par un raisonnement analogue, on prouve que C a au plus une colonne sans élément du code : $cs(C) \geq n - 1$.

Ainsi, comme on a au moins $m - 1$ lignes contenant des éléments du code, il y a au moins $m - 1$ éléments dans le code. Dès lors, on obtient : $|C| \geq m - 1$. \square

Si on considère $N[x]$, le résultat suivant découle du lemme précédent.

Lemme 2.2. Soit $C \subseteq V(K_m \times K_n)$ un code identifiant de $K_m \times K_n$ et soit $x = (r, i) \in C$. Alors C sépare x de tout $y \in (L_r \cup C_i) \setminus \{x\}$.

Démonstration. En effet, si on considère le voisinage fermé de x , à savoir $N[x]$, cet ensemble contient le sommet x ainsi que tous ses sommets adjacents (i.e. tous les sommets qui ne sont pas sur la même ligne ni sur la même colonne que x , par définition du produit direct). Ainsi, on aura toujours $y \notin N[x]$ lorsque $y \in (L_r \cup C_i) \setminus \{x\}$. Par ailleurs, de nouveau par définition du produit direct, on aura alors $N[x] \neq N[y]$. D'où, il vient $I[x] = N[x] \cap C \neq N[y] \cap C = I[y]$ et C sépare ainsi x de y .

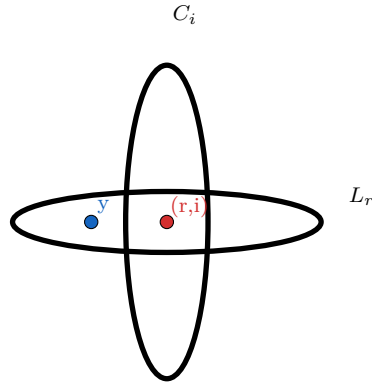


FIGURE 2.3 – C sépare x et y .

\square

Lemme 2.3. (*Propriété des quatre coins*) Soit D un ensemble dominant de $K_m \times K_n$. Pour chaque $(r, i), (s, j) \in K_m \times K_n$ avec $r \neq s, i \neq j$, D sépare (r, i) et (s, j) si, et seulement si,

$$D \cap (C_i \cup C_j \cup L_r \cup L_s) \not\subseteq \{i, j\} \times \{r, s\}.$$

Démonstration. Supposons que $i \neq j$ et $r \neq s$ et soient C_i, C_j et L_r, L_s les colonnes et les lignes correspondantes de $K_m \times K_n$. Soient $x = (r, i)$, $y = (s, j)$, $w = (s, i)$ et $z = (r, j)$. On définit

$$\begin{aligned} A &= D \setminus (D \cap (C_i \cup C_j \cup L_r \cup L_s)), \\ B &= [D \cap (C_i \cup C_j \cup L_r \cup L_s)] \setminus \{x, y, w, z\}. \end{aligned}$$

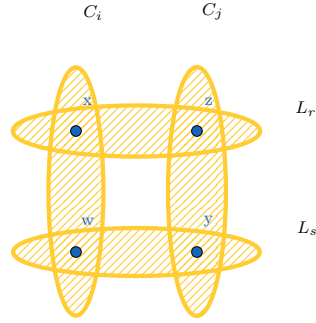


FIGURE 2.4 – Les sommets x, y, w et z avec leurs lignes et leurs colonnes respectives.

L'ensemble A est donc l'ensemble de tous les points de D qui ne sont pas dans les parties hachurées de la Figure 2.4 tandis que l'ensemble B est l'ensemble des points de D appartenant aux parties hachurées exceptés les points x, y, z et w (en bleu).

Dans ce cas,

$$D \cap N[x] = A \cup (D \cap \{x, y\}) \cup (D \cap ((L_s \cup C_j) \setminus \{y, z, w\})).$$

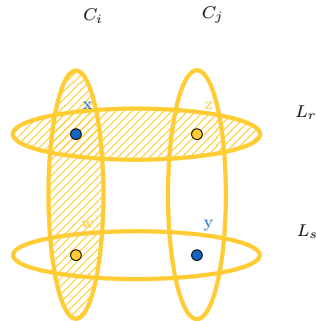


FIGURE 2.5 – $D \cap N[x]$.

En effet, l'ensemble $D \cap N[x]$ est constitué de l'ensemble des points de D appartenant au voisinage fermé de x , i.e. l'ensemble des points de D adjacents à x ainsi que le point x lui-même s'il appartient également à D . Pour construire l'ensemble $D \cap N[x]$, commençons par prendre les points de D contenus dans A . Par définition de A , il ne nous reste alors plus qu'à considérer les lignes L_r et L_s ainsi que les colonnes C_i et C_j . Par définition du produit direct et puisque $x = (r, i)$, aucun point ni de la ligne L_r ni de la colonne C_i n'appartient au voisinage fermé de x , excepté x lui-même. Ensuite, ajoutons à notre ensemble les points de D appartenant à la ligne L_s et à la colonne C_j , exceptés les points w , z et y . Enfin, on ajoute à notre ensemble les points x et y s'ils appartiennent à D . De cette façon, nous venons de reconstruire l'ensemble $D \cap N[x]$ et il vient

$$D \cap N[x] = A \cup (D \cap \{x, y\}) \cup (D \cap ((L_s \cup C_j) \setminus \{y, z, w\})).$$

De même, par un raisonnement analogue, on obtient

$$D \cap N[y] = A \cup (D \cap \{x, y\}) \cup (D \cap ((L_r \cup C_i) \setminus \{x, z, w\})).$$

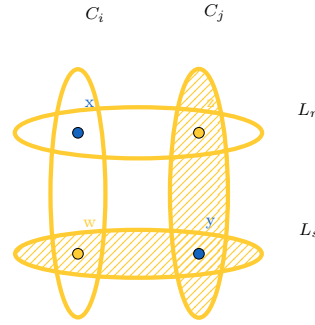


FIGURE 2.6 – $D \cap N[y]$.

Donc D sépare x et y si, et seulement si, au moins un des ensembles $D \cap ((L_s \cup C_j) \setminus \{y, z, w\})$ ou $D \cap ((L_r \cup C_i) \setminus \{x, z, w\})$ est non-vide.

En effet, si ces deux ensembles sont vides, on a :

$$D \cap N[x] = A \cup (D \cap \{x, y\}) = D \cap N[y].$$

Et donc D ne sépare pas x et y dans ce cas.

Etant donné que B est l'union de ces deux ensembles, D sépare x et y si, et seulement si, $B \neq \emptyset$, i.e.

$$\begin{aligned} & [D \cap (C_i \cup C_j \cup L_r \cup L_s)] \setminus \{x, y, w, z\} \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow & D \cap (C_i \cup C_j \cup L_r \cup L_s) \not\subseteq \{i, j\} \times \{r, s\}, \end{aligned}$$

par définitions de x , y , w et z .

□

Remarque 2.1. On dira qu'un ensemble dominant D de $K_m \times K_n$ a la propriété des quatre coins par rapport aux colonnes C_i, C_j et aux lignes L_r, L_s si

$$D \cap (C_i \cup C_j \cup L_r \cup L_s) \not\subseteq \{i, j\} \times \{r, s\}.$$

Donc si un ensemble dominant D de $K_m \times K_n$ est un code identifiant, alors D a la propriété des quatre coins par rapport à chaque paire de colonnes et chaque paire de lignes.

Corollaire 2.1. Si C est un code identifiant de $K_m \times K_n$, alors C n'a pas plus d'un mot code isolé.

Démonstration. Rappelons qu'un mot code isolé est un élément de C qui est seul dans sa ligne et dans sa colonne.

Procédons par l'absurde et supposons que $x = (r, i)$ et $y = (s, j)$ sont deux mots codes isolés.

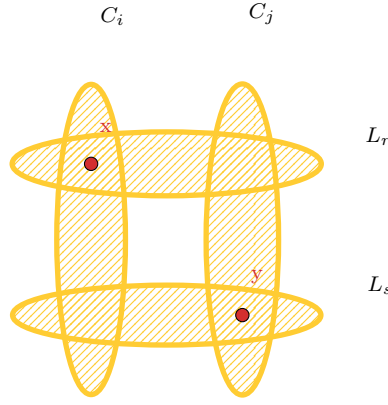


FIGURE 2.7 – Les sommets isolés, x et y .

On a

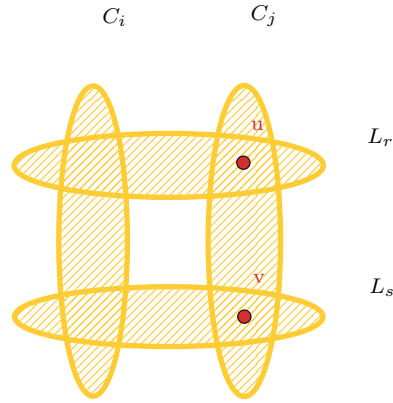
$$C \cap (C_i \cup C_j \cup L_r \cup L_s) = \{x, y\} \subseteq \{i, j\} \times \{r, s\}.$$

Ce résultat nous mène à une absurdité car C est un code identifiant : il possède donc la propriété des quatre coins (Lemme 2.3). Ainsi, C possède au maximum un mot code isolé. \square

Corollaire 2.2. Soit C un code identifiant de $K_m \times K_n$. Si $cs(C) = n - 1$, alors il n'existe pas de colonne C_j telle que $C \cap C_j = \{u, v\}$ où u et v sont tous les deux lignes-isolés. Par symétrie, il n'existe pas de ligne L_r contenant exactement deux mots codes qui sont chacun colonnes-isolés si $ls(C) = m - 1$.

Démonstration. Par hypothèse, on a $cs(C) = n - 1$. On a donc une seule colonne C_i ne comportant pas d'élément du code.

Procédons par l'absurde. Soient u et v , deux sommets lignes-isolés tels que $C \cap C_j = \{u, v\}$.


 FIGURE 2.8 – Les sommets lignes-isolés, u et v .

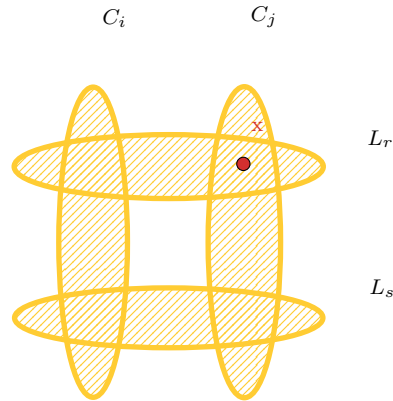
On a alors

$$C \cap (C_i \cup C_j \cup L_r \cup L_s) = \{u, v\} \subseteq \{i, j\} \times \{r, s\}.$$

Ceci est une contradiction car C est un code identifiant : il possède donc la propriété des quatre coins (Lemme 2.3). Ainsi, si $cs(C) = n - 1$, il n'existe pas de colonne C_j telle que $C \cap C_j = \{u, v\}$ où les sommets u et v sont tous les deux lignes-isolés. La démonstration est analogue dans l'autre cas. \square

Corollaire 2.3. *Si C est un code identifiant de $K_m \times K_n$ tel que $cs(C) = n - 1$ et $ls(C) = m - 1$, alors C n'a pas de mot code isolé.*

Démonstration. Procédons par l'absurde. Supposons que C possède un mot code isolé $x = (r, j)$.


 FIGURE 2.9 – Le sommet isolé x .

Puisque $cs(C) = n - 1$, soit C_i la colonne telle que $C \cap C_i = \emptyset$. Puisque $ls(C) = m - 1$, soit L_s la ligne telle que $C \cap L_s = \emptyset$.

On obtient alors

$$C \cap (C_i \cup C_j \cup L_r \cup L_s) = \{x\} \subseteq \{i, j\} \times \{r, s\}.$$

Ceci est une contradiction car C est un code identifiant, il possède donc la propriété des quatre coins. Ainsi, C ne possède pas de mot code isolé. \square

Proposition 2.1. *Soit $C \subset V(K_m \times K_n)$. Si C satisfait les conditions suivantes :*

- (1) *Il existe $1 \leq m_1 < m_2 < m_3 \leq m$ et $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 \leq n$ tels que $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) \in C$;*
- (2) *Chaque $v \in C$ est soit ligne-isolé soit colonne-isolé ;*
- (3) *On a $ls(C) = m$ et $cs(C) = n$ et*
- (4) *L'ensemble C contient au plus un sommet isolé,*

alors C est un code identifiant de $K_m \times K_n$.

Démonstration. Supposons que C possède ces quatre caractéristiques.

Notons G , le graphe $K_m \times K_n$.

Montrons d'abord que C est dominant.

La première hypothèse nous indique que l'ensemble C domine l'ensemble G car l'ensemble $\{(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3)\}$ domine G et ces sommets sont dans C . En effet, par définition du produit direct, le sommet (m_1, n_1) est dans le voisinage fermé de tous les sommets qui ne sont pas situés sur la même ligne et la même colonne que lui. En combinant avec (m_2, n_2) où $m_2 > m_1$ et $n_2 > n_1$, l'ensemble $\{(m_1, n_1), (m_2, n_2)\}$ domine tous les sommets du graphe sauf ceux situés aux intersections (marquées d'une croix dans la Figure 2.10).

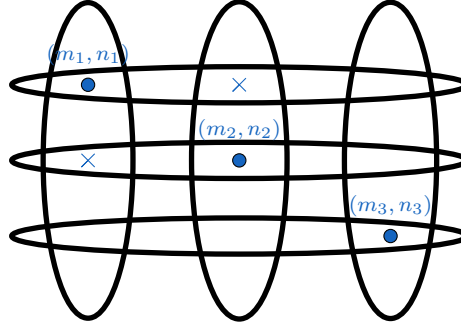


FIGURE 2.10 – Illustration de la situation.

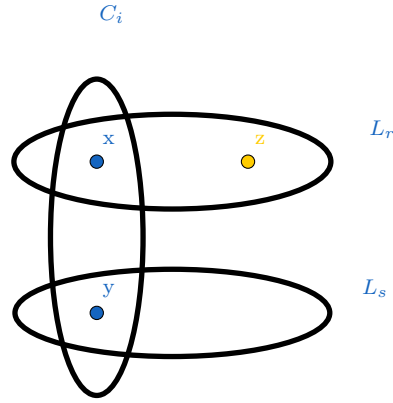
En prenant un troisième sommet (m_3, n_3) avec $m_1 < m_2 < m_3$ et $n_1 < n_2 < n_3$, on domine tout le graphe.

Il nous reste donc à montrer que l'ensemble C est séparant.

Supposons que les sommets x et y sont dans la même colonne (i.e. $x = (r, i)$ et $y = (s, i)$).

- Si x ou $y \in C$, alors par le Lemme 2.2, C les sépare.

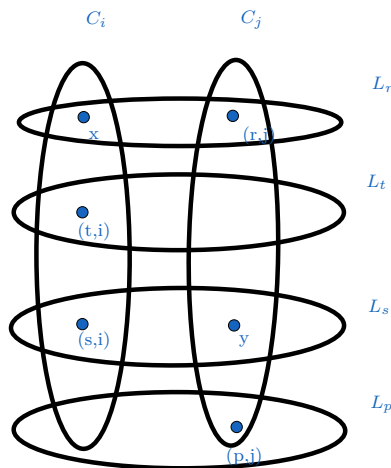
- Si x et $y \notin C$, par hypothèse on a $ls(C) = m$ et $cs(C) = n$, on peut donc choisir $z \in C$ dans la même ligne que x (car il y a au moins un élément du code dans chaque ligne).


 FIGURE 2.11 – C est séparant.

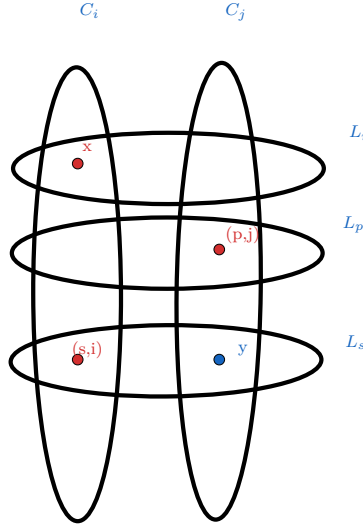
On a $N[x] \cap \{z\} \neq N[y] \cap \{z\}$. En effet, on a $N[x] \cap \{z\} = \emptyset$ car z est sur la même ligne que x et $N[y] \cap \{z\} = \{z\}$ car z n'est ni sur la même ligne ni sur la même colonne que y . Donc $z \in C$ sépare x et y . On vient de trouver un sommet du code qui sépare x et y , l'ensemble C est donc bien séparant pour deux éléments situés sur la même colonne.

On utilise le même argument pour montrer que C est séparant lorsque x et y sont sur la même ligne.

Supposons que x et y sont sur des colonnes et des lignes différentes : $x = (r, i)$ et $y = (s, j)$ où $1 \leq r < s \leq m$ et $1 \leq i < j \leq n$.

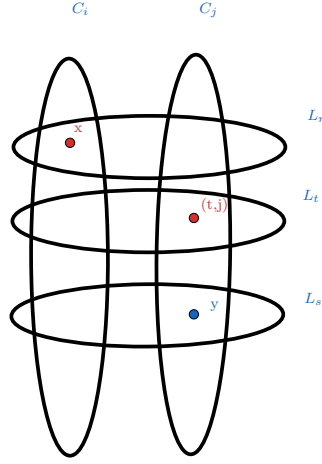

 FIGURE 2.12 – C est séparant.

- (a) Supposons que $x \in C$ mais que x n'est pas isolé dans C . Alors on a soit $|C \cap C_i| \geq 2$, soit $|C \cap L_r| \geq 2$: en effet, par hypothèse, il n'existe qu'un seul sommet isolé dans C mais tous les autres sont soit lignes-isolés soit colonnes-isolés. Supposons que $|C \cap C_i| \geq 2$ (la démonstration est analogue si on suppose que $|C \cap L_r| \geq 2$), i.e. x est ligne-isolé. Alors, soit $(s, i) \in C$, soit il existe $1 \leq t \leq m$ (avec $t \notin \{r, s\}$) tel que $(t, i) \in C$ (car on suppose x ligne-isolé et pas isolé : cela implique que x n'est pas colonne-isolé).
- Si $(s, i) \in C$, alors (s, i) est ligne-isolé (car $x \in C$) donc $y \notin C$ (car on a déjà $(s, i) \in C$ dans cette ligne-là). Cependant, on sait que $cs(C) = n$ donc chaque colonne de G contient un élément de C . Ainsi, il existe $1 \leq p \leq m$ avec $p \notin \{r, s\}$ tel que $(p, j) \in C$ car (r, i) et (s, i) sont lignes-isolés. Donc $(p, j) \in I[x]$ mais $(p, j) \notin I[y]$. Ainsi, le sommet $(p, j) \in C$ sépare x et y .


 FIGURE 2.13 – $I[x] \neq I[y]$.

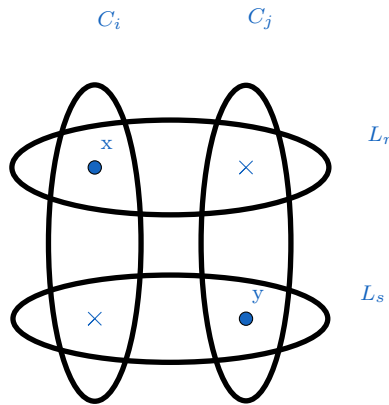
- S'il existe $1 \leq t \leq m$ ($t \notin \{r, s\}$) tel que $(t, i) \in C$, alors le sommet $(t, i) \in I[y]$ mais $(t, i) \notin I[x]$. Ainsi, le sommet $(t, i) \in C$ sépare x et y .
- (b) Supposons maintenant que x est isolé dans C (i.e. x est le seul sommet du code dans sa ligne et dans sa colonne). On a $C = I[x]$. En effet, vu la définition du produit direct, les sommets adjacents à x sont ceux qui ne sont ni dans sa ligne ni dans sa colonne. Puisqu'on considère le voisinage fermé de x , on doit prendre x avec.

- Supposons tout d'abord que $y \notin C$. Puisque la colonne $C_j \in E_c(C)$, il existe $1 \leq t \leq m$ ($t \notin \{r, s\}$) tel que $(t, j) \in C$.


 FIGURE 2.14 – $I[y] \neq C$.

- On a $I[y] \neq C$ car $(t, j) \in C$ mais $(t, j) \notin I[y]$ donc (t, j) sépare x et y .
- Si $y \in C$, puisque $x \in C$ est isolé et que par hypothèse C contient au maximum un sommet isolé, le sommet y ne peut pas être isolé aussi. Ainsi, on a soit $|C \cap C_j| \geq 2$ soit $|C \cap L_s| \geq 2$. Il y a donc bien un sommet de C (dans L_s ou dans C_j) qui sépare x et y . On a alors $I[y] \neq C$.
- (c) Supposons que x et $y \in V(G) \setminus C$ (x et y sont des sommets de G mais pas du code). Procédons par l'absurde et supposons que C ne sépare pas x et y . Par hypothèse, chaque ligne de G appartient à $E_l(C)$ et chaque colonne de G est dans $E_c(C)$. Si $x = (r, i)$ et $y = (s, j)$, on a

$$C \cap (C_i \cup C_j \cup L_r \cup L_s) = \{(s, i), (r, j)\}.$$


 FIGURE 2.15 – Les sommets x et y .

Donc (r, j) et (s, i) sont tous les deux isolés dans C . Ceci est une absurdité car par hypothèse, C possède au maximum un seul sommet isolé. Donc C sépare x et y . Vu les différents cas considérés, C est dominant et séparant. Il s'agit donc bien d'un code identifiant. \square

Contrairement au résultat que nous venons de démontrer, la proposition suivante se satisfait de $m - 1$ lignes contenant des éléments du code (et plus m lignes, comme précédemment). Pour compenser cela, une condition supplémentaire doit être remplie pour obtenir un code identifiant.

Proposition 2.2. Soit $C \subset V(K_m \times K_n)$. Si C satisfait les conditions suivantes :

- (1) Il existe $1 \leq m_1 < m_2 < m_3 \leq m$ et $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 \leq n$ tels que $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3) \in C$;
- (2) Chaque $v \in C$ est soit ligne-isolé soit colonne-isolé ;
- (3) On a $ls(C) = m - 1$ et $cs(C) = n$;
- (4) L'ensemble C contient au plus un sommet isolé et
- (5) Si L_r a la propriété que v est colonne-isolé mais pas ligne-isolé $\forall v \in C \cap L_r$, alors $|C \cap L_r| \geq 3$;

alors C est un code identifiant de $K_m \times K_n$.

Démonstration. Le fait que l'ensemble C soit dominant se démontre de la même manière que dans la Proposition 2.1.

Montrons que l'ensemble C est séparant.

Notons L_r la ligne ne contenant pas d'élément du code. Par ailleurs, on peut remarquer que $V(G) \setminus L_r \cong K_{m-1} \times K_n$ et C satisfait les hypothèses de la Proposition 2.1 où on considère un sous-ensemble de $V(G) \setminus L_r$.

Ainsi, C sépare les sommets x et y si aucun de ces sommets n'appartient à L_r . On peut donc supposer que $x \in L_r$. Soit $x = (r, i)$.

- (a) Supposons d'abord que $y = (r, j)$ avec $j \neq i$, i.e. y se trouve sur la même ligne que x . Puisque $cs(C) = n$, il existe $1 \leq s \leq m$ tel que $r \neq s$ et $(s, i) \in C$.

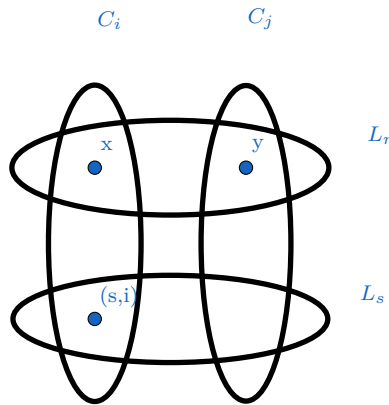


FIGURE 2.16 – (s, i) sépare x et y .

En effet, on a un élément du code dans chaque colonne. Le sommet x appartient à la ligne L_r (qui est, par hypothèse, la ligne sans élément du code) donc $x \notin C$. Il existe donc un sommet dans la colonne C_i qui est dans le code, à savoir (s, i) . On a $I[x] \neq I[y]$. En effet, par définition du produit direct, le sommet (s, i) du code est dans le voisinage de y mais pas de x . Dès lors, le sommet $(s, i) \in C$ sépare x et y .

Ensuite, supposons que $y = (t, i)$, avec $1 \leq t \leq m, r \neq t$. Vu précédemment, si $y \in C$, y sépare x et y . Supposons donc que $y \notin C$.

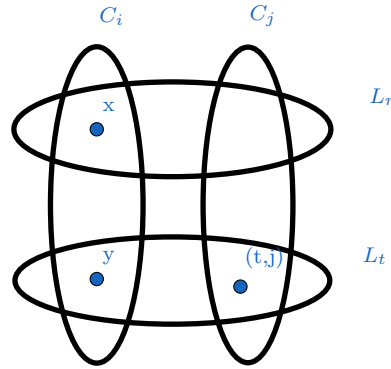


FIGURE 2.17 – (t, j) sépare x et y .

On a $ls(C) = m - 1$ i.e. chaque ligne de G possède au moins un élément du code sauf L_r (par définition de L_r). Il existe donc j tel que $1 \leq j \leq n, j \neq i$ et $(t, j) \in C$. Par définition du produit direct, (t, j) est dans le voisinage de x mais pas dans le voisinage de y . De plus, puisque $(t, j) \in C$, on a $I[x] \neq I[y]$. Donc le sommet (t, j) sépare x et y .

(b) Supposons que $y = (s, j)$ tel que $i \neq j$ et $r \neq s$.

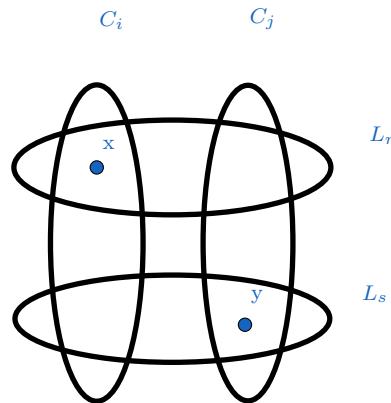


FIGURE 2.18 – Les sommets x et y .

Procédons par l'absurde et supposons que C ne sépare pas x et y . Dans ce cas, C ne satisfait pas la propriété des quatre coins (Lemme 2.3) par rapport aux colonnes C_i et C_j et aux lignes L_r et L_s . De plus, L_r ne contient aucun élément du code. On a alors

$$C \cap (C_i \cup C_j \cup L_r \cup L_s) \subseteq \{(s, i), (s, j)\}.$$

On a même l'égalité car on a un élément du code dans C_i et dans C_j . Ainsi L_s contient exactement deux sommets de C et ils sont tous les deux colonnes-isolés mais pas lignes-isolés. Ceci est une absurdité car par hypothèse si L_s est tel que tout $v \in C \cap L_s$ est colonne-isolé mais pas ligne-isolé, alors $|C \cap L_s| \geq 3$. Donc C sépare x et y .

Puisque C est dominant et séparant, C est un code identifiant.

□

Nous pouvons dès lors passer aux premiers théorèmes permettant de déterminer les cardinaux minimums des codes identifiants de certains graphes. Pour ce faire, il est utile de rappeler la notation suivante.

Rappel 2.1. Le cardinal minimum d'un code identifiant de G est noté $\gamma^{ID}(G)$.

Considérons tout d'abord un cas particulier pour les valeurs de $n = 2$ et de $m = 3$ ou $m = 4$. Dans ce cas, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 2.3. Si $m = 3$ ou $m = 4$, $\gamma^{ID}(K_m \times K_2) = m$.

Démonstration. Si C est un code identifiant de $K_3 \times K_2$, alors $ls(C) \geq 2$.

Procédons par l'absurde et supposons que $ls(C) = 1$ (i.e. une seule ligne possède des éléments du code). Supposons que le point représenté par un cercle bleu sur la Figure 2.19 est un élément du code. Dans ce cas, les points représentés par des croix violettes ne sont pas séparés. Il en va de même pour les points représentés par des croix rouges. On n'a donc pas un ensemble séparant.



FIGURE 2.19 – Pas séparants.

Ainsi, il vient $ls(C) \geq 2$.

Montrons alors qu'aucun sous-ensemble de deux éléments dans des lignes différentes ne domine $K_3 \times K_2$. Ainsi, $\gamma^{ID}(K_3 \times K_2) \geq 3$. En effet, par la Figure 2.20,

- prendre le sous-ensemble de points représentés par les cercles rouges n'a pas de sens vu précédemment (on sait qu'on a $ls(C) \geq 2$).
- en ce qui concerne le sous-ensemble de points représentés par les croix bleues, celui-ci n'est pas dominant : le disque bleu n'est en effet couvert pas aucun de ces deux point, par définition du produit direct.
- le sous-ensemble de points constitué des cercles verts n'est pas dominant car le point représenté par un $+$ vert n'est dominé par aucun de ces deux sommets.

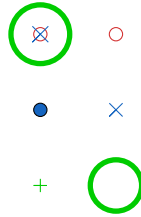


FIGURE 2.20 – Pas dominants.

Ainsi, une contradiction apparaît, aucun sous-ensemble de deux éléments dans des lignes différentes ne domine $K_3 \times K_2$.

On peut par contre trouver un code identifiant de $K_3 \times K_2$ à trois éléments i.e. $\gamma^{ID}(K_3 \times K_2) = 3$.

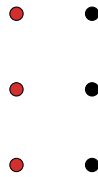


FIGURE 2.21 – Code identifiant de $K_3 \times K_2$.

Montrons que $\gamma^{ID}(K_4 \times K_2) = 4$.

- Si C est un code identifiant de $K_4 \times K_2$, alors $ls(C) \geq 3$ par le même argument que précédemment. Procédons par l'absurde. Si $ls(C) = 2$, on obtient une contradiction. En effet, supposons que les points rouges désignent le code identifiant de $K_4 \times K_2$. Alors, les sommets représentés par les croix bleues dans la Figure 2.22 ne sont pas séparés par le code, par définition du produit direct. Il ne s'agit donc pas d'un code séparant (et ainsi, pas identifiant non plus).

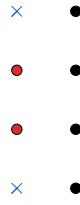


FIGURE 2.22 – Pas séparant.

Dès lors, on obtient $ls(C) \geq 3$.

- Montrons qu'aucun sous-ensemble de trois éléments dans des lignes différentes ne domine $K_4 \times K_2$. Considérons les différents cas possibles de sous-ensembles de trois éléments dans des lignes différentes. Par la Figure 2.23,
 - l'ensemble des points représentés par des cercles jaunes n'est pas un ensemble dominant (et donc pas identifiant) car aucun de ces sommets ne domine le disque jaune.
 - l'ensemble des points constitué des losanges rouges pleins n'est pas dominant car aucun de ces points ne domine le losange rouge vide.
 - il en va de même concernant l'ensemble des points représentés par des petits disques bleus et la croix bleue.



FIGURE 2.23 – Pas dominants.

Une contradiction apparaît car en ayant balayé toutes les configurations possibles de trois éléments dans des lignes différentes, aucun de ces sous-ensembles n'est dominant (et donc pas identifiant non plus).

Donc $\gamma^{ID}(K_4 \times K_2) \geq 4$. De plus, on peut trouver un code identifiant de $K_4 \times K_2$ à quatre éléments i.e. $\gamma^{ID}(K_4 \times K_2) = 4$.

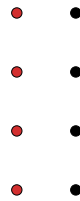


FIGURE 2.24 – Code identifiant de $K_4 \times K_2$.

□

Nous pouvons également obtenir un résultat assez similaire pour toutes les valeurs de $m \geq 5$.

Théorème 2.1. *Pour tout entier positif $m \geq 5$, $\gamma^{ID}(K_m \times K_2) = m - 1$.*

Démonstration. Soit $m \geq 5$. Si C est un code identifiant de $K_m \times K_2$, on a $cs(C) \geq 2 - 1$, $ls(C) \geq m - 1$ et $|C| \geq m - 1$. Ainsi, on obtient $\gamma^{ID}(K_m \times K_2) \geq m - 1$.

L'ensemble

$$C = \{(1, 1), (2, 1)\} \cup \{(r, 2) | 3 \leq r \leq m - 1\}$$

est un code identifiant de $K_m \times K_2$.

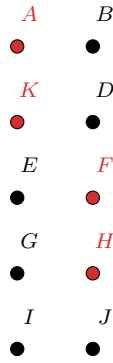


FIGURE 2.25 – Exemple de code identifiant de $K_5 \times K_2$.

Il s'agit en effet d'un code identifiant car

- l'ensemble C est dominant : tout sommet du graphe est dominé par au moins un sommet de C , par construction de C et par définition du produit direct ;
- l'ensemble C est séparant : toute paire de sommets est séparée par C . En effet, aucun sommet n'a exactement le même ensemble de point dans son voisinage fermé intersecté avec le code qu'un autre sommet du graphe. Par exemple, pour $m = 5$, on a $I[A] = \{A, F, H\}$, $I[B] = \{K\}$, $I[K] = \{K, F, H\}$, $I[D] = \{A\}$, $I[E] = \{H\}$, $I[F] = \{A, K, F\}$, $I[G] = \{F\}$, $I[H] = \{A, K, H\}$, $I[I] = \{F, H\}$ et $I[J] = \{A, K\}$.

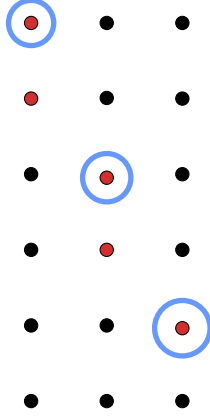
□

En considérant d'autres tailles de cliques (i.e. d'autres valeurs pour les entiers n et m), de nouveaux résultats apparaissent.

Théorème 2.2. *Pour tous entiers positifs $n \geq 3$ et $m \geq 2n$, $\gamma^{ID}(K_m \times K_n) = m - 1$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$D = \{(2i - 1, i), (2i, i) | i \in \{1, \dots, n - 1\}\} \cup \{(j, n) | 2n - 1 \leq j \leq m - 1\}$$


 FIGURE 2.26 – L'ensemble D pour $K_6 \times K_3$.

Remarquons que chaque sommet v de D est ligne-isolé mais pas colonne-isolé (2), par construction. Par ailleurs, on a $ls(D) = m - 1$ car le nombre de lignes contenant des éléments du code vaut au maximum $2(n - 1) = 2n - 2 < m$ ou $m - 1 < m$ (jamais la dernière ligne par construction de D). De même, on a $cs(D) = n$ car le premier sous-ensemble de D parcourt les $n - 1$ premières colonnes, le deuxième parcourt la dernière colonne par construction (3). De plus, les sommets $(1, 1)$, $(3, 2)$ et $(5, 3)$ (entourés en bleu dans la Figure 2.26) appartiennent à l'ensemble D (1). Rappelons que les coordonnées des sommets sont données en lisant d'abord la ligne puis la colonne. Enfin, les conditions (4) et (5) de la Proposition 2.2 sont également respectées. En effet, s'il existe un sommet isolé, il se trouve sur la dernière colonne et ne peut se trouver nulle part ailleurs par construction. En outre, une ligne ne contiendra jamais de sommet colonne-isolé mais pas ligne-isolé donc la condition (5) est également respectée : dès qu'un sommet est colonne-isolé, il est obligatoirement ligne-isolé. Ainsi, toutes les lignes respectent la condition (5) de la Proposition 2.2 car nous ne serons jamais dans ce cas-là. Dès lors, par la Proposition 2.2, D est un code identifiant. De plus, vu le Lemme 2.1, on a $\gamma^{ID}(K_m \times K_n) \geq m - 1$. Or, on sait que $ls(D) = m - 1$ et les sommets sont lignes-isolés. Ainsi, on a exactement

$$\gamma^{ID}(K_m \times K_n) = m - 1.$$

□

Notons C un code identifiant pour la suite. Afin de simplifier l'écriture dans la suite, nous introduisons les notations suivantes. Nous encourageons vivement le lecteur à ne pas hésiter à relire régulièrement les significations de ces notations par la suite.

Notation 2.4. Soient $A_C = \{v \in C | v \text{ est ligne-isolé dans } C\}$ et $B_C = \{v \in C | v \text{ est colonne-isolé dans } C\}$.

On note $x = |A_C|$ et $y = |B_C|$.

Le nombre de colonnes C_i telles que $|C \cap C_i| \geq 2$ et $C \cap C_i \subseteq A_C$ est noté p . Il s'agit donc du nombre de colonnes ayant au moins deux éléments du code lignes-isolés.

Le nombre de lignes L_i telles que $|C \cap L_i| \geq 2$ et $C \cap L_i \subseteq B_C$ est noté q . Il s'agit donc du nombre de lignes ayant au moins deux éléments du code colonnes-isolés.

Remarque 2.2. Le code identifiant C a au plus un mot code isolé, vu le Corollaire 2.1.. Dans ce cas (i.e si C contient un mot code isolé), on a $|A_C \cap B_C| = 1$, car les mots codes sont lignes-isolés dans A_C et colonnes-isolés dans B_C (le mot code est seul dans sa ligne et dans sa colonne). Sinon, on a $|A_C \cap B_C| = 0$ i.e. $A_C \cap B_C = \emptyset$.

Remarque 2.3. On a donc $|C| \geq |A_C \cup B_C| \geq x + y - 1$. En effet, pour la première inégalité, on compte uniquement les mots codes lignes-isolés ou colonnes-isolés. Le "-1" de la seconde inégalité est l'éventuel sommet isolé.

En utilisant ces notations, nous allons dès lors pouvoir introduire et démontrer trois théorèmes s'intéressant au produit direct de cliques respectant certaines conditions. Le premier de ces théorèmes est le suivant.

Théorème 2.3. Si n et m sont des entiers positifs tels que $6 \leq n \leq m \leq 2n - 1$ et $n + m \equiv 0 \pmod{3}$ ou $n + m \equiv 2 \pmod{3}$, alors

$$\gamma^{ID}(K_m \times K_n) = \left\lfloor \frac{2m + 2n}{3} \right\rfloor.$$

Démonstration. Soit C un code identifiant de $G = K_m \times K_n$ et supposons que $|C| \leq \left\lfloor \frac{2m+2n}{3} \right\rfloor - 1$.

Considérons quatre cas et montrons que ce n'est pas possible.

- Cas 1 : Supposons que $cs(C) = n$ et $ls(C) = m$. Autrement dit, n colonnes contiennent des éléments de C et m lignes contiennent des éléments de C .
Par ailleurs, on a $|B_C| = y$ par la Définition 2.4 (le nombre de sommets de C qui sont seuls dans leur colonne) et

$$|C \setminus B_C| \geq 2(n - y).$$

En effet, on considère toutes les colonnes sauf celles où il n'y qu'un seul sommet (il y a y colonnes de ce type). Dans chacune des autres colonnes, il y a au moins deux éléments de C (car $cs(C) = n$, chaque colonne possède au moins un élément du code). D'où la borne inférieure pour $|C \setminus B_C|$. Ainsi, il vient $|C| \geq 2n - y$.

Or, on sait que $\frac{2m+2n}{3} - 1 \geq |C| \geq 2n - y$.

D'où, on obtient

$$\begin{aligned} y &\geq 2n + 1 - \frac{2m + 2n}{3} \\ \Leftrightarrow y &\geq \frac{6n - 2m - 2n}{3} + 1 \\ \Leftrightarrow y &\geq \frac{4n - 2m}{3} + 1. \end{aligned}$$

De même, $|A_C| = x$ et on a $x \geq \frac{4m-2n}{3} + 1$.

Or, vu la Remarque 2.3, on a $|C| \geq x + y - 1$, c'est-à-dire :
 $|C| \geq \frac{4m-2n}{3} + 1 + \frac{4n-2m}{3} + 1 - 1.$

D'où, on obtient

$$\frac{2m+2n}{3} - 1 \geq |C| \geq \frac{2m+2n}{3} + 1.$$

Ceci est une absurdité.

— Cas 2 : Supposons que $cs(C) = n - 1$ et $ls(C) = m$.

Par définition de B_C (Définition 2.4), tout mot code de B_C est colonne-isolé. Puisque $cs(C) = n - 1$, il existe au moins deux mots codes dans chacune des $n - 1 - y$ colonnes restantes : il y a y colonnes contenant exactement un mot code, toutes les autres colonnes contenant un/des mot(s) code(s) en contiennent donc au moins deux.

Vu le Corollaire 2.2, il n'existe pas de colonne contenant exactement deux mots codes u, v tels que u et v sont lignes-isolés. Ainsi, on a $|C \cap C_j| \geq 3$ pour les C_j tels que $|C \cap C_j| \geq 2$ et $C \cap C_j \subseteq A_C$ (par le Corollaire 2.2). Par la Définition 2.4, p est le nombre de telles colonnes. Donc on obtient

$$\begin{aligned} |C \setminus B_C| &\geq 2(n - 1 - y - p) + 3p \\ \Leftrightarrow |C \setminus B_C| &\geq 2n - 2 - 2y + p. \end{aligned}$$

Pour la première inégalité, le premier terme provient des colonnes contenant exactement deux sommets, le deuxième terme celles contenant au moins 3 sommets.

D'où, il vient $|C| \geq 2n - 2 - y + p$.

Or, on sait que

$$|C| \leq \frac{2m + 2n}{3} - 1.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} y &\geq 2n - 2 + p + 1 - \frac{2m+2n}{3} \\ \Leftrightarrow y &\geq p - 1 + \frac{4n-2m}{3}. \end{aligned}$$

De même, on a $|A_C| = x$, $ls(C) = m$, $|C \setminus A_C| \geq 2(m - x)$ et donc $|C| \geq 2m - x$. Ainsi, on a $x \geq \frac{4m-2n}{3} + 1$. Par ailleurs, on sait que $|C| \geq x + y - 1$, c'est-à-dire :

$$\frac{2m + 2n}{3} - 1 \geq |C| \geq \frac{2m + 2n}{3} + p - 1.$$

Ceci impose à p d'être négatif ou nul. Or, vu la définition de p , il ne peut alors qu'être nul.

Ceci nous donne

$$|C| = \left\lfloor \frac{2m + 2n}{3} \right\rfloor - 1 = x + y - 1$$

c'est-à-dire $C = A_C \cup B_C$.

S'il existe un sommet $v \in C \setminus B_C$, disons $v_i \in C_i$, alors, par le Corollaire 2.2, on a $|C \cap C_i| \geq 3$. Ceci est absurde car $p = 0$ donc il n'existe pas de telle colonne. Dès lors, on a $C = B_C$.

Ainsi, tout mot code est ligne-isolé ou colonne-isolé et

$$m = ls(C) \leq |C| = |B_C| \leq n - 1 \leq m - 1.$$

Ceci est bien entendu impossible.

- Cas 3 : Supposons dès lors que $cs(C) = n$ et que $ls(C) = m - 1$.
En échangeant les rôles des lignes et des colonnes du cas précédent, on obtient $q = 0$ et

$$\left\lfloor \frac{2m + 2n}{3} \right\rfloor - 1 = |C| = x + y - 1.$$

Donc $C = A_C \cup B_C$.

D'autre part, puisque $cs(C) = n$, il s'ensuit que, comme dans le premier cas, on a

$$y \geq \frac{4n - 2m}{3} + 1 \geq \frac{4n - 2(2n - 1)}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

Etant donné que y est un entier, on conclut par le Corollaire 2.2 que $q \geq 1$. Ceci est absurde puisqu'on a trouvé $q = 0$.

- Cas 4 : Supposons maintenant que $cs(C) = n - 1$ et $ls(C) = m - 1$.
Par les cas 2 et 3, on a

$$y \geq \frac{4n - 2m}{3} - 1 + p$$

et

$$x \geq \frac{4m - 2n}{3} - 1 + q.$$

Par le Corollaire 2.3, on sait qu'il n'existe aucun mot code isolé dans C . Donc il vient

$$\frac{2m + 2n}{3} - 1 \geq |C| \geq x + y \geq \frac{2n + 2m}{3} + p + q - 2.$$

Ainsi, on a $p + q \leq 1$.

Discutons à présent des valeurs de p et de q .

- Supposons que $p = 1$ (et donc $q = 0$). Dans ce cas, on a l'égalité et $C = A_C \cup B_C$. Supposons qu'il existe un sommet $v \in B_C$, disons $v \in L_l$. Puisque $q = 0$ et qu'il n'y a pas de mot code isolé, C contient un autre mot code u dans L_l qui n'est pas colonne-isolé. Mais $u \notin A_C \cup B_C$ car il n'est pas colonne-isolé par définition et il n'est pas ligne-isolé car il est dans L_l et v aussi. Ceci est absurde car on a un sommet de C qui n'est pas dans $A_C \cup B_C$. Or, on sait que $C = A_C \cup B_C$. Donc on a $B_C = \emptyset$ et $C = A_C$. Par ailleurs, puisque $p = 1$, on conclut que $cs(C) = 1$. Ceci est absurde car $cs(C) = n - 1$ et $n \geq 6$. On a bien l'absurdité attendue.
- En supposant $q = 1$ et en échangeant les rôles de A_C et B_C , on obtient l'absurdité de manière similaire.
- Supposons que $p = q = 0$. Puisque $p = 0$, toute colonne contenant un mot code ligne-isolé devrait aussi contenir un mot code qui n'est pas ligne-isolé (sinon $p \neq 0$). Par ailleurs, pour couvrir $n - 1$ colonnes et $m - 1$ lignes aussi "rapidement" que possible sans mot code isolé, il faut environ $\frac{2(m+n-2)}{3}$ mots codes qui sont tous soit lignes-isolés soit colonnes-isolés (ceci est reflété dans la Figure 2.28 si on devait supprimer le sommet dans le coin inférieur droit). Ajouter l'exigence supplémentaire que toute colonne contenant un mot code ligne-isolé doit également

contenir un mot code qui n'est pas ligne-isolé nécessiterait plus de $\frac{2(m+n-2)}{3}$ mots codes. Ceci est bien évidemment impossible étant donné que $\left\lfloor \frac{2m+2n}{3} \right\rfloor - 1 \geq |C|$. Ainsi, il existe au plus une colonne contenant un mot code ligne-isolé et un mot code qui n'est pas ligne-isolé afin de garantir $|C| \leq \left\lfloor \frac{2m+2n}{3} \right\rfloor - 1$. Il y a donc une colonne C_i telle que $A_C \subseteq C_i$ (tous les sommets lignes-isolés sont dans la même colonne) et pour un certain r , $(r, i) \in C \setminus (A_C \cup B_C)$ (un élément du code qui n'est ni ligne ni colonne-isolé).

De même, puisque $q = 0$, s'il existe une ligne contenant un mot code colonne-isolé, alors cette ligne contient un mot code qui n'est pas colonne-isolé. Puisque $|C \setminus (A_C \cup B_C)| \leq 1$, un tel mot code est obligatoirement (r, i) .

Ainsi, on obtient $\frac{2m+2n}{3} - 1 \geq |C| \geq m - 1 + n - 2$ (on compte les lignes puis les colonnes en enlevant le sommet déjà comptabilisé).

D'où, on obtient :

$$\begin{aligned} 2 + 1 - 1 &\geq m + n - \frac{2m + 2n}{3} \\ \Leftrightarrow 2 &\geq \frac{m + n}{3} \\ \Leftrightarrow 6 &\geq m + n. \end{aligned}$$

Ceci est absurde vu les hypothèses sur m et n .

Donc, vu les différents cas traités, on a

$$\begin{aligned} |C| &> \left\lfloor \frac{2m + 2n}{3} \right\rfloor - 1 \\ \Leftrightarrow |C| &\geq \frac{2m+2n}{3}. \end{aligned}$$

En appliquant la Proposition 2.1, montrons que les ensembles suivants sont des codes identifiants de cardinal $\left\lfloor \frac{2m + 2n}{3} \right\rfloor$.

- Si $n + m \equiv 0 \pmod{3}$,
soit $D_1 = \{(2i-1, i), (2i, i) | 1 \leq i \leq a\} \cup \{(2a+j, a+2j-1), (2a+j, a+2j) | 1 \leq j \leq b\}$,
où $a = \frac{2m-n}{3}$ et $b = \frac{2n-m}{3}$, montrons que D_1 est un code identifiant via la Proposition 2.1.

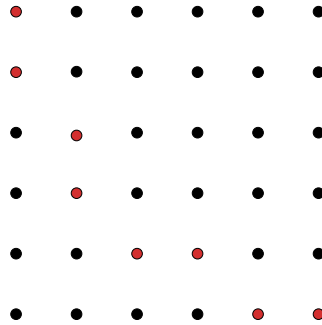


FIGURE 2.27 – Exemple de D_1 pour $K_6 \times K_6$.

- De plus, on peut compter le nombre d'éléments de D_1 :

On a donc bien trouvé un code identifiant de cardinal $\left\lfloor \frac{2m+2n}{3} \right\rfloor$.

- $$D_2 = \{(2i-1, i), (2i, i) | 1 \leq i \leq a\} \\ \cup \{(2a+j, a+2j-1), (2a+j, a+2j) | 1 \leq j \leq b\} \\ \cup \{(m, n)\}.$$

A 10x10 grid of dots. The dots are arranged in 10 rows and 10 columns. The dots in the main diagonal, from the top-left to the bottom-right, are red. All other dots are black.

- (1) On a $1 \leq 2 < 4 < 7 < 8$, $1 \leq 1 < 2 < 4 < 6$ et $(2, 1)$, $(4, 2)$, $(7, 4) \in C$.
- (2) Par construction, chaque sommet est soit ligne-isolé soit colonne-isolé.
- (3) Toutes les lignes et toutes les colonnes contiennent au moins un élément du code par construction. Donc $ls(C) = m$ et $cs(C) = n$.
- (4) Le seul sommet isolé est $(8, 6) = (m, n)$. Il n'y en a pas d'autre par construction.

Donc par la Proposition 2.1, D_2 est un code identifiant.
De plus, on peut compter le nombre d'éléments de D_2 :

$$\begin{aligned}
 |D_2| &= 2a + 2b + 1 \\
 &= \frac{2}{3}(2m - n - 1 + 2n - m - 1) + 1 \\
 &= \frac{2m + 2n - 1}{3} \\
 &= \frac{2m + 2n + 2}{3} \\
 &= \frac{2}{3}(m + n + 1) \\
 &= \left\lfloor \frac{2m + 2n}{3} \right\rfloor.
 \end{aligned}$$

On a donc bien trouvé un code identifiant de cardinal $\left\lfloor \frac{2m + 2n}{3} \right\rfloor$.

- Si $n + m \equiv 2 \pmod{3}$ et $m = 2n - 1$, soit

$$D_3 = \{(2i - 1, i), (2i, i) | i \in [n - 1]\} \cup \{(2n - 1, n)\}.$$

Montrons que D_3 est un code identifiant via la Proposition 2.1.

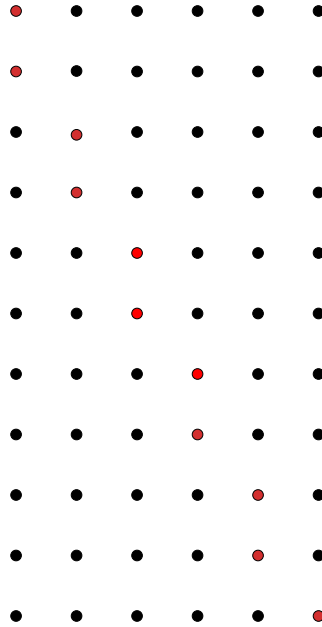


FIGURE 2.29 – Exemple de D_3 pour $K_{11} \times K_6$.

- (1) On a $1 \leq 2 < 4 < 5 < 11$, $1 \leq 1 < 2 < 3 < 6$ et $(2, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 3) \in C$.
- (2) Par construction, chaque sommet est soit ligne-isolé soit colonne-isolé.

- (3) Toutes les lignes et toutes les colonnes contiennent au moins un élément du code par construction. Donc $ls(C) = m$ et $cs(C) = n$.
- (4) Le seul sommet isolé est $(11, 6) = (2n - 1, n)$. Il n'y en a pas d'autre par construction.

Donc par la Proposition 2.1, D_3 est un code identifiant.

De plus, on peut compter le nombre d'éléments de D_3 :

$$|D_3| = 2(n - 1) + 1 = 2n - 1 = m.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{2m + 2n}{3} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{2(2n - 1) + 2n}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4n - 2 + 2n}{3} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{6n - 2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 2n - \frac{2}{3} \right\rfloor = 2n - 1 = m. \end{aligned}$$

On a donc bien trouvé un code identifiant de cardinal $\left\lfloor \frac{2m + 2n}{3} \right\rfloor$.

□

Par ailleurs, on peut également obtenir le résultat suivant. Notons que ce résultat dépend uniquement du nombre de colonnes du graphe (le nombre de lignes lui étant directement lié).

Théorème 2.4. *Pour un entier positif $n \geq 6$,*

$$\gamma^{ID}(K_{2n-5} \times K_n) = 2n - 4.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe un code identifiant C de $K_{2n-5} \times K_n$ tel que $|C| \leq 2n - 5$ et montrons que c'est absurde.

Puisque $ls(C) \geq 2n - 6$ (vu le Lemme 2.1, $ls(C) \geq m - 1$), on peut considérer les deux cas suivants :

- Supposons que $ls(C) = 2n - 6$. Puisque chaque mot code de A_C est ligne-isolé (par définition) et $ls(C) = 2n - 6$, il existe au moins deux mots codes dans chacune des $2n - 6 - x$ lignes restantes disjointes de l'ensemble des lignes qui contiennent au moins un élément de A_C . Cependant, par le Corollaire 2.2, pour toute ligne L_l telle que $C \cap L_l \subseteq B_C$, on a $|L_l \cap C| \geq 3$. Par définition, q représente le nombre de ces lignes.

D'où, il vient

$$|C \setminus A_C| \geq 2(2n - 6 - x - q) + 3q$$

(le premier terme car il y a exactement deux éléments dans ce nombre de lignes ; le deuxième terme car il a au moins trois éléments dans les lignes restantes)

$$\Leftrightarrow |C \setminus A_C| \geq 4n - 12 - 2x + q.$$

D'où, on obtient alors

$$\begin{aligned} |C| &\geq 4n - 12 - x + q \\ \Rightarrow 2n - 5 &\geq 4n - 12 - x + q \\ &\Leftrightarrow x \geq 2n - 7 + q. \end{aligned}$$

Vu le Lemme 2.1, on a $cs(C) \geq n - 1$ et chaque mot code de B_C est colonne-isolé. Ainsi, il existe au moins deux mots codes de C dans chacune des $n - 1 - y$ colonnes restantes disjointes de l'ensemble des colonnes qui contiennent au moins un élément de B_C .

Donc on a

$$\begin{aligned} |C \setminus B_C| &\geq 2(n - 1 - y) \\ &\Leftrightarrow |C| \geq 2n - 2 - y \\ \Rightarrow 2n - 5 &\geq 2n - 2 - y \\ &\Leftrightarrow y \geq 3. \end{aligned}$$

On a alors

$$2n - 5 \geq |C| \geq x + y - 1 \geq 2n - 7 + q + 3 - 1 \geq 2n - 5 + q.$$

Donc $q = 0$. De plus, on a l'égalité $C = A_C \cup B_C$.

Or, on a $y \geq 3$ et seulement un de ces mots codes colonne-isolé peut être isolé (i.e. ligne-isolé aussi). Ainsi, $q \geq 1$ car chaque mot code de C est soit ligne-isolé soit colonne-isolé. On obtient donc une absurdité puisqu'on avait trouvé $q = 0$.

— Supposons que $ls(C) = 2n - 5$. Par un argument similaire au cas précédent, on a

$$\begin{aligned} |C \setminus A_C| &\geq 2(2n - 5 - x) \\ &\Leftrightarrow |C| \geq 4n - 10 - x \\ \Rightarrow 2n - 5 &\geq 4n - 10 - x \\ &\Leftrightarrow x \geq 2n - 5. \end{aligned}$$

Etant donné qu'on a exactement $2n - 5$ lignes contenant des éléments du code (car $ls(C) = 2n - 5$) et que le nombre minimum de lignes ne contenant qu'un seul sommet vaut également $2n - 5$ (par définition de x), tous les sommets sont lignes-isolés. D'où, on a $|C| = 2n - 5$ et $C = A_C$. Et ainsi, on obtient aussi $cs(C) = cs(A_C) \leq \frac{2n-6}{2} + 1 = n - 2$. En effet, on sait que $C = A_C$ et $|C| = 2n - 5$. Etant donné qu'on a maximum un seul mot-code qui peut être à la fois ligne-isolé et colonne-isolé, on a au moins deux sommets par colonne pour toutes les colonnes contenant un élément de C , sauf éventuellement une. Ceci peut s'écrire de la manière suivante

$$|C| \geq 2(cs(C) - 1) + 1.$$

En substituant, on obtient alors $2n - 5 \geq 2(cs(C) - 1) + 1$, puis en isolant $cs(C)$, on trouve l'inégalité voulue, i.e. $cs(C) = cs(A_C) \leq \frac{2n-6}{2} + 1 = n - 2$. Ceci est absurde par le Lemme 2.1 (car $cs(C) \geq n - 1$).

Vu les deux cas traités, il n'existe pas de code identifiant C tel que $|C| \leq 2n - 5$. Ainsi, on a $\gamma^{ID}(K_{2n-5} \times K_n) \geq 2n - 4$.

L'ensemble suivant est, par la Proposition 2.2, un code identifiant de cardinal $2n - 4$:

$$D = \{(2i-1, i), (2i, i) | 1 \leq i \leq n-4\} \cup \{(2n-7, n-3), (2n-7, n-2), (2n-7, n-1), (2n-6, n)\}.$$

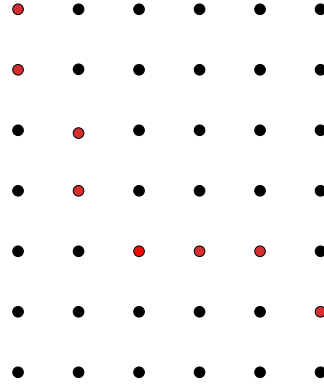


FIGURE 2.30 – Exemple de D pour $K_7 \times K_6$.

- (1) On a $1 \leq 2 < 4 < 5 \leq 7$, $1 \leq 1 < 2 < 3 \leq 6$ et $(2, 1), (4, 2), (5, 3) \in C$.
- (2) Par construction, chaque sommet est soit ligne-isolé soit colonne-isolé.
- (3) Il n'y a pas de mot code dans la dernière ligne, par construction. Donc $ls(C) = m - 1$ et $cs(C) = n$.
- (4) Il y a au plus un sommet isolé : $(6, 6) = (2n - 6, n)$ dans ce cas-ci, par construction.
- (5) La ligne contenant des mots codes colonnes-isolés mais pas lignes-isolés contient trois mots codes.

Donc par la Proposition 2.2, D est un code identifiant. De plus, on peut compter le nombre d'éléments de D :

$$|D| = 2(n - 4) + 4 = 2n - 8 + 4 = 2n - 4.$$

Il s'agit donc bien d'un code identifiant de cardinal $2n - 4$. □

Enfin, un dernier théorème sur le produit direct de deux cliques apparaît.

Théorème 2.5. Soient n et m des entiers positifs tels que $6 \leq n \leq m \leq 2n - 2$ et $m \not\equiv 2n - 5 \pmod{3}$. Si $n + m \equiv 1 \pmod{3}$, alors

$$\gamma^{ID}(K_m \times K_n) = \left\lceil \frac{2m + 2n}{3} \right\rceil.$$

Démonstration. D'abord, remarquons que

$$\left\lceil \frac{2m+2n}{3} \right\rceil = \frac{2m+2n+1}{3}$$

car $2m+2n = 2(m+n) \equiv 2 \pmod{3}$.

Supposons qu'il existe un code identifiant C de $K_m \times K_n$ tel que $|C| \leq \frac{2n+2m+1}{3} - 1$.

Considérons quatre cas (sur base des différentes valeurs que $cs(C)$ et $ls(C)$ peuvent prendre) et montrons que ce n'est pas possible.

— Cas 1 : Supposons que $cs(C) = n$ et $ls(C) = m$.

Par un raisonnement similaire à celui du cas 1 du Théorème 2.3, on a $y \geq \frac{4n-2m+2}{3}$ et $x \geq \frac{4m-2n+2}{3}$.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} & |C| \geq x + y - 1 \\ \Leftrightarrow |C| & \geq \frac{4m-2n+2+4n-2m+2}{3} - 1 \\ \Leftrightarrow |C| & \geq \frac{2m+2n+4}{3} - 1 \\ \Leftrightarrow |C| & \geq \frac{2m+2n+1}{3}. \end{aligned}$$

Or, on sait que $\frac{2m+2n+1}{3} - 1 \geq |C| \geq \frac{2m+2n+1}{3}$. Ceci est absurde.

— Cas 2 : Supposons que $cs(C) = n-1$ et $ls(C) = m$. Par la Notation 2.4, on a $|B_C| = y$. On a $cs(C) = n-1$: il existe donc au moins deux mots codes dans chacune des $n-1-y$ colonnes restantes disjointes de l'ensemble des colonnes qui ont au moins un élément de B_C . Cependant, par le Corollaire 2.2, on sait que $|C \cap C_j| \geq 3$ pour toute colonne C_j telle que $C \cap C_j \subseteq A_C$. Par définition, p représente le nombre de ces colonnes. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} |C \setminus B_C| & \geq 2(n-1-y-p) + 3p \\ \Leftrightarrow |C \setminus B_C| & \geq 2n-2-2y+p. \end{aligned}$$

D'où, on obtient $|C| \geq 2n-2-y+p$. Or, on a aussi $\frac{2n+2m+1}{3} - 1 \geq |C| \geq 2n-2-y+p$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} y & \geq 2n-2+p+1 - \frac{2n+2m+1}{3} \\ \Leftrightarrow y & \geq p-1 + \frac{6n-2n-2m-1}{3} \\ \Leftrightarrow y & \geq p-1 + \frac{4n-2m-1}{3} \\ \Leftrightarrow y & \geq \frac{4n-2m-4}{3} + p. \end{aligned}$$

De même, on a $ls(C) = m$ et $x = |A_C|$ donc $|C \setminus A_C| \geq 2(m-x)$, d'où $|C| \geq 2m-x$.

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{2n+2m+1}{3} - 1 &\geq 2m - x \\ \Leftrightarrow x &\geq 2m + 1 - \frac{2n+2m+1}{3} \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{4m-2n+2}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{2n+2m+1}{3} - 1 &\geq |C| \geq x + y - 1 \\ &\geq \frac{4n-2m-4+4m-2n+2}{3} + p - 1 \\ &\geq \frac{2m+2n+1}{3} + p - 2. \end{aligned}$$

Donc $p \leq 1$.

Si $p = 1$, on a l'égalité et $C = A_C \cup B_C$. Dans ce cas, on a alors $y = \frac{4n-2m-1}{3}$ et $x = \frac{4m-2n+2}{3}$. De plus, C contient un mot code isolé, nommons-le v .

Puisque $p = 1$, il existe une colonne C_i telle que $A_C \setminus \{v\} = C \cap C_i$. En effet, par définition, $A_C \setminus \{v\}$ représente l'ensemble des mots codes lignes isolés sauf le sommet v . Celui-ci étant l'unique mot code isolé (i.e. ligne-isolé ET colonne-isolé), $A_C \setminus \{v\}$ représente alors l'ensemble des mots codes lignes-isolés mais pas colonnes-isolés. Par ailleurs, $C \cap C_i$ nous donne l'ensemble des mots codes lignes-isolés (mais pas colonnes-isolés) par définition de p : en effet, on a $p = 1$ donc il n'existe qu'une seule colonne contenant au moins deux éléments du code lignes-isolés. Ainsi, on obtient bien les deux mêmes ensembles. D'où, il vient

$$cs(A_C) = cs(A_C \setminus \{v\}) + cs(\{v\}).$$

Il s'ensuit que $cs(A_C) = 2$.

Par ailleurs, on a $cs(C) = n - 1$ donc $B_C \setminus \{v\}$ contient les $n - 3$ colonnes restantes. Donc il vient

$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{4n-2m-1}{3} - 1 = n - 3 \\ \Leftrightarrow 4n - 2m - 1 - 3 &= 3n - 9 \\ \Leftrightarrow n - 2m &= -9 + 3 + 1 \\ \Leftrightarrow n - 2m &= -5. \end{aligned}$$

Ceci est absurde vu les conditions sur n et m . En effet, par hypothèse, on sait que $n \leq m$. Or, vu l'égalité précédente, on sait que $n = 2m - 5$. Dès lors, on obtient

$$\begin{aligned} n &\leq m \\ \Leftrightarrow 2m - 5 &\leq m \\ \Leftrightarrow m &\leq 5. \end{aligned}$$

Ceci est absurde par hypothèse. On en tire donc que $p = 0$.

Supposons d'abord que C ne contient pas de mot code isolé. Alors, on a nécessairement $C = A_C \cup B_C$. Comme dans le cas 2 du Théorème 2.3, on obtient une absurdité.

Ainsi, C contient un mot code isolé, nommons-le v . Puisque $p = 0$, toute colonne contenant un mot code ligne-isolé autre que v contient aussi un mot code qui n'est pas ligne-isolé. Remarquons que $x \geq \frac{4m-2n+2}{3} \geq 5$ (vu les conditions sur m et n) et donc, il existe une colonne C_i telle que $A_C \setminus \{v\} \subseteq C \cap C_i$.

De plus, il existe un mot code (r, i) qui n'est ni ligne-isolé ni colonne-isolé. Donc on a $C = A_C \cup B_C \cup \{(r, i)\}$ et ainsi $y = \frac{4n-2m-4}{3}$.

On a alors $cs(A_C) = cs(A_C \setminus \{v\}) + cs(\{v\})$. Or, on a $A_C \setminus \{v\} \subseteq C \cap C_i$ d'où $cs(A_C \setminus \{v\}) = 1$ (une seule colonne contient des éléments du code situés dans $A_C \setminus \{v\}$). Ainsi, on obtient alors $cs(A_C) = 2$. Par ailleurs, on a aussi $cs(C) = n - 1$ donc $B_C \setminus \{v\}$ contient les $n - 3$ colonnes restantes.

D'où, on obtient désormais

$$\begin{aligned} n - 3 &= \frac{4n - 2m - 4}{3} - 1 \\ \Leftrightarrow 3n - 9 &= 4n - 2m - 4 - 3 \\ \Leftrightarrow 2m &= n + 2. \end{aligned}$$

Ceci est absurde vu les conditions sur n et m :

$$\begin{aligned} n &\leq m \\ \Leftrightarrow 2m - 2 &\leq m \\ \Leftrightarrow m &\leq 2. \end{aligned}$$

Ceci est impossible.

— Cas 3 : Supposons que $cs(C) = n$ et $ls(C) = m - 1$.

Puisque $|A_C| = x$ et $ls(C) = m - 1$, il existe au moins deux mots codes dans chacune des $m - 1 - x$ lignes restantes disjointes de l'ensemble des lignes qui ont une intersection non vide avec A_C . Cependant, vu le Corollaire 2.2, on a $|C \cap L_l| \geq 3$ pour toute ligne L_l telle que $C \cap L_l \subseteq B_C$. Par définition, q représente ce nombre de lignes. On a alors $|C \setminus A_C| \geq 2(m - 1 - x - q) + 3q$. Donc, il vient

$$|C| \geq 2m - 2 - x + q.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{2n+2m+1}{3} - 1 &\geq |C| \geq 2m - 2 - x + q \\
 \Rightarrow x &\geq 2m - 2 + q + 1 - \frac{2n+2m+1}{3} \\
 \Leftrightarrow x &\geq \frac{6m-3-2n-2m-1}{3} + q \\
 \Leftrightarrow x &\geq \frac{4m-2n-4}{3} + q.
 \end{aligned}$$

De même, puisque $cs(C) = n$ et $|B_C| = y$, on a $|C \setminus B_C| \geq 2(n - y)$ et $|C| \geq 2n - y$. D'où, on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{2n+2m+1}{3} - 1 &\geq 2n - y \\
 \Leftrightarrow y &\geq 2n + 1 - \frac{2n+2m+1}{3} \\
 \Leftrightarrow y &\geq \frac{4n-2m+2}{3}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\frac{2m+2n+1}{3} - 1 \geq |C| \geq x + y - 1 \geq \frac{4m-2n-4}{3} + q + \frac{4n-2m+2}{3} - 1 \geq \frac{2m+2n+1}{3} + q - 2$.

D'où, on a $q \leq 1$.

Supposons d'abord que $q = 1$.

Ainsi, on a l'égalité ci-dessus, $C = A_C \cup B_C$, $x = \frac{4m-2n-1}{3}$ et $y = \frac{4n-2m+2}{3}$.

De plus, C contient un mot code isolé, nommons-le v . Puisque $q = 1$, il existe une ligne L_l telle que $B_C \setminus \{v\} = C \cap L_l$. Donc on a $ls(B_C) = ls(B_C \setminus \{v\}) + ls(\{v\})$. Vu l'égalité précédente, il vient $ls(B_C \setminus \{v\}) = ls(C \cap L_l) = 1$. Ainsi, on obtient alors $ls(B_C) = ls(B_C \setminus \{v\}) + ls(\{v\}) = 2$.

D'autre part, on a aussi $ls(C) = m - 1$ donc $A_C \setminus \{v\}$ contient les $m - 3$ lignes restantes. Alors, on a

$$\begin{aligned}
 m - 3 &= \frac{4m-2n-1}{3} - 1 \\
 \Leftrightarrow 3m - 9 &= 4m - 2n - 1 - 3 \\
 \Leftrightarrow -9 + 1 + 3 &= 4m - 3m - 2n \\
 \Leftrightarrow -5 &= m - 2n \\
 \Leftrightarrow m &= 2n - 5.
 \end{aligned}$$

Ceci est absurde car par hypothèse, $m \neq 2n - 5$.

Ainsi, on a $q = 0$.

- Si C ne contient aucun mot code isolé, alors on a nécessairement $C = A_C \cup B_C$ et même $C = A_C$ car $q = 0$. Puisque $cs(C) = n$ et qu'il n'existe pas de mot code isolé, on a $|C| \geq 2n$ (on sait qu'il y a un mot code dans chaque colonne, qu'aucun n'est tout seul dans sa ligne ni dans sa colonne et que $C = A_C$). D'où, on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{2m + 2n + 1}{3} - 1 &\geq |C| \geq 2n \\
 \Rightarrow 2m + 2n + 1 - 3 &\geq 6n \\
 \Leftrightarrow 2m - 2 &\geq 4n \\
 \Leftrightarrow m - 1 &\geq 2n \\
 \Leftrightarrow m &\geq 2n + 1.
 \end{aligned}$$

Ceci est absurde car par hypothèse $m \leq 2n - 2$.

- Supposons alors que C possède un mot code isolé, appelons-le v . Puisque $q = 0$, chaque ligne contenant un mot code colonne-isolé autre que v contient aussi un mot code qui n'est pas colonne-isolé. On a $y \geq \frac{4n-2m+2}{3} \geq \frac{4n-2(2n-2)+2}{3} = 2$. Il existe donc une ligne L_l telle $B_C \setminus \{v\} \subset C \cap L_l$. De plus, il existe un mot code $(l, i) \in C \cap L_l$ qui n'est pas colonne-isolé. Ainsi, on obtient $C = A_C \cup B_C \cup \{(l, i)\}$ et donc $x = \frac{4m-2n-4}{3}$. Il s'ensuit que $ls(B_C) = ls(B_C \setminus \{v\}) + ls(\{v\})$. Or, puisque $B_C \setminus \{v\} \subset C \cap L_l$, il vient $ls(B_C \setminus \{v\}) = 1$ (une seule ligne contient des éléments du code situés dans $B_C \setminus \{v\}$). On a alors $ls(B_C) = 2$. Par ailleurs, on a $ls(C) = m - 1$ et $A_C \setminus \{v\}$ contient les $m - 3$ lignes restantes. Donc il vient

$$\begin{aligned}
 m - 3 &= \frac{4m - 2n - 4}{3} - 1 \\
 \Leftrightarrow 3m - 9 &= 4m - 2n - 4 - 3 \\
 \Leftrightarrow -9 + 4 + 3 &= 4m - 3m - 2n \\
 \Leftrightarrow -2 &= m - 2n \\
 \Leftrightarrow m &= 2n - 2.
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a, vu précédemment,

$$x = \frac{4(2n - 2) - 2n - 4}{3} = \frac{8n - 8 - 2n - 4}{3} = \frac{6n - 12}{3} = 2n - 4$$

et

$$y = 2.$$

Un seul mot code pouvant être à la fois ligne-isolé et colonne-isolé et vu qu'on a au moins deux sommets par colonne pour toutes les colonnes contenant un

élément de C sauf éventuellement une, il vient $|C| \geq 2(cs(C) - 1) + 1$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} |C| &= |A_C| + |B_C| + 1 - 1 \\ &= x + y \\ &= 2n - 4 + 2 \\ &= 2n - 2. \end{aligned}$$

D'où, il vient

$$\begin{aligned} |C| &\geq 2(cs(C) - 1) + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2n - 3}{2} &\geq cs(C) - 1 \\ \Leftrightarrow n - \frac{3}{2} + 1 &\geq cs(C) \\ \Leftrightarrow n - \frac{1}{2} &\geq cs(C). \end{aligned}$$

On obtient alors $n = cs(C) \leq n - \frac{1}{2}$. Ceci est bien entendu absurde.

— Cas 4 : Supposons que $cs(C) = n - 1$ et $ls(C) = m - 1$. Par les cas 2 et 3, on a

$$y \geq \frac{4n - 2m - 4}{3} + p \text{ et } x \geq \frac{4m - 2n - 4}{3} + q.$$

Puisqu'on a $cs(C) = n - 1$ et $ls(C) = m - 1$, par le Corollaire 2.3, on sait que C ne contient pas de mot code isolé. D'où, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{2m + 2n + 1}{3} - 1 &\geq |C| \geq x + y \geq \frac{4m - 2n - 4 + 4n - 2m - 4}{3} + p + q \\ &\geq \frac{2m + 2n + 1}{3} - 3 + p + q. \end{aligned}$$

On en déduit alors que $p + q \leq 2$.

- Supposons que $p = 0$. Alors, pour chaque colonne C_i où $A_C \cap C_i \neq \emptyset$, il existera un autre mot code dans C_i qui n'est pas ligne-isolé (\star).

Pour garantir le fait que $\frac{2m+2n+1}{3} - 1 \geq |C|$, C contient au moins deux mots codes tels que (\star). C'est pourquoi on a $cs(A_C) \leq 2$.

Si $cs(A_C) = 2$, alors on a $y = \frac{4n-2m-4}{3}$ et on obtient

$$n - 1 = cs(C) = cs(A_C) + cs(B_C) = 2 + \frac{4n - 2m - 4}{3}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} n - 1 &= \frac{6 + 4n - 2m - 4}{3} \\ \Leftrightarrow 3n - 3 &= 4n - 2m + 2 \\ \Leftrightarrow -5 &= n - 2m. \end{aligned}$$

Ceci est absurde par hypothèse. En effet, ceci nous donne $n = 2m - 5$ mais par hypothèse $n \leq m$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} 2m - 5 &\leq m \\ \Leftrightarrow m &\leq 5. \end{aligned}$$

D'où, on obtient une contradiction car par hypothèse, $m \geq 6$.

On a donc obligatoirement $cs(A_C) < 2$.

Par ailleurs, $x \geq \frac{4m-2n-4}{3} + q \geq \frac{8}{3}$ (lorsque $m = n = 6$ et $q = 0$, on a bien $\frac{8}{3}$ bien que cela ne respecte pas les conditions initiales sur m et n). Donc C contient un mot code qui n'est ni ligne-isolé ni colonne-isolé tel que $cs(A_C) = 1$. Pour avoir $\frac{2m+2n+1}{3} - 1 \geq |C|$, on doit avoir $y \leq \frac{4n-2m-4}{3} + 1$. On remarque encore que

$$cs(C) = cs(A_C) + cs(B_C) = 2 + \frac{4n - 2m - 4}{3}.$$

Ceci est absurde, pour les mêmes raisons qu'ici plus haut. Donc $p \neq 0$.

- Supposons à présent que $q = 0$. Alors pour chaque ligne L_l où $B_C \cap L_l \neq \emptyset$ (i.e. chaque ligne contenant un élément du code colonne-isolé), il existe un autre mot code dans L_l qui n'est pas colonne-isolé. Puisque $p \neq 0$, C contient au plus un tel mot code et, il s'ensuit que $ls(B_C) \leq 1$. Par ailleurs, on a $y \geq \frac{2n-2m-4}{3} + p \geq p \geq 1$. Puisque C ne contient pas de mot code isolé, on a aussi $ls(B_C) = 1$. Donc C contient un mot code qui n'est ni ligne-isolé, ni colonne-isolé : nommons-le v . On peut dès lors écrire $C = A_C \cup B_C \cup \{v\}$. Puisque v n'est pas colonne-isolé et $p = 1$, on a $cs(A_C) = 2$. Ceci implique que $|C| = m - 1 + n - 3 = m + n - 4$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} m + n - 4 &\leq \frac{2m + 2n + 1}{3} - 1 \\ \Leftrightarrow 3m + 3n - 12 &\leq 2m + 2n + 1 - 3 \\ \Leftrightarrow m + n &\leq 10. \end{aligned}$$

Ceci est absurde car par hypothèse $6 \leq n \leq m$.

- Supposons dès lors que $p \neq 0$ et $q \neq 0$, c'est-à-dire $p = 1$ et $q = 1$ (car $p + q \leq 2$). Dans ce cas, on a alors $x \geq \frac{4m-2n-4}{3} + 1$ et $y \geq \frac{4n-2m-4}{3} + 1$. D'où, il vient

$$\begin{aligned} \frac{2m + 2n + 1}{3} - 1 &\geq |C| \geq x + y \\ &\geq \frac{4m - 2n - 4 + 4n - 2m - 4}{3} + 1 + 1 \\ &\geq \frac{2n + 2m + 1}{3} - 1. \end{aligned}$$

Donc on a l'égalité et $C = A_C \cup B_C$.

Par ailleurs, puisque $p = 1$ alors on a $cs(A_C) = 1$. Puisque $cs(C) = n - 1$, alors B_C contient les $n - 2$ colonnes restantes. On obtient alors

$$\begin{aligned} n - 2 &= \frac{4n - 2m - 4}{3} + 1 \\ \Leftrightarrow 3n - 6 &= 4n - 2m - 4 + 3 \\ \Leftrightarrow -6 + 4 - 3 &= n - 2m \\ \Leftrightarrow -5 &= n - 2m. \end{aligned}$$

Ceci est absurde pour les mêmes raisons que précédemment.

Vu les quatre cas que nous venons de traiter, nous savons désormais qu'il n'existe pas de code identifiant C de $K_m \times K_n$ tel que $|C| \leq \frac{2m+2n+1}{3} - 1$. Donc tout code identifiant C de $K_m \times K_n$ est tel que $|C| \geq \left\lceil \frac{2m+2n}{3} \right\rceil$.

Nous présentons dès lors des codes identifiants afin de montrer que cette borne inférieure est atteinte grâce à la Proposition 2.1.

- Si $m \neq 2n - 2$, soit

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(1, 1)\} \cup \{(2i, i), (2i + 1, i) | 1 \leq i \leq a\} \\ &\quad \cup \{(2a + j + 1, a + 2j - 1), (2a + j + 1, a + 2j) | 1 \leq j \leq b\} \end{aligned}$$

$$\text{où } a = \frac{2m - n - 2}{3} \text{ et } b = \frac{2n - m + 1}{3}.$$

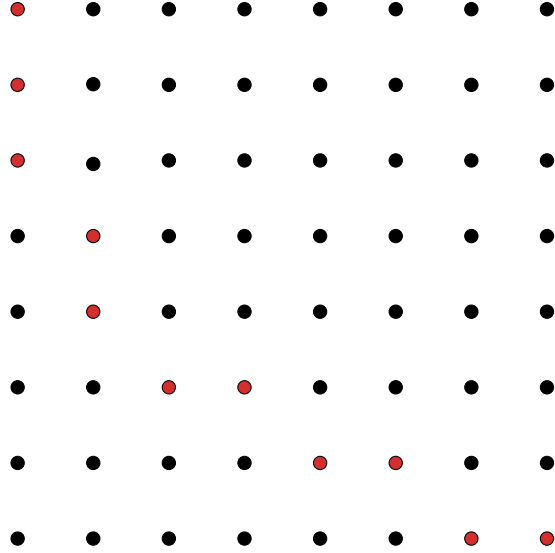


FIGURE 2.31 – Exemple de D_1 pour $K_8 \times K_8$.

- (1) On a $1 \leq 2 < 4 < 6 \leq 8$, $1 \leq 1 < 2 < 3 \leq 8$ et $(2, 1)$, $(4, 2)$, $(6, 3) \in C$.
- (2) Par construction, chaque sommet est soit ligne-isolé soit colonne-isolé.

(3) Toutes les lignes et toutes les colonnes contiennent au moins un élément du code par construction.

(4) Dans notre cas, il n'y a aucun sommet isolé.

Donc par la Proposition 2.1, D_1 est un code identifiant.

De plus, on peut compter le nombre d'éléments de D_1 :

$$\begin{aligned}
 |D_1| &= 1 + 2a + 2b \\
 &= 1 + \frac{2}{3}(2m - n - 2 + 2n - m + 1) \\
 &= \frac{2}{3}(m + n + 2) \\
 &= \frac{2m + 2n + 1}{3} \\
 &= \left\lceil \frac{2m + 2n}{3} \right\rceil.
 \end{aligned}$$

- Si $m = 2n - 2$, soit

$$D_2 = \{(1, 1)\} \cup \{(2i, i), (2i + 1, i) | 1 \leq i \leq n - 2\} \cup \{(2n - 2, n - 1), (2n - 2, n)\}.$$

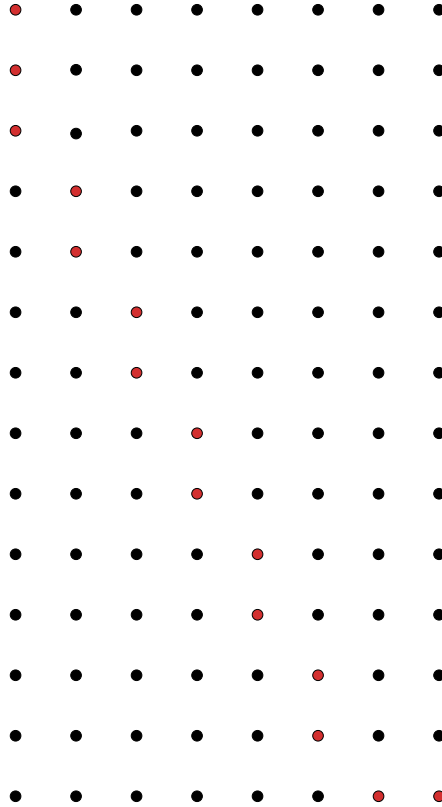


FIGURE 2.32 – Exemple de D_2 pour $K_{14} \times K_8$.

- (1) On a $1 \leq 2 < 4 < 6 \leq 14$ et $1 \leq 1 < 2 < 3 \leq 8$, et $(2, 1), (4, 2), (6, 3) \in C$.
- (2) Par construction, chaque sommet est soit ligne-isolé soit colonne-isolé.
- (3) Toutes les lignes et toutes les colonnes contiennent au moins un élément du code par construction.
- (4) Dans notre cas, il n'y a aucun sommet isolé.

Donc par la Proposition 2.1, D_2 est un code identifiant.

De plus, on peut compter le nombre d'éléments de D_2 :

$$\begin{aligned}
 |D_2| &= 1 + 2(n - 2) + 2 \\
 &= 1 + 2n - 4 + 2 \\
 &= 2n - 1.
 \end{aligned}$$

Or, il vient

$$\begin{aligned}
 \left\lceil \frac{2m + 2n}{3} \right\rceil &= \left\lceil \frac{2(2n - 2) + 2n}{3} \right\rceil \\
 &= \left\lceil \frac{4n - 4 + 2n}{3} \right\rceil \\
 &= \left\lceil 2n - \frac{4}{3} \right\rceil \\
 &= 2n - 1.
 \end{aligned}$$

On a donc bien un code identifiant de cardinal $\left\lceil \frac{2m + 2n}{3} \right\rceil$.

□

Au travers de tous ces résultats, nous venons de traiter tous les cas possibles de produit direct de deux cliques, en fonction de la taille de ces cliques. Dans chaque cas, nous avons pu trouver le cardinal minimum d'un code identifiant de chacun de ces graphes : nous remarquons alors qu'en fonction des tailles m et n des cliques considérées nous avons toujours $\left\lceil \frac{2m + 2n}{3} \right\rceil \leq K_m \times K_n \leq \left\lceil \frac{2m + 2n}{3} \right\rceil$. L'objectif de cette section est donc atteint. Rappelons tout de même que nous nous trouvons ici dans un cas très particulier et qu'il est généralement impossible, le problème est dit difficile, de trouver le cardinal minimum d'un code identifiant d'un graphe quelconque.

2.2 Produit cartésien

Dans cette seconde partie concernant les produits de graphes, nous considérons un deuxième produit : le produit cartésien. Comme dans la section précédente, nous espérons pouvoir trouver le cardinal minimum d'un code identifiant d'un graphe, ce graphe étant le produit cartésien de deux cliques. Cependant, dans ce cas-ci, nous devons procéder en deux temps : dans un premier temps, nous allons regarder ce qu'il se passe lorsque nous considérons deux cliques de même taille. Par la suite, nous tenterons d'étendre le résultat obtenu au produit cartésien de deux cliques de tailles différentes. Nous espérons à nouveau dans ce cas-ci, obtenir une valeur exacte plutôt que des bornes, ce qui n'est pas aisé généralement.

Définition 2.4. Soient deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$. Le produit cartésien de G_1 et G_2 , noté $G_1 \square G_2$, est le graphe de l'ensemble des sommets $V_1 \times V_2$ et tel que :

- $(x, y)(x, y') \in E(G_1 \square G_2)$ si et seulement si $yy' \in E(G_2)$,
- $(x, y)(x', y) \in E(G_1 \square G_2)$ si et seulement si $xx' \in E(G_1)$,
- $(x, y)(x', y') \notin E(G_1 \square G_2)$ si $x \neq x'$ et $y \neq y'$.

Exemple 2.2.

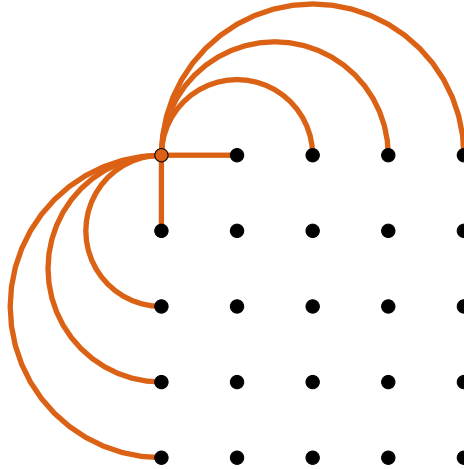


FIGURE 2.33 – $K_5 \square K_5$

Dans le graphe de la Figure 2.33, nous avons représenté les arêtes incidentes au sommet $(1, 1)$. Nous remarquons alors que par définition du produit cartésien, deux sommets sont adjacents s'ils sont situés soit sur la même ligne, soit sur la même colonne, en ce qui concerne le produit cartésien de deux cliques.

Le but est, une fois encore, de définir le cardinal minimum du produit de graphes.

2.2.1 Cliques de même taille

Dans un premier temps, regardons les résultats obtenus pour les graphes qui sont les produits cartésiens de deux cliques de même taille.

Ce théorème a été démontré en 2008 par S. GRAVIER, J. MONCEL et A. SEMRI ([12]).

Théorème 2.6. *Soit C un code identifiant minimum de $K_n \square K_n$. Alors on a $|C| = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$. De plus, si $n \geq 5$ est impair, alors il y a un unique code identifiant de cardinal $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$ (à permutation des lignes et des colonnes près).*

Avant d'entamer la démonstration de ce théorème, nous devons d'abord introduire quelques notations, définitions ainsi qu'un lemme.

Nous définissons tout d'abord les lignes et les colonnes de $K_n \square K_n$ de la même manière que précédemment, dans la Définition 2.2.

Définition 2.5. Une ligne L_x pour $x \in \{1, \dots, n\}$ de $K_n \square K_n$ est l'ensemble des sommets $\{(x, i) | i = 1, \dots, n\}$. De même, une colonne C_y pour $y \in \{1, \dots, n\}$ de $K_n \square K_n$ est l'ensemble des sommets $\{(i, y) | i = 1, \dots, n\}$.

Définition 2.6. Une *1-ligne* est une ligne L_x telle que $|L_x \cap C| = 1$ (c'est-à-dire une ligne contenant exactement un élément du code). Par ailleurs, une *2⁺-ligne* est une ligne L_x telle que $|L_x \cap C| \geq 2$ (c'est-à-dire une ligne contenant deux éléments du code ou plus).

Définition 2.7. De même, une *1-colonne* est une colonne C_y telle que $|C_y \cap C| = 1$ (c'est-à-dire une colonne contenant exactement un élément du code). Par ailleurs, une *2⁺-colonne* est une colonne C_y telle que $|C_y \cap C| \geq 2$ (c'est-à-dire une colonne contenant deux éléments du code ou plus).

Définition 2.8. Un sommet $(x, y) \in C$ est un $[a, b]$ -sommet si $|L_x \cap C| = a$ et si $|C_y \cap C| = b$. Il y a donc a éléments du code dans la ligne et b éléments du code dans la colonne.

Exemple 2.3. Dans le graphe de la Figure 2.34, les sommets du code sont représentés en rouge. Dans ce cas, la ligne L_3 (resp. la colonne C_3) est une 1-ligne (resp. 1-colonne) car elle ne contient qu'un seul élément du code tandis que la ligne L_4 (resp. la colonne C_2) est une 2⁺-ligne (resp. 2⁺-colonne) car elle contient deux éléments du code. De plus, le sommet A est un (1, 2)-sommet car la ligne L_1 ne contient qu'un seul élément du code tandis que la colonne C_1 contient deux éléments du code.

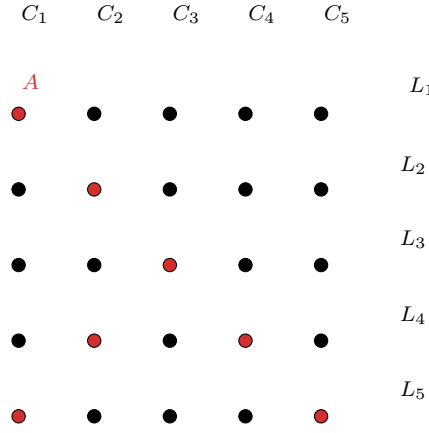


FIGURE 2.34 – Exemple

Notation 2.5. Un $[\star, 1]$ -sommet (resp. $[1, \star]$ -sommet) est un $[a, b]$ -sommet tel que $a = \star$ et $b = 1$ (resp. $a = 1$ et $b = \star$) i.e. un sommet tel que la ligne (resp. colonne) dans laquelle il se trouve peut contenir un nombre quelconque d'éléments du code mais la colonne (resp. ligne) dans laquelle il se situe ne contient aucun autre élément du code que lui-même.

Lemme 2.4. *Il n'existe pas deux $[\star, 1]$ -sommets dans la même ligne. Par symétrie, il n'existe pas deux $[1, \star]$ -sommets dans la même colonne.*

Démonstration. Procédons par l'absurde. Supposons que $(1, x)$ et $(1, y)$ sont deux $[\star, 1]$ -sommets, avec $x \neq y$.

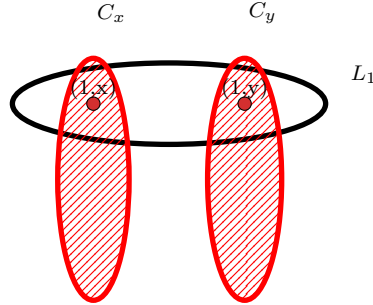


FIGURE 2.35 – Illustration

Ainsi, $(1, x)$ est un $[a, 1]$ -sommet pour un certain a et $(1, y)$ est un $[a', 1]$ -sommet pour un certain a' . Donc on a $|C_x \cap C| = 1$ et $|L_1 \cap C| = a$. De même, on a $|C_y \cap C| = 1$ et $|L_1 \cap C| = a'$. Ainsi, on obtient $a = a'$. Or, par définition d'un $[a, b]$ -sommet, $(1, x) \in C$ et $(1, y) \in C$. Puisque $a = a'$, tous les éléments de $I(1, x)$ intersectés avec la première ligne sont ceux de $I(1, y)$ intersectés avec la première ligne. De plus, on n'a pas d'autre sommet du code dans chacune des colonnes. Ainsi, on a $I(1, x) = I(1, y)$. Or, on sait que $x \neq y$, par hypothèse, c'est-à-dire $(1, x) \neq (1, y)$.

Ceci est absurde car si ces deux sommets sont différents, ils ont forcément des voisinages fermés intersectés avec le code différents (par la propriété de séparation des codes identifiants). Il n'existe donc pas deux $[\star, 1]$ -sommets dans la même ligne. La démonstration est analogue pour les colonnes. \square

Nous pouvons dès lors passer à la démonstration du Théorème 2.6.

Théorème 2.6. *Soit C un code identifiant minimum de $K_n \square K_n$. Alors on a $|C| = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$. De plus, si $n \geq 5$ est impair, alors il y a un unique code identifiant de cardinal $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$ (à permutation des lignes et des colonnes près).*

Démonstration. Pour rappel, nous numérotons les sommets de $K_n \square K_n$ comme les éléments d'une matrice.

Soit $D = \{(x, x) | x = 1, \dots, n\}$, la diagonale principale (en orange). Si n est impair, soit $A = \{(n - x + 1, x) | x = 1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$. Si n est pair, soit $A = \{(n - x + 1, x) | x = 1, \dots, \frac{n}{2}\}$. L'ensemble A (en rose) est donc l'ensemble des points situés sur la demi-diagonale inverse inférieure.

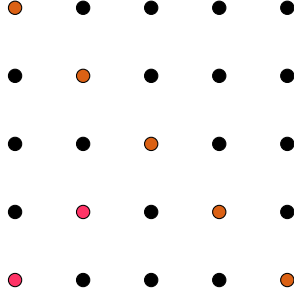


FIGURE 2.36 – $D \cup A$ avec n impair.

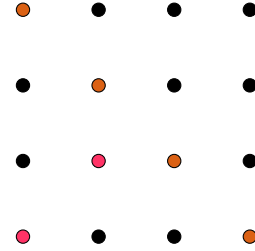
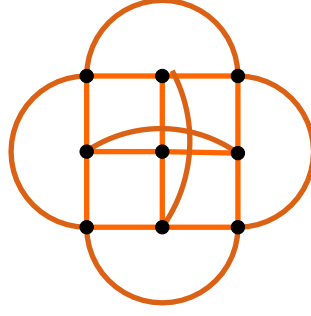


FIGURE 2.37 – $D \cup A$ avec n pair.

Nous allons montrer qu'un code identifiant de cardinal $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$ existe (i) et que tous les autres codes identifiants sont de cardinal supérieur ou égal à $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$ (ii).

(i) Existence.

Montrons que $D \cup A$ est un code identifiant de $K_n \square K_n$ de cardinal $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$. Dans un premier temps, montrons que D est dominant. L'ensemble D est dominant car, par construction, il contient un élément de chaque ligne (et de chaque colonne). De plus, par construction, un élément d'une ligne (resp. colonne) possède une arête commune avec tous les autres éléments de sa ligne (resp. colonne). La Figure 2.38 nous donne un exemple de toutes les arêtes présentes dans $K_3 \square K_3$.

FIGURE 2.38 – $K_3 \square K_3$

Ainsi, l'ensemble $D \cup A$ est également dominant car en ajoutant les sommets de A à D , les sommets restent "encore plus fortement" connectés entre eux.

Regardons à présent si $D \cup A$ est séparant. Pour cela, il suffit de vérifier si chaque paire de sommets $(x, y), (a, b) \in V(K_n \square K_n)$ est séparée.

- Si $a \neq x$ et $a \neq y$ (resp. $b \neq x$ et $b \neq y$), alors $(a, a) \in N((a, b)) \setminus N((x, y))$ (resp. $(b, b) \in N((a, b)) \setminus N((x, y))$) et $I[(a, b)] \neq I[(x, y)]$. Le sommet (a, a) sépare donc les sommets (a, b) et (x, y) .

En effet, le sommet (a, a) est à distance un de (a, b) car il est sur la même ligne (donc dans le voisinage de (a, b)) mais il est à une distance deux de (x, y) car $a \neq x$ et $b \neq y$ donc il n'est ni sur la même ligne ni sur la même colonne. Ainsi, (a, a) n'est pas dans le voisinage de (x, y) . Le même raisonnement s'applique pour (b, b) .

Dès lors, pour être dans le voisinage d'un point, il suffit d'être soit sur la même ligne, soit sur la même colonne. Dans notre cas, on sera toujours à distance un ou deux.

- Si $(a, b) \neq (x, y)$, on a
 - Soit $a = b = x$: En effet, si $a = x$, on a obligatoirement $b \neq y$ car $(a, b) \neq (x, y)$ et donc $b = x$ sinon on aurait $b \neq y$ et $b \neq x$ (cas précédent).
 Dans ce cas, on a $(y, y) \in N((x, y)) \setminus N((a, b))$ car $a \neq y$ et $b \neq y$ donc on est à une distance deux. Ainsi, le sommet (y, y) sépare les sommets (x, y) et (a, b) . (Par exemple, si $a = b = x = 2$, $(3, 3) \in N((2, 3)) \setminus N((2, 2))$ car $(3, 3)$ est dans la même colonne que $(2, 3)$ mais à distance deux de $(2, 2)$).
 - Soit $a = y$ et $b = x$ (avec $x \neq y$) : En effet, si $a \neq x$, on a forcément $a = y$ sinon $a \neq x$ et $a \neq y$ (cas précédent). En supposant avoir $(a, b) \neq (x, y)$ et $a = y$, deux cas se présentent pour b :
 - $b \neq y$ et donc $b = x$ (sinon $b \neq y$ et $b \neq x$, cas précédent)
 - $b = y$ (on a $a = b = y$, symétrie du cas ci-dessus)
 Supposons que $x < y$ (on travaille sous la diagonale).
 Si $1 \leq x \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, on a $(n + 1 - x, x) \in N((y, x)) \setminus N((x, y))$.

(Par exemple, si $n = 5$, $x = 2$ et $y = 3$, on a $(5 - 1 + 2, 2) = (4, 2) \in N((3, 2)) \setminus N((2, 3))$ car $(4, 2)$ est dans la même colonne que $(3, 2)$ mais à distance deux de $(2, 3)$).

Donc, le sommet $(n + 1 - x, x)$ sépare les sommets (y, x) et (x, y) .

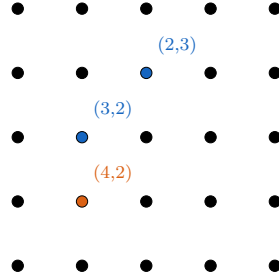


FIGURE 2.39 – Exemple

D'autre part, si $x \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, on a $(y, n + 1 - y) \in N((y, x)) \setminus N((x, y))$. Par exemple, si $n = 5$, $x = 3$ et $y = 4$, on a $(4, 5 + 1 - 4) = (4, 2) \in N((4, 3)) \setminus N((3, 4))$ car $(4, 2)$ est dans la même ligne que $(4, 3)$ mais à distance deux de $(3, 4)$. Donc, le sommet $(y, n + 1 - y)$ sépare les sommets (y, x) et (x, y) .

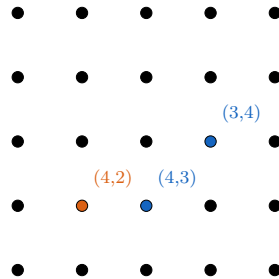


FIGURE 2.40 – Exemple

Ainsi, l'ensemble $D \cup A$ est séparant car tous les ensembles $I(x, y)$ sont différents pour chaque sommet (x, y) . Puisque $D \cup A$ est dominant et séparant, il s'agit donc bel et bien d'un code identifiant de $K_n \square K_n$. De plus, on sait par construction que $D \cap A = \emptyset$, donc

$$\begin{aligned} |D \cup A| &= |D| + |A| \\ &= n + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

Nous venons donc de trouver un code identifiant de $K_n \square K_n$ de cardinal $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$.

- (ii) Soit C un code identifiant de $K_n \square K_n$. Montrons que $|C| \geq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$. Remarquons tout d'abord que si C est un code identifiant alors $I(x, y) \neq I(u, v)$ pour tous les couples $(x, y), (u, v)$ tels que $(x, y) \neq (u, v)$ par la définition de I (Notation 1.1). Par ailleurs, en conséquence du Lemme 2.4, on remarque que si une ligne contient exactement un sommet (x, y) de C alors les lignes de tous les autres sommets de $C_y \cap C$ contiennent au moins deux sommets de C .

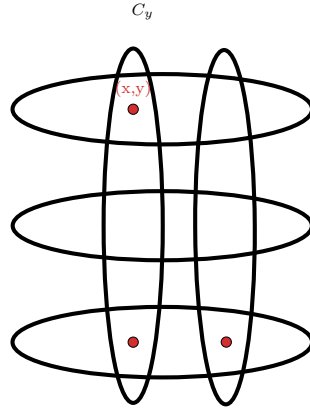


FIGURE 2.41 – Exemple

En effet, le sommet (x, y) est un $[1, \star]$ -sommet donc vu le Lemme 2.4, tous les autres sommets de $C_y \cap C$ ne peuvent pas être des $[1, \star]$ -sommets. Puisqu'ils ne peuvent pas être tout seul dans leur ligne, il y a forcément au moins deux sommets de C dans cette ligne.

Lorsque $n < 4$, le résultat est trivial. En effet, si $n = 1$, on a $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor = 1$ et ainsi $|C| \geq 1$.



FIGURE 2.42 – Si $n = 1$.

Si $n = 2$, on a $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor = 3$. Supposons que $|C| \leq 2$ et montrons que C n'est alors pas un code identifiant.



FIGURE 2.43 – Si $n = 2$.

Dans les deux cas, il ne s'agit pas d'un code identifiant car on peut trouver des sommets avec le même I (ensemble des points situés à la fois dans le voisinage fermé du sommet et dans le code). L'ensemble C n'est donc pas séparant, ce qui est impossible pour un code identifiant. Par ailleurs, on peut trouver un code identifiant de $K_2 \square K_2$ de taille 3.

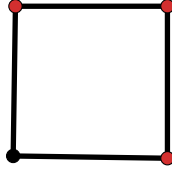


FIGURE 2.44 – Code identifiant de $K_2 \square K_2$.

On obtient alors $|C| \geq 3$ comme annoncé.

Si $n = 3$, on a $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor = 4$. Procédons à nouveau par l'absurde en supposant $|C| \leq 3$.



FIGURE 2.45 – Pas séparants.



FIGURE 2.46 – Pas séparant - Pas dominant.

A nouveau, il ne s'agit pas d'un code identifiant car, suivant le choix des éléments de C , soit celui-ci n'est pas un ensemble dominant, soit il n'est pas séparant. Ceci contredit la définition d'un code identifiant. Par ailleurs, on peut trouver un code identifiant de $K_3 \square K_3$ de taille 4.

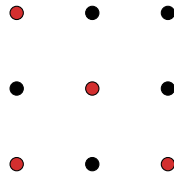


FIGURE 2.47 – Code identifiant de $K_3 \square K_3$.

On a donc bien $|C| \geq 4$ comme attendu.

Les cas triviaux ayant été traités, nous pouvons dès lors passer au cas général i.e. lorsque $n \geq 4$. Dans ce cas-ci, plusieurs configurations sont maintenant encore possibles.

- Cas 1 : Il existe une ligne L_x telle que $L_x \cap C = \emptyset$, i.e. une ligne sans élément du code. Supposons que $x = 1$ donc qu'il n'y a pas d'élément de C dans la première ligne. Si $u \neq 1$ tel que $L_u \cap C = \emptyset$ (i.e. pas d'élément du code dans la ligne u), alors on a

$$I(1, v) = I(u, v), \forall v.$$

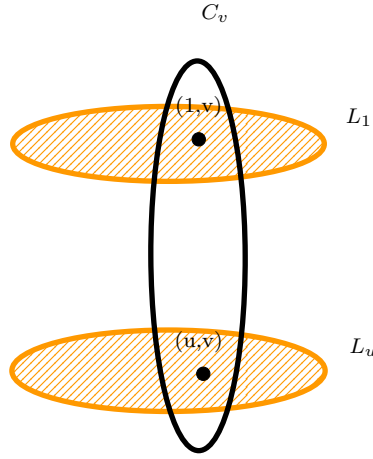


FIGURE 2.48 – $I(1, v) = I(u, v)$.

car les éléments qui sont dans le code et dans le voisinage sont forcément dans la colonne v puisqu'il n'y a pas d'élément du code dans ces deux lignes.

Or, on sait que $u \neq 1$ donc $(1, v) \neq (u, v)$ et vu ce qu'on a déjà remarqué précédemment, on a alors $I(1, v) \neq I(u, v)$. Ceci est bien entendu une contradiction.

Ainsi, il y a au moins un élément du code dans chacune des autres lignes.

Supposons avoir un $[1, b]$ -sommet (u, v) i.e. $(u, v) \in C$ et $|L_u \cap C| = 1$, $|C_v \cap C| = b$. Alors, on a $I(1, v) = I(u, v)$ car il n'y a pas d'élément du code dans la première ligne donc tous les éléments de $I(1, v)$ sont obligatoirement dans C_v . Or, le sommet (u, v) est un $[1, b]$ -sommet donc tous les éléments de $I(u, v)$ (autres que (u, v)) sont obligatoirement dans C_v aussi. On a donc bien l'égalité. De plus, on a $(1, v) \neq (u, v)$ car $u \neq 1$ puisqu'il n'y a pas d'élément de C dans la première ligne. L'égalité $I(1, v) = I(u, v)$ est donc une contradiction.

Ainsi, tous les points du code situés dans le voisinage du sommet (u, v) sont dans la colonne C_v , donc dans le voisinage de $(1, v)$ et il n'y a pas d'autre point du code dans le voisinage de $(1, v)$. Vu la contradiction, on ne peut pas avoir un $[1, b]$ -sommet : on a minimum un $[2, b]$ -sommet.

Ainsi, vu les deux points précédents, on a au moins deux éléments du code dans chacune des autres lignes. Ceci nous donne, si $n \geq 4$,

$$|C| \geq 2(n-1) \geq \frac{3n}{2}. \quad (2.1)$$

La première inégalité est obtenue en retirant la première ligne : on n'a pas d'élément du code sur cette ligne et au moins deux éléments sur toutes les autres ($= n-1$) lignes. Nous pouvons prouver la deuxième inégalité de l'inéquation (2.1) de la manière suivante.

Si $n \geq 4$ est pair ($n = 2k$ avec $k \geq 2$), on a

$$\begin{aligned} 2(2k-1) &\geq \frac{3}{2}2k \\ \Leftrightarrow 4k-2 &\geq 3k \\ \Leftrightarrow k &\geq 2. \end{aligned}$$

Si $n \geq 4$ est impair ($n = 2k+1$ avec $k \geq 2$), il vient

$$\begin{aligned} 2(2k+1-1) &\geq \frac{3}{2}(2k+1) \\ \Leftrightarrow 4k &\geq 3k + \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow k &\geq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ceci conclut donc le cas 1 : on a bel et bien $|C| \geq \frac{3n}{2} \geq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$. De plus, si $n \geq 4$ est impair et si $|C| = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$, alors dans ce cas, on n'est pas dans le cas 1 (car dans le cas 1, on vaut au pire $\frac{3n}{2}$ mais pas $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$ quand n est impair).

Ainsi, dans la suite, on a au moins un élément dans $L_x \cap C$, $\forall x$. Par symétrie, on peut supposer qu'il n'y a pas de colonne C_y telle que $C_y \cap C = \emptyset$.

- Cas 2 : Supposons qu'il n'y a pas de $[1, 1]$ -sommet, i.e. il n'y a pas de sommet tout seul dans sa ligne et dans sa colonne. Soient n_1 le nombre de 1-lignes et de 1-colonnes et $n_2 = 2n - n_1$ (on compte l'ensemble des lignes et des colonnes et on retire celles ne contenant qu'un seul élément du code). On a $n_1 \leq n_2$. En effet, en associant à chaque 1-ligne L_x la colonne C_y telle que $(x, y) \in L_x \cap C$ (c'est-à-dire associer à la ligne L_x la colonne dans laquelle se trouve l'élément du code qu'elle contient). Puisqu'il n'y a pas de $[1, 1]$ -sommet, C_y est une 2^+ -colonne (par définition d'un $[1, 1]$ -sommet). Par le Lemme 2.4, une colonne C_y ne peut être associée à deux 1-lignes différentes. On obtient alors une injection.

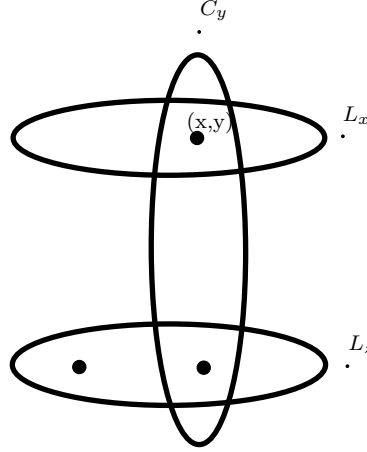


FIGURE 2.49 – Illustration.

En effet, on a obligatoirement deux éléments du code dans L_z . De manière similaire, on peut construire une injection de l'ensemble des 1-colonnes vers l'ensemble des 2^+ -lignes. Donc on a bien $n_1 \leq n_2$ puisqu'on a une injection de l'ensemble des 1-lignes/1-colonnes dans le reste. Par ailleurs, puisque $n_1 + n_2 = 2n$, on a aussi $n_2 \geq n$. Ensuite, par double comptage (d'abord les lignes, puis les colonnes), on a

$$\begin{aligned} 2|C| &\geq n_1 + 2n_2 \\ \Leftrightarrow |C| &\geq \frac{n_1 + 2n_2}{2}. \end{aligned}$$

car on compte exactement un élément du code dans chacune des 1-lignes/1-colonnes mais il peut y avoir plus de deux éléments dans les 2^+ -lignes/ 2^+ -colonnes.

Dès lors, on obtient

$$\begin{aligned} |C| &\geq \frac{2n + n_2}{2} \\ &\geq \frac{3n}{2}. \end{aligned}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} |C| &\geq \frac{n_1 + 2n_2}{2} \\ &= \frac{n_1 + n_2 + n_2}{2} \\ &= \frac{2n + n_2}{2} \end{aligned}$$

et $n_2 \geq n$.

Donc si n est impair, on a $|C| \geq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$.

Or, on a

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor &= n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ &= n + \frac{n-1}{2} \\ &= \frac{3n}{2} - \frac{1}{2} \\ &< \frac{3n}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $|C| > \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$.

Ceci conclut le cas 2.

Avant de passer à la suite, nous avons besoin d'introduire un lemme supplémentaire (démontré par la suite).

Lemme 2.5. Soit n un entier pair et C un code identifiant de $K_n \square K_n$. S'il n'y a pas de $[1, 1]$ -sommet et que $|C| = \frac{3n}{2}$, alors, à permutation des lignes et des colonnes près, on a $C = D \cup A$.

- Cas 3 : Supposons qu'il existe un $[1, 1]$ -sommet, i.e. un sommet du code tout seul dans sa ligne et dans sa colonne.

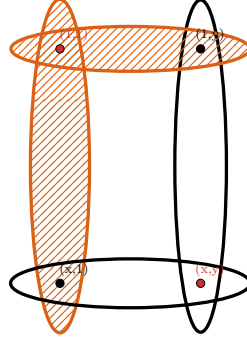
Supposons que $(1, 1)$ est le $[1, 1]$ -sommet. L'ensemble $C \setminus \{(1, 1)\}$ est le code identifiant du sous-graphe $G_{2,n}$ induit par $\{2, \dots, n\} \times \{2, \dots, n\}$. En effet, on a enlevé le sommet $(1, 1)$ qui est à distance deux de tous les autres (ceux de $G_{2,n}$), on a donc encore un code identifiant.

Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe un $[1, 1]$ -sommet (x, y) dans $G_{2,n}$: ceci signifie que $|L_x \cap C| = 1 = |C_y \cap C|$.

Alors, on a

$$I(x, 1) = I(1, y) = \{(1, 1), (x, y)\}.$$

Ceci est absurde car les sommets sont différents et ont le même voisinage fermé intersecté avec le code ce qui contredit la propriété de séparation d'un code identifiant. Il n'y a donc pas de $[1, 1]$ -sommet dans $G_{2,n}$, on retombe donc dans le cas 2 pour $G_{2,n}$.


 FIGURE 2.50 – $I(x, 1) = I(1, y) = \{(1, 1), (x, y)\}$.

Si n est impair, on a

$$\begin{aligned} |C| &\geq 1 + \frac{3(n-1)}{2} \\ &= \frac{3n-1}{2} \\ &= \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Si n est pair, on a

$$\begin{aligned} |C| &\geq \left\lceil 1 + \frac{3(n-1)}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{3n-1}{2} \right\rceil \\ &= \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Ceci conclut alors le cas 3. En appliquant ensuite le Lemme 2.5 sur $G_{2,n}$ et en supposant $|C'| = \frac{3(n-1)}{2}$, on a $D \cup A = C'$. □

Pour conclure cette section, nous démontrons le Lemme 2.5 utilisé dans le Théorème 2.6 précédent.

Lemme 2.5. *Soit n un entier pair et C un code identifiant de $K_n \square K_n$. S'il n'y a pas de $[1, 1]$ -sommet et que $|C| = \frac{3n}{2}$, alors, à permutation des lignes et des colonnes près, on a $C = D \cup A$.*

Démonstration. Cette démonstration se fait dans le cas 2 du Théorème 2.6, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de $[1, 1]$ -sommet. On sait déjà que $\frac{2n+n_2}{2} = \frac{3n}{2}$. On a donc $n_2 = n$. Puisque $n_1 = 2n - n_2$, on a alors $n_1 = n_2 = n$. Comme on a $n_1 (=n)$ 1-lignes et 1-colonnes,

on a forcément n 2^+ -lignes et 2^+ -colonnes. Or, on sait que $|C| = \frac{3n}{2}$ car on compte les lignes et les colonnes. D'où, il vient

$$2|C| = 3n = n + 2n.$$

En effet, les n premiers éléments viennent des 1-lignes et 1-colonnes et les $2n$ suivants viennent des 2^+ -lignes et 2^+ -colonnes. Ainsi, chaque 2^+ -ligne/ 2^+ -colonne (il y en a n) contient exactement deux éléments de C . Soit l_1 (resp. c_1) le nombre de 1-lignes (resp. 1-colonnes). On a alors

$$l_1 + c_1 = n.$$

De plus, on a aussi

$$\begin{aligned} l_1 + 2(n - l_1) &= |C| \\ &= c_1 + 2(n - c_1). \end{aligned}$$

Ceci implique $l_1 = c_1$ car $l_1 + 2n - 2l_1 = \frac{3n}{2} = c_1 + 2n - 2c_1$ si, et seulement si, $l_1 = \frac{n}{2} = c_1$. Supposons que $L_1, \dots, L_{\frac{n}{2}}$ (resp. $C_{\frac{n}{2}+1}, \dots, C_n$) sont les 1-lignes (resp. 1-colonnes), quitte à permuter certaines lignes et/ou colonnes. Puisqu'on n'a pas de $[1, 1]$ -sommet, on a

$$(x, y) \notin C, \forall x \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\} \text{ et } \forall y \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n\}. \quad (2.2)$$

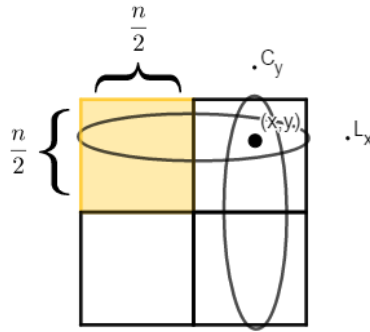


FIGURE 2.51 – Illustration de la situation.

En effet, x appartient à une 1-ligne, y appartient à une 1-colonne et on n'a pas de $[1, 1]$ -sommet. On sait que x est tout seul sur sa ligne et y est tout seul sur sa colonne : ceci implique alors que le sommet (x, y) est tout seul sur sa ligne ET sur sa colonne. Puisque les $[1, 1]$ -sommets sont des éléments du code, (x, y) n'en est pas un. Ainsi, $\forall y \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n\}$, on a

$$|(C_y \cap \{ \bigcup_{x \in \{\frac{n}{2}+1, \dots, n\}} L_x \}) \cap C| = 1. \quad (2.3)$$

En effet, C_y est une 1-colonne et vu la condition 2.2, l'élément ne peut être dans les $\frac{n}{2}$ premières lignes : il est forcément dans l'ensemble décrit ici plus haut.

Vu la condition 2.2 et le Lemme 2.4, si $x \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n\}$, la ligne L_x est une 2-ligne. De plus, si $y \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n\}$, la colonne C_y est une 1-colonne. Ainsi, il existe un $[2, 1]$ -sommet (x, y) et donc $(x, y) \in C$. Vu l'égalité (2.3), $\forall x \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n\}$, on a

$$|(L_x \cap \{ \bigcup_{y \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n\}} C_y \}) \cap C| = 1. \quad (2.4)$$

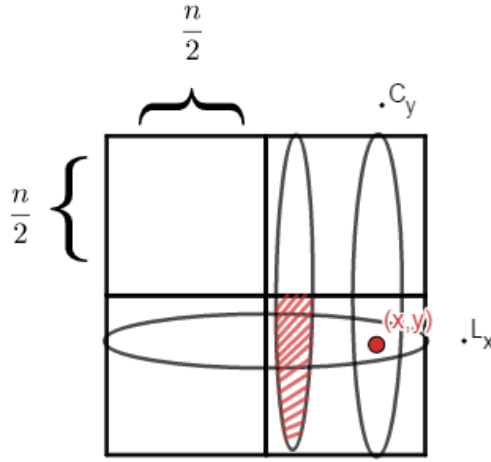


FIGURE 2.52 – $|(L_x \cap \{ \bigcup_{y \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n\}} C_y \}) \cap C| = 1$.

En effet, L_x est une 2-ligne et C_y est une 1-colonne, donc on trouvera bien un tel élément. Ainsi, vu les égalités (2.3) et (2.4), on a

$$\forall x \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n\}, (x, x) \in C$$

car c'est le cas pour n'importe quels x et y dans ce cas-là donc en particulier pour (x, x) . De plus, $\forall x \leq \frac{n}{2}$, L_x est une 1-ligne. Vu le Lemme 2.4, chaque C_y (avec $y \leq \frac{n}{2}$, donc une 2^+ -colonne) contient au moins un élément de $C(\cap \{1, \dots, \frac{n}{2}\} \times \{y\})$. Vu la condition 2.2, si on a $(x, y) \in C$ et $x \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$, alors on a aussi $y \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$. On peut donc supposer que $(x, x) \in C$ (avec $x \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$). Puisque L_x (resp. C_y) avec $x > \frac{n}{2}$ (resp. $y \leq \frac{n}{2}$) contient au moins deux éléments de C , on suppose $(n - x + 1, x) \in C$, $\forall x \leq \frac{n}{2}$. Or, on a $n - x + 1 > \frac{n}{2}$ et $x \leq \frac{n}{2}$. Donc par définition de A , on a $A \subset C$.

En conclusion, il suffit de remettre les lignes $L_{\frac{n}{2} + 1}, \dots, L_n$ dans l'ordre pour obtenir A (il faudrait faire ceci au début de la démonstration).

Les différentes étapes sont les suivantes :

- (1) Ranger les 1-lignes.
- (2) Ranger les 2-lignes et modifier pour avoir A .
- (3) Ranger les 1-colonnes pour avoir D .

□

Grâce à ce théorème, nous avons pu prouver qu'un résultat concernant le cardinal minimum d'un code identifiant du produit cartésien de deux cliques de la même taille existe. Nous avons pu développer le même type de résultat dans la section précédente en ce qui concerne le produit direct. Dans ce cas, nous avons pu établir un résultat concernant le produit de cliques en général, celles-ci n'étant pas nécessairement de la même taille. La question naturelle qui nous vient alors est : peut-on généraliser le résultat que nous venons d'établir à propos du produit cartésien de cliques de même taille au produit cartésien de cliques de tailles différentes ? Nous tentons de répondre à cette question dans la prochaine section.

2.2.2 Cliques de tailles différentes

Dans la sous-section précédente, nous avons pu trouver le cardinal minimum d'un code identifiant du produit cartésien de deux cliques de la même taille. Comme déjà mentionné précédemment, trouver le cardinal minimum d'un code identifiant d'un graphe est généralement un problème difficile au sens de la complexité, c'est pourquoi nous nous concentrons principalement sur des familles de graphes. Est-il dès lors encore possible de généraliser le résultat précédent ? Peut-on déterminer facilement le cardinal minimum d'un code identifiant du produit cartésien de deux cliques de tailles différentes ? Nous allons tenter de répondre à cette question dans cette section.

Pour rappel (Théorème 2.6), lorsque nous considérons deux cliques de même taille, nous obtenons le résultat suivant :

Rappel 2.2. Soit C un code identifiant minimum de $K_n \square K_n$. Alors on a $|C| = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$.

Lorsqu'on considère le produit cartésien de deux cliques de tailles différentes, le résultat suivant apparaît :

Théorème 2.7. Pour $2 \leq n \leq m$, on a

$$\begin{aligned} \gamma^{ID}(K_m \square K_n) &= \begin{cases} m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{si } m \leq \frac{3n}{2}, \\ 2m - n & \text{si } m \geq \frac{3n}{2} \end{cases} \\ &= \max\left\{m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 2m - n\right\}. \end{aligned}$$

Ce théorème a été prouvé par W. GODDARD et K. WASH en 2013 ([10]). Avant de pouvoir démontrer ce théorème, nous devons introduire quelques définitions et notations qui nous seront utiles par la suite.

Définition 2.9. Etant donné un graphe G , son *graphe adjoint* (ou *line graphe*) $L(G)$ est le graphe défini de la façon suivante :

- Chaque sommet de $L(G)$ représente une arête de G ;
- Deux sommets de $L(G)$ sont adjacents si, et seulement si, les arêtes correspondantes partagent une extrémité commune dans G .

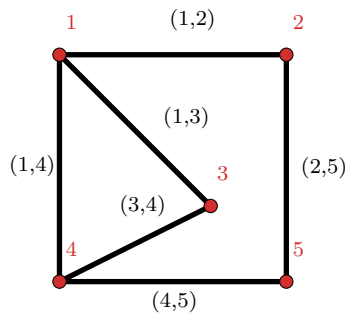


FIGURE 2.53 – Graphe G

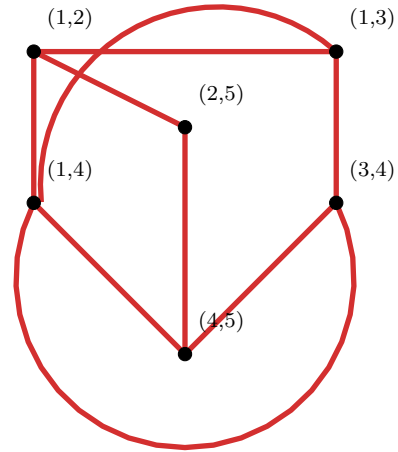


FIGURE 2.54 – Graphe adjoint $L(G)$

Grâce à cette définition, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 2.4. Le graphe $K_m \square K_n$ est le graphe adjoint de $K_{m,n}$, où $K_{m,n}$ est le graphe biparti complet.

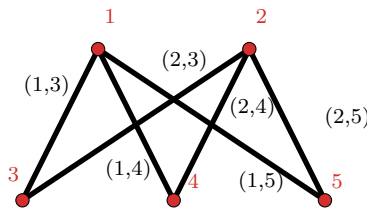
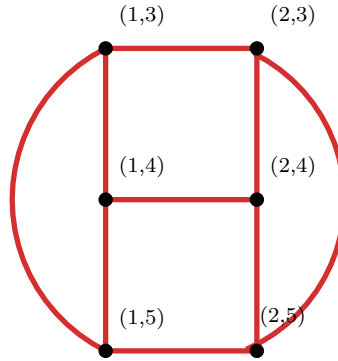


FIGURE 2.55 – Graphe biparti complet $K_{3,2}$

Par construction et définition, le graphe adjoint du graphe biparti complet $K_{3,2}$ a la forme suivante, ce qui nous confirme le résultat affirmé ci-dessus.


 FIGURE 2.56 – $K_3 \square K_2 = L(K_{3,2})$

Vu la proposition précédente, nous allons principalement travailler sur le graphe biparti $K_{m,n}$ plutôt que sur son graphe adjoint $K_m \square K_n$ dans cette section. Par définition d'un graphe adjoint, les sommets de $K_m \square K_n$ sont devenus les arêtes de $K_{m,n}$: nous devons donc introduire la notion de "code identifiant pour les arêtes". En effet, pour rappel, la définition introduite précédemment pour les codes identifiants portait sur les sommets du graphe.

Rappel 2.3. Un sous-ensemble $C \subseteq V$, qui est à la fois un code couvrant et un code séparant du graphe G , est appelé *code identifiant* de G .

Nous pouvons désormais introduire l'analogie du code identifiant pour les arêtes.

Définition 2.10. Un *code arête-identifiant* de G est un ensemble D d'arêtes tel que pour chaque arête $e \in E(G)$, le sous-ensemble d'arêtes de E incidentes à e est non-vide et distinct.

Définition 2.11. Un ensemble d'arêtes D est *dominant pour les arêtes* si chaque arête de G est soit dans D soit incidente à un élément de D .

Grâce à ces différentes définitions, nous allons pouvoir obtenir le Théorème 2.7 énoncé ci-dessus. Pour y arriver, nous allons introduire deux lemmes nous permettant d'obtenir une borne inférieure pour $\gamma^{ID}(K_m \square K_n)$ (ou plus exactement pour le cardinal minimum d'un code arête-identifiant de $K_{m,n}$). Ensuite, nous construisons un code identifiant qui atteint cette borne : ceci nous prouve alors qu'il s'agit également d'une borne supérieure.

Définition 2.12. Par ailleurs, puisque $K_{m,n}$ est le graphe biparti complet, il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles X et Y telle que chaque sommet de Y est relié par une arête à chaque sommet de X . Notons $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$.

Lemme 2.6. *Si un ensemble D dominant pour les arêtes de $K_{m,n}$ est un code arête-identifiant, alors*

- (A) *dans le sous-graphe H dont l'ensemble des arêtes est D , $|N_H(S)| \geq 2$ pour tout ensemble S de deux sommets dans la même partition.*
- (B) *n'importe quel ensemble T de deux sommets de chaque partition est incident à au moins trois arêtes de D .*

Démonstration. (A) Supposons que l'ensemble $S = \{x_1, x_2\}$ a au maximum un voisin dans H (i.e. $|N_H(S)| \leq 1$). On a alors $N_H(S) \subset \{y_1\}$. Alors, l'ensemble D , code arête-identifiant, ne sépare pas x_1y_1 et x_2y_1 . En effet, ils ont tous les deux x_1y_1 et x_2y_1 pour arêtes incidentes. Ceci est absurde par définition d'un code arête-identifiant. Il vient alors $|N_H(S)| \geq 2$.

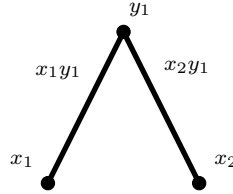


FIGURE 2.57 – Pas séparant.

- (B) Supposons que $T = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ est incident à seulement deux arêtes de D . Par la propriété (A), tout ensemble de deux sommets de la même partition a au moins deux voisins. Ainsi, les deux arêtes forment une correspondance avec T . Mais, alors, les deux arêtes de T qui ne sont pas dans D ne sont pas séparées. En effet, deux cas sont à considérer. Dans le premier cas, la situation se représente comme suit :

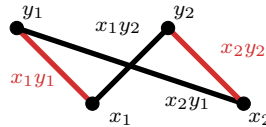


FIGURE 2.58 – Situation cas 1.

En effet, l'arête x_1y_2 a pour voisins x_1y_1 et x_2y_2 . Il en est de même pour l'arête x_2y_1 . Ces sommets ne sont donc pas séparés.

Dans le deuxième cas, on a la situation suivante :

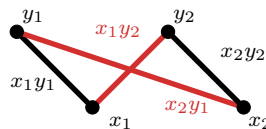


FIGURE 2.59 – Situation cas 2.

En effet, l'arête x_1y_1 a pour voisins x_1y_2 et x_2y_1 . Il en est de même pour l'arête x_2y_2 . Ces sommets ne sont donc pas séparés. Ceci est encore une fois absurde par définition de D .

□

Lemme 2.7. *Pour des entiers $2 \leq n \leq m$, un code arête-identifiant D de $K_{m,n}$ satisfait*

$$|D| \geq \max\{2m - n, m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}.$$

Démonstration. Si $m = n = 2$, vu la propriété (B) du Lemme 2.6, on a $|D| \geq 3 = \max\{4 - 2, 2 + 1\}$. Supposons donc que $m > 2$. Par définition de X et Y , on sait que $K_{m,n} = Y \cup X = \{y_1, \dots, y_n\} \cup \{x_1, \dots, x_m\}$. Soit D un code arête-identifiant minimum de $K_{m,n}$. Supposons qu'un certain sommet de X soit disjoint de D (i.e. ce sommet n'est incident à aucune arête de D), disons x_1 . Vu la propriété (A) du Lemme 2.6, chaque x_j pour $2 \leq j \leq m$ est incident à au moins deux arêtes de D . D'où il vient

$$|D| \geq 2m - 2 \geq \max\{2m - n, m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\},$$

comme attendu (car $2 \leq n \leq m$).

Supposons à présent que chaque sommet de X est incident à une arête de D . Pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, on choisit une arête $e_i \in D$ incidente à $x_i \in X$ et soit $T = \{e_1, \dots, e_m\}$, l'ensemble de ces arêtes. Considérons $y_i \in Y$. Par la propriété (A) du Lemme 2.6 appliquée à chaque paire de sommets dans $N_T(y_i)$, il existe au plus un sommet dans $N_T(y_i)$ qui n'est pas incident à une arête de $D \setminus T$.

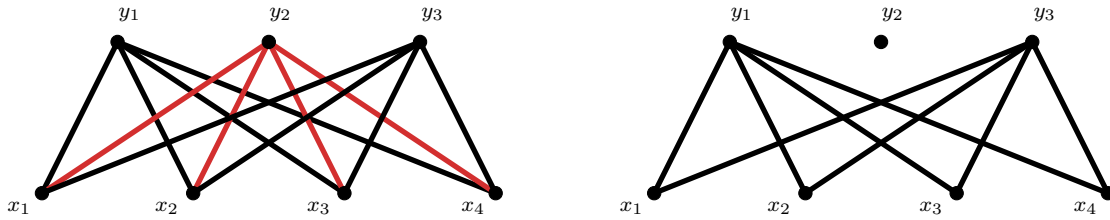


FIGURE 2.60 – Graphes avec et sans l'ensemble T .

Nous avons représenté l'ensemble T en rouge dans les graphes de la Figure 2.60 ci-dessus. Ainsi, nous obtenons le résultat suivant

$$|D - T| \geq \sum_{i=1}^n (d_T(y_i) - 1) = m - n.$$

En effet, additionner les degrés de chaque sommet y_i appartenant au sous-graphe formé par T revient à compter le nombre d'arêtes de T , c'est-à-dire m , par construction.

Ainsi, il vient dès lors

$$|D| \geq 2m - n,$$

car l'ensemble T contient m éléments.

Enfin, il reste à montrer que $|D| \geq m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Définissons

$$Y_1 = \{y \in Y \mid y \text{ est incident à exactement une arête de } T\},$$

$$Y_2 = \{y \in Y \mid y \text{ est incident à au moins deux arêtes de } T\}.$$

Soient $|Y_1| = n_1$ et $|Y_2| = n_2$. Deux cas sont à envisager.

- Supposons qu'un certain sommet de Y est disjoint de D , notons-le y_1 . Par le point (A) du Lemme 2.6 appliqué à l'ensemble $\{y_i, y_1\}$ pour chaque $y_i \in Y \setminus \{Y_2 \cup y_1\}$, on peut dire que D contient au moins $2(n - n_1 - n_2 - 1) + n_1 = 2n - n_1 - 2n_2 - 2$ arêtes disjointes de T . En effet, on compte d'abord les y_i qui ne sont incidents à aucune arête de T (le calcul se réalise en les prenant tous, puis en retirant ceux incidents à une arête de T , ceux incidents à au moins deux arêtes de T et enfin en retirant y_1 : on trouve alors $n - n_1 - n_2 - 1$). Il suffit ensuite d'y appliquer le Lemme 2.6. Enfin, on ajoute les y_i incidents à exactement une arête de T (c'est-à-dire n_1 , par définition).

Par cette même propriété (A) appliquée à une paire de sommets de $N_T(y_i)$ pour chaque $y_i \in Y_2$, on peut également vérifier que D contient au moins n_2 arêtes disjointes de T .

Ainsi, on obtient le résultat suivant

$$\begin{aligned} |T| + \left\lceil \frac{2n - n_1 - 2n_2 - 2 + n_2}{2} \right\rceil &= m + \left\lceil \frac{2n - n_1 - n_2 - 2}{2} \right\rceil \\ &\geq m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

En effet, par définitions de Y_1 et Y_2 (et donc de n_1 et n_2), on remarque que l'on a $n \geq n_1 + n_2$, les sommets $y \in Y$ incidents à aucune arête de T devant encore être pris en compte.

- Supposons à présent que chaque sommet de Y est incident à D . Par la propriété (B) du Lemme 2.6 appliquée à $\{y_i, y_j\} \cup N_T(\{y_i, y_j\})$ pour chaque $y_i, y_j \in Y_1$, on a au plus un sommet de Y_1 non incident à une arête de $D \setminus T$. Par ailleurs, chaque sommet de $Y \setminus \{Y_1 \cup Y_2\}$ est incident à une arête de $D \setminus T$: les sommets de Y_1 et Y_2 sont incidents à une ou plusieurs arêtes de T par définition, ce qui n'est pas le cas des sommets de $Y \setminus \{Y_1 \cup Y_2\}$. Or, par hypothèse, tous les sommets de Y sont incidents à D . Ainsi, on obtient bien que les sommets de $Y \setminus \{Y_1 \cup Y_2\}$ sont incidents à une arête de $D \setminus T$.

C'est pourquoi l'ensemble D contient au moins $(n_1 - 1) + (n - n_1 - n_2) = n - n_2 - 1$ arêtes disjointes de T . Pour les mêmes raisons que précédemment, l'ensemble D contient au moins n_2 arêtes disjointes de T .

Ainsi, il vient

$$\begin{aligned} |D| &\geq |T| + \left\lceil \frac{(n - n_2 - 2) + n_2}{2} \right\rceil \\ &= m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

En conclusion, dans tous les cas traités, on a toujours

$$|D| \geq \max\{2m - n, m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\},$$

lorsque D est un code arête-identifiant de $K_{m,n}$. \square

Par ce résultat, on obtient ainsi une borne inférieure pour le cardinal d'un code arête-identifiant de $K_{m,n}$. Ceci revient donc à donner une borne inférieure pour $\gamma^{ID}(K_m \square K_n)$. Nous construisons ci-dessous un code identifiant de cardinal $\max\{2m - n, m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Ceci prouve alors qu'il s'agit également d'une borne supérieure et qu'elle est atteinte. Cette construction nous permet ainsi de prouver le Théorème 2.7 et de clore cette section.

Construction 2.1. Soit $G = K_m \square K_n$ avec $m \geq n$. Nous allons nous baser sur la construction effectuée dans le Théorème 2.6. Définissons les ensembles suivants

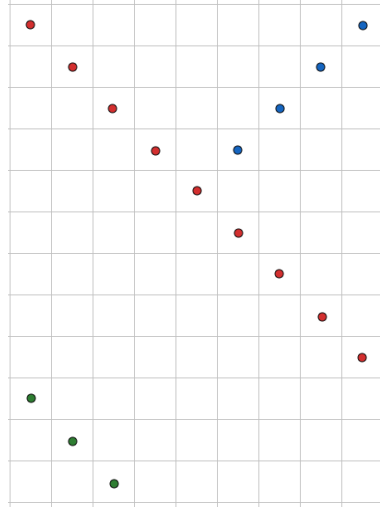
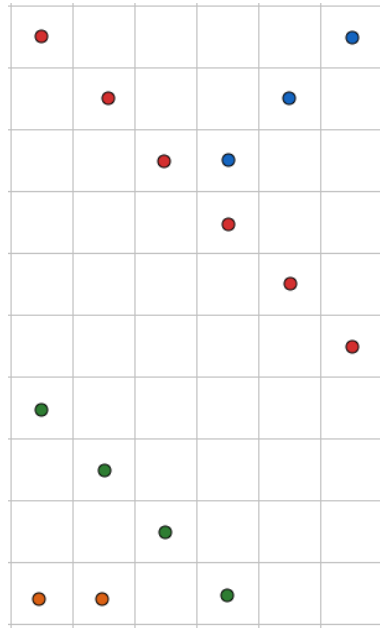
$$\begin{aligned} A &= \{(i, i) | 1 \leq i \leq n\} \text{ en rouge,} \\ B &= \{(n + i, i) | 1 \leq i \leq m - n\} \text{ en vert,} \\ C &= \{(i, n - i + 1) | 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\} \text{ en bleu,} \\ X &= \{(i, 1), (i, 2) | \left\lceil \frac{3n + 1}{2} \right\rceil \leq i \leq m\} \text{ en orange.} \end{aligned}$$

Remarquons que si $m \leq \frac{3n}{2}$, on a alors $X = \emptyset$. On définit $D = A \cup B \cup C \cup X$. Il vient alors, si $m > \frac{3n}{2}$,

$$\begin{aligned} |D| &= n + m - n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + m - \left\lceil \frac{3n + 1}{2} \right\rceil + 1 \\ &= 2m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{3n + 1}{2} \right\rceil + 1 \\ &= 2m + \left\lceil \frac{-2n - 1}{2} \right\rceil \\ &= 2m - n. \end{aligned}$$

D'autre part, si $m \leq \frac{3n}{2}$, on a

$$\begin{aligned} |D| &= n + m - n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ &= m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$


FIGURE 2.61 – Exemple : $n=9, m=12$.

FIGURE 2.62 – Exemple : $n=6, m=10$.

Si nous parvenons à montrer que D est un code identifiant, nous aurons bien un code identifiant de $K_m \square K_n$ de cardinal $\max\{2m-n, m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Par construction, chaque colonne et chaque ligne de G intersectent D . Donc, par définition du produit cartésien, D est un ensemble dominant. Il reste alors à montrer qu'il est séparant (car un ensemble identifiant est un ensemble dominant et séparant).

Soient $u = (i, j)$ et $v = (x, y)$ deux sommets distincts de G . Montrons que D sépare ces deux sommets. Commençons par considérer l'ensemble A et supposons qu'il ne sépare pas u et v (si c'est le cas, D sépare automatiquement u et v et est donc séparant). Puisque, par hypothèse, l'ensemble A ne sépare pas les sommets u et v , on a $N[u] \cap A = N[v] \cap A$.

Nous avons dès lors deux cas à considérer :

- Si les ensembles $N[u]$ et $N[v]$ contiennent deux sommets identiques de A , alors on a forcément $i = y$ et $x = j$, par définition de A .
Il est dès lors aisé de voir que l'ensemble C sépare nos deux sommets (sur notre exemple ci-dessous, le sommet $t \in C$ sépare les sommets u et v).

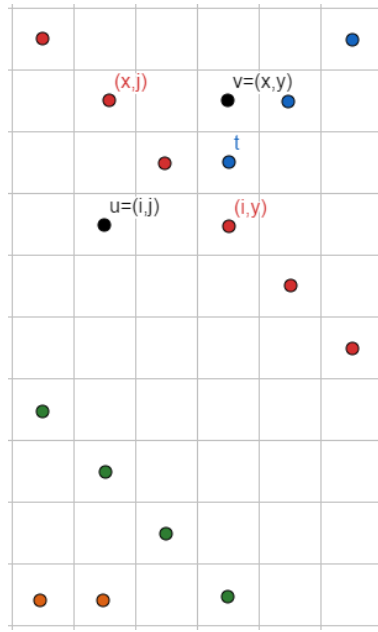


FIGURE 2.63 – Illustration.

- Si les ensembles $N[u]$ et $N[v]$ contiennent un seul sommet de A , alors on a obligatoirement $j = y$ (c'est-à-dire que les sommets u et v sont situés sur la même colonne) et $i, x \in \{j\} \cup \{n + 1, \dots, m\}$, par construction.
Si $j = i$, alors C sépare les sommets u et v .

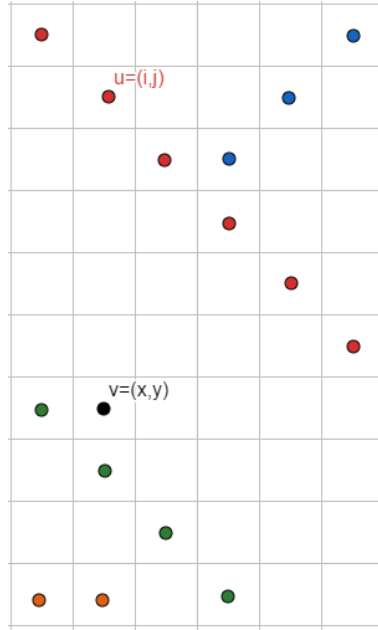


FIGURE 2.64 – Illustration.

Ainsi, on peut dès lors supposer que $x, i > n$. Dans ce cas, si $x, i \leq \frac{3n}{2}$, alors les sommets u et v sont séparés par l'ensemble B .

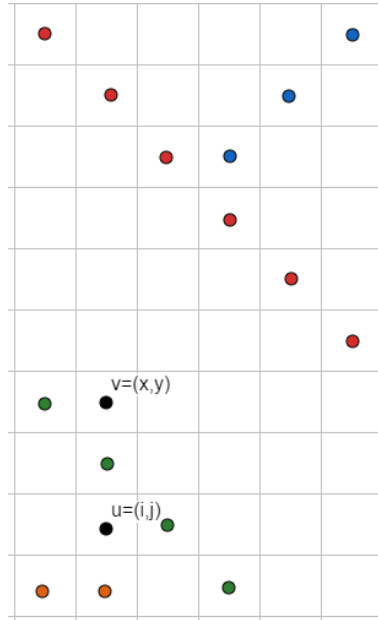


FIGURE 2.65 – Illustration.

D'autre part, si x ou $i > \frac{3n}{2}$, les deux sommets sont séparés par l'ensemble X .

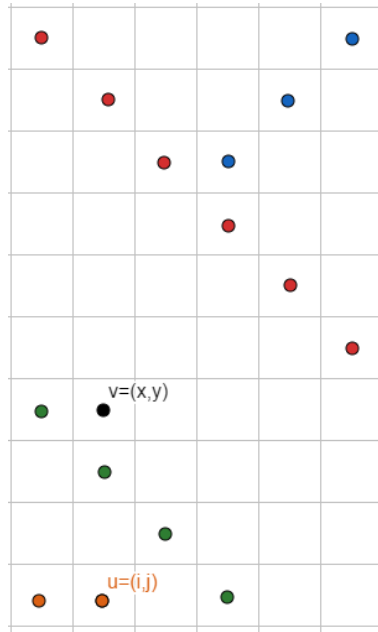


FIGURE 2.66 – Illustration.

Ceci nous permet alors d'affirmer que D est un code identifiant de cardinal

$$\max\{2m - n, m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$$

et de conclure le Théorème 2.7.

Chapitre 3

Généralités sur les codes identifiants

3.1 Des codes identifiants... Qui, quand, pourquoi ?

La première apparition de la notion de *code identifiant* remonte à 1998 par CHAKRABARTY, KARPOVSKY et LEVITIN ([2]). Ceux-ci ont introduit les codes identifiants dans le but de modéliser un problème d'identification de processeurs défectueux dans des réseaux multiprocesseurs. En effet, nous pouvons voir les réseaux de processeurs sous forme de graphes dont les processeurs sont les sommets de telle façon que chaque processeur soit apte à tester s'il existe un processeur défectueux dans son voisinage fermé. Dès lors, on travaille en binaire : le processeur renvoie 0 s'il n'existe aucun processeur défectueux dans son voisinage fermé et il renvoie 1 s'il existe un processeur défaillant dans son voisinage fermé. Le problème se résume donc à trouver un sous-ensemble C de processeurs tel que :

- si tous les processeurs de C renvoient 0, cela signifie qu'il n'y a pas de défaillance dans le réseau ;
- si au moins un des processeurs de C renvoie 1, cela signifie qu'il y a un processeur défaillant. De plus, nous sommes dès lors capables de le localiser de manière unique.

En partant du principe qu'à tout moment il y a au maximum un processeur défectueux, l'ensemble C décrit ci-dessus est un code identifiant. En effet, la première condition est la condition de *domination* : elle nous permet de savoir s'il y a un processeur défectueux ou non. La deuxième condition, quant à elle, nous permet de localiser le processeur défectueux en question, s'il y en a un. Effectivement, si plusieurs processeurs renvoient 1 lors du test, il suffit alors de déterminer l'unique processeur (c'est-à-dire l'unique sommet du graphe) dont l'intersection du voisinage fermé avec l'ensemble C est égale à l'ensemble de processeurs ayant répondu 1 lors du test. Cette condition est la condition de *séparation*. Dès lors, on retrouve donc bien les deux conditions introduites précédemment dans la définition d'un code identifiant : celui-ci doit être dominant et séparant.

Le problème des codes identifiants fait donc partie intégrante des problèmes de domination, déjà présents en détail dans la littérature bien avant notamment dès 1959 ([16]). De plus, COHEN, HONKALA, LITSYN et LOBSTEIN donnent beaucoup plus de détails en ce qui concerne les problèmes de domination, également appelés *problèmes de couvertures* ([5]).

3.2 Quelques variantes

Après avoir présenté les codes identifiants ci-dessus et leur utilisation, nous présentons à présent quelques variantes de ceux-ci. En effet, ce sujet a inspiré un bon nombre de mathématiciens : que se passe-t-il si on regarde les arêtes plutôt que les sommets ? Peut-on localiser plusieurs sommets en même temps ? Que peut-on faire dans le cas où certains sommets n'ont pas besoin d'être localisés ? Ou encore si on peut aller voir plus loin qu'à distance 1 ?

Pour tenter de répondre à ces différentes questions, il a fallu développer de nouveaux concepts. Remarquons cependant que certains de ces concepts existaient déjà avant le concept de *code identifiant*, datant de 1998 comme nous venons de l'expliquer. Evidemment, il existe encore d'autres variantes que celles que nous présentons ci-dessous : nous pourrions par exemple nous placer dans le cas orienté.

3.2.1 Codes r -identifiants et $(r, \leq l)$ -identifiants

Une première façon d'étendre la notion de code identifiant est de permettre à un capteur de recevoir un signal non seulement de la part d'un de ses voisins mais également des voisins de ses voisins et ainsi de suite. Dès lors, pour revenir au problème de l'introduction, nous ne travaillons plus à distance 1 où les détecteurs captent les incendies uniquement de la pièce voisine mais à distance r : le détecteur est capable de signaler un incendie se situant à r "pas".

Ces codes sont appelés codes *r -identifiants*.

En réalité, un code r -identifiant dans un graphe G est un code identifiant (c'est-à-dire 1-identifiant) dans le graphe G^r , la puissance $r^{\text{ième}}$ du graphe G .

De même, nous pouvons trouver des codes permettant de localiser non pas un incendie mais plusieurs. Ces codes sont appelés les codes $(r, \leq l)$ -identifiants. Ces codes permettent de modéliser des problèmes où il y aurait jusqu'à l incendies (ou l erreurs) possibles. Dans ce cas, nous devons définir un ensemble identifiant C pour chaque ensemble X de taille inférieure ou égale à l .

Ces variantes ont également été introduites dans l'article fondateur ([2]). De plus, elles ont largement été étudiées dans la littérature ([6]).

3.2.2 Codes localisateurs-dominateurs

Dans certains cas, il peut être utile de considérer que certains processeurs ne sont pas défectueux. Ainsi, il ne paraît pas nécessaire de vouloir les localiser. Pour ce faire, nous utiliserons dès lors des codes appelés codes *localisateurs-dominateurs*. Dans ce cas, soit C un sous-ensemble de sommets : C est un code localisateur-dominateur s'il domine et sépare tous les sommets qui ne sont pas dans C . Cette notion a été introduite avant la notion de code identifiant elle-même par SLATER et RALL en 1984 ([21], [22]) et a également déjà été largement développée par la suite.

3.2.3 Codes arêtes-identifiants

Dans la Section 2.2.2, nous avons déjà eu recours aux codes arêtes-identifiants (Définition 2.10). En effet, dans cette section, nous avons utilisé ces codes qui se concentrent sur les arêtes du graphe plutôt que sur les sommets. De plus, nous avons également montré qu'il était équivalent de travailler sur le code identifiant d'un graphe et sur le code arête-identifiant de son graphe adjoint. Par ailleurs, il existe également des résultats sur certains graphes en ce qui concerne les codes arêtes-identifiants. Nous en présentons quelques-uns. Tout d'abord, tout comme pour les codes identifiants les sommets, tous les graphes ne possèdent pas nécessairement de code arête-identifiant. Pour posséder un tel code, un graphe ne doit pas posséder deux arêtes e et f telles que

$$N[e] = N[f].$$

Si de telles arêtes existent, elles sont appelées *arêtes pendantes*. Il s'agit de l'équivalent des *sommets jumeaux* dans les codes identifiants pour les sommets. Ainsi, un graphe G possède un code arête-identifiant si et seulement si, il ne possède pas d'arêtes pendantes. Autrement dit, si le graphe $L(G)$ est sans jumeau.

Par analogie à la Notation 2.1, nous notons $\gamma^{EID}(G)$ la taille du plus petit code arête-identifiant d'un graphe G , s'il existe.

De plus, tout comme pour les codes identifiants les sommets, nous avons des résultats donnant la taille du plus petit code arête-identifiant pour des graphes particuliers mais pas pour n'importe quel graphe.

Par exemple, Aline PARREAU prouve le résultat suivant ([17]).

Théorème 3.1. *Nous avons $\gamma^{EID}(K_{n,n}) = \lceil \frac{3n-1}{2} \rceil$ pour $n \geq 3$.*

Or, par la Section 2.2.2 et en particulier la Proposition 2.4, nous savons que $\gamma^{EID}(K_{n,n}) = \gamma^{ID}(K_n \square K_n)$. De plus, nous avons précédemment prouvé que $\gamma^{ID}(K_n \square K_n) = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor = \lceil \frac{3n-1}{2} \rceil$ (Théorème 2.6).

Nous venons dès lors de trouver une deuxième façon de démontrer le Théorème 2.6 grâce aux codes arêtes-identifiants.

3.3 Un peu de complexité

Tout au long de ce travail, nous avons insisté sur le fait que trouver un code identifiant de taille minimal pour un graphe quelconque n'était pas chose aisée. Il est enfin temps d'en discuter sérieusement !

Nous supposons dès lors que le lecteur possède les notions de bases de théorie de la complexité. Le cours [19] devrait permettre au lecteur de combler certaines lacunes à ce sujet. Dans la première partie, nous avons pu trouver le cardinal minimum que doivent avoir les codes identifiants de graphes dans des cas particuliers. Cependant, dans un cas général, trouver le cardinal minimum d'un code identifiant d'un graphe est un problème dit *difficile* : on ne peut donc pas espérer mieux qu'un algorithme d'énumération pour résoudre

ce problème dans le cas général. C'est pourquoi nous nous sommes précédemment attardés sur des graphes possédant une structure particulière : ainsi, nous avons pu trouver un algorithme plus efficace, c'est-à-dire en temps polynomial par rapport au nombre de sommets du graphe en question. En effet, étant donné que les classes de graphes que nous considérons possèdent une structure particulière, nous avons bel et bien un algorithme en temps polynomial.

Le problème d'optimisation associé aux codes identifiants est le suivant :

ID-CODE($r, \leq l$) :

Instance : Un graphe G admettant un code $(r, \leq l)$ -identifiant et un entier $k \geq 1$.

Question : Existe-t-il un code $(r, \leq l)$ -identifiant de G de cardinal inférieur ou égal à k ?

En 2001, pour $r = 1$ et $l = 1$, le résultat suivant a été étudié et prouvé ([4]) :

Théorème 3.2. *Le problème ID – CODE est NP – complet.*

De plus, en 2003, I. CHARON, O. HUDRY et A. LOBSTEIN démontrent le cas général ([3]) :

Théorème 3.3. *Le problème ID-CODE(r) est NP – complet, pour $r \geq 1$.*

Les preuves se font via des réductions au problème de satisfaisabilité 3 – SAT.

De plus, nous pouvons également noter que le problème de complexité se rapportant aux codes arêtes-identifiants est également NP – complet. En effet, dans ce cas, le problème d'optimisation s'énonce comme suit :

EDGE-IDCODE :

Instance : Un graphe G sans arêtes pendantes et un entier k .

Question : Le graphe G possède-t-il un code arête-identifiant de taille au plus k ?

Dans sa thèse ([17]), Aline PARREAU démontre que ce problème est NP – complet en le réduisant au problème $PLANAR(\leq 3, 3) - SAT$ qui est une variante du problème SAT.

Enfin, il est possible de trouver un récapitulatif d'une grande partie des travaux effectués en ce qui concerne la complexité de la cardinalité des codes identifiants des graphes dans la thèse de Florent FOUCAUD ([8]). Remarquons tout de même qu'il reste certains problèmes ouverts à ce sujet.

3.4 Bornes

Vu la section précédente, il n'est pas réaliste de donner la taille minimum d'un code identifiant d'un graphe de manière générale. Cependant, nous pouvons quand même borner le cardinal d'un code identifiant d'un graphe.

En ce qui concerne la borne supérieure, on doit le résultat à Sylvain GRAVIER et Julien MONCEL ([11]).

Théorème 3.4. *Soit G un graphe sans jumeaux possédant au moins une arête. Alors*

$$\gamma^{ID}(G) \leq |V(G) - 1|.$$

De plus, cette borne est serrée : elle est atteinte notamment pour les étoiles $K_{1,n}$ avec $n \geq 2$.

D'autre part, concernant la borne inférieure, nous avons :

Théorème 3.5. *Soit G un graphe sans jumeaux possédant au moins une arête. Alors*

$$\lceil \log_2(|V| + 1) \rceil \leq \gamma^{ID}(G).$$

Une preuve constructive de ce théorème ainsi que des graphes atteignant cette borne sont disponibles dans [14].

3.5 A quoi ça sert ?

Outre les applications des codes identifiants dans les réseaux de processeurs défectueux et dans les bâtiments publics avec des détecteurs d'incendies, on retrouve les codes identifiants dans de nombreuses autres situations de la vie courante. Nous en présentons les principales ci-dessous.

3.5.1 Modélisation d'un problème de localisation par des réseaux de capteurs

Supposons avoir dispersé un réseau de capteurs au sein d'un bâtiment. Le but est de pouvoir localiser les personnes présentes dans ce bâtiment en temps réel.

Chaque personne se déplaçant dans le bâtiment est supposée munie d'un badge émettant un signal radio pouvant être reçu par les capteurs. Chaque capteur recouvre une zone, appelée *zone de contrôle*, qui est une partie du bâtiment telle que si une personne se trouve dans cette zone, le capteur recevra le signal émis par le badge.

Ainsi, l'ensemble de toutes ces zones de contrôle des capteurs divise le bâtiment en différents secteurs. L'objectif est alors de localiser un individu grâce à l'ensemble des capteurs recevant le signal radio du badge de l'individu.

A nouveau, pour résoudre ce problème, nous pouvons utiliser la notion code identifiant : celui-ci étant formé par l'ensemble des capteurs. En effet, l'ensemble des capteurs recouvre tout le bâtiment : il s'agit ainsi d'un code couvrant. Par ailleurs, la condition de séparation nous permet de discrétiser le bâtiment en un plus grand nombre de secteurs et ainsi de donner une localisation plus précise de l'individu.

3.5.2 Problème de recherche binaire : les jeux de Rényi

Qui d'entre nous n'a jamais joué à "*Qui est-ce ?*", ne serait-ce que pour passer le temps lors d'un long trajet en voiture ? Sans le savoir, déjà à ce moment-là, nous avons utilisé le concept de code identifiant !

Prenons ainsi deux joueurs, Paul et Carole. Le premier joueur, Paul, doit deviner une information connue par le deuxième joueur Carole. Dans [7], Christian DEPPE avance que l'idée des noms de ces joueurs viendrait de Spencer : Paul correspondrait ainsi à *Paul Erdős* (mathématicien hongrois, 1913-1996) qui posait toujours beaucoup de questions, tandis que Carole serait un oracle divin (en effet, Carole et oracle sont des anagrammes) dont les réponses doivent sans cesse être vérifiées.

Les questions que Paul posent doivent être de type binaire : Carole ne peut lui répondre que par oui ou par non. Par exemple, dans le jeu "*Qui est-ce ?*", nous demandons "*Le personnage a-t-il les cheveux bruns ?*", "*Est-ce un homme ?*" mais nous ne pouvons pas poser la question "*Quelle est la couleur de ses yeux ?*". Cependant, dans notre jeu, Carole a le droit de mentir jusqu'à k fois tout au long du jeu (ce qui n'est a priori pas le cas dans la version originale du "*Qui est-ce ?*"), où k est une constante fixée à l'avance et connue de nos deux joueurs. Dans ce cas, on parle de *jeux de Rényi-Ulam*.

Pour modéliser ce type de situation sous forme de graphes et de codes, nous utilisons généralement les codes identifiants et plus spécialement les *codes identifiants adaptatifs*. En effet, nous partons du principe qu'en général, Paul va poser ses questions l'une à la suite de l'autre en adaptant ses questions aux réponses qu'il a reçues précédemment, comme dans la plupart des jeux de devinettes. Nous n'entrerons pas dans les détails concernant les codes adaptatifs dans ce travail. Cependant, des informations complémentaires peuvent être consultées ([15]).

3.5.3 Et encore...

Comme énoncé dans les exemples précédents, il existe de nombreux cas d'applications des codes identifiants dans la vie quotidienne. Cette liste d'exemples n'est bien évidemment pas exhaustive, nous retrouvons également les codes identifiants dans :

- l'analyse de structures secondaires d'ARN ([15]) ;
- d'autres systèmes de détection ([23]) ;
- ...

Bibliographie

- [1] David Auger, *Problème d'identification combinatoire et puissances de graphes*, Thèse de doctorat, Télécom ParisTech, juin 2010.
- [2] Krishnendu Chakrabarty, Mark G. Karpovsky et Lev B. Levitin, *On a new class of codes for identifying vertices in graph*, IEEE Transactions on Information Theory **44** (1998), 599–611.
- [3] Irène Charon, Olivier Hudry et Antoine Lobstein, *Minimizing the size of an identifying or locating-dominating code in a graph is np-hard*, Theoretical Computer Science **290** (2003), 2109–2120.
- [4] Gerard Cohen, Iiro Honkala, Antoine Lobstein et Gilles Zemor, *On codes identifying vertices in the two-dimensional square lattice with diagonals*, IEEE Transactions on Computers **50** (2001), 174–176.
- [5] Gérard Cohen, Iiro Honkala, Simon Litsyn et Antoine Lobstein, *Covering codes*, North-Holland Mathematical Library, 1997.
- [6] Olivier Delmas, Sylvain Gravier, Montassier Michael et Aline Parreau, *Deux variations autour des codes identifiants*, 2009.
- [7] Christian Deppe, *Strategies for the Rényi-Ulam Game with fixed number of lies*, Theoretical Computer Science **314** (2004), 45–55.
- [8] Florent Foucaud, *Combinatorial and algorithmic aspects of identifying codes in graphs*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, Ecole Doctorale en Mathématiques et Informatique de Bordeaux, décembre 2012.
- [9] Valentin Gledel et Aline Parreau, *Identification of points using disks*, 2018, disponible via l'URL <<https://arxiv.org/pdf/1705.11116.pdf>>, consulté le 09.05.2018.
- [10] Wayne Goddard et Kirsti Wash, *ID Codes in cartesian products of cliques*, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing **85** (2013), 97–106.
- [11] Sylvain Gravier et Julien Moncel, *On graphs having a $v \setminus \{x\}$ set as an identifying code*, Discrete Mathematics **307** (2007), 432–434.
- [12] Sylvain Gravier, Julien Moncel et Ahmed Semri, *Identifying codes of cartesian product of two cliques of the same size*, Electronic Journal of Combinatorics **15** (2008).
- [13] Julien Moncel, *Codes identifiants dans les graphes*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, juin 2005.

- [14] Julien Moncel, *On graphs on n vertices having an identifying code of cardinality $\lceil \log_2(n+1) \rceil$* , Discrete Applied Mathematics **154** (2006), 2032–2039.
- [15] Julien Moncel, *Identification de sommets dans les graphes*, Université Paul Sabatier, Toulouse III, juillet 2012, habilitation à diriger des recherches.
- [16] Robert Norman et Michael Rabin, *An algorithm for a minimal cover of a graph*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 315–319.
- [17] Aline Parreau, *Problèmes d’identification dans les graphes*, Thèse de doctorat, Université de Grenoble, juillet 2012.
- [18] Douglas F. Rall et Kirsti Wash, *Identifying codes of the direct product of two cliques*, European Journal of Combinatorics **36** (2014), 159–171.
- [19] Michel Rigo, *Algorithme et calculabilité*, Département de mathématiques de l’Université de Liège, 2009-2010, notes du cours de troisième bachelier en sciences mathématiques.
- [20] Michel Rigo, *Théorie des graphes*, Département de mathématiques de l’Université de Liège, 2009-2010, notes du cours de deuxième bachelier en sciences mathématiques.
- [21] Peter J. Slater, *Dominating and reference sets in a graph*, Journal of Mathematical and Physical Sciences **22** (1988), 445–455.
- [22] Peter J. Slater et Douglas F. Rall, *On location-domination numbers for certain classes of graphs*, Congressus Numerantium **45** (1984), 97–106.
- [23] Rachanee Ungrangsi, Ari Trachtenberg et David Starobinski, *An implementation of indoor location detection systems based on identifying codes*, Lecture Notes in Computer Science **3283** (2004), 175–189.
- [24] Elise Vandomme, *Contributions to combinatorics on words in an abelian context and covering problems in graphs*, Thèse de doctorat, Université de Grenoble et Université de Liège, janvier 2015.