Analyse de la perception des problèmes d'optimisation chez les étudiants de premier bachelier en architecture

Auteur : Latour, Florence
Promoteur(s) : Jancart, Sylvie; Mathonet, Pierre
Faculté : Faculté des Sciences
Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité didactique
Année académique : 2017-2018
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/5540

Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Analyse de la perception des problèmes d'optimisation chez les étudiants de premier bachelier en architecture

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du grade de
Master en Sciences Mathématiques à finalité didactique

Promotrice :
Sylvie Jancart
Co-promoteur :
Pierre Mathonet

Réalisé par
Florence Latour
Année académique 2017 - 2018

Remerciements

Je voudrais remercier les personnes qui ont contribué,
de près ou de loin, à la rédaction de ce mémoire.

Tout d'abord, ma promotrice Sylvie Jancart et mon co-promoteur Pierre Mathonet
pour m'avoir donné l'opportunité de traiter ce sujet pendant
deux années consécutives auprès des étudiants
et de me permettre d'avoir un avant goût
du challenge qui m'attend
en tant que future enseignante.
Leurs conseils, leur aide et leur disponibilité
m'ont permis de mener à bien ce projet.

Ensuite, je voudrais également remercier ma famille,
mes amis et Damien pour leur soutien
tout au long de l'élaboration de ce travail,
et plus particulièrement ma maman
pour ses nombreuses relectures.

Pour terminer, je voudrais sincèrement remercier mes parents
qui m'ont toujours soutenue et encouragée tout au long
de mon parcours universitaire et sans qui
je n'en serais pas là aujourd'hui.

Merci à tous ceux qui m'ont permis de croire
en mes rêves et surtout de les réaliser !

"Il est plus facile de renoncer que de persévérer."

Table des matières

Introduction

Régulièrement, dans la presse, comme dans le grand public, on souligne le grand nombre d'échecs scolaires, la baisse de niveau dans l'enseignement annoncée par différents professeurs et la mise en place, par le monde politique, de différentes mesures en vue d'augmenter le taux de réussite des étudiants. Les universités n'échappent pas à ces critiques et ces mesures.

Depuis plusieurs années, l'Université de Liège met en place différents services permettant de soutenir et de guider les étudiants tout au long de leur parcours universitaire. Ces aides sont multiples et variées, comme l'aide fournie à l'étudiant dans le choix de son orientation, les cours préparatoires, ainsi que l'encadrement de l'étudiant dans la gestion de son étude, etc. Si tous ces dispositifs peuvent aider certains étudiants à mieux s'intégrer dans la vie universitaire et mieux gérer leur emploi du temps et leur étude, cela ne suffit malheureusement pas pour pallier les problèmes qu'ils pourraient rencontrer dans les différentes matières composant leur cursus.

Dans le cadre de ce mémoire, pendant deux années académiques consécutives, 2016-2017 et 2017-2018, je me suis intéressée aux étudiants de premier bachelier en architecture de l'Université de Liège. Plus précisément, je me suis préoccupée des difficultés que ces étudiants pouvaient rencontrer dans leur cours de mathématiques lors de cette transition, difficile, du secondaire à l'université. À cette fin, j'ai été pendant ces deux années étudiante-monitrice dans la Faculté d'Architecture, dans le cours de mathématiques de premier bachelier de Madame Jancart. Ce poste m'a permis de répertorier un grand nombre de difficultés rencontrées par une majorité d'étudiants, notamment, dans le domaine des problèmes d'optimisation sur lequel j'ai dès lors, décidé de porter mon attention. J'ai consulté différentes théories et travaux de recherches pour tenter de comprendre l'origine de certains de ces problèmes et m'aider à mettre au point des pistes pour tenter d'atténuer ces difficultés. Je me suis notamment basée sur des recherches de Schneider et Henrotay [14] et [15] sur la catégorisation des problèmes d'optimisation et des recherches sur les "worked examples" de Atkinson et al. [16]. Parallèlement, j'ai analysé les productions des étudiants, afin d'une part, de déceler leurs difficultés initiales et d'autre part, d'observer d'éventuelles améliorations.

La structure de ce mémoire est la suivante.
Le premier chapitre détaille le contexte de ce travail, c'est-à-dire le cadre théorique et pratique de la situation. Le deuxième chapitre se concentre sur les difficultés des étudiants et les moyens mis en place pour les détecter ainsi que les analyses de ceux-ci, tant pour l'ensemble du cours de mathématique que pour les problèmes d'optimisation en particulier. Pour terminer, le troisième chapitre de ce mémoire détaille les théories consultées dont je me suis inspirée pour développer et tester différentes pistes en vue d'aider les étudiants à surmonter ces difficultés. Stratégies que j'ai enfin analysées pour déceler d'éventuelles améliorations dans le traitement de ces problèmes d'optimisation par les étudiants.

Chapitre 1

Contexte de travail

Pour débuter ce mémoire, il me semble essentiel de préciser le contexte de travail dans lequel on se trouve. Je commencerai par décrire le contexte général lié à l'entrée à l'université, ensuite, je décrirai les différentes théories sur lesquelles je me base pour ce travail et enfin, je préciserai le contexte pratique de ce mémoire, c'est-à-dire la population d'étudiants avec laquelle je vais travailler ainsi que les contraintes auxquelles je suis confrontée.

1.1 Contexte général

Depuis la fin du XXe siècle, l'enseignement a connu une massification : entre les années 1945 et 1970 principalement dans l'enseignement secondaire puis, quelques années plus tard, dans l'enseignement supérieur. Cette massification, comme l'explique Romainville [1], a eu deux répercussions majeures sur la didactique dans les universités. D'une part, les enseignants sont conviés à enseigner à de grands groupes, de parfois plusieurs centaines d'étudiants, avec pour conséquence une restriction des types d'apprentissages pouvant être entrepris. D'autre part, ils sont face à une diversification des profils étudiants. En effet, pour la plupart des étudiants passant par l'enseignement supérieur, ce passage semble être une suite logique de leur parcours scolaire. La vision de ce passage chez les étudiants est fortement lié au fait qu'aujourd'hui l'avenir professionnel d'un étudiant dépend de son niveau de formation. Les étudiants dont les parents n'ont pas fréquenté le supérieur doivent, peut-être plus que les autres, se familiariser avec cette institution. Ces professeurs sont donc censés assurer un apprentissage en profondeur à tous les étudiants malgré ces deux contraintes.

Romainville [1] souligne également plusieurs défis auxquels l'enseignement supérieur doit faire face dont le premier que je viens d'évoquer qui est d'assumer la massification dans les universités. Un deuxième défi serait de diminuer le taux d'échec dans les universités. Encore faut-il définir ce qu'on entend par réussite, parle-t-on de réussite qualitative ou quantitative ? Mais ceci est un autre débat. Sans compter qu'il faut rester prudent avec les nombres annoncés dans les diverses presses. En effet, quand on parle de taux d'échec en première année à l'université, considère-t-on uniquement les étudiants ayant suivi le cursus et passé les examens ou de tous les étudiants inscrits à la formation, c'est-à-dire également ceux ne présentant pas l'examen ou ayant arrêté en cours d'année mais étant toujours inscrits ? En effet, l'université étant accessible à tous, il n'est pas rare de rencontrer en premier bachelier des étudiants ayant suivi des cursus dans une ou plusieurs autres facultés précédemment ou encore des candidats provenant de différents horizons de l'enseignement secondaire. Quelques chiffres interpellants :

> Sur l'ensemble des pays de l'OCDE, un tiers environ des jeunes qui entrent dans l'enseignement supérieur en sortiront sans aucune qualification. Par ailleurs, un tiers seulement de ces entrants obtiendront le diplôme qu'ils convoitent dans les temps prévus : certains doubleront une ou plusieurs années, d'autres se réorienteront après un échec avant de décrocher un diplôme, pas nécessairement celui qu'ils avaient envisagé au départ. (Romainville 2004, p.5)

Depuis plusieurs années, diverses actions politiques ont été mises en place pour essayer de réduire ces échecs, comme la réussite à 10/20 au lieu de 12/20 ou encore la suppression des années durant les bacheliers. Encore faut-il démontrer que ces actions sont là pour pallier aux réelles causes de l'échec à l'université.
Un dernier défi que je citerai ici est l'obtention d'acquis de qualité. En effet, malgré les populations grandissantes d'étudiants, l'enseignement universitaire se doit de transmettre des connaissances et de développer des compétences de haut niveau, mais également de permettre à l'étudiant de développer son esprit critique vis-à-vis des savoirs qu'on lui enseigne. Les étudiants devront être capables de traiter toutes sortes de problèmes qui leur demanderont, d'une part, de savoir justifier leurs choix, de raisonner, d'être rigoureux, et d'autre part, d'avoir suffisamment de confiance en soi mais aussi de savoir gérer l'urgence pour leur permettre de trouver des solutions à ces problèmes. Dans cette optique, je reprendrai ici une citation de Lavisse définissant l'enseignement universitaire et toujours d'actualité pour bon nombre d'entre nous. Cette citation a notamment été reprise par Louis Liard, philosophe et réformateur de l'enseignement supérieur en France à la fin du XIXe siècle, dans son ouvrage "*L'enseignement supérieur en France (Tome second)*" en 1894 mais aussi par Romainville.

> « L'université ne donnera pas seulement à chacun la dose de connaissances qui lui est nécessaire ; elle élargira les esprits par le spectacle de son enseignement et par le contact qu'elle établira entre des jeunes gens de vocations diverses. Elle les fortifiera par la méthode même de l'enseignement supérieur ; car, l'enseignement supérieur, c'est, en fin de compte, une méthode ; son objet suprême est d'élever les esprits au-dessus des connaissances de détail et de les rendre capables de cette haute dignité qui est la faculté de juger par soi-même et de produire des idées personnelles » (Romainville 2004, p.6).

Pour répondre à ces demandes, plusieurs actions pédagogiques ont été mises en place au sein de l'université, notamment pour mieux orienter les étudiants dès leur première année ou encore les aider à se familiariser avec ce nouveau monde, j'y reviendrai dans la section 1.3. Mais cela ne peut pas suffire pour espérer voir le nombre d'échecs diminuer ou encore assurer une qualité des acquis. Dès lors, pourquoi ne pas se concentrer sur ce qui peut être fait au niveau didactique et s'intéresser aux recherches qui peuvent contribuer à l'amélioration de la compréhension des étudiants dans leurs apprentissages. Pour ce faire, je dois me placer dans un certain contexte didactique. Ces aspects théoriques sont développés dans la section suivante.

1.2 Cadre théorique

Dans cette section, je vais présenter le cadre théorie dans lequel je me place. Dans un premier temps, je vais décrire la transition de l'enseignement secondaire à l'enseignement supérieur en faisant référence à divers auteurs comme Robert [2], Artigue [3] et Praslon [4]. Ensuite, j'introduirai les notions de la théorie d'anthropologie du didactique de Chevallard [5] [6]. Pour terminer, je parlerai des différents contrats : le contrat didactique et le contrat didactique institutionnel introduits par Brousseau [7] et Chevallard [6] mais aussi le contrat institutionnel. Tout ceci nous permettra de rendre intelligibles certaines observations dans l'enseignement des savoirs mathématiques ainsi que dans l'apprentissage de ceux-ci chez les étudiants.

1.2.1 La transition secondaire-supérieur

Dans le cadre de ce mémoire, je m'intéresse aux étudiants de premier bachelier en architecture de l'Université de Liège, c'est-à-dire pour la plupart d'entre eux, des étudiants sortant du secondaire. Ces étudiants sont donc confrontés à un changement d'institution entre l'institution enseignement secondaire et l'institution enseignement universitaire qu'on appelle la transition secondaire-supérieur. Plusieurs auteurs, dans différents pays, se sont intéressés à cette transition comme Gueudet, Artigue [3], Praslon [4], Robert [2] et bien d'autres.

Tout d'abord, Robert [2] met en évidence que lors de cette transition, qui peut s'étaler sur plusieurs années, les mathématiques qui vont être enseignées vont ressembler de plus en plus aux mathématiques des experts. Dès lors, il s'intéresse aux pratiques attendues des étudiants par les professeurs et les difficultés qui ressortent de ces attentes. Parmi celles-ci, la croyance de certains professeurs que les étudiants intègrent leurs nouveaux savoirs tout en gardant en tête les savoirs censés acquis de l'enseignement secondaire pour augmenter leurs connaissances. Or, plusieurs études ont montré que ce n'était pas le cas pour beaucoup d'étudiants. Il souligne également l'organisation des connaissances et la flexibilité de celles-ci, c'est-à-dire la disponibilité des connaissances et la prise de conscience de cette disponibilité, qui ne sont pas suffisamment prises en compte et laissées à l'entière responsabilité de l'étudiant.

> Mais, que l'on parle de disponibilité, d'organisation des connaissances ou de flexibilité, les exigences correspondantes peuvent paraître transparentes pour les enseignants, il peut être pour eux évident que les apprentissages comportent cette dimension, ce n'est pas toujours souligné dans les enseignements, et il n'y a pas toujours de moyens explicites mis en œuvre à cette fin : tout se passe comme si cet apprentissage se faisait tout seul, ou, en tout cas, était du seul ressort des étudiants. (Robert 1998, p.153)

Une notion que Robert [2] met également en avant est le travail personnel des étudiants qui n'est pas spécialement effectué en profondeur. En effet, en arrivant au supérieur les étudiants ne peuvent plus se contenter d'écouter et de travailler en classe, la matière étant plus conséquente et le rythme étant plus soutenu, un travail personnel, demandé implicitement, est essentiel pour comprendre et intégrer ce nouveau savoir.

> [...]les étudiants privilégient les apprentissages superficiels, sans questionnements, où aucun repère externe à la connaissance n'est négligé, et dont les étudiants pensent que cela va les amener à la réussite (souvent 10/20 leur suffit), au détriment d'apprentissages plus authentiques, obligeant à des questionnements, souvent difficiles à installer, car ils nécessitent de changer de mode de travail, et surtout souvent longs à être efficaces, car les apprentissages eux-mêmes sont longs. (Robert 1998, p.153)

L'auteur souligne que ce choix peut parfois être conforté chez les étudiants par le choix du type d'évaluation exigé par l'enseignant. Et personnellement, je m'interroge sur le rôle du système dans lequel les étudiants se trouvent. En effet, la quantité de matière étant toujours plus conséquente et évaluée lors de périodes assez courtes dans le temps, cela ne pourrait-il pas pousser une partie des étudiants à avoir une étude superficielle dans certains de leurs cours ?
Par exemple, dans le cas des étudiants de premier bachelier en architecture, l'examen de mathématiques est constitué de plusieurs exercices sur les différentes notions abordées lors du cours théorique. Il n'y a donc aucune question purement théorique, même si pour résoudre les exercices il faut avoir connaissance de certaines formules et bien comprendre la théorie. Ce type d'examen peut influencer certains étudiants dans leur façon d'étudier. Certains d'entre eux ne vont pas étudier en profondeur la théorie, peut-être même se contenter de la relire, et de répertorier les formules dont ils ont besoin pour les résolutions des exercices pour ensuite se concentrer sur les séances d'exercices du cours. De plus, dans le cursus des étudiants de premier bachelier en architecture, annexe A, la plupart des cours correspondent à deux ou quatre crédits. Le cours de mathématiques en vaut quatre, tandis que le cours demandant une grande attention et ayant un poids conséquent dans leur cursus, le projet, rassemble 20 crédits sur 60. Il est donc compréhensible que les étudiants prêtent plus d'attention et consacrent davantage de temps à leur projet qu'à un autre cours, celui-ci pouvant leur faire rater l'année en cas d'échec. De plus, les étudiants comptabilisent, en

faisant abstraction du projet se déroulant tout au long de l'année, un nombre de huit cours au premier quadrimestre et huit cours au second quadrimestre. Les sessions d'examens, se déroulant sur environ trois semaines consécutives, sont donc chargées sans prendre en compte la réalisation du projet. D'autre part, les étudiants de premier bachelier bénéficient du droit de pouvoir passer les examens des cours du premier quadrimestre également pendant la session de juin, en plus de celle d'août, ce qui peut gonfler considérablement la session de juin.

Lors d'une telle transition, il semble indispensable de tenir compte également de l'hétérogénéité de la population ou du moins d'en avoir conscience. Car comme le signale Artigue [3], peu importe le "bagage initial" de chaque étudiant, ils devront tous apprendre la même chose à savoir des mathématiques assez sophistiquées.
Dès lors, un problème qui peut survenir pendant cet apprentissage est l'apparition de "sauts" d'un langage à un autre ou d'une représentation à une autre que les professeurs effectuent naturellement pour développer leurs matières sans éventuellement prendre en compte que ces "sauts" ne sont pas si évidents à réaliser quand on est un néo-bachelier. Ou alors, ils pensent peut-être, à tort, que les étudiants pourront tous s'adapter seuls à ces jeux entre langages et représentations.
De plus, comme il sera explicité dans la section 1.2.2, cette transition est une transition entre des cultures différentes due à un changement d'institution. Donc, il sera certainement problématique pour un étudiant de s'adapter à la distance séparant ces deux cultures. En effet, un objet mathématique va peut-être être vu de façon différente selon qu'on est dans l'enseignement secondaire ou l'enseignement supérieur et selon la faculté ou encore la filière dans laquelle on se trouve. Cette multitude de visions peut être déstabilisante de prime abord. Pour compléter cette approche, j'évoquerai la thèse de Praslon [4] qui s'intéresse à la notion de dérivée et son environnement dans deux institutions différentes que sont l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur. Dans ses analyses, il met en évidence la notion de micro-ruptures entre les deux institutions en question dont l'accumulation entraine l'augmentation de difficultés chez les étudiants, difficultés auxquelles les enseignants universitaires ne sont pas suffisamment attentifs.
Parmi ces micro-ruptures, il relève par exemple une autonomie plus grande dans la résolution d'exercices qui, dans le secondaire, peut être encadrée par des questions intermédiaires, ou encore, la répétition des tâches plus difficile à mettre en place dans l'enseignement universitaire lors des séances, du fait d'une sélection plus importante de ces tâches. Mais aussi, un temps didactique accéléré par rapport à celui du secondaire qui demande donc une assimilation plus rapide des objets enseignés.
Un dernier point que Praslon [4] met en avant est la tendance générale des étudiants néo-bacheliers à essayer d'adapter leurs connaissances du secondaire pour résoudre une tâche plus complexe. S'il souligne positivement ce geste, il précise que malheureusement ces adaptations aboutissent souvent à des démarches simplificatrices. Il décèle également lors de tâches plus complexes un regard peu critique des étudiants sur leur production.

Tous les éléments développés ci-dessus nous montrent que cette transition de l'enseignement secondaire à l'enseignement supérieur est complexe et a toute son importance sur l'apprentissage des étudiants. La théorie anthropologique du didactique de Chevallard va nous permettre de caractériser ces transitions institutionnelles.

1.2.2 La théorie anthropologique du didactique (TAD)

Dans ce contexte de recherche, un point de vue institutionnel semble donc plus adéquat pour déterminer les attentes spécifiques à l'enseignement supérieur. La TAD, théorie anthropologique du didactique de Chevallard [6], va fournir un éclairage dans ce travail puisque cette théorie considère que les pratiques relatives à un objet sont distinctes d'une institution à une autre. Donc le savoir enseigné par le professeur à ses élèves va notamment dépendre de l'institution dans laquelle il se trouve. Or dans notre situation, lors de la transition secondaire-universitaire, les mêmes objets mathématiques sont souvent revus d'une institution à l'autre, ces objets mathématiques sont détaillés dans la section 1.3.1.

De la notion de rapport à celle de praxéologie

Chevallard va introduire la notion de rapport car pour lui une personne ou une institution ne peut "posséder" les objets mathématiques. Par contre, il parlera de rapport que cette personne ou cette institution peut avoir avec cet objet. Ce rapport peut différer d'un professeur à un autre suivant la matière qu'ils enseignent dans une école mais il peut également varier suivant que des professeurs de mathématiques se trouvent dans une école secondaire ou dans une université par exemple. Plus généralement, il parlera du rapport d'une personne x à un objet o, ou du rapport d'une institution I à un objet o, ou plus précisément, du rapport d'une personne x détenant une position p dans une institution I à cet objet o.
Le rapport risque d'être changé dès que l'on modifie l'une de ces quatre lettres : o, x, I ou p. En effet, le rapport d'un professeur de mathématiques de la faculté sciences à l'université de Liège à l'objet "dérivée" ne sera pas le même que celui d'un étudiant de cette même université à ce même objet. De même, on peut ajouter que deux professeurs de mathématiques de l'Université de Liège mais enseignant dans des facultés différentes n'ont pas forcément le même rapport à un même objet. On peut donc affiner le terme institution qui ne désigne donc pas une structure administrative telle que "l'Université de Liège" mais bien un ensemble de personnes reconnaissant les mêmes objets et s'associant aux mêmes pratiques, ou au contraire, s'en refusant certaines .
C'est en s'intéressant à la naissance ou à l'évolution d'un rapport à un objet que les notions de type de tâches, de technique, de technologie et de théorie vont voir le jour pour conduire ensuite à la notion de praxéologie :

> Pour espérer observer la naissance ou l'évolution d'un rapport à un objet o, il faut, si je puis dire, observer l'individu x ou l'institution I « dans son rapport à o », dans les activités de x ou de sujets de I qui « activent » o. De là

> prirent progressivement forme les notions clés de *type de tâches*, de *technique*, de *technologie*, de *théorie*.(Chevallard 2007, p.6)

En effet, la notion de praxéologie, notée $[T, \tau, \theta, \Theta]$, fait référence à l'union de deux blocs : un bloc pratico-technique et un bloc technologico-théorique. Le premier bloc est composé d'un type de tâches T et d'une technique τ permettant de réaliser ce type de tâches. Le deuxième bloc est constitué d'une technologie θ justifiant la technique du premier bloc et d'une théorie Θ justifiant la technologie. Je vais expliciter ces quatre éléments, pour plus de précisions concernant ceux-ci je renvoie le lecteur à Chevallard [5].

Un **type de tâches** : Chevallard fait bien la distinction entre tâches et type de tâches ou encore genre de tâches. En effet, tout d'abord il met l'accent sur l'élargissement de ces notions par rapport à leur définitions dans la langue française. Ensuite, il explique qu'une tâche va appartenir à un type de tâches et on pourra nommer celui-ci de façon rigoureuse. Par exemple on dira que *lire un livre* est un type de tâches, par contre *lire* tout seul est un genre de tâches. Pour terminer, il ajoute que ces notions de tâches, type de tâches ou encore genre de tâches, sont des constructions institutionnelles, les transformations que celles-ci peuvent subir sont donc dues à l'homme et non à un phénomène naturel.

À un type de tâches est associée une manière de réaliser ce type de tâches. C'est ce qu'on appelle une **technique**.

Une **technologie** est un discours rigoureux qui permet de légitimer une technique, c'est-à-dire, de garantir que la technique utilisée permet bien d'exécuter le type de tâches demandé.

Une **théorie** va quant à elle confirmer une technologie employée.

Donc pour résumer, Chevallard, dans la théorie anthropologique du didactique exprime le savoir, dans une institution donnée, sous forme d'organisations mathématiques, appelées praxéologies, composées de quatre éléments qui sont : un type de tâches, une technique, une technologie et une théorie. Ainsi, pour effectuer un type de tâches, une technique va être utilisée, cette technique sera justifiée par une technologie qui sera justifiée par une théorie, De Vleeschouwer [8].

1.2.3 Contrat didactique et contrat institutionnel

Après cette introduction sur la TAD, je vais aborder deux types de contrats : le contrat didactique (institutionnel) et le contrat institutionnel. Mais au préalable, il est important de rappeler le phénomène de transposition didactique introduit par Brousseau [9] qui consiste à passer du savoir savant au savoir enseigné. En effet, pour que le savoir savant soit rendu enseignable, il doit subir des transformations, suivant le schéma ci-dessous repris de Schneider [10], qu'on appelle la transposition didactique.

Objet de savoir $\rightarrow$ objet à enseigner $\rightarrow$ objet d'enseignement

Une première transformation fait passer le savoir savant au savoir enseigné et mène aux savoirs constituant les programmes scolaires. Une deuxième transformation va ensuite être appliquée à ce savoir, on passe du savoir enseigné au savoir réellement enseigné en classe qui dépend de différentes contraintes comme les élèves ou le temps à disposition.

Le concept de contrat didactique va déterminer le rôle de chaque intervenant dans la transmission du savoir, c'est-à-dire le rôle de l'enseignant et le rôle de l'élève. Le concept de contrat didactique institutionnel spécifié par Chevallard va quant à lui appuyer la notion d'un objet de savoir dans une institution. Comme on l'a déjà mentionné, un objet ne sera pas vu forcément de la même manière d'une institution à une autre. En repartant de la notion de praxéologie, on dira qu'un même type de tâches peut être effectué par des techniques différentes suivant l'institution dans laquelle on se trouve et justifié par des technologies différentes également. Chevallard [6] définit différents types de contrats selon "le niveau de co-détermination" dans lequel on est. Ainsi, si par exemple on se situe dans le niveau de la discipline, le langage formel est automatiquement utilisé à l'université mais pas toujours dans l'enseignement secondaire. Si on se place maintenant au niveau d'un contenu, comme précisé précédemment, un même objet mathématique pourra être vu différemment d'une institution à une autre [8].

Un autre type de contrat qu'il est important de mentionner, est le contrat institutionnel. En effet, le contrat en application d'une institution à une autre n'est pas forcément le même. Si nous comparons celui de l'institution universitaire avec celui de l'institution secondaire, plusieurs différences peuvent être citées. Par exemple, comme Praslon [4] l'a mentionné dans ses travaux, l'autonomie est plus grande à l'université, on laisse la prise de notes à la charge de l'étudiant, il y a moins de répétition concernant les exercices et donc moins de routine dans les résolutions. Une autre différence est la présence au cours qui est obligatoire dans le secondaire et ne l'est plus, ou du moins pas pour tous les cours, à l'université. Ensuite, les étudiants ne sont plus évalués de la même façon, il y a moins ou pas d'interrogations avant les évaluations certificatives et celles-ci sont construites différemment parfois à cause du nombre d'étudiants. Par exemple, on peut avoir une évaluation qui est composée uniquement de QCM. Une autre différence se manifeste dans l'organisation des cours, pour la plupart, les séances de théorie et d'exercices sont séparées alors qu'elles ne l'étaient pas dans l'enseignement secondaire. Tous ces changements entre les contrats institutionnels ont un impact sur l'adaptation de l'étudiant à l'université.

1.3 Cadre pratique

Le cadre théorique étant posé, je vais maintenant situer le cadre pratique afin de préciser la population d'étudiants de premier bachelier en architecture et d'apporter des précisions quant au cadre théorique dans la situation dans laquelle on se situe.
Ensuite, je ferai référence à d'un projet qui s'est déroulé en parallèle avec ce mémoire dans

la faculté d'Architecture : le projet Feedback First-Year Project (FFYP).

1.3.1 Le cours de mathématiques

Dans cette section, nous allons commencer par détailler la population d'étudiants inscrits en premier bachelier en architecture à l'Université de Liège durant l'année académique 2017-2018 et suivant le cours de mathématiques dispensé par la professeure Sylvie Jancart. Lors de la première séance théorique du cours de mathématiques, Madame Jancart avait préparé un questionnaire électronique auquel les étudiants pouvaient répondre par boitiers. Ce questionnaire était composé de neuf questions, les cinq premières permettaient d'avoir des informations personnelles sur les étudiants et les quatre dernières étaient des questions basées sur les acquis que les étudiants sont censés maîtriser à leur arrivée ; comme le changement d'unités ou la règle de trois. Par exemple : "*Combien de ha y a-t-il dans 14000 km*^{2} *?*" ou encore "*On utilise un produit pour protéger le bois à l'extérieur. Ce produit est vendu par pot d'un litre au prix de 7 €. Un litre protège 14 m*^{2} *de bois. Combien de pots doit-on acheter pour couvrir 35 m*^{2} *?*"
Je vais m'intéresser aux informations personnelles posées aux étudiants. Celles-ci font apparaître différentes caractéristiques de la population occupant l'amphithéâtre. Premièrement, l'auditoire est composé d'un peu plus de filles que de garçons, en effet, 55% de filles pour 45% de garçons étaient dans l'auditoire ce jour-là. Ces pourcentages concordent avec ceux des inscriptions : 51 % de filles pour 49 % de garçons. La deuxième question concerne le nombre d'heures de mathématique suivies par ces étudiants en fin de secondaire. Le graphique, à la FIGURE 1.1, présente le nombre d'étudiants par le nombre d'heures de mathématiques suivies en fin de secondaire. Ce graphique est tiré du document collectant l'ensemble des résultats aux questions posées par boîtiers aux étudiants.

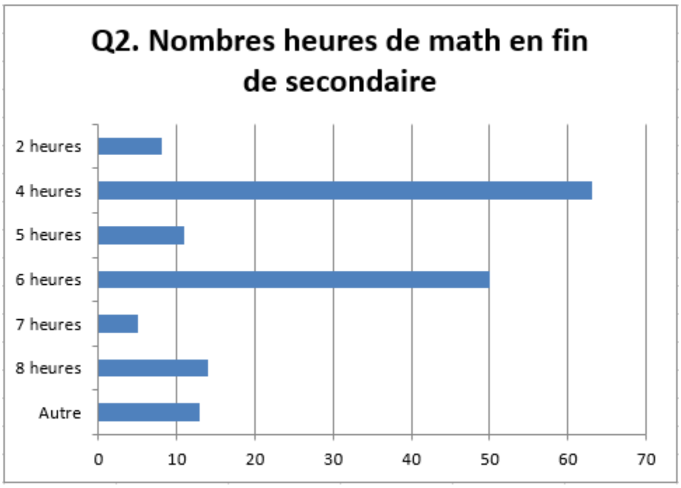


FIGURE 1.1 – Graphique du nombre d'étudiants par le nombre d'heures de mathématiques suivies en fin de secondaire

À cette question, 38% des étudiants déclarent avoir suivi 4 heures de mathématiques par semaine à la fin de leur secondaire, 30 % en ont suivi 6, 9 % ont eu 8 heures, 7 % ont eu 5 heures, 5 % ont eu 2 heures, 3 % ont eu 7 heures et enfin 8 % ont mis "autre" comme réponse. Un autre questionnaire permettra d'affiner ces informations, il sera détaillé dans le chapitre 2. Pour terminer, l'enseignante s'est intéressée à certains objets mathématiques : les dérivées, la trigonométrie et les intégrales. Il y a 91 % des étudiants qui affirment avoir vu de la trigonométrie lors de leur enseignement secondaire, 90 % d'entre eux disent avoir vu la notion de dérivée et enfin 86 % ont vu les intégrales.
Une précision à apporter concernant ce test : il n'y a pas le même nombre de participants à chaque question, le nombre maximum étant de 179 personnes, ceci est peut-être dû à l'adaptation du système de boitiers, de plus le nombre de participants reste inférieur au nombre d'inscrits en première, 255 inscrits. Cela illustre bien le fait que les cours n'étant pas obligatoires, comme évoqué dans la section 1.2.3, les étudiants ne sont pas tous présents et donc ces nombres ne représentent pas la totalité des étudiants inscrits en première mais plutôt la partie active des étudiants inscrits pour ce cours .

Un autre constat est, comme on peut le vérifier par les réponses aux dernières questions évoquées ici, qu'une grande partie des étudiants ont déjà vu une partie du savoir qu'on va leur enseigner. Il est donc important de prendre en considération le fait que nous ne disposons pas d'information concernant la transposition didactique de ces savoirs effectuée pendant leur secondaire. Nous sommes donc face à des étudiants ayant au moins une vague idée sur le savoir qu'on va leur enseigner, qu'elle soit bonne ou erronée. Nous ne sommes donc pas dans une situation didactique habituelle de l'enseignement secondaire et qui est pourtant une situation courante dans de nombreuses facultés lors de la première année à l'université.
Il est également possible de se faire une idée des notions déjà abordées lors du secondaire en se référant aux programmes de l'enseignement secondaire et au programme suivi lors de cette première année dans le cours de mathématiques. Comme les étudiants peuvent venir de différentes sections cette recherche ne peut que nous donner une idée des notions communes.
Le programme du cours de Madame Jancart est décrit dès la première séance, voici les chapitres que la professeure détaille en quelques mots dans ses premières slides de cours :

- **Chapitre Introductif :**
  Les nombres, leur notation et en particulier le nombre pi et le nombre d'or avec application à l'architecture.
- **Chapitre 1 : Rappel des notions de base**
  Propriétés des opérations, produits remarquables, ... Importance pour toutes ces notions de leur représentation graphique.
- **Chapitre 2 : Trigonométrie**
  Le cercle trigonométrique, le radian, le degré. Fonctions trigonométriques de base avec introduction de la tangente via la notion de pente et le pourcentage d'inclinai-

son. Les relations dans les triangles rectangles et triangles quelconques. Équations élémentaires de trigonométrie, exercices appliqués à l'architecture.

- **Chapitre 3 : Étude de fonctions**
  Équations du premier degré et du second degré. Fonctions, propriétés des fonctions (parité, monotonie, ...), propriétés graphiques, opérations dans les fonctions. Asymptotes, notion élémentaire de limite.
- **Chapitre 4 : Dérivabilité**
  Fonction dérivée, interprétation, calcul de dérivées, applications à l'étude des graphes, recherche de minimum et maximum. Application directe à l'architecture.
- **Chapitre 5 : Fonctions logarithmiques**
  Fonction logarithme en base a (application à l'acoustique), log népérien, fonction exponentielle.
- **Chapitre 6 : Intégrales**
  Définition, interprétation graphique, calcul d'aire (coordonnées cartésiennes, polaires, paramétriques) et volume de révolution.

En comparant avec le programme de l'enseignement secondaire général de transition de 4 périodes de mathématiques par semaine, l'ensemble des chapitres est abordé, excepté le calcul d'aire en différents types de coordonnées qui n'est pas spécifié. Donc la majorité des étudiants ont bien vu la majorité des notions abordées dans ce cours de mathématiques.

Pour ce qui est de l'organisation du cours, quatre heures sont données le mardi matin durant tout le premier quadrimestre. Les deux premières heures sont consacrées à une séance théorique donnée par Madame Jancart et les deux heures qui suivent sont consacrées à une séance d'exercices donnée également par Madame Jancart, accompagnée de trois ou quatre étudiants-moniteurs de la filière mathématiques de l'Université de Liège pour permettre de répondre à un maximum de questions posées par les étudiants. Durant les séances de théorie les étudiants ont pour support l'ensemble des diapositives que l'enseignante utilise durant la séance et qui est disponible dès le début de l'année sur la plateforme *ecampus*. Pour les séances d'exercices, un syllabus est disponible sur internet ou en version papier et les exercices faits durant les séances sont précisés à l'avance, mais j'y reviendrai dans la section suivante. Les exercices abordés lors de la séance pratique portent sur la théorie vue le matin même. Cette organisation de cours peut déjà poser problème auprès de certains étudiants qui n'ont pas le temps de revoir la matière et de la digérer avant de commencer les exercices s'y rapportant.

1.3.2 Projet Feedback 1er bac

Le projet Feedback First-Year Project (FFYP) [11] a été instauré par l'Université de Liège dans le but de soutenir l'expérience et l'apprentissage des étudiants de première année au

sein de l'établissement. Ce projet a été développé en partenariat avec l'Institut de Formation et de Recherche en Enseignement Supérieur (IFRES), le Centre d'enseignement supérieur didactique (CDS) et le Service Guidance Etude de l'AEE (SGE), et il a été mis en œuvre dans différentes facultés. Il a débuté en janvier 2013 dans la faculté des Sciences Appliquées, puis dans la faculté de Droit, Sciences politique et Criminologie en juin 2014, ensuite dans la faculté des Sciences en janvier 2015, et enfin en faculté d'Architecture en 2016.
Ce projet rassemble un groupe de professeurs de la même faculté afin de discuter de leurs pratiques d'enseignement et d'évaluation et des éventuelles améliorations à apporter à celles-ci. Pour mener cette réflexion pédagogique, un pédagogue et un disciplinaire travaillent en collaboration avec ces professeurs de première année pour trouver des moyens concrets de développer ou d'optimiser les opportunités de feedbacks formatifs pour les étudiants de première année, dans le but d'améliorer l'expérience académique et sociale des étudiants et de renforcer leur capacité d'autorégulation de leur apprentissage. Ce projet est basé sur les 12 principes de Nicol [12] qui sont représentés par le schéma de la FIGURE 1.2.

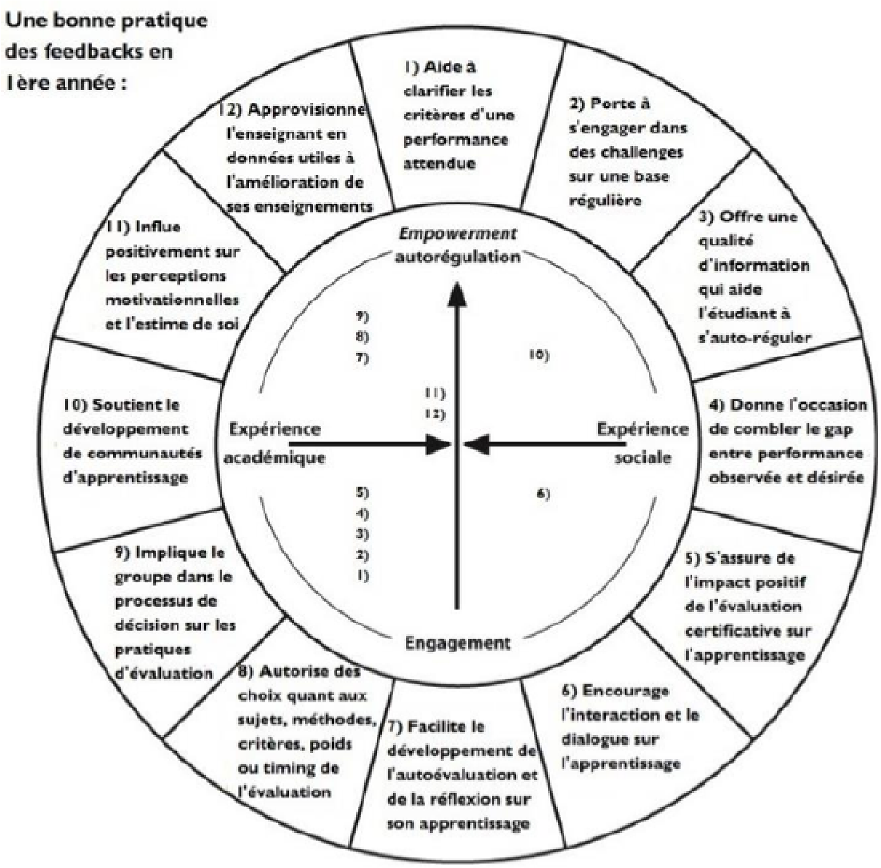


FIGURE 1.2 – Diagramme de Nicol

Ce diagramme est composé des douze principes répartis dans l'anneau extérieur et le disque intérieur montre la manière dont certains de ces principes peuvent être utilisés pour améliorer l'expérience sociale et académique, mais aussi l'apprentissage de l'autorégulation, Nicol [12]. Par exemple, si on s'intéresse au quadrant inférieur gauche du disque, les cinq premiers principes y sont repris. Cela signifie que leur mise en œuvre, lors de la première année, pourrait aider les étudiants à établir les bases de l'autorégulation dans l'apprentissage ainsi qu'augmenter la probabilité de l'engagement académique.
L'ensemble des explications concernant ce projet avec la faculté d'architecture est repris dans l'article de Jancart et al. [11] et est explicité ci-dessous. Les résultats relatés sont ceux concernant l'année académique 2016-2017.

Dans la faculté d'Architecture, le groupe de professeurs était composé des professeurs d'histoire, de construction, de théorie de l'architecture, d'atelier projet et de mathématiques. Nous allons décrire brièvement les quatre dispositifs significatifs mis en place dans le cours de mathématiques qui sont : un test de prérequis formatif en ligne, un test intermédiaire sous la forme "vrai/faux", une simulation d'examen et un syllabus graphique en ligne.

Le test de prérequis en ligne

Ce test était disponible sur la plateforme *ecampus* pendant une période limitée, les six premières semaines de l'année académique, au cours de laquelle les étudiants pouvaient effectuer le test autant de fois qu'ils le désiraient. Ce test a été rédigé en se basant sur 5 catégories de prérequis essentiels pour le cours de mathématiques dans un programme d'architecture :

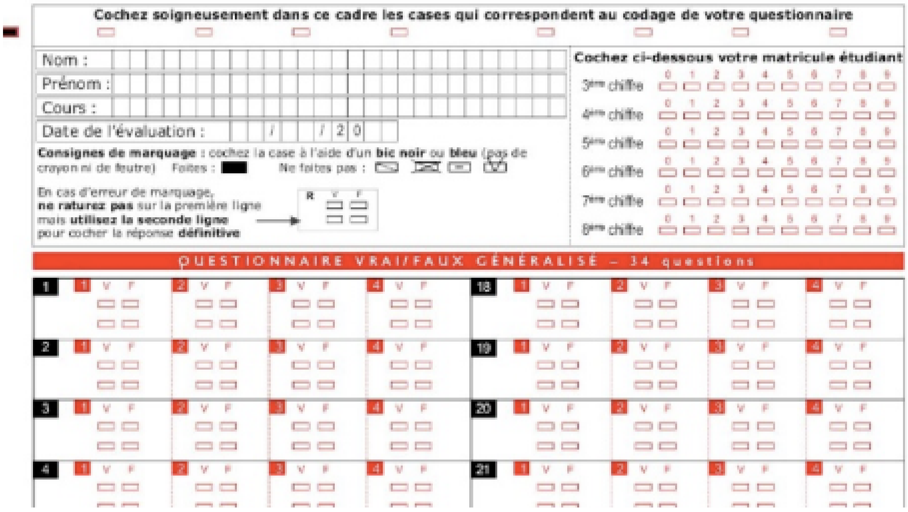
- Savoir calculer des quantités
- Savoir mesurer des superficies
- Savoir structurer l'espace
- Savoir construire des liens/associations logiques
- Savoir utiliser les échelles.

À partir de 128 questions fournies par l'enseignante, une liste de 20 questions est soumise à l'étudiant, ce système permet à celui-ci de faire le test plusieurs fois avec des listes de questions différentes. Chaque réponse erronée est suivie d'un feedback spécifique invitant l'étudiant à réviser la catégorie de prérequis associée à la question.

Ce test était formatif et non obligatoire, mais fortement recommandé et une note de 15/20 était préconisée pour avoir une maîtrise nécessaire des prérequis pour le cours de mathématiques. Il y a eu une participation de 57 % de l'ensemble des étudiants inscrits en première année.

Le test intermédiaire de vrai/faux

Ce test a été proposé aux étudiants au milieu du premier quadrimestre, il n'était pas obligatoire, mais il était récompensé par un bonus de 2 points sur la note finale de l'examen de janvier pour ceux qui obtenaient une note d'au moins 12/20. Il était formé de 15 questions qui étaient des exercices sur la matière vue au cours. Pour chacune de ces questions, 4 réponses possibles étaient proposées et pour chacune de ces réponses, l'étudiant devait spécifier si celle-ci était vraie ou fausse et indiquer chacune de ses réponses sur la feuille spécifique, FIGURE 1.3 . Ce test permet aux étudiants non seulement d'être motivé pour


Cochez soigneusement dans ce cadre les cases qui correspondent au codage de votre questionnaire

Nom :

Prénom :

Cours :

Date de l'évaluation : / / 2 0

Cochez ci-dessous votre matricule étudiant

QUESTIONNAIRE VRAI/FAUX GÉNÉRALISÉ – 34 questions

FIGURE 1.3 – Feuille de réponses aux QCM

étudier une première fois leur cours de mathématiques et de déceler d'éventuelles faiblesses, mais également de se familiariser avec un certain type d'évaluation en milieu universitaire. Un feedback est donné au cours suivant et l'enseignante parcourt avec eux le test pour leur fournir les bonnes réponses ainsi que des mises en garde sur des erreurs courantes. La participation à ce test était de 73 % sur l'ensemble des élèves inscrits en première et la note moyenne de 12,5/20.

La simulation d'examen

La simulation d'examen a été mise en place pour permettre aux étudiants d'être confrontés aux conditions de l'examen de mathématiques avant que celui-ci n'ait lieu. Cette simulation s'est déroulée lors de la dernière séance théorique prévue. Comme lors de l'examen réel, les étudiants disposaient de deux heures pour réaliser l'épreuve qui était l'exemplaire de l'examen de l'année précédente. Ensuite, pendant les deux dernières heures prévues pour les exercices, l'enseignante a affiché la correction de la simulation en expliquant ce qui était attendu comme réponse et pourquoi. Après la correction, elle a également montré des

exemples de réponses d'étudiants en pointant les erreurs récurrentes relevées lors des examens ainsi qu'en spécifiant la pondération de chaque question. Tout ce dispositif autour de la simulation d'examen permet de clarifier auprès des étudiants ce que l'enseignante considère comme une bonne ou une mauvaise performance.
La participation des étudiants à ce dispositif était inférieure à celui du test intermédiaire.

Le syllabus graphique en ligne

Le dernier dispositif est le syllabus graphique, FIGURE 1.4, composé d'une colonne noire reprenant les dates spécifiques de chaque leçon et/ou de chaque dispositif du projet FFYP, une colonne verte représentant les dispositifs mis en place par le FFYP, une colonne bleue reprenant l'idée du programme et enfin une colonne orange servant à établir les liens éventuels avec les autres cours du programme de premier bachelier en architecture.

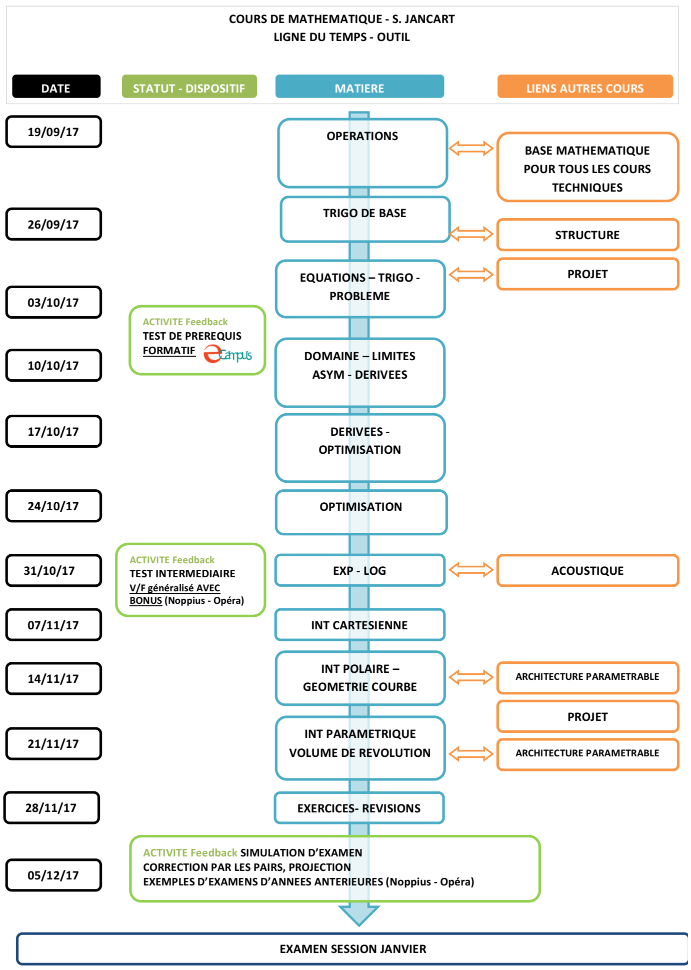


FIGURE 1.4 – Ligne du temps pour l'année académique 2016-2017

Ce dispositif a été conçu pour que chaque étudiant ait une vue d'ensemble sur le déroulement du cours de mathématiques tout au long du premier quadrimestre. Il permet de clarifier les objectifs pour chaque séance de cours et de faire les liens éventuels avec les autres cours du cursus. Ce dispositif, précisé en début d'année, peut aider les étudiants à mieux gérer leur temps pour la préparation des différents tests.
De plus, au début de chaque séance d'exercices, une diapositive est affichée avec à gauche tout le déroulement du quadrimestre. La partie grisée permet à l'étudiant de se situer dans le quadrimestre. À droite, les connaissances vues à la séance théorique du matin sont reprises ainsi que les exercices à faire pendant la séance pratique, exemple à la FIGURE 1.5.

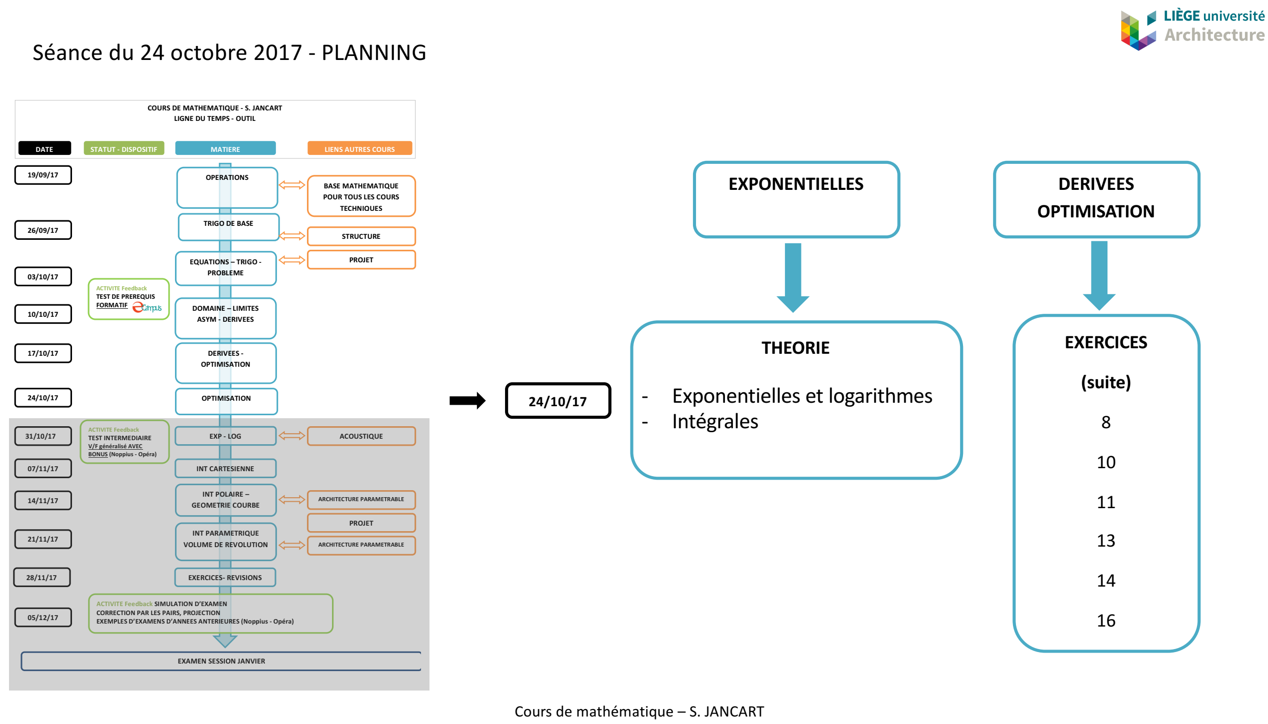


FIGURE 1.5 – Planning de la séance d'exercices sur l'optimisation

L'ensemble de ces dispositifs a été apprécié par les étudiants. En effet, un questionnaire a été rempli par 156 étudiants sur 255 inscrits et celui-ci révèle une motivation, en raison du bonus de 2 points, des étudiants à étudier pour le test intermédiaire. Malgré tout, certains d'entre eux estiment ne pas être assez préparés pour ces différents tests ou ne pas disposer de suffisamment de temps pour s'y préparer correctement, notamment à cause du projet d'architecture intervenant pour un tiers de leur note finale, comme précisé précédemment.

Bien que les différents dispositifs mis en place dans les universités puissent d'une part, permettre aux professeurs de mieux appréhender une partie des difficultés des étudiants et d'autre part, permettre aux étudiants de mieux cerner ce que l'on attend d'eux. Pour vaincre ou du moins diminuer l'échec en première année à l'université, il faut absolument se pencher sur la matière donnée en elle-même ainsi que sur les difficultés rencontrées par les étudiants lors de l'étude de cette matière, difficultés provenant parfois de leurs études au secondaire. Le chapitre 2 consistera à déceler ces différents obstacles rencontrés par les étudiants durant deux années académiques : 2016-2017 et 2017-2018. Ensuite, le chapitre 3 se focalisera sur une partie de matière, les problèmes d'optimisation, pour essayer d'apporter des pistes à mettre en œuvre pour pallier à certains de ces obstacles.

Chapitre 2

Détection des obstacles

Dans ce chapitre, je vais détailler les différentes difficultés rencontrées par les étudiants lors de la mise en pratique des différents chapitres durant les années académiques 2016-2017 et 2017-2018. Je commencerai par décrire les obstacles liés aux diverses matières, ensuite, je me concentrerai sur une matière en particulier : les problèmes d'optimisation. Les raisons de ce choix seront explicitées ultérieurement et des analyses sur les examens des deux années académiques sur la question d'optimisation seront effectuées afin d'avoir un aperçu plus détaillé des erreurs commises par les étudiants dans cette matière.

2.1 Obstacles sur la totalité du cours

Dans cette section, je vais décrire quelques obstacles récurrents rencontrés par les étudiants lors des séances pratiques. Pour ce faire, pendant deux années académiques consécutives, 2016-2017 et 2017-2018, lors des séances d'exercices, j'ai répertorié avec l'aide d'autres étudiants-moniteurs les problèmes rencontrés par les étudiants. J'ai pu ainsi réaliser des répertoires de problèmes pour chaque année académique, je les ai construits en répertoriant les problèmes par séance de répétition. Cette construction me permet de comparer ensuite et détecter les problèmes récurrents. Le répertoire de problèmes de l'année académique 2016-2017 est disponible dans l'annexe B et le répertoire de problèmes de l'année académique 2017-2018 est disponible dans l'annexe C .
Voici, ci-dessous, un résumé des répertoires de problèmes, c'est-à-dire, des difficultés rencontrées par les étudiants, suivi de quelques exemples :

1. Manipulations algébriques

   Beaucoup d'étudiants font des erreurs diverses de manipulations algébriques, que ce soit pour effectuer une mise en évidence correcte ou encore, dans la manipulation des puissances : par exemple, certains étudiants écrivent "$(3b)^2 = 3b^2$" dans leurs calculs. Une erreur fréquemment présente dans les copies des étudiants dans le développement des produits remarques $(A \pm B)^2$ est l'oubli du double produit. Et souvent, ils n'arrivent pas non plus à les déceler dans les exercices.

- Ils écrivent par exemple, peu importe les valeurs numériques que peuvent prendre A et B : "$(A-B)^2 = A^2 - B^2$" au lieu de "$(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$"
- Si on leur demande "mettre sous forme de somme $(x+y+z-1)(x+y-z+1)$", ils vont distribuer au lieu d'utiliser la formule du produit remarquable $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$.
- Ils n'arrivent pas toujours à associer correctement le premier et le deuxième termes des produits remarquables dans les exercices pour appliquer la formule. Par exemple, si on leur demande "Décomposer en facteurs $a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$" et qu'on leur donne différentes expressions comme "$x^4 - y^6$", certains étudiants n'arrivent pas à trouver les termes à associer aux a et b du produit remarquable.

2. La compréhension du français

La compréhension du français est un problème rencontré par les étudiants dans la plupart des chapitres sous différentes formes. Soit ils ne comprennent pas des mots en particulier, soit ils traduisent mal du français aux mathématiques.

- "Soustrayez $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$"
  Certains écrivent : "$\frac{2}{3} - \frac{3}{4}$" au lieu de "$\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$".
- Quand on leur demande de mettre un produit sous forme de somme, les étudiants nous disent qu'ils ne savent pas quoi faire.
- Ils ne représentent pas correctement une situation :
  — " [...] l'angle sous lequel il aperçoit la tour est de 30° [...]", ils ne placent pas correctement l'angle dans le triangle ou ils ne savent pas où le placer.
  — Dans l'exercice "Parmi tous les rectangles de périmètres donnés, quel est celui qui a la plus grande aire ?", une remarque revenait chez la plupart des étudiants : "*il nous manque des informations, on n'a pas les dimensions du rectangle*","*Il manque des données pour l'exercice ?*","*Le périmètre vaut quoi ?*". Ils n'arrivaient pas à commencer l'exercice car il n'y avait pas de valeurs numériques pour les côtés du rectangle.
  — Pour un même type d'exercice que précédemment "Pour un volume V donné,[...]", une question revenait régulièrement : "*Le volume vaut quoi ?*".
  — Quand on leur demande de calculer l'aire de la surface comprise entre différentes courbes, ils ne calculent pas toujours la bonne aire car ils représentent mal la surface sur leur graphique.
  — Pour les volumes de révolution, ils éprouvent des difficultés pour visualiser, en 3 dimensions, le volume qu'on cherche à calculer.

3. En trigonométrie, lors de résolutions d'équations, les étudiants n'envisagent pas toutes les solutions possibles ou ils ne comparent pas leur solution sur le cercle trigonométrique afin de vérifier si leur réponse est la même que celle donnée.
   En effet, on a dû expliquer à plusieurs reprises les différentes solutions possibles, ainsi que le fait d'envisager celles avec des tours de cercle en plus. De plus, certains étudiants nous appelaient car ils n'avaient pas la même réponse que celle du solutionnaire, mais il s'avérait que c'était bien la même chose mais l'écriture différait.
   Par exemple, pour l'exercice : résoudre $\sin(2x) = -\sin(x)$

   Résolution :
   $$\sin(2x) = -\sin(x)$$
   $$\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(-x)$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = & -x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2x - x = & \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{2.1}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x = & \dfrac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = & (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{2.2}$$

   Solution :
   $$x = \begin{cases} k.180°, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 120° + k.360°, \quad k \in \mathbb{Z} \\ -120° + k.360°, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{2.3}$$

   Certains étudiants ne donnent qu'une réponse à l'étape (2.1), ils ne considèrent pas la deuxième possibilité qui est ici l'angle supplémentaire. De plus, comme expliqué ci-dessus, parfois des étudiants arrivent à l'étape (2.2) et quand ils vérifient avec la réponse donnée en (2.3), ils pensent être dans l'erreur car ils n'obtiennent pas la même expression en convertissant en degrés et ils ne pensent donc pas à vérifier sur le cercle trigonométrique si les deux réponses sont les mêmes ou non.

4. Les limites

   Les deux questions qui revenaient le plus fréquemment dans le chapitre sur les limites :
   - lorsque les étudiants calculaient certaines limites et qu'ils arrivaient à "$\infty - \infty$", certains nous demandaient si cela faisait 0 ou "∞".
   - quand ils devaient calculer des limites à l'infini ils ne comprenaient pas pourquoi ils devaient regarder le terme de plus grand exposant. De plus, certains le faisaient quand il ne s'agissait pas de limite à l'infini.

5. Choix de formules :

   Que ce soit en trigonométrie ou lors de calculs de dérivées, les étudiants sont parfois bloqués dans le choix d'une formule pour réaliser l'exercice. On dirait que la possibilité de procéder de différentes manières pour arriver à un même résultat les trouble.

6. Remplacer les termes dans une formule.

   Je l'ai notamment énoncé en parlant des produits remarquables, un problème récurrent chez les étudiants est celui d'associer les éléments d'une formule aux termes correspondants dans leur énoncé ou calcul.
   Par exemple, dans les formules de dérivées, si on leur demande de dériver la fonction $h(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$, ils n'arriveront pas toujours ou pas correctement, à partir de la formule $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$, à trouver l'expression des fonctions f et g dans l'exercice afin de pouvoir écrire la dérivée.
   Ce problème apparaît dans différents chapitres faisant intervenir des formules.

7. Une faute qui revenait régulièrement dans les dérivées est le fait de ne pas dériver correctement les fonctions composées.

   Par exemple, si on leur demande de calculer la dérivée de $f(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{3}}$, beaucoup d'entre eux donneront comme réponse "$f'(x) = \dfrac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{-2}{3}}$" au lieu de
   $f'(x) = \dfrac{2x}{3}(x^2+1)^{\frac{-2}{3}}$.
   Ou encore, certains donnent comme dérivée de la fonction "$\sin(3x)$" la fonction "$\cos(3x)$" au lieu de la fonction "$3.\cos(3x)$".
   Quand je leur demande comment ils obtiennent ces résultats, la plupart des étudiants me disent qu'ils se réfèrent au tableau des fonctions usuelles et de leur fonction dérivée, fourni dans le cours théorique FIGURE 2.1. Ils utilisent donc ce tableau sans tenir compte du fait que dans des cas similaires aux exemples ci-dessus, ce sont des fonctions composées qu'ils manipulent.

Analyse

Tableau des fonctions usuelles et de leur fonction dérivée

$f(x)$	$f'(x)$	
c	0	(c constante)
x	1	
x^n	nx^{n-1}	($n \in \mathbb{Q}$)
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	($\lvert x\rvert < 1$)
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	($\lvert x\rvert < 1$)
$arctg\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Analyse

Tableau des fonctions usuelles et de leur fonction dérivée

$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$

FIGURE 2.1 – Tableau des fonctions usuelles et de leur fonction dérivée

8. Problèmes d'optimisation :

   - En général, les étudiants ne savent pas comment s'y prendre pour résoudre ces problèmes : ils ne comprennent pas l'énoncé et/ou ils ne savent pas comment entamer la résolution du problème.
   - Dans la résolution, outre la difficulté qu'ils peuvent avoir avec la traduction du français aux mathématiques, comme explicité plus haut, certains étudiants enlèvent les données de leurs équations quand celles-ci ne sont pas numériques, c'est-à-dire, ils les annulent mais sans s'en rendre compte.
     Par exemple, dans l'exercice :"*Parmi tous les rectangles de périmètres donnés, quel est celui qui a la plus grande aire ?*".
     Certains écrivent, à un moment dans leur résolution :
     "$A = \frac{p}{2}.a - a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{p}{2}.a$", où A est l'aire maximale cherchée du rectangle ;
     a un des côtés du rectangle ;
     p le périmètre du rectangle ;

     Si je leur demande de m'expliquer comment ils sont passés d'une ligne à l'autre, soit ils ne savent pas me répondre, soit ils me disent : "On calcule".
     Ensuite, parmi ceux qui appliquent la méthode vue par la professeure, faisant intervenir les dérivées, ils ne savent pas expliquer pourquoi ils annulent la dérivée dans la résolution ni pourquoi ils utilisent la dérivée pour résoudre ce type d'exercice.
     Enfin, il reste dans ces résolutions de problèmes, d'autres soucis décrits plus haut comme ceux liés aux dérivées ou au français.

9. Calcul d'aires et de volumes :

   Dans les différents exercices proposés, voici quelques problèmes récurrents autres que ceux déjà mentionnés plus haut :

   - Les étudiants ne savent pas toujours représenter l'aire ou le volume demandé et une fois celui-ci dessiné, ils ont des difficultés pour déterminer l'intégrale à calculer : la fonction à intégrer ainsi que les bornes de l'intégrale. Leurs difficultés pour calculer des primitives se répercutent également dans ces types d'exercices. Les problèmes liés au français apparaissent également ici, quand il s'agit de représenter sur le graphique l'aire qu'ils vont devoir calculer, certains d'entre eux se trompent et calculent une mauvaise aire.
   - Ils visualisent difficilement en 3 dimensions quand il s'agit de calculer des volumes de révolution.
   - Les étudiants ont des difficultés avec la représentation en coordonnées polaires : ils ne savent pas comment tracer une fonction dans ce repère. En effet, ils ne parviennent pas à réaliser le tableau qui reprend différentes valeurs d'angles ainsi que le rho associé et une fois que ce tableau est fait, ils ne savent pas comment utiliser ces informations pour représenter la fonction. Enfin, les difficultés décrites ci-dessus se retrouvent également dans le calcul d'intégrales dans ces coordonnées.

2.2 Obstacles dans les problèmes d'optimisation

Après la détection des problèmes durant les séances de répétitions de l'année académique 2017-2018, Madame Jancart et moi-même avons décidé de nous attarder sur les problèmes d'optimisation. En effet, les difficultés des étudiants dans ce cours de mathématiques étant nombreuses, il fallait concentrer notre attention sur une partie du cours en particulier. Dans les problèmes d'optimisation les étudiants semblaient fort démunis dès le départ, de plus, durant la première année j'ai pu relever plusieurs difficultés dans ces problèmes qui intervenaient également ailleurs dans le cours, comme la traduction du français aux mathématiques, ou encore la compréhension et des applications des fonctions dérivées.
J'ai alors analysé les questions des examens concernant l'optimisation pour l'année académique 2016-2017, c'est-à-dire les exemplaires de janvier 2017 et août 2017 car il n'y avait pas de question sur l'optimisation dans celui de juin 2017, afin de relever plus précisément les erreurs lors des résolutions de ces problèmes.
Ensuite, durant l'année académique 2017-2018 j'ai continué à relever, avec l'aide des autres étudiants-moniteurs, les difficultés des étudiants lors des séances de répétition. De plus, avant que Madame Jancart aborde la partie sur les dérivées, j'ai fait passer un questionnaire à l'ensemble des étudiants de l'amphithéâtre pour l'année 2017-2018. Ce questionnaire comportait 4 questions, en partie sur les dérivées, et sera détaillé dans une partie ultérieure

de ce chapitre. Ensuite, j'ai analysé les réponses aux questions d'optimisation des étudiants de la session de janvier 2018 afin d'avoir une idée plus précise de la nature de leurs difficultés, dans le but de construire une nouvelle séance de remédiation sur les problèmes d'optimisation présentée pendant le deuxième quadrimestre afin de pointer avec eux les difficultés lors de ces problèmes.

2.2.1 Erreurs détectées lors des examens de l'année 2016-2017

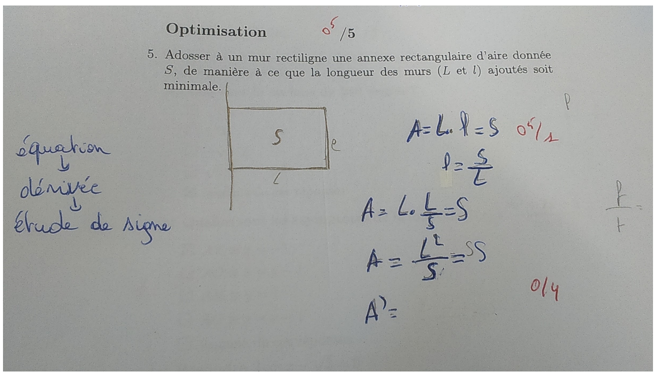
Pour chaque exemplaire d'examen figure d'abord l'énoncé de l'exercice sur les problèmes d'optimisation suivi des erreurs récurrentes dans les résolutions des étudiants. On note pour cette question un total de 70 abstentions sur 240 copies en janvier 2017, soit 29,17%, et 8 abstentions sur 56 copies en août 2017, soit 14,29 %. Lors de ces premières analyses d'examens, je me suis concentrée sur les types de problèmes revenant régulièrement dans les copies, il n'y a pas de nombres précis relatant la récurrence de chaque type d'erreur.

Examen janvier 2017

Question : "*Adosser à un mur rectiligne une annexe rectangulaire d'aire donnée S, de manière à ce que la longueur des murs (L et l) ajoutés soit minimale.*"

Erreurs décelées :

- ⋆ Certains étudiants ne pensent pas à utiliser l'expression de la longueur des murs de l'annexe. Soit ils écrivent la formule de l'aire de l'annexe puis se retrouvent bloqués dans la résolution car ils ne savent pas comment procéder ensuite, soit ils essayent de résoudre le problème avec cette unique équation de plusieurs inconnues et se retrouvent également bloqués.

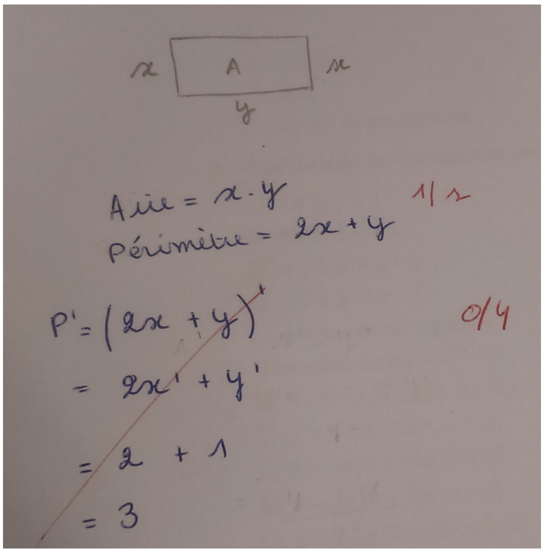


- ⋆ Certains étudiants ne considèrent pas P, la longueur des murs de l'annexe, comme une fonction et ils écrivent "$P = 2x + y \Leftrightarrow 2x = -y$" pour mettre une inconnue en évidence.

Ils cherchent donc des valeurs pour les longueurs des côtés du mur afin d'avoir une longueur des murs ajoutés nulle. Comme décelé lors des séances de répétitions, les étudiants "enlèvent" de l'équation ce qui les "gêne" sans prendre conscience de ce que cela signifie mathématiquement.

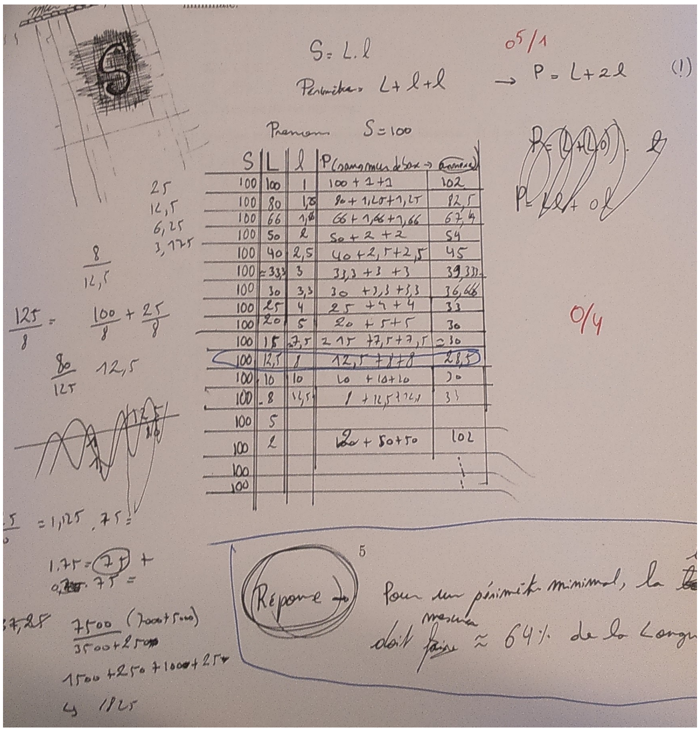
- ⋆ Certains minimisent l'aire ou un des deux côtés du mur plutôt que la longueur des murs ajoutés.
  Deux hypothèses pour expliquer cela, soit les étudiants ont mal compris l'énoncé, celui-ci ne comportant pas clairement de question, les étudiants peuvent se demander ce qu'ils doivent minimiser. Soit ils ont retenu une méthode, une "recette", sans la comprendre et ils l'appliquent sur n'importe quelle fonction en pensant que cela suffira. Dans ce cas-ci, ils pensent avoir le choix entre dériver l'aire, la longueur ajoutée ou une des deux longueurs puisqu'ils ne distinguent pas forcément les inconnues des paramètres, ils veulent dériver une "lettre".

- ⋆ Certains étudiants, au moment de dériver l'expression que l'on minimise, dérivent par rapport à x et par rapport à y.
  Comme évoqué par Praslon [4] dans la section 1.2.1, certains étudiants essayent d'adapter leurs connaissances pour résoudre une tâche plus complexe. Dans ce cas-ci, les étudiants n'ayant pas étudié les dérivées de fonctions à plusieurs variables, ils adaptent ce qu'ils ont vu concernant les dérivées de fonctions à une variable.
  Dans le cas ci-dessous, l'étudiant applique les propriétés de dérivations d'une somme, en ne prenant pas en compte que x et y sont deux variables différentes.



- ⋆ Certains utilisent directement les coordonnées du sommet de la fonction du second degré pour résoudre le problème, mais ils ne remplacent pas correctement les termes dans la formule.

* Certains étudiants procèdent par essais : ils font un tableau de valeurs pour trouver les mesures qui minimisent le périmètre. Pour cela ils fixent une valeur pour l'aire, par exemple 100, puis ils déterminent différentes valeurs de longueur et largeur pour avoir une aire de 100 et enfin ils calculent la longueur des murs ajoutés. Pour finir, ils calculent le rapport de proportionnalité entre les valeurs des côtés du mur leur donnant la plus petite longueur de murs ajoutés afin de généraliser le résultat à n'importe quelle aire donnée, comme sur l'exemple ci-dessous.



"*Réponse : Pour un périmètre minimal, la largeur doit mesurer* $\approx$ 64% *de la longueur.*"

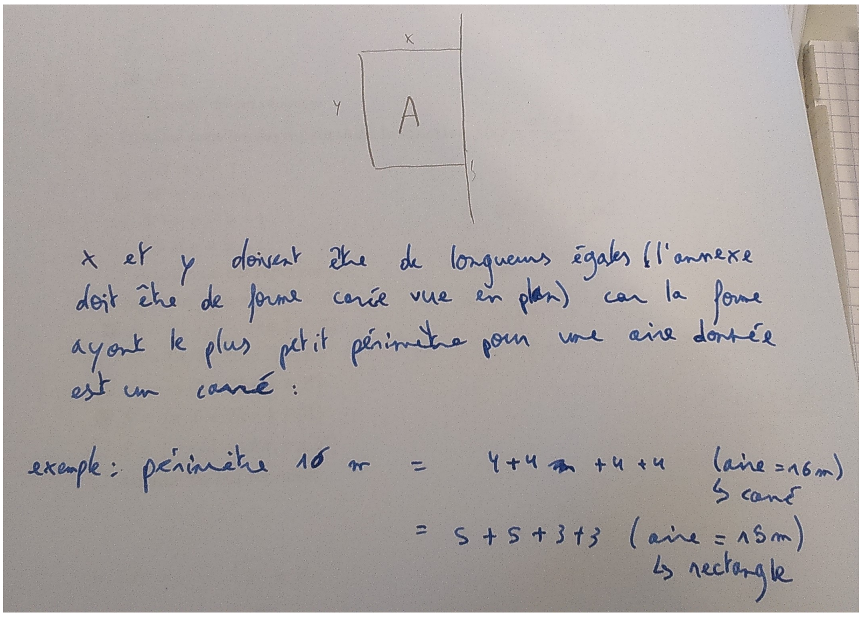
* Certaines erreurs sont des fautes de calcul et non des erreurs de raisonnement.

* Certains étudiants oublient de vérifier si l'extremum trouvé de la fonction est un maximum ou un minimum.

* Certains commettent des erreurs en dérivant ou des fautes dans la formule de la longueur des murs ajoutés. Par exemple, ils écrivent "$P = 2.L + 2.l$".

* Certains expliquent une méthode à appliquer mais ne l'appliquent pas.

⋆ Certains prennent la largeur du mur égale à la longueur, en justifiant que la forme ayant le plus petit périmètre pour une aire donnée est le carré, et ils argumentent à l'aide d'exemples.

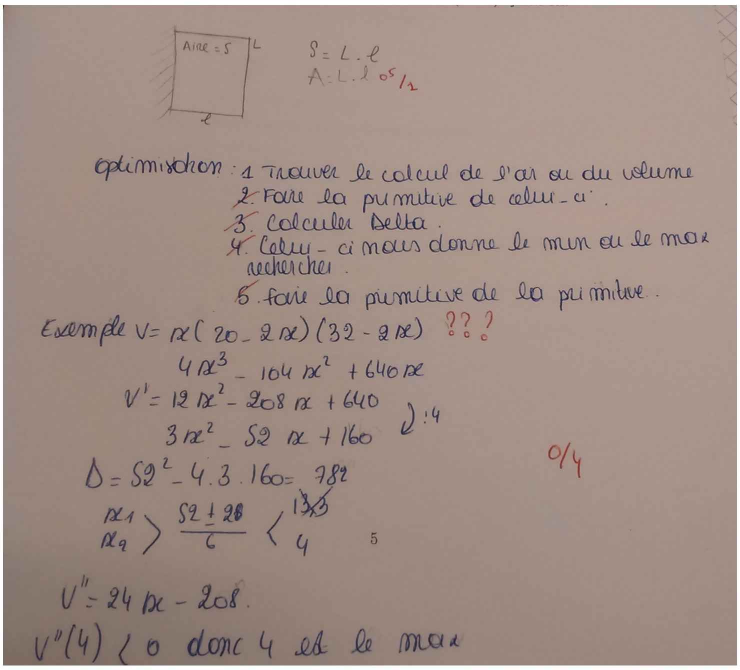

x et y doivent être de longueurs égales (l'annexe doit être de forme carrée vue en plan) car la forme ayant le plus petit périmètre pour une aire donnée est un carré :

exemple : périmètre 16 m = 4 + 4 ~~m~~ + 4 + 4 (aire = 16 m) ↳ carré

= 5 + 5 + 3 + 3 (aire = 15 m) ↳ rectangle

Or dans l'exemple ci-dessus, l'étudiant fixe un périmètre et non une aire pour ensuite regarder les longueurs donnant une aire maximale.

⋆ Un étudiant a énuméré les étapes d'une méthode et la complète par un exemple.


$S = L.\ell$

$A : L.\ell$ 0,5/1

optimisation : 1 Trouver le calcul de l'air ou du volume

2. Faire la primitive de celui-ci.

3. Calculer Delta.

4. Celui-ci nous donne le min ou le max recherché.

5. faire la primitive de la primitive.

Exemple $V = x(20-2x)(32-2x)$???

$4x^3 - 104x^2 + 640x$

$V' = 12x^2 - 208x + 640$) :4

$3x^2 - 52x + 160$

$\Delta = 52^2 - 4.3.160 = 784$

$x_1, x_2 > \frac{52 \pm 28}{6} <$ 13,3 ; 4

$V'' = 24x - 208$

$V''(4) < 0$ donc 4 est le max

0/4

Il mélange différentes notions vues lors du cours théorique et finalement, dans son exemple, il n'applique pas la méthode annoncée. Il semblerait que l'étudiant confonde primitive et dérivée d'une fonction et qu'il assimile annuler la dérivée à chercher le delta. Comme évoqué précédemment, l'étudiant a certainement essayé de retenir une "recette" sans la comprendre et donc il a dû se raccrocher à des choses qu'il connaissait durant l'examen, comme la résolution des équations du second degré, pour essayer d'obtenir une réponse à l'exercice.

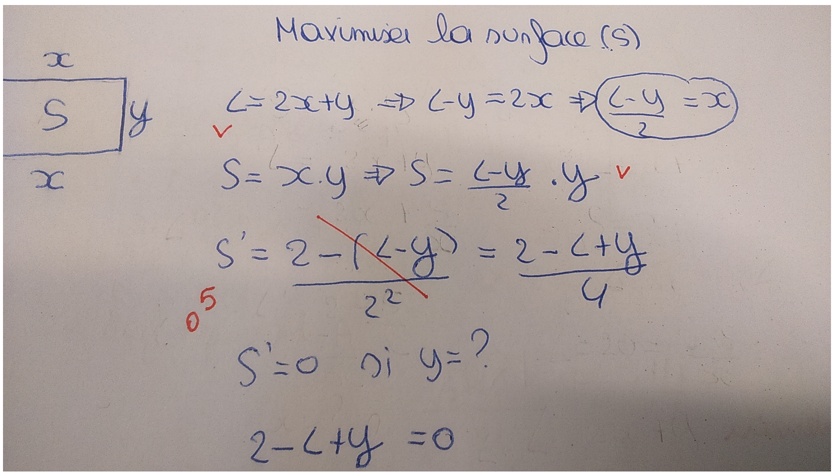
Examen août 2017

Question : "*Lors de travaux d'aménagement, vous devez concevoir une annexe rectangulaire accolée à un living (le mur commun aux deux pièces est donc déjà existant). Quelles dimensions donner à cette annexe pour que sa surface S soit maximale sachant que la longueur totale des murs de la nouvelle construction L vous est imposée ?*
Appliquez ensuite votre résultat pour une longueur totale de nouvelle construction égale à 20 m."

Erreurs décelées :

- Certains étudiants font des erreurs lors de simplifications dans les équations : ils ne mettent pas correctement en évidence, ils font disparaître certaines inconnues ou encore, ils font des erreurs dans les opérations.
  Par exemple : "$L = 2x + y \Leftrightarrow y = \dfrac{L}{2x}$"

- Certains se trompent en calculant la fonction dérivée :



- Certains écrivent les deux équations, une exprimant la surface et l'autre exprimant la longueur totale des murs de la nouvelle construction, mais ils ne poursuivent pas leur raisonnement.

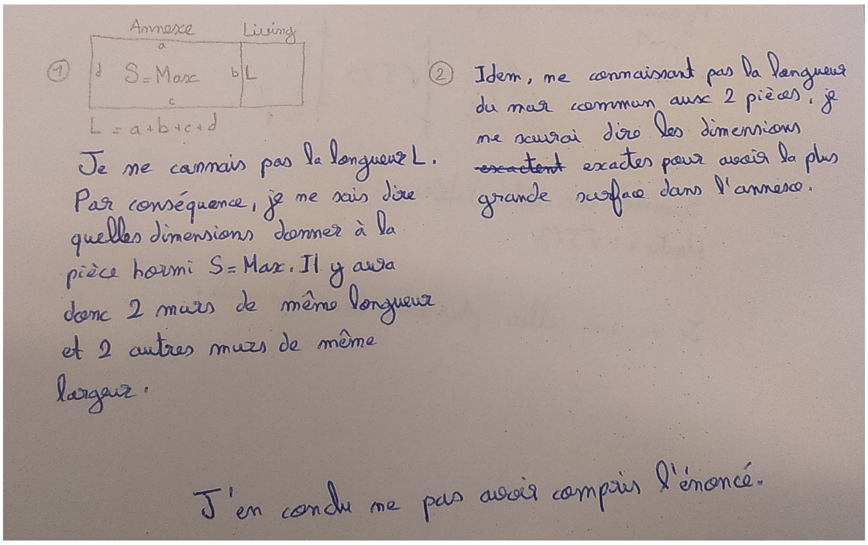
⋆ Certains écrivent uniquement la formule de la surface et essayent de résoudre le problème uniquement avec celle-ci.

⋆ Certains enlèvent la longueur totale des murs, P, de l'équation : "$P = 2x + y \Leftrightarrow 2x = -y$" ou "$P = 2L + l \Leftrightarrow l = 2L$"

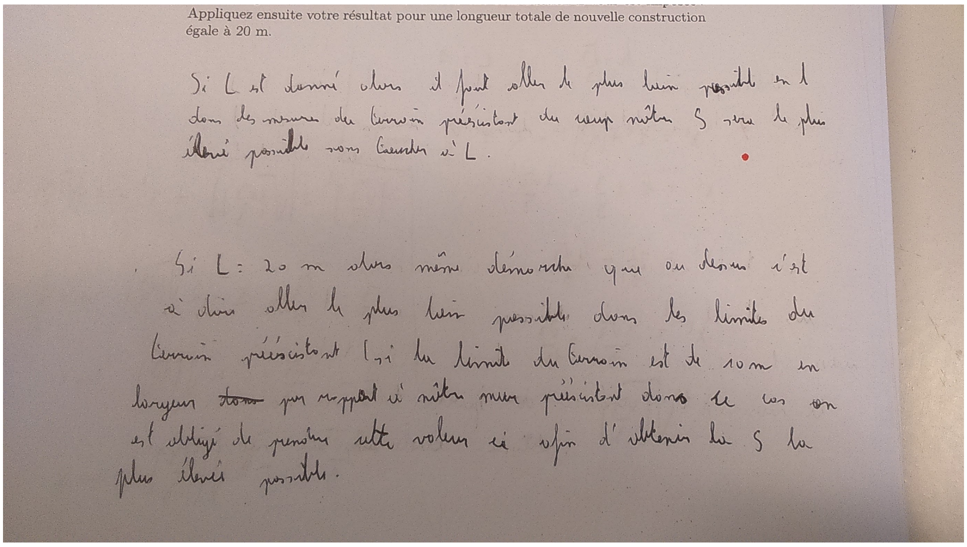
⋆ Certains cherchent à maximiser la longueur totale des murs de l'annexe et non l'aire.

⋆ Certains répondent à la question en prenant $L = 20$ m, mais ils ne généralisent pas ensuite pour n'importe quelle valeur de L.

⋆ Certains notent avoir trop peu d'informations pour réaliser l'exercice, ne pas avoir compris l'énoncé ou encore ils proposent une démarche faisant intervenir d'autres paramètres comme la longueur du terrain :

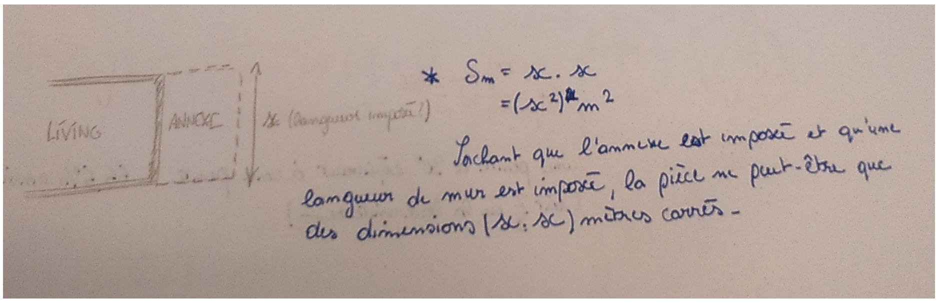


"*Je ne connais pas la longueur L. Par conséquent, je ne sais dire quelles dimensions donner à la pièce hormis $S = Max$. Il y aura donc 2 murs de même longueur et 2 autres murs de même longueur.*
Idem, ne connaissant pas la longueur du mur commun aux 2 pièces, je ne saurais dire les dimensions exactes pour avoir la plus grande surface dans l'annexe.
J'en conclu ne pas avoir compris l'énoncé."



"*Si L est donné alors il faut aller le plus loin possible en l dans les mesures du terrain préexistant du coup notre S sera le plus élevé possible sans toucher à L*
Si L = 20 *m alors même démarche qu'au-dessus, c'est-à-dire, aller le plus loin possible dans les limites du terrain préexistant (si la limite du terrain est de 10 m en largeur par rapport à notre mur préexistant dans ce cas on est obligé de prendre cette valeur si afin d'obtenir la S la plus élevée possible).* "

- ⋆ Certains prennent les mêmes inconnues pour la largeur et la longueur de l'annexe.



"*Sachant que l'annexe est imposée et qu'une longueur de mur est imposée, la pièce ne peut-être que des dimensions* $(x.x)$ *mètres carrés.*"

Conclusion

Au-delà des erreurs de calcul ou encore des erreurs dans l'application des formules de dérivation, on peut repérer dans l'ensemble des résolutions des questions d'examens des difficultés liées au raisonnement mathématique.
Les étudiants ont des difficultés à modéliser correctement la situation mathématique, ils ont une mauvaise compréhension de ce qu'ils font mathématiquement : ils font disparaître

certaines inconnues, ils ne vérifient pas si la valeur obtenue est bien un maximum, ou un minimum, ou encore ils essayent de résoudre le problème en faisant un système comportant deux fois la même équation.
Il y a clairement un problème lié au langage : ils ne minimisent ou maximisent pas la bonne fonction et représentent mal la situation.
Une dernière chose à remarquer dans les copies des deux examens, est la diversité des méthodes utilisées par les étudiants, notamment dans l'examen de janvier. En effet, certains étudiants essayent d'utiliser la méthode liée aux dérivées et d'autres essayent de s'en sortir en procédant par essais ou en utilisant les coordonnées du sommet d'une parabole. Ensuite, la notion de dérivée n'est pas totalement comprise, quand on voit des erreurs telles que dériver une fonction dépendant de deux variables alors qu'ils ne l'ont pas appris et qu'ils essayent d'adapter les formules vues au cours, on se demande s'ils n'ont pas exclusivement une compréhension procédurale des dérivées, ce qui expliquerait également le fait que durant les séances de répétition, les étudiants ne comprennent pas pourquoi on utilise une dérivée et pourquoi on annule la fonction dérivée. Soulignons que pour résoudre les problèmes d'optimisation, la méthode faisant intervenir les dérivées est privilégiée lors des séances de répétition.
Au vu de certaines difficultés mises en évidence dans ces analyses d'examens, j'ai décidé pour l'année académique 2017-2018 de réaliser un questionnaire afin de tester les connaissances des étudiants sur certaines notions avant qu'ils ne les revoient dans le cours de mathématiques de Madame Jancart. L'objectif de ce questionnaire étant de m'aider à comprendre l'origine de ces difficultés. L'analyse de ce questionnaire et des résolutions d'examens me permettra de construire une séance de remédiation pour les étudiants de l'année académique 2017-2018.

2.2.2 Questionnaire

Plusieurs difficultés ayant été dégagées des examens et des séances de répétition et la professeure privilégiant l'utilisation des dérivées pour les résolutions des problèmes d'optimisation, j'ai décidé de réaliser un questionnaire composé de quatre questions permettant de mettre en avant certaines difficultés rencontrées chez les étudiants de l'année académique 2016-2017 dans les problèmes d'optimisation, comme celles liées au français, mais aussi, permettant d'avoir un aperçu de leur perception de la notion de dérivée à la sortie du secondaire.

J'ai repris ci-dessous l'énoncé des quatre questions, leur enjeu ainsi que les observations dégagées des réponses fournies à chacune d'entre elles. Pour le choix de cette structure, de même que pour la quatrième question, je me suis inspirée de l'article de Gantois et Schneider [13]. Le questionnaire était anonyme, de manière à favoriser la spontanéité des réponses des étudiants et à éviter l'absence de réponse et/ou de justification par crainte d'un jugement quelconque. Toutefois, l'étudiant devait préciser le nombre d'heures par semaine de mathématiques qu'il avait suivies lors de sa sixième secondaire et s'il était

en secondaire l'année académique 2016-2017 ; si ce n'était pas le cas, il devait décrire son parcours. De plus, un espace était prévu pour d'éventuelles remarques sur le questionnaire, annexe D.
Ces questions ont permis d'avoir également plus d'informations sur le public occupant l'amphithéâtre. Ce questionnaire a été distribué à la fin de la séance théorique abordant les équations trigonométriques et les problèmes, cours précédant celui abordant les notions de limites et de dérivées. Les étudiants disposaient d'un peu plus de trente minutes pour effectuer ce test. Ce jour-là, il y avait 121 étudiants et parmi ceux-ci :

- un étudiant n'avait pas eu de mathématiques lors de sa sixième secondaire, soit 0,83%, il était en septième en agent médico-social.
- six étudiants ont eu 2 heures de mathématiques par semaine, soit 4,96 %, dont deux ne sortant pas de rhétorique.
- trois étudiants ont eu 3 heures de mathématiques par semaine, soit 2,48 %.
- quarante-sept étudiants ont eu 4 heures de mathématiques par semaine, soit 38,84%, dont cinq ne sortant pas de rhétorique.
- douze étudiants ont eu 5 heures de mathématiques par semaine, soit 9,92 %, dont six ne sortant pas de rhétorique.
- trente-neuf étudiants ont eu 6 heures de mathématiques par semaine, soit 32,2 %, dont onze ne sortant pas de rhétorique.
- six étudiants ont eu 7 heures de mathématiques par semaine, soit 4,96 %.
- six étudiants ont eu 8 heures de mathématiques par semaine, soit 4,96 %.
- deux étudiants ont eu 9 heures de mathématiques par semaine, soit 1,65 %, dont un ne sortant pas de rhétorique.

Concernant les étudiants n'ayant pas terminé leur rhétorique en directement de 2017, certains sont partis à l'étranger ou étaient dans le monde du travail, d'autres étaient déjà inscrits en premier bachelier en architecture ou encore étaient inscrits dans une autre filière d'études à l'université comme ingénieur civil, psychologie, médecine, informatique, H.E.C, biochimie, etc.
Avant d'écrire les questions, je me suis renseignée sur les acquis que les étudiants étaient censés maîtriser sur les dérivées après leur parcours secondaire, en fonction du nombre heures de mathématiques par semaine.

Concernant les étudiants ayant suivi un cours de mathématiques de deux heures par semaine, les dérivées ne sont pas prévues dans le programme.
Pour les étudiants ayant suivi un cours de mathématiques de quatre heures par semaine, voici quelques extraits du programme concernant les dérivées :
-Nombre dérivé : définition et interprétation graphique
-Associer le comportement d'une fonction au signe de sa dérivée première et/ou seconde.
-Apparier des graphiques de fonctions à ceux de leur dérivée première et/ou seconde.
-Calculer les dérivées d'une fonction.

-Distinguer, entre deux graphiques donnés, celui de la fonction et celui de sa dérivée première.
-Résoudre un problème relatif au comportement local d'une fonction.

Le programme pour les étudiants suivant un cours de mathématiques 6 heures par semaine présente quelques ajouts, notamment concernant la règle de l'Hospital ou encore les théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

Étant donné qu'une grande partie des étudiants, environ 87 %, ont au moins suivi 4 heures de mathématiques par semaine, au vu des résultats du questionnaire de début d'année, je me suis basée sur les acquis de ce programme.

Question 1

Énoncé :

Traduire les phrases suivantes en langage mathématique.

a) *x vaut le double de 3 augmenté de b le tout divisé par 4*

b) *Soient 3 personnes : François, Stéphanie et Jérôme. Le salaire de François vaut 65% de celui de Jérôme augmenté des deux tiers de celui de Stéphanie*

c) *Soit un rectangle de longueur b, de largeur a et de périmètre donné. Donner l'expression de l'aire de ce rectangle uniquement en fonction de la variable a.*

Enjeu :

Le fait que les étudiants éprouvent des difficultés pour passer du français au langage mathématique peut être lié à plusieurs facteurs : un problème de compréhension du français ou un problème de structuration des informations en mathématique. Cette question est composée de 3 sous-questions : la première permet de voir si l'étudiant arrive à traduire mot à mot une phrase en langage mathématique, la deuxième permet de savoir si le souci vient d'un éventuel contexte mathématique, on parle de pourcentage, de salaire, les étudiants doivent poser eux-mêmes certaines inconnues pour écrire la relation, un vocabulaire ou des actes qui peuvent faire obstacle chez l'étudiant alors que celui-ci sait peut-être répondre à la première question sans problème. La troisième question permet de voir si l'étudiant arrive à utiliser une équation connue pour en réécrire une autre. J'ai volontairement mentionné le périmètre dans l'énoncé sans préciser sa valeur numérique, en effet, c'était un obstacle que j'avais relevé chez certains étudiants de l'année académique 2016-2017, je voulais vérifier si ce problème apparaissait de nouveau cette année académique 2017-2018 et voir si les étudiants, avec l'indice fourni dans l'énoncé, parviendraient à exploiter l'information.

Observations :

$\star$ Première sous-question :

Les deux réponses revenant le plus régulièrement étaient "$x = \frac{2.3+b}{4}$" pour septante-quatre étudiants et "$x = \frac{2.(3+b)}{4}$" pour trente-six étudiants. Ces deux réponses sont correctes, du fait d'un manque de précision de ma part dans la phrase. Pour les onze étudiants restant, certains ont traduit "augmenté" par une multiplication, ou en élevant à une certaine puissance, ou encore en notant "$2x = \frac{3b}{4}$". Parmi les septante-quatre étudiants, deux ont fait une erreur de simplification par la suite en simplifiant le 2 du numérateur avec le 4 du dénominateur, mais le but de cette question étant de vérifier la traduction de la langue courante au langage mathématique et en tenant compte du manque de précision dans la phrase, 9% des étudiants ont échoué à la question. On peut donc estimer que peu d'étudiants ont eu des difficultés avec ce vocabulaire de base en mathématiques et parmi ceux-ci, c'est-à-dire les onze étudiants ayant mal répondu à la question, huit avaient au moins cinq heures de mathématiques par semaine.

$\star$ Deuxième sous-question :

Parmi les 121 étudiants, six se sont abstenus de répondre, septante ont écrit la bonne relation et quarante-cinq se sont trompés. Parmi ceux qui se sont trompés, douze étudiants n'ont pas utilisé d'inconnue dans la relation proposée :
"salaire François $= \frac{65}{100} + \frac{2}{3}$", "François$= \frac{65}{100}$ de Jérôme $+\frac{2}{3}$ de Stéphanie". Une dizaine d'étudiants ont écrit "$x = 65\%(x + \frac{2}{3})$" : la traduction du pourcentage n'est pas faite, la relation ne fait intervenir qu'une seule inconnue et celle-ci n'est pas précisée. En général, la traduction du pourcentage n'est pas réalisée, les étudiants laissent le symbole "%" dans la relation. Une dizaine d'étudiants ont proposé des réponses plus variées comme : "$F = \frac{2}{3}S + J + 0.65(\frac{2}{3}S + J)$", "$65\% + 100\% + \frac{2}{3}100\%$", "$x = 0,65.\frac{2}{3}$", "$0,65.J.S$", "$\frac{65}{100}F = S + 2J$", "$F = \frac{65}{100}.S.\frac{2}{3}.J$" ou encore "soit x = salaire de Stéphanie ; salaire Jérôme $= x + \frac{2}{3}x$; salaire François : $(x + \frac{2}{3}x) + (x + \frac{2}{3}x).0,65$".
Certains ont additionné les pourcentages des salaires de Stéphanie et Jérôme et ont dit que le salaire de François était ce pourcentage-là des deux autres :
"$65\% + \frac{2}{3}(33,333.2) \rightarrow 65\% + 66,666\% = 131,666\%$ le salaire de François vaut

$131,666\%$ de celui des 2 autres". D'autres encore n'ont pas précisé les inconnues ou ont inversé celles-ci dans la relation.
Au final, au-delà des erreurs liées au français, il y a une réelle difficulté à traduire une proportion dans une équation. D'ailleurs, pas mal d'étudiants laissent le symbole du pourcentage dans celle-ci. Mais il y a également une difficulté à mettre sous la forme d'une équation faisant intervenir plusieurs inconnues : certains étudiants mettent la même inconnue pour chaque salaire, ou en utilisent seulement une, voire aucune, dans la relation.
Si on s'intéresse aux onze étudiants ayant échoué à la première question, deux d'entre eux ont bien répondu à cette question, un s'est abstenu, tandis que les autres ont échoué. Parmi ces mauvaises réponses, la moitié des étudiants avaient uniquement oublié de préciser les inconnues et les autres proposaient diverses réponses. On peut donc comptabiliser environ 42 % des étudiants qui échouent à cette question.

⋆ Troisième sous-question :

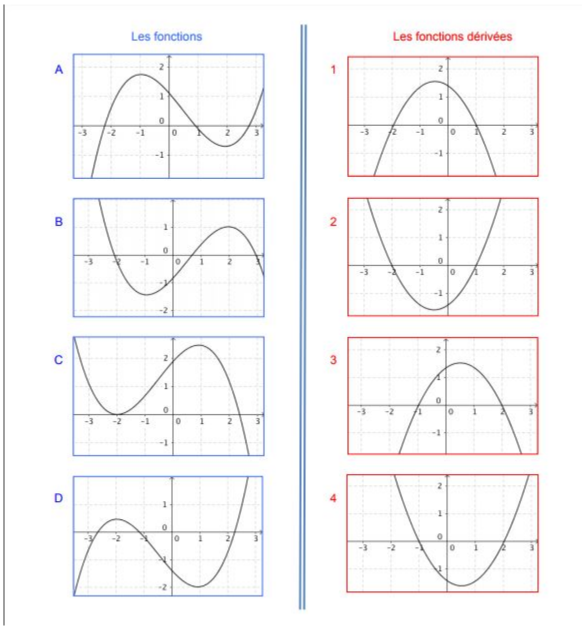
Douze étudiants n'ont pas répondu à la question et trente et un ont répondu correctement. Parmi ces trente et un étudiants, vingt-trois ont suivi un cours de mathématiques d'au moins cinq heures par semaine. On peut également constater que parmi ces trente et un étudiants, vingt-trois, pas les mêmes que précédemment, ont répondu correctement à l'ensemble des sous-questions de la question un. Sept étudiants se sont uniquement trompés dans la sous-question deux et un étudiant s'est trompé dans la sous-question un. Soixante-deux étudiants ont mal répondu, parmi ceux-là, dix-huit ont uniquement mis la formule de l'aire du rectangle, quatre ont uniquement noté la formule du périmètre du rectangle et neuf ont écrit les deux formules mais n'ont rien fait de plus. Six étudiants ont isolé a dans la formule de l'aire : "$a = \frac{A}{b}$".
Vingt et un étudiants ont proposé une formule de l'aire ne dépendant que de a mais ils se sont trompés dans l'expression de b ou dans la formule de l'aire ou du périmètre d'un rectangle.
Par exemple, trois étudiants se sont trompés dans la formule du périmètre et ont donné comme solution "$A = a.(p - 2a)$" ou encore un étudiant n'a pas réussi à isoler le b : "périmètre$= 2a + 2b$ et Aire$= (...).a$". Trois étudiants ont confondu les formules du périmètre et de l'aire" périmètre$= x$ et $A = \frac{x}{a} + a$". D'autres ont essayé d'exprimer le côté b, mais pas à l'aide du périmètre, avant de l'insérer dans la formule de l'aire : "$b = a + a$ et $A = 2a.a$", "$b = a + x$ et $A = a.(a + x) = a^2 + ax$". De plus, il faut préciser que certains étudiants faisaient des erreurs de calcul, pour certains "$a.2a = 3a$", ou encore ils dessinaient le rectangle en séparant la longueur b en deux parties de même longueur valant a et ils notaient que l'aire faisait $a.a^2$ ou encore a^6. Deux étudiants ont utilisé uniquement la formule de l'aire et ont écrit : "$A = a.b \Leftrightarrow b = \frac{A}{b}$ donc $A = a.\frac{A}{a}$".
Parmi les étudiants restant, certains ont cherché les valeurs de a et b quand la valeur

de l'aire était égale à celle du périmètre, ou encore quand le périmètre était nul. Les autres ont donné des réponses diverses : "$A = \dfrac{A.2}{b.\sin(\gamma)}$", "$b^2 + c^2$", "$f(a) = \dfrac{b.a}{2}$", "$A = a.(b-a) \Leftrightarrow a = \dfrac{A}{b-a}$", "$P = 2a + 2b,\ A = a.b = a^2.(\dfrac{2a}{2a} + \dfrac{2b}{2})$", "$A = a^2 + \dfrac{(p-2a)}{a}.a$". Un étudiant a donné la formule du volume d'un parallélépipède "$A = a.b.X \Leftrightarrow a = \dfrac{A}{b.X}$", un autre a posé un périmètre de 14 et a dessiné un rectangle de longueur 5 et de largeur 2. Enfin, un étudiant a noté que c'était impossible car "$A = L.l$ pour un rectangle" et il a souligné dans l'énoncé les dimensions données du rectangle a et b, cet étudiant a suivi un cours de mathématiques de 8 heures par semaine.
Finalement, si on s'intéresse uniquement à l'objectif qui était d'obtenir une fonction à une seule inconnue, à partir de deux équations à deux inconnues, 70 % des étudiants ont échoué à la question.

Question 2

Énoncé :

Parmi les graphiques suivants, on donne les courbes de 4 fonctions dans la colonne de gauche et celles de leurs dérivées dans la colonne de droite. Associer chaque fonction à sa dérivée. Justifier.

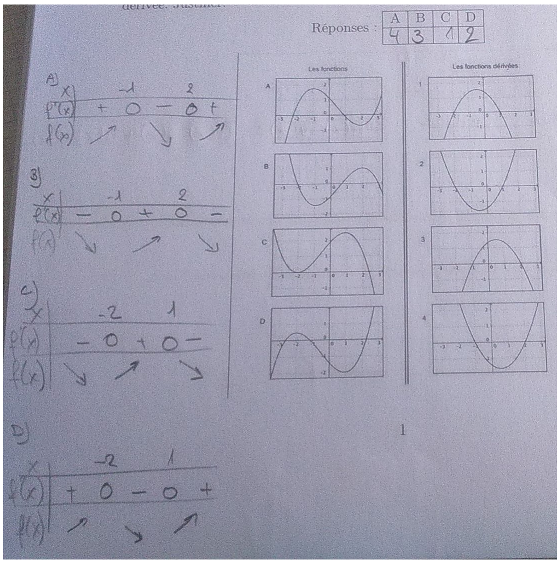


Enjeu :

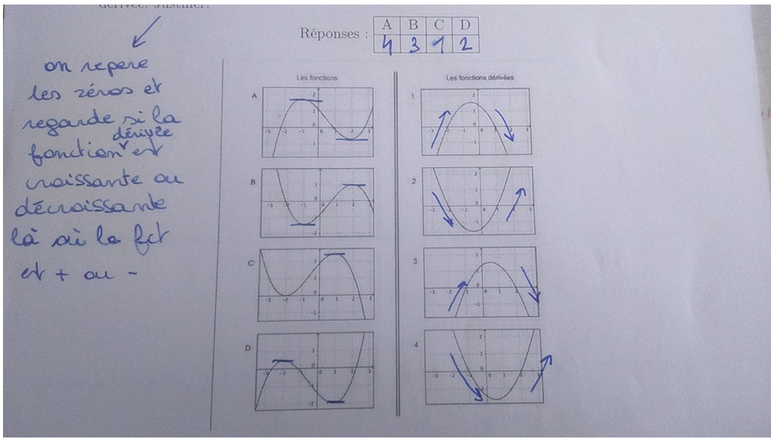
Cette question a pour but de vérifier si les étudiants parviennent à mobiliser leurs connaissances procédurales sur les liens entre une fonction et sa fonction dérivée. Je pourrai ainsi comparer les résultats avec la question 3, un problème d'optimisation, et savoir si la difficulté pour résoudre les problèmes d'optimisation vient du fait qu'ils ne connaissent pas ces relations ou s'ils n'arrivent pas à les utiliser lorsque le contexte est différent.

Observations :

Trente-cinq étudiants n'ont pas répondu à la question, vingt-quatre ont trouvé les bonnes réponses et soixante-deux se sont trompés. Au-delà des bonnes ou mauvaises réponses, ce qui m'intéresse ce sont les justifications.
Parmi ceux qui ont trouvé les bonnes réponses : cinq étudiants n'ont pas justifié leurs choix, un a écrit qu'il avait fait son choix au hasard, six étudiants ont dessiné des flèches sur les graphiques des fonctions pour désigner la croissance ou la décroissance de la fonction et parfois ils ont mis des signes "+" et "-" sur certaines parties de graphique des fonctions dérivées et certains ont entouré les zéros des fonctions, un étudiant a marqué "*Relation entre croissance d'une fonction et signe de sa dérivée*" et un autre "*Réalisé en regardant l'allure de la courbe plus les maximums et minimums*". Une seule étudiante a été précise :



Elle a fait pour chaque fonction, un tableau de signes où elle a mis le signe de la fonction dérivée et la croissance/décroissance de la fonction, deux autres étudiants ont fait une résolution similaire. Un autre étudiant a écrit : "*J'ai associé les fonctions à leurs dérivées en regardant quand la fonction change d'inclinaison c'est que la dérivée passe du positive à négative ou le contraire*". Un autre inverse la manière de procéder :



"*On repère les zéros et regarde si la fonction dérivée est croissante ou décroissante là où la fonction est positive ou négative*", on peut alors se demander comment il a pu trouver les réponses avec ce raisonnement. De plus, sur son dessin, il ne met pas en évidence les zéros de la fonction mais les extremums.
Enfin, certains ont essayé d'écrire la fonction dérivée sous la forme d'une équation du second degré, d'autres ont écrit l'équation d'une droite mais ils n'ont pas donné plus d'information dans leur résolution.
Parmi les soixante-deux étudiants n'ayant pas la bonne réponse, quarante-quatre n'ont pas donné de justifications dont dix-neuf ayant deux bonnes réponses sur les quatre, vingt ayant une bonne réponse et cinq n'ayant aucune bonne réponse. Parmi les dix-huit autres étudiants ayant donné une justification, parfois très succincte, deux étudiants ne savaient vraiment pas justifier leur choix, l'un d'entre eux note : "*Ce raisonnement me semble logique mais je ne sais pas si c'est juste*", et il ne met rien d'autre et deux de ses réponses étaient correctes. Un autre écrit : "*Je ne sais plus*" et il a noté les points d'intersection avec l'axe OX et l'axe OY pour la fonction. Cinq autres étudiants ont été brefs dans leur justification, un a donné les zéros des fonctions, un autre a mis des flèches à la fin de chaque graphique pour exprimer la croissance ou la décroissance et deux autres ont noté la fonction x^2 et sa fonction dérivée, un dernier a marqué qu'à droite c'était x^2 et à gauche $\sin(x)$ ou $\cos(x)$. Quatre étudiants sont partis d'une équation et ont remplacé par des points du graphique pour trouver les expressions des fonctions, deux sont partis de l'expression d'une droite et les deux autres de l'expression d'une fonction du second degré. Un étudiant a regardé le déplacement de la fonction dérivée selon l'axe vertical et un autre étudiant écrit "*J'ai regardé le décentrage de la fonction par rapport aux dérivées et mis ensemble celles qui avaient un décentrage semblable*". Enfin, un étudiant a uniquement regardé la croissance et décroissance des fonctions, un autre a associé aux fonctions les fonctions dérivées ayant la même croissance et un autre a regardé le signe de la fonction et comparé avec la croissance de la fonction dérivée et les points d'intersections avec l'axe OX. Un dernier étudiant a écrit "*Fonctions : on a un max ou min, on retrouve dans la dérivée un point sur l'axe x*" et un autre "$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2,5}{3} = 0.8$".
L'absence fréquente de justifications, 69 %, et les maigres justifications proposées ne per-

mettent pas de tirer grand chose de ces observations, excepté le fait, qu'à la sortie de rhétorique les acquis présentés dans les programmes ne sont probablement pas réellement maîtrisés par la plupart des étudiants.

Question 3

Énoncé :

Soient deux hommes, la somme de l'âge du premier avec le double de l'âge du deuxième est égale à 150. Quel est le plus grand produit possible des deux âges ? Donner l'âge des deux personnes dans ce cas-là.

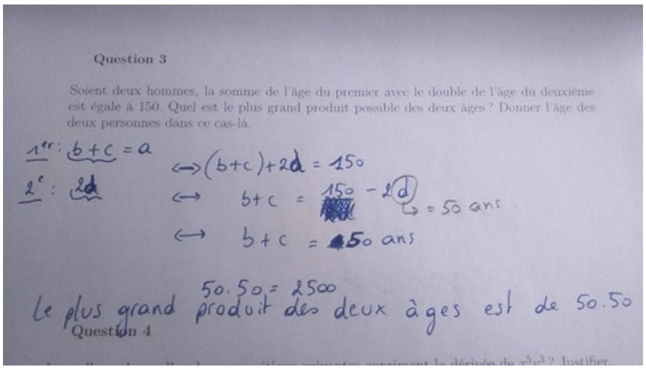
Enjeu :

En proposant un problème d'optimisation, je voulais voir comment les étudiants essayeraient de le résoudre. Les questions précédentes, faisant appel notamment à la notion de dérivée et à la mise en équation, allaient-elles les inspirer ? Et si ce n'était pas le cas, quel raisonnement allaient-ils utiliser pour résoudre ce genre de problème ?

Observations :

Pour cette question, un seul étudiant s'est abstenu, six ont trouvé la bonne réponse et cent treize ne sont pas parvenus à la bonne solution. Parmi les six ayant la bonne réponse, trois étudiants ont pris un couple de valeurs qui vérifiait la relation des âges et ils n'ont pas vérifié si c'était le couple donnant le produit maximum, un étudiant a testé différents couples et a pris celui qui donnait le plus grand produit et deux étudiants ont utilisé la méthode liée à la dérivée, ces deux étudiants venaient d'ingénieur civil et d'un cours de mathématiques de 8 heures.
Parmi ceux n'ayant pas trouvé la bonne réponse, trente-six étudiants ont uniquement noté la relation des âges et certains parmi eux isolent une des inconnues. Vingt-quatre étudiants ont écrit la relation des âges et donné un couple qui la vérifiait et l'un d'eux s'est trompé dans cette relation. Un autre étudiant a ajouté qu'il y avait plusieurs couples satisfaisant la relation et un dernier a noté en plus "$x.y \leq 150$? ?". Dix-huit étudiants ont donné la relation des âges mais cette fois-ci, ils ont testé différents couples pouvant la satisfaire et ont choisi celui qui donnait le plus grand produit.
Sept étudiants ont écrit la relation des âges avec une seule inconnue, dont deux se trompant dans la relation "$x = \frac{x+150}{2}$". Deux étudiants ont écrit la relation des âges et ils se sont trompés dans la simplification "$A + 2B = 150 \Leftrightarrow A + B = \frac{150}{2}$"
Huit étudiants ont fait un système de deux équations en utilisant la même équation : la relation des âges. Quatre étudiants ont écrit les deux équations, la relation des âges

et le produit, mais ils étaient bloqués ensuite. Tandis que deux autres ont remplacé en plus dans la formule du produit, l'expression d'une des deux inconnues pour avoir une équation avec une seule inconnue et sont restés bloqués à cette équation du second degré. Ensuite, il y avait différentes résolutions, un étudiant a écrit que pour avoir un maximum les deux inconnues devaient être égales. Un autre étudiant écrit la relation des âges, isole une inconnue et l'insère dans cette même équation, un autre écrit les deux relations, égale le produit à 150, puis reste bloqué. Quatre étudiants ont un souvenir procédural et tentent d'utiliser la dérivée. En effet, un de ces étudiants note la relation des âges et écrit qu'il faut faire la dérivée première, un autre ajoute qu'il faut dériver et faire le tableau de signes, un autre isole une inconnue dans la relation des âges puis il dérive et obtient un nombre négatif, ensuite il annule une des inconnues puis l'autre dans ce qu'il obtient et le dernier utilise la méthode avec les dérivées mais il fait une erreur de signe et ne continue pas.
Enfin, quatre réponses plus brèves : "$50.50 = 2500$", "$50 + 2.50$", un autre étudiant utilise la relation des âges, égale une des inconnues à 150, en déduit que l'autre vaut 0 et conclut que c'est impossible. Le dernier utilise plus de deux inconnues pour écrire une relation des âges incorrecte :



Au final, deux étudiants ont réussi à résoudre le problème en justifiant leur réponse correctement, quelques uns ont un vague souvenir d'une méthode en évoquant la dérivée et dix-neuf étudiants ont essayé de résoudre le problème en testant différents couples de nombres pour approcher le couple donnant le produit maximum.

Question 4

Énoncé :

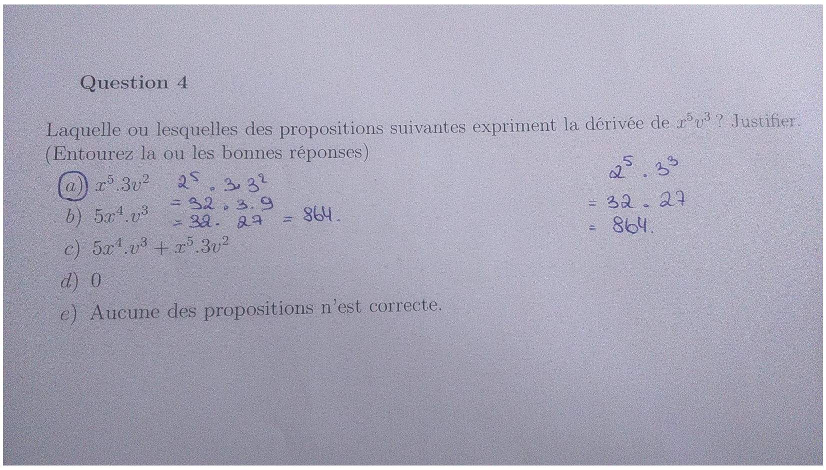
Laquelle ou lesquelles des propositions suivantes exprime(nt) la dérivée de x^5v^3 ? Justifier. (Entourez la ou les bonnes réponses)
a) $x^5.3v^2$
b) $5x^4.v^3$
c) $5x^4.v^3 + x^5.3v^2$
d) 0
e) Aucune des propositions n'est correcte.

Enjeu :

Cette question est une question piège inspirée de l'article de Gantois et Schneider [13]. En effet, il est demandé ici de donner la dérivée d'une fonction à deux variables x et v, sans préciser par rapport à quelle variable on dérive. Les étudiants n'ayant jamais dû dériver ce type de fonctions, seront-ils interpellés ? Ici, on a utilisé x car c'est la lettre communément utilisée dans les expressions comme variable, v est une lettre quelconque. On peut s'attendre à ce que les étudiants voient x comme variable mais on se demande quelle signification ils vont donner à v.

Observations :

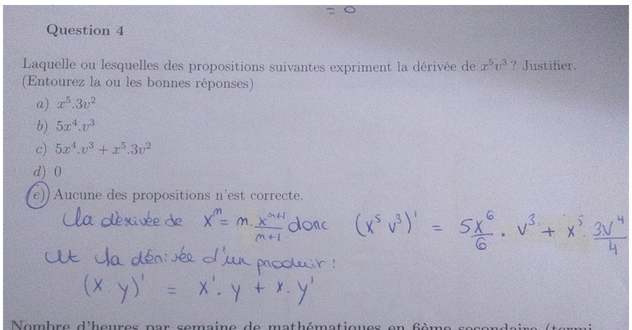
Quatre étudiants n'ont pas répondu à la question. Un seul a choisi la proposition a) et pour se justifier, il prend des valeurs pour x et v et il vérifie que la valeur obtenue de la dérivée est la même que celle de l'expression initiale :


Question 4

Laquelle ou lesquelles des propositions suivantes expriment la dérivée de x^5v^3 ? Justifier.
(Entourez la ou les bonnes réponses)
a) $x^5.3v^2$ $\quad 2^5 . 3.3^2$ $\quad 2^5 . 3^3$
b) $5x^4.v^3$ $\quad = 32 . 3 . 9$ $\quad = 32 . 27$
$= 32 . 27 = 864.$ $\quad = 864.$
c) $5x^4.v^3 + x^5.3v^2$
d) 0
e) Aucune des propositions n'est correcte.

Il faut prendre en compte le fait que cet étudiant n'a eu que 2 heures de mathématiques par semaine l'année précédente et si on se réfère au programme, il n'a pas vu les dérivées.

Cinq étudiants ont donné la réponse b), dont deux s'abstenant de se justifier et trois autres ont noté que v était un nombre et pas une inconnue et que la dérivée ne s'appliquait que sur les inconnues. Ces trois derniers ont donc considéré le x comme une variable et le v comme une constante.
Quatre-vingt-un étudiants ont choisi la réponse c). Parmi ceux-ci, dix-neuf n'ont pas justifié leur choix, cinquante-sept ont donné la formule de la dérivée d'un produit, quatre ont donné comme justification la formule de la dérivée de la fonction $a.x^n$ où a est une constante et enfin, un étudiant écrit "*En considérant que x et v ne sont pas des constantes. On utilise dans ce cas la formule du produit*". Ce dernier, venant d'ingénieur civil, prend position par rapport à v et x car cela n'a pas été précisé dans l'énoncé mais il se trompe quand même.
Un seul étudiant a donné la réponse d) et a justifié correctement ce choix en écrivant "*Il n'y a pas de variable, ou elle n'est pas précisée dans l'énoncé*". A priori, il considère donc x et v comme des constantes et donc en dérivant l'expression il arrive à 0, cet étudiant vient d'un cours de mathématiques de 4 heures par semaine.
Vingt-sept étudiants ont choisi la réponse e), parmi ceux-ci, sept n'ont pas justifié leur choix et un étudiant a noté "*Formule ne correspond à aucune des réponses ci-dessus*", cette réponse ne nous permet pas de savoir s'il a compris l'origine du problème ou si comme d'autres étudiants, il aurait donné une autre formule ne mettant pas en évidence la non spécification de la variable par rapport à laquelle on dérive. Un étudiant a écrit "*matière non vue*", étant donné que cet étudiant vient d'un cours de mathématiques de 2 heures, on peut penser qu'il parle des dérivées en général. Quinze étudiants ont donné comme réponse "$5.x^4.3.v^3$", ils ont donc considéré x et v comme des variables mais pour eux la dérivée est donnée en dérivant les deux variables dans un même terme. Un étudiant dit appliquer la formule de la dérivée d'un produit et donne comme réponse "$\frac{5x^6}{6}.v^3 + x^5.\frac{3v^4}{4}$", il mélange primitive et dérivée.


= 0

Question 4

Laquelle ou lesquelles des propositions suivantes expriment la dérivée de x^5v^3 ? Justifier.
(Entourez la ou les bonnes réponses)

a) $x^5.3v^2$
b) $5x^4.v^3$
c) $5x^4.v^3 + x^5.3v^2$
d) 0
e) Aucune des propositions n'est correcte.

la dérivée de $x^n = n.\frac{x^{n+1}}{n+1}$ donc $(x^5v^3)' = 5\frac{x^6}{6}.v^3 + x^5.\frac{3v^4}{4}$
et la dérivée d'un produit :
$(x.y)' = x'.y + x.y'$

Nombre d'heures par semaine de mathématiques en 6ème secondaire (terminale) : 6h

Un autre étudiant donne la réponse suivant "$(x^5.v^3)' = v^3.5x^4.(x^4)' = v^3.5x^4.4x^3.(x^3)' = v^3.5x^4.4x^3 3x^2.(x^2)' = v^3.5x^4.4x^3.3x^2.2x$", il considère v comme une constante et il se trompe dans la formule de la dérivée, et un autre écrit "$5x^4 4v^3 - x^5 3v^2$", il utilise la dérivée d'un produit mais en se trompant dans le signe, ces deux derniers viennent d'un cours de mathématiques de 6 heures.
Enfin, deux étudiants ont choisi différentes propositions, l'un d'eux venant de math 6 heures, a entouré les propositions a) et b) et a justifié correctement "a) si on dérive par

rapport à v et b) si on dérive par rapport à x". L'autre, venant de math 8 heures, a tout entouré excepté le point e) et a écrit "Elle peuvent toutes exprimer la dérivée de $x^5.v^3$ car on ne sait pas par rapport à quoi on dérive", sa justification n'est pas tout à fait correcte ni précise car le point c) ne peut pas convenir et il ne précise pas la variable par rapport à laquelle on dérive pour obtenir chacune des propositions.
Au final, cinq étudiants justifient correctement leur réponse en précisant la variable par rapport à laquelle ils dérivent. Deux autres ne donnent pas les bonnes réponses mais ils soulignent le manque de précision dans l'énoncé "on n'a pas explicité par rapport à quoi on dérivait dans l'énoncé". La majorité des étudiants ont choisi la dérivée d'un produit comme justification. Ils écrivent pour la plupart correctement la formule de dérivation d'un produit faisant intervenir deux fonctions dépendant de la même variable alors qu'ici, les deux fonctions dépendent de variables différentes. Ceci m'amène à me poser des questions sur la compréhension de certaines formules mathématiques par les étudiants, peut-être sont-ils simplement habitués à les appliquer sans vraiment les comprendre.

Conclusion :

Les problèmes liés au langage courant sont indéniables et plus particulièrement, la retranscription d'une situation en langage mathématique. Au-delà des problèmes d'optimisation, cela risque de poser problème dans l'ensemble des matières en mathématiques et ces problèmes doivent normalement être traités bien avant l'arrivée des étudiants dans le supérieur, peu importe le nombre d'heures de mathématiques par semaine qu'un étudiant peut suivre. Il semblerait que les étudiants, pour la plupart, ne maîtrisent pas les notions supposées acquises en fin de rhétorique. Cette constatation interpelle sur la réelle compréhension de la matière par les étudiants. En effet, retrouver les liens entre une fonction et sa fonction dérivée semble laborieux alors que la plupart arrivent à écrire une des formules de dérivation.

2.2.3 Analyse de l'examen de janvier 2018

Pour permettre l'analyse des résolutions de la question d'optimisation des deux cent vingt-trois étudiants, j'ai dû mettre en place un certain codage pour répertorier, dans un tableau, les différents problèmes de chaque étudiant lors de cette résolution. Ce tableau reprend notamment les points des étudiants, des détails sur leur résolution et les différents codes. Je détaillerai dans cette partie uniquement les codages nécessaires à la compréhension du diagramme représenté à la Figure 2.2.
En procédant de cette manière, j'ai pu étudier l'ensemble des problèmes rencontrés par les étudiants de l'année académique 2017-2018 lors la résolution de ce type d'exercice.

Concernant l'examen en général

Avant de détailler les problèmes rencontrés, voici quelques chiffres plus généraux. Une petite précision est à faire : je ne tiendrai compte ici que des analyses sur les résultats obtenus à l'examen sans considérer les réussites via le bonus de l'interrogation ni celles dues à un éventuel arrondi de la cote. En effet, rappelons qu'un bonus de deux points sur la cote de l'examen de janvier est accordé pour les étudiants ayant réussi avec une cote minimale de 12/20 l'interrogation dispensatoire du premier quadrimestre.

- 223 étudiants ont présenté l'examen.
  17 ne se sont pas présentés.
  26 ont signé.

- 86 étudiants ont réussi le cours de mathématiques.
  Parmi ceux-ci : - 73 étudiants ont réussi l'examen de janvier.
  - 13 étudiants ont réussi l'examen grâce aux deux points bonus de l'interrogation.
  9 étudiants ont réussi en arrondissant les cotes.

Concernant la question de l'optimisation

La question de l'examen était la suivante : "*Une feuille de papier destinée à une affiche a une surface de 2m^2. Les marges du haut et du bas sont de 14cm et celles des côtés sont de 7cm. Quelles doivent être les dimensions de l'affiche pour obtenir une surface imprimée maximum ?*"

Diagramme :

J'ai représenté les observations concernant la question sur l'optimisation sous la forme d'un diagramme, FIGURE 2.2.
Les premiers nombres, en gras, concernent tous les étudiants ayant présenté l'examen tandis que ceux entre parenthèses ne concernent que les étudiants ayant raté l'examen et qui participeront vraisemblablement aux remédiations. La distinction est importante pour situer les problèmes du public en général et ceux du public potentiellement présent aux remédiations organisées pendant le deuxième quadrimestre.

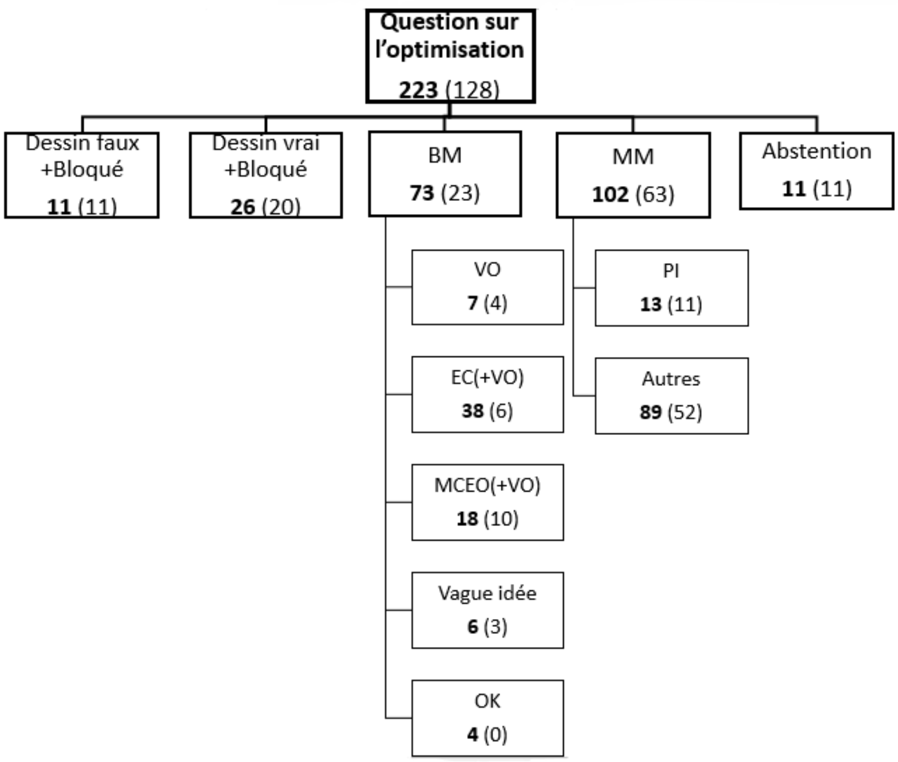


FIGURE 2.2 – Diagramme des difficultés décelées chez les étudiants lors de l'examen de janvier 2018

Signification des différents codes utilisés :

Voici les différents codes utilisés dans l'analyse des résolutions proposées par les étudiants. Si différentes difficultés étaient rencontrées dans la résolution, et c'était pratiquement chaque fois le cas, ces codes étaient combinés par le symbole "+" dans le tableau.

- BM : Bonne méthode
  Ce code signifie que les étudiants ont utilisé soit la méthode qu'on leur a enseignée, soit une autre méthode, également, correcte pour résoudre le problème. Ou encore, qu'ils ont une idée précise des différentes étapes de la méthode apprise, même s'ils ne l'utilisent pas sur la bonne fonction ou s'ils sont bloqués à un moment dans la résolution, mais qu'arrivent à expliquer comment ils auraient procédé si ce n'avait pas été le cas.

- MM : Mauvaise méthode.
  Ce code signifie que les étudiants ont utilisé une mauvaise méthode, c'est-à-dire, ne permettant pas de répondre à la question.

- VO : Oubli de la vérification du maximum ou minimum.
  Ce sont les étudiants qui oublient de vérifier, à un moment de leur résolution, si les valeurs obtenues correspondent bien à un maximum de la fonction et non un minimum.

- EC : Erreur de calcul.
  Diverses erreurs commises, voici quelques exemples :
  - ⋆ Erreur ou oubli de conversion des unités pour travailler dans la même unité de mesure.
  - ⋆ Erreur dans l'ordre des opérations : multiplication, division, oubli de parenthèses, etc.
  - ⋆ Erreur dans le calcul de la dérivée : erreur dans l'application de la formule ou dérivation d'une expression contenant plus d'une inconnue.
  - ⋆ Erreur dans la formule de l'aire d'un rectangle.
  - ⋆ Erreur de simplification dans des équations.

- MCEO : mauvaise compréhension de l'énoncé concernant l'optimisation.
  Ce sont les étudiants qui ont optimisé autre chose que la fonction exprimant la surface imprimable, comme par exemple : le périmètre, la surface totale, un des côtés de l'affiche,... .

- OK : réussi.
  Ce sont les étudiants qui ont réussi la question de l'optimisation.

- PI : Problème inverse.
  Ce sont les étudiants qui, comme mauvaise méthode, ont pris le problème à l'envers : ils supposaient, à partir de la surface de l'affiche, qu'il n' y avait qu'une possibilité pour les dimensions de celle-ci (cette possibilité n'étant pas toujours correcte). Ensuite, ils déduisaient de ces dimension de l'affiche, les mesures respectives des marges pour obtenir les dimensions de la surface imprimable. En procédant de cette façon, au lieu de trouver les dimensions maximisant une surface, ils fixaient des dimensions possibles de l'affiche pour donner la valeur de la surface imprimable par la suite.

Explications du diagramme :

Voici les erreurs commises chez les deux cent vingt-trois étudiants ayant passé l'examen de janvier 2018.

- 11 étudiants se sont abstenus de répondre à la question, soit 4,93 %.

- 11 étudiants ont seulement schématisé, de façon erronée, la situation, ajoutant parfois une formule.

- 26 étudiants ont représenté correctement la situation et/ou noté une formule correcte.

- 102 étudiants ont utilisé une mauvaise méthode
  Parmi ceux-là, j'ai distingué deux cas :
  - 13 ont procédé de manière inverse (PI), c'est-à-dire, ils ont déduit les dimensions de l'affiche avec l'information de l'aire qui valait $2m^2$, puis ils ont retiré les dimensions des marges de celles-ci pour déterminer les dimensions de la surface imprimable. Soit ils ont supposé qu'il y avait uniquement la possibilité que ce soit 2 m sur 1 m , soit ils ont considéré, à tort, que l'affiche faisait 2 m sur 2 m.

  - 89 ont procédé autrement. Je présente ci-dessous quelques exemples d'erreurs commises dans leur raisonnement avant d'être bloqués ou d'obtenir des valeurs qui, parfois même aberrantes, ne les heurtent pas, comme obtenir des dimensions négatives pour les dimensions des côtés de l'affiche.

    - Ils utilisent une seule expression, la contrainte ou la fonction à optimiser, ils isolent une inconnue et la réinsèrent ensuite dans cette même expression : ils tournent en rond.

    - Ils prennent comme dimensions de la surface imprimable 7 et 14 cm

    - Ils annulent l'expression de la surface imprimable pour déduire une valeur pour une inconnue.

    - Ils égalent les deux aires, l'aire totale et celle imprimable, à $2m^2$ et ils résolvent le système de deux équations à deux inconnues ainsi obtenu.

    - Ils ont la bonne expression à maximiser mais ils l'annulent pour ensuite chercher les zéros de l'expression.

- ⋆ Ils égalent la surface et le périmètre à 2.
- ⋆ Ils utilisent une seule inconnue pour les deux côtés de l'affiche, et à partir de l'expression de la surface, ils cherchent les zéros de l'équation obtenue.
- ⋆ Ils donnent la réponse, correcte ou fausse, sans aucune justification.
- ⋆ Ils établissent les deux expressions, celle de la surface totale et celle de la surface imprimable. Cependant, soit ils sont bloqués à cette étape, soit ils dérivent la fonction à optimiser pour être ensuite bloqués.
- ⋆ Ils utilisent l'expression du périmètre négligeant que ce dernier est une inconnue de plus dans leur problème.

- 73 étudiants ont utilisé la méthode suggérée pendant les cours.
  Parmi ceux-là, j'ai distingué cinq groupes :

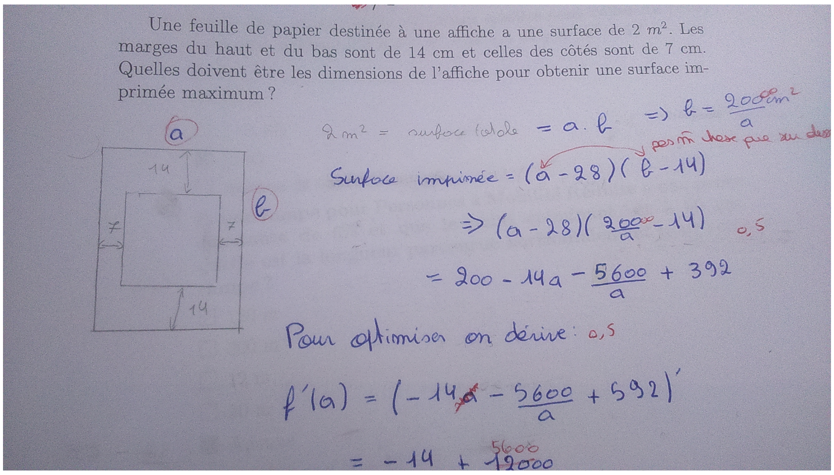
  - ▶ 4 étudiants répondent correctement à la question.
  - ▶ 7 étudiants ont pu déterminer les dimensions de l'affiche mais n'ont pas vérifié si les valeurs obtenues maximisaient la fonction.
  - ▶ 38 étudiants ont utilisé la méthode proposée mais ils ont fait une ou plusieurs erreurs de calcul. Par exemple, des erreurs dans la dérivée ou dans une simplification de calcul et s'ajoute parfois l'oubli de la vérification du maximum.
  - ▶ 18 étudiants ont utilisé la méthode proposée mais pas sur la bonne fonction, et pour certains, ils ont en plus oublié de vérifier s'il s'agissait bien d'un maximum. Par exemple, ils ont optimisé la surface totale, ou le périmètre, ou la surface formée par les marges, ou encore un des côtés de l'affiche.
  - ▶ 6 étudiants ont une vague idée de la méthode, c'est-à-dire, ils ont écrit comment procéder mais n'ont pas réussi à appliquer cette méthode.

Quelques chiffres supplémentaires :

Voici quelques chiffres supplémentaires sur des erreurs rencontrées lors de la résolution de cette question :

- ⋆ 9 étudiants avaient dans leur copie des incohérences entre le dessin et la(les) formule(s) de surface et/ou de périmètre.

  Exemple :



- ⋆ 58 étudiants ont mal converti les unités de mesure ou ont oublié de le faire. L'erreur de conversion la plus fréquente était celle-ci : "$2m^2 = 200cm^2$".

- ⋆ 28 étudiants ont égalé les deux surfaces, c'est-à-dire, la surface totale et celle imprimable.

- ⋆ 5 étudiants ont dérivé une fonction dépendant de deux variables.

- ⋆ 11 étudiants ont utilisé une seule inconnue pour les dimensions du rectangle dans la modélisation du problème.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai pu détecter grâce à différentes analyses de documents tels que trois exemplaires d'examens et un questionnaire, les erreurs récurrentes dans la résolution de problèmes d'optimisation chez les étudiants de premier bachelier en architecture. Un des problèmes est tout d'abord lié au langage courant et à la traduction de celui-ci en langage mathématique. Ensuite, pour les étudiants qui procèdent par la méthode enseignée dans le cours, c'est-à-dire liée à la dérivée, il y a des erreurs dans les calculs de dérivées mais surtout des erreurs dues à une mauvaise compréhension voire une incompréhension de la méthode : l'utilisation de la dérivée, l'annulation de celle-ci, la vérification du maximum ou du minimum. En effet, dans les résolutions des étudiants, on retrouve certaines de ces étapes mais pas appliquées comme il le faudrait. Les étudiants retiennent des étapes clés sans les comprendre, un peu comme ils le font en général. Si on regarde les réponses au questionnaire on remarque qu'ils ont retenu certaines formules de dérivation mais quand il s'agit d'évoquer des relations éventuelles entre une fonction et sa fonction dérivée, cela s'avère plus compliqué pour eux.
Étant donné que les populations d'étudiants participants aux examens de janvier et d'août de l'année académique 2016-2017 ne sont pas les mêmes, on ne peut pas comparer la diminution du taux d'abstention à la question sur l'optimisation. Par contre, si on compare les abstentions pour les deux examens de janvier, on remarque également une diminution assez importante, on passe de 29,17 % en janvier 2017 à 10,31 % en janvier 2018. Cette diminution du nombre d'abstentions à cette question est peut-être due à un ajout dans la partie théorique durant l'année académique 2017-2018. Cet ajout théorique peut également expliquer le fait que pour l'exemplaire de janvier 2018, aucun étudiant n'ait proposé un autre raisonnement que celui montré pendant l'année, mais j'y reviendrai dans le prochain chapitre.

Chapitre 3

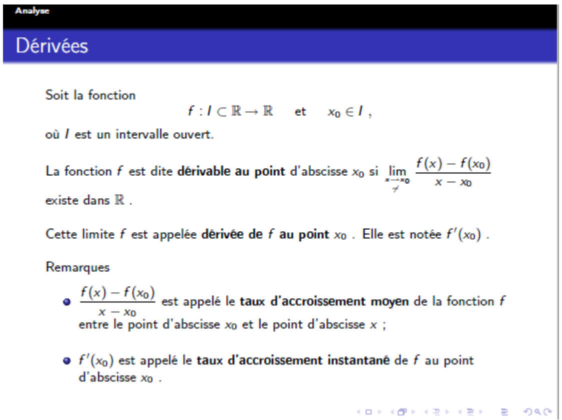
Problèmes d'optimisation

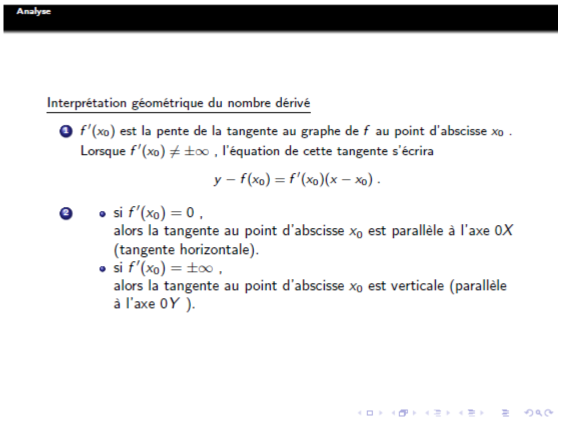
Dans ce chapitre, je vais dans un premier temps m'intéresser à la théorie abordée dans le cours de mathématiques des étudiants de premier bachelier en architecture. Ensuite, j'aborderai deux études : l'une portant sur la catégorisation des problèmes d'optimisation de Madame Schneider et Monsieur Henrotay [14] et [15] et l'autre sur les "worked examples" [16]. Ce descriptif de cours et ces études vont me permettre de proposer des changements en vue d'améliorer la compréhension de cette matière par les étudiants et atténuer certains problèmes rencontrés par ceux-ci, difficultés détaillées dans le chapitre précédent. Ces changements seront d'abord testés au travers de la construction d'une nouvelle séance de remédiation pour l'année académique 2017-2018, puis analysés afin de proposer des améliorations de cette séance et des ajouts théoriques pour les années futures. Je terminerai ce chapitre par l'analyse des résolutions de la question d'optimisation proposées par les étudiants à l'examen de juin 2018 afin d'y repérer d'éventuels changements.

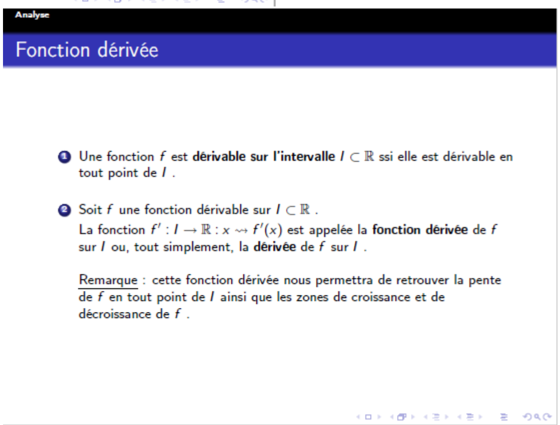
3.1 Cours théorique

Dans cette partie, je vais passer brièvement en revue l'ordre dans lequel les notions sont abordées dans le cours théorique et ce qui est vu exactement sur les problèmes d'optimisation afin de détecter d'éventuels liens avec certaines erreurs relevées dans les copies des étudiants, et éventuellement compléter ces notes à la lumière de ces erreurs pour aider les étudiants à être plus à l'aise dans la résolution de ces problèmes.
Deux séances de cours, c'est-à-dire quatre heures, sont consacrées aux polynômes, limites et dérivées. J'ai assisté à certains cours de l'année académique 2017-2018, dont ces deux séances, et les notes de l'année précédente étaient les mêmes à l'exception d'un ajout, mais j'y reviendrai plus tard.
Pour débuter la séance du 10 octobre, Madame Jancart précise le planning de la séance qui consiste à commencer par des études de fonction : domaine, limite, dérivée pour arriver à l'optimisation : trouver les extrema. Le but du chapitre étant l'optimisation, elle propose oralement un énoncé de ce type de problème. Ensuite, elle commence le cours par la théorie

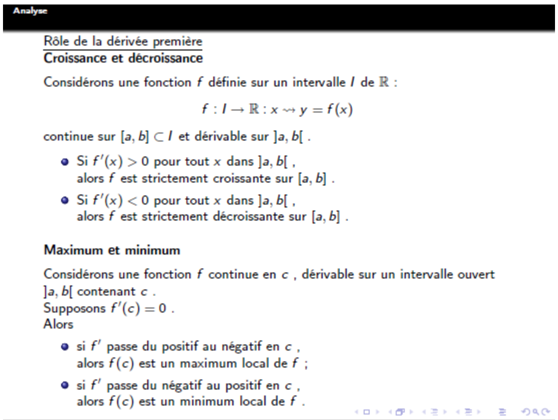
sur les polynômes du premier degré suivie de celle sur les polynômes du second degré, dans laquelle elle décrit comment trouver les coordonnées du sommet. Mais comme ils n'ont pas vu à ce moment-là les dérivées, elle précise qu'ils y reviendront lorsqu'elle les abordera. Après les polynômes du second degré, elle aborde les études de fonctions où elle définit, entre autres, un extremum local d'une fonction, les opérations algébriques sur les fonctions ainsi que la composée de deux fonctions et les fonctions réciproques, pour terminer par différentes fonctions usuelles et leurs représentations graphiques, ainsi que des manipulations de graphiques.
Ensuite, Madame Jancart aborde la notion de limite : elle donnera les définitions des différents cas, abordera les propriétés, les asymptotes, les formes indéterminées. La séance se termine par la fin de la théorie sur les limites et la séance suivante, celle du 17 octobre, débute avec les dérivées. Elle commence par définir une fonction dérivable en un point et la dérivée d'une fonction. Ensuite, elle donne l'interprétation géométrique du nombre dérivé puis elle explique les deux propriétés qu'elle a énoncées sur cette notion.

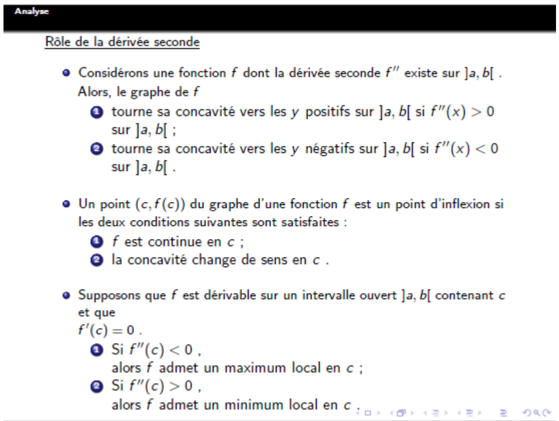




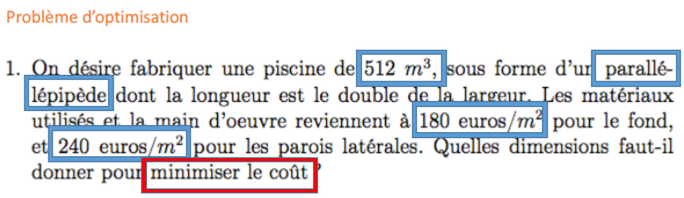


La professeure poursuit avec la continuité d'une fonction et l'interprétation graphique et propose différents exemples afin de différencier fonction continue et fonction dérivable. Elle donne ensuite un tableau des fonctions usuelles et de leur fonction dérivée puis elle explique les opérations algébriques sur les dérivées, la dérivée d'une fonction composée et les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction.
Elle continue avec le rôle de la dérivée première et celui de la dérivée seconde.





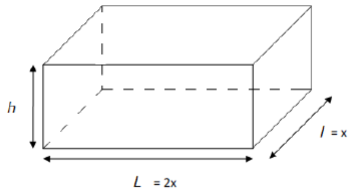
Elle explique qu'on va pouvoir trouver les maximums et minimums locaux d'une fonction en analysant la croissance et la décroissance de la fonction. Ensuite, on regardera la concavité, elle précise que les changements de concavité donnent des points d'inflexion. Dans un premier temps, il faut dériver la fonction et déterminer en quel point cette dérivée s'annule, puis le signe de la dérivée seconde en ce point permettra de conclure à un maximum ou un minimum.
Elle termine par un rappel sur le théorème de l'Hospital mais précise qu'on peut se débrouiller autrement et conseille de ne pas l'utiliser dans ce cours. Elle parle des indéterminations qu'on peut rencontrer avec les limites et comment faire pour lever ces indéterminations. Ensuite, elle clôture son chapitre sur les polynômes, les limites et les dérivées par une étude de fonction.
Cette description donne brièvement l'ordre dans lequel ces notions étaient vues durant les années académiques 2016-2017 et 2017-2018. Cependant, pour l'année académique 2017-2018, Madame Jancart a ajouté un exercice sur les problèmes d'optimisation pour clôturer ce chapitre. Elle a projeté, à l'aide de diapositives, l'exercice suivi de sa résolution, tout en expliquant les différentes étapes de cette résolution. Voici les diapositives suivies des explications données.



Elle encadre en bleu dans l'énoncé les données, numériques ou non, fournissant des informations pour résoudre le problème et en rouge ce que l'on cherche à minimiser. Ensuite, elle leur fait remarquer qu'il est important de comprendre le vocabulaire de l'énoncé. Dans cet exercice, il faut savoir ce qu'est un parallélépipède, les parois, le fond, etc, afin de comprendre la situation et de pouvoir la schématiser correctement.

Problème d'optimisation

1. On désire fabriquer une piscine de 512 m^3, sous forme d'un parallélépipède dont la longueur est le double de la largeur. Les matériaux utilisés et la main d'oeuvre reviennent à 180 euros$/m^2$ pour le fond, et 240 euros$/m^2$ pour les parois latérales. Quelles dimensions faut-il donner pour minimiser le coût ?



Ensuite, elle encadre les informations dont elle a besoin pour représenter la situation et déterminer les dimensions de le piscine. Elle insiste sur le fait qu'une fois le volume représenté, il faut bien écrire les données fournies dans l'énoncé. Ici, il faut traduire : "la longueur est le double de la largeur".

Problème d'optimisation

1. On désire fabriquer une piscine de 512 m^3, sous forme d'un parallélépipède dont la longueur est le double de la largeur. Les matériaux utilisés et la main d'oeuvre reviennent à 180 euros$/m^2$ pour le fond, et 240 euros$/m^2$ pour les parois latérales. Quelles dimensions faut-il donner pour minimiser le coût ?

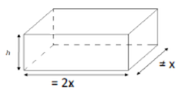
Soit x et 2x les dimensions de la base et h la hauteur du parallélipipède

Soit P le prix

P = 2x² * 180 + 2 (2x*h + x*h) *240

P = 360x² + (4x*h + 2x*h) *240

P = 360x² + 6x*h *240



Comme V = 2x² * h = 512 m³, on peut remplacer h par 512/2x²

Après avoir modélisé la situation, il faut exprimer le coût sous forme d'une fonction. Elle explique comment écrire l'expression du coût. On commence par leur expliquer comment elle obtient le coût du fond de la piscine : le prix du fond de la piscine est donné par l'aire du rectangle formant la surface de ce fond, multipliée par le prix au mètre carré. Ensuite, elle procède de la même façon pour le coût des parois latérales. Les calculs sont faits dans le détail par la professeure. Une fois que la fonction est écrite, tâche difficile à réaliser pour les étudiants, il reste à l'écrire "plus proprement", c'est-à-dire distribuer, rassembler les inconnues, etc.

Problème d'optimisation

1. On désire fabriquer une piscine de 512 m^3, sous forme d'un parallélépipède dont la longueur est le double de la largeur. Les matériaux utilisés et la main d'oeuvre reviennent à 180 euros/m^2 pour le fond, et 240 euros/m^2 pour les parois latérales. Quelles dimensions faut-il donner pour minimiser le coût ?

P = 360x² + 6x*h *240 et h = 512/2x²

P = 360x² + 6x* (512/2x²) *240

P = 360x² + 3* (512/x) *240

Une fois la fonction du coût écrite "correctement", elle leur montre qu'on peut chercher les extremums d'une fonction en annulant sa dérivée. Mais avant de dériver, comme on a deux inconnues dans l'expression, x et h, il faut se poser la question suivante : par rapport à quelle inconnue dérive-t-on ? A ce moment-là, elle leur dit qu'il faut utiliser une donnée de l'énoncé, ici le volume, afin de remplacer une des deux inconnues et d'écrire la fonction avec une seule inconnue.

P = 360x² + 3* (512/x) *240

On dérive P et pour avoir les extrema on annule la dérivée

P' = 720x + 3* 512* (-1/x²) *240 = 0 ➡ 9x + 9*512 * (-1/x²) = 0

x -512/x² = 0

512/x² = x

x³ =512

Et donc

x = 8 m

h = 256/8² = 32/8 = 4m

P'' > 0 car P'' = 1 + 1024/x3

Dimensions optimales pour minimiser le coût

Ensuite, on dérive la fonction et on annule la dérivée. Puis on isole x pour calculer sa valeur, à partir de laquelle on pourra également déterminer la valeur h. Mais l'exercice n'est pas terminé, il faut encore prouver qu'on a un minimum. Pour cela deux possibilités : soit on montre que la fonction est décroissante avant et croissante après, soit on utilise la dérivée seconde : si elle est positive on aura un maximum. Elle le montre sur le schéma. Ici, la dérivée seconde est positive donc on a bien un minimum. On aura un coût minimum quand h et x vaudront respectivement 4 m et 8 m.

Comme je l'ai déjà évoqué dans la conclusion du chapitre deux, j'ai observé une diminution des abstentions pour la question de l'optimisation entre janvier 2017 et janvier 2018. Une hypothèse pour expliquer cette diminution pourrait être que cette année académique 2017-2018, les étudiants ont eu un exemple dans le cours théorique auquel se référer pour les problèmes d'optimisation lors de leur étude. Ils ont donc peut-être essayé plus spontanément que l'année précédente de reproduire une résolution similaire ou du moins des étapes de cette résolution. En effet, sans cet exemple, on peut supposer que beaucoup d'étudiants

n'arrivent pas à faire le lien entre la théorie concernant les dérivées et les problèmes d'optimisation. Cela ne veut pourtant pas dire qu'ils ont compris pourquoi on procédait ainsi car, comme observé parmi les obstacles de l'examen de janvier 2018, mais également dans les autres examens, les étudiants reproduisent certaines étapes dans leur résolution mais ils ne les appliquent pas correctement : ils ne dérivent pas la bonne fonction, ils annulent l'expression de base et pas la dérivée, etc.
Donc bien que cet exemple permette un lien important entre la théorie et la pratique et que les explications aient été données oralement, les étudiants éventuellement par manque d'attention tout au long de la résolution, ou par manque de temps dans la prise de notes de toutes les explications, ou encore du fait de leur absence au cours, ont peut-être mal compris certaines des étapes ou n'ont pas cherché à les comprendre en pensant qu'il suffirait d'étudier une sorte de recette pour réussir les autres exercices. Une deuxième constatation, qui n'est peut-être pas en relation directe avec cet exemple, est que, au cours de cette session d'examen, aucun étudiant n'ait proposé un procédé de résolution différent de celui proposé au cours. Cet ajout théorique n'est certainement pas à exclure, mais il peut éventuellement être conçu différemment pour permettre aux étudiants d'en tirer davantage de bénéfice, j'y reviendrai ultérieurement.

3.2 Catégorisation des problèmes d'optimisation

Dans son ouvrage "Traité de didactique des mathématiques", Madame Schneider [10] prône une certaine articulation des résolutions de problèmes et situations-problèmes qui favorise le transfert au sein des mathématiques. Elle met en avant l'étude par classes de problèmes, qui peut se faire à l'aide des praxéologies de Chevallard par des techniques de résolution. Pour chacune de ces classes, il existerait une certaine technique de résolution, ce qui permettrait aux élèves de s'entrainer à la résolution de problèmes appartenant à une même classe, mais aussi de s'interroger sur le domaine de cette technique. Ensuite, on leur proposerait un autre problème de la même classe de problèmes, afin d'estimer leur capacité à transférer la méthode de résolution. Après leur avoir appris à manœuvrer dans une classe de problèmes, on leur apprendrait à le faire parmi plusieurs classes de problèmes à la fois. Cette façon de faire permettrait aux étudiants de résoudre un maximum de problèmes en les associant à d'autres.
Schneider et Henrotay [14] et [15] ont expérimenté cette façon de faire pour les problèmes d'optimisation. En effet, ils ont relevé que les problèmes d'optimisation sont source de difficultés chez les élèves, que ceux-ci les perçoivent comme complexes et inédits. Cette description est notamment relevée dans les manuels scolaires destinés tant aux élèves du secondaire qu'aux étudiants universitaires. En effet, dans les réflexions que ces deux auteurs ont relevées chez les élèves, on peut ressentir le malaise que ces problèmes peuvent engendrer chez eux : "Plus j'en fais, plus je m'y perds", "il faut se souvenir de tout car beaucoup de choses, beaucoup de formules interviennent", "Pouvez-vous me traduire l'énoncé svp ?", "inconnues variables, grandeurs, relation, fonction, contrainte...tout ça c'est du pareil au

même", etc. Ils proposent donc une piste, la catégorisation, afin d'aider les élèves à y voir plus clair parmi tous ces problèmes. L'objectif d'un classement des problèmes est de permettre aux étudiants de détecter des similitudes entre ces problèmes aussi bien dans les énoncés que dans la manière de les résoudre.
Cependant, une autre difficulté réside alors dans la façon de catégoriser les problèmes. Plusieurs propositions émanent des élèves :

1. Classer les problèmes en fonction de ce qu'on demande à optimiser dans le problème. Cela permet de classer les problèmes par ce que les élèves trouvent le moins difficile comme les quantités simples explicitées dans l'énoncé (somme, produit,..). Ensuite, ce qui concerne les longueurs, aires et volumes. Ils construisent ainsi une progression dans la difficulté à traiter. Suivent le temps, puis le coût, le débit, résistance, frottement, etc voir FIGURE 3.1 tirée de Schneider et Henrotay [15]. Les auteurs nomme cette classification : "Classification apparemment naïve".

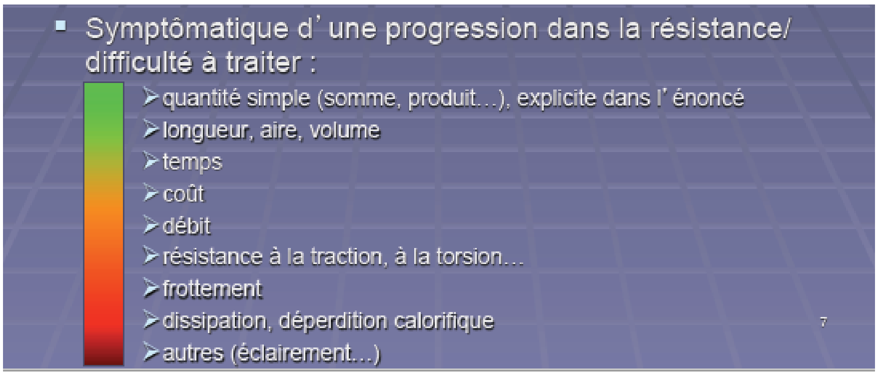


FIGURE 3.1 – "Classification apparemment naïve"

Les élèves font remarquer qu'après les deux premières classes, pour eux, le problème ne relève plus des mathématiques mais de la physique. Comme si les connaissances accumulées dans les autres cours ne pouvaient être utilisées. Alors que, comme font remarquer les auteurs, derrière un problème, il peut s'en cacher un autre. En effet, un coût peut être lié à une longueur, une aire ou un volume, un débit à une aire. On peut les laisser s'en apercevoir en proposant des énoncés de classe dite plus simple pour eux, puis leur demander de transformer les énoncés des exercices pour obtenir un problème d'une catégorie supérieure. En reprenant un exemple des auteurs, partir d'un problème faisant intervenir un volume et où il faudrait trouver les dimensions de ce volume pour avoir une aire minimale et transformer l'énoncé pour proposer un problème de coût, c'est-à-dire demander les dimensions du même volume pour repeindre ce volume et que le coût de la peinture soit minimal. Cette piste, dite catégorisation naïve, est plus propice à pouvoir manier les traductions des langages français et mathématique, qu'à pouvoir diminuer le malaise que les problèmes d'optimisation procurent. Si dans ces expérimentations les élèves semblaient plus à l'aise avec les premières classes, on a pu malheureusement identifier au chapitre 2, que les problèmes de ces classes posent déjà de grosses difficultés aux étudiants de premier bachelier en architecture. Il faut également préciser que dans leur cours de mathématiques, on retrouve essentiellement des exercices sur les volumes, les aires, les quantités simples (somme et produit), ou encore de coût.

2. Classement en fonction du nombre de variables.
   Ce classement est d'après les auteurs un effet de contrat, étant donné qu'on leur demande souvent au début d'un énoncé " de combien de variables a-t-on besoin ?". Ils ont alors exploré à nouveau les résolutions faites avec les élèves pour savoir combien de variables ont été utilisées, comment elles ont été choisies, quelles relations ont été établies entre elles, etc. Cela permet d'identifier quelle variable est plus importante suivant le problème, de montrer l'importance de la traduction entre les langages français et mathématique afin de trouver d'éventuelles relations entre les différentes variables. Et cela permet à l'élève de se rendre compte que, pour un problème donné, sa modélisation n'est pas forcément la même que celle de son voisin, mais qu'elles sont pourtant toutes les deux correctes. Et des résolutions différentes, et donc des raisonnements différents, peuvent conduire à la bonne solution.
   Les auteurs précisent également que la manière de formuler l'énoncé va influencer la modélisation, de même que l'ajout ou non d'un dessin.

3. Classement en fonction du type de fonction à optimiser, en s'attardant plus particulièrement sur certains types qui mènent à l'étude de certaines fonctions irrationnelles. Les auteurs notent que ce type de classement peut perturber les élèves dans l'étude du signe de la dérivée première et aussi seconde car elles peuvent sembler compliquées pour eux.

Schneider et Henrotay [15] ont également pu détecter différents obstacles durant la résolution des problèmes, certains que j'ai également détectés et d'autres pas. Par exemple, si on exprime dans l'énoncé une proportionnalité mais en ne précisant pas le rapport de celle-ci, ou encore si on fixe une valeur sans en donner sa valeur numérique "..de périmètre donné..". Des réflexions similaires à celles obtenues lors des séances d'exercices fusent comme "il manque quelque chose". Ils ont également relevé des difficultés dans la représentation des problèmes, et cette difficulté peut être, d'après eux, plus ou moins évitée, notamment grâce à la précision qu'on se permet d'apporter à l'énoncé. On peut se contenter d'énoncer certains objets mathématiques, ou bien décider de leur donner des notations, ou encore d'accompagner l'énoncé d'une représentation, d'un dessin. Ensuite, ils ont également constaté la méprise des élèves entre la fonction à optimiser et les éventuelles relations entre les différentes variables. Comme je l'ai exprimé dans le chapitre deux, on a l'impression que les élèves cherchent à écrire une formule en pensant que cela contentera le professeur et ils oublient de réfléchir sur le sens de ce qu'ils écrivent. Une piste pour lever cette difficulté a été proposée par ces auteurs : demander aux élèves de modifier l'énoncé

du problème afin d'échanger le rôle entre les variables.
Au-delà des problèmes récurrents que les auteurs ont pu détecter auprès des élèves, ils ont également pu observer une inquiétude de ceux-ci concernant l'ensemble des formules qui peuvent intervenir dans les problèmes d'optimisation : les formules d'aires, de volumes, de vitesses, formules de trigonométrie, Pythagore, Thalès, étude du signe, etc. Une proposition pour diminuer cette angoisse est de construire avec eux un formulaire afin que les élèves puissent y consigner l'ensemble des formules qu'ils rencontrent dans les exercices proposés, cette façon de faire peut les rassurer et leur permettre de progressivement mémoriser ces formules et de les utiliser plus spontanément lors de la résolution de problèmes.
En ce qui concerne les problèmes d'optimisation qui sont vus comme une application des dérivées, comme dans le cours de premier bachelier en architecture, les auteurs soulignent qu'il peut être intéressant de vérifier avec les élèves si cette technique est toujours valide grâce à des exemples et contre-exemples, ainsi que des exemples où un maximum ou un minimum est réalisé aux bornes de l'intervalle, ou encore un exemple où une fonction n'est pas dérivable mais bien continue, etc.
Dans cette piste de la catégorisation des problèmes, Schneider et Henrotay [14] et [15] ne cherchent pas à établir une recette miracle pour la résolution des problèmes d'optimisation mais plutôt à confronter les élèves aux différentes manières de procéder suivant la classe de problèmes dans laquelle on se trouve et également les confronter aux différents obstacles qu'ils peuvent rencontrer et distinguer les techniques les plus efficaces pour que ces problèmes deviennent maitrisables par ces derniers.

3.3 Séance de remédiation

Durant le deuxième quadrimestre, les étudiants de premier bachelier en architecture n'ont plus de cours de mathématiques. Cependant, des remédiations sont prévues pour ceux qui le souhaitent : six séances, de deux heures chacune, sont programmées toutes les deux semaines environ. La première séance est consacrée à l'examen de janvier : consultation des copies, correction de l'épreuve et réponses aux éventuelles questions des étudiants. Les cinq autres séances sont consacrées à la révision des différentes notions vues au cours : trigonométrie, problèmes de trigonométrie et dérivées, optimisation, "intégrales partie un" où l'on aborde les exercices sur les primitives, les intégrales et les calculs d'aires et enfin "intégrales partie deux" où l'on aborde les volumes de révolution et les intégrales en coordonnées polaires. Pour préparer chaque séance, un document est envoyé aux étudiants une semaine plus tôt. Il se compose d'un rappel théorique reprenant les points importants du cours et de différents exercices. En exemple, la séance de remédiation prévue pour l'optimisation pour les années académiques précédant l'année académique 2017-2018 est disponible à l'annexe E. Chaque séance débute par une explication des points théoriques utilisés et se poursuit par la résolution de certains exercices. Lors de ces séances les étudiants sont plus libres, c'est-à-dire, chacun avance à son rythme. Les étudiants-moniteurs sont là pour répondre à leurs questions lors des exercices et certaines résolutions sont faites au tableau.

Dans le cadre de ce mémoire, j'ai demandé à disposer du temps prévu pour la séance de remédiation sur l'optimisation afin d'en construire une nouvelle. Elle s'inspire, d'une part, de la catégorisation des problèmes proposée par Madame Schneider et Monsieur Henrotay [14] et [15] et, d'autre part, des worked examples de Atkinson et al. [16] introduits plus bas. L'intégralité de la remédiation est disponible à l'annexe F.

3.3.1 Études sur les "worked examples"

L'apprentissage à partir des "worked examples", qu'on pourrait traduire par "exemples travaillés/élaborés" mais pour lesquels je laisserai le nom d'origine, a été utilisé dans différents domaines tels que les mathématiques, la physique et la programmation informatique. Et cela m'a permis également de construire la séquence de remédiation décrite ultérieurement dans ce chapitre. Je me suis basée sur l'article de Atkinson et al. [16] pour comprendre le principe de cet apprentissage et ses caractéristiques pour qu'il soit le plus efficace possible. Voici un résumé de ceux-ci, les ouvrages des auteurs cités dans cette section sont référencés dans ce même article.
Tout d'abord, il n'y a pas de définition précise des worked examples, ils sont décrits par Wittgenstein comme partageant certaines ressemblances familiales. Par contre, en tant que dispositif d'enseignement, ils se composent d'un énoncé de problème suivi d'une procédure de résolution détaillée. Cet ensemble a pour but de permettre à l'étudiant de résoudre d'autres problèmes similaires à celui donné.

Dans l'étude menée par Atkinson et al. [16], les auteurs présentent des facteurs spécifiques qui limitent l'efficacité de l'apprentissage par des worked examples. Ces facteurs sont répartis selon trois catégories : les caractéristiques intra-exemples, les caractéristiques inter-exemples et les différences individuelles dans le traitement des exemples de la part des élèves.

1. Caractéristiques intra-exemples

   Ce sont les caractéristiques qui portent sur la conception de l'exemple et plus particulièrement sur la présentation de la solution de l'exemple. Selon plusieurs chercheurs, la structure des exemples utilisés, et plus particulièrement la manière d'insérer les différents éléments constitutifs d'un exemple, a un effet important dans l'efficacité de celui-ci. Les principes d'insertion peuvent provenir de trois sources : examiner l'insertion de diagrammes et du texte, présenter simultanément des diagrammes et des procédures orales et les effets de l'étiquetage de sous-objectifs.
   Concernant la première source, Tarmizi et Sweller ont mené des expériences avec des élèves à partir d'exemples choisis dans le domaine de la géométrie. Ils ont constaté un effet de dédoublement de l'attention chez les élèves, c'est-à-dire que les élèves partagent leur attention sur les différentes sources d'informations qu'on leur procure, ce qui réduit l'avantage des worked examples sur une pratique plus conventionnelle des

résolutions de problèmes, à cause de l'augmentation de la charge cognitive que cela entraine. Ils ont également constaté que la restructuration de ces worked examples, en intégrant des explications verbales aux diagrammes, améliorait l'apprentissage. Ward et Sweller ont également étudié l'impact de cet effet mais dans le domaine de la physique et ils arrivent aux mêmes constats que Tarmizi et Sweller.
Ensuite, concernant la seconde source, Moussavi, Low et Sweller se sont intéressés aux effets de l'insertion d'éléments sonores et visuels dans des exemples sur la compréhension des élèves. Pour tester cela, ils ont comparé l'efficacité de worked examples de structures différentes. C'est-à-dire, ils présentaient un diagramme géométrique visuellement et les énoncés associés étaient présentés différemment : soit ils étaient présentés visuellement, soit oralement, ou encore, ils étaient présentés simultanément, c'est-à-dire, présentés à la fois visuellement et oralement. Il en ressort que c'est ce dernier type de présentation, simultanée, qui facilite l'apprentissage dans un contexte scientifique. Cependant, il faut prendre ces résultats avec précaution car une étude de 1997 de Jeung, Chandler et Sweller révèle que dans certaines conditions, cette structure mixte n'apporte pas d'amélioration par rapport à une structure uniquement visuelle. Selon eux, dans des exemples plus complexes, un simple repère visuel, comme un clignotant dans un exemple à structure mixte, peut améliorer l'apprentissage de l'étudiant qui ne consacre pas une partie de sa mémoire de travail à localiser dans quelle partie de l'exemple la source auditive fait référence. Ce signal lui permet de se consacrer totalement sur la compréhension de l'exemple.
Enfin, la troisième source concerne l'étiquetage, ou la séparation visuelle d'étapes dans la structure de l'exemple, pour mettre en avant ses sous-objectifs permettant d'encourager les élèves à déterminer le but des sous-objectifs. C'est Catrambone qui propose cette méthode, en étudiant les améliorations qu'elle apporte via la distribution de Poisson avec Holyoak.
Pour résumer ces premières caractéristiques, la structure des worked examples doit être unifiée, il faut rassembler les sources, afin de concentrer l'attention de l'élève. Mais il faut également, lors de tâches plus complexes, qu'une explication auditive soit accompagnée d'un signal permettant de guider l'attention des élèves sur les parties importantes de l'exemple, au fur et mesure du discours. Enfin, il faut séparer la structure en étapes représentant des idées conceptuelles importantes permettant à l'élève de percevoir le but de celles-ci.

2. Caractéristiques inter-exemples

Ces caractéristiques portent sur la disposition et l'arrangement des exemples lors de l'élaboration de la leçon.
Tout d'abord, selon Reed et Bolstad, deux exemples, un simple et un complexe, facilitent l'apprentissage au lieu d'un unique exemple. En effet, dans leur expérience mettant en jeu une équation faisant intervenir des taux et des temps différents, ils ont donné à des groupes d'étudiants une des 6 propositions suivantes d'exemples : un

exemple simple (une illustration basique de comment utiliser l'équation), un exemple complexe (qui montre comment transformer les éléments de l'équation avant de pouvoir l'utiliser), un ensemble de procédure (description des étapes nécessaires à la résolution), un exemple simple et des procédures, un exemple complexe et des procédures, un exemple simple et un exemple complexe. Après, les étudiants avaient à leur disposition huit problèmes à résoudre en relation avec cette équation. Il s'avère que c'est le groupe des élèves ayant eu un exemple simple et un exemple complexe qui ont obtenu les meilleurs résultats. Selon ces auteurs les élèves sont capables d'utiliser avec souplesse l'information, c'est-à-dire tirer des exemples simple et complexe l'information nécessaire pour la transférer à d'autres problèmes.
Ensuite, Paas et Van Merrienboer ont étudié la variabilité des problèmes dans une leçon à travers la résolution de problèmes en géométrie. Ils ont formé quatre groupes dans lesquels la variabilité des six problèmes différait, ainsi que l'utilisation de worked examples ou la résolution pratique de ceux-ci. Cette étude a montré que la variabilité des problèmes amène des avantages de transfert seulement si ceux-ci sont combinés avec un enseignement minimisant la charge cognitive, comme les worked examples.
Une autre caractéristique concerne la manière de pouvoir permettre à l'élève de faire la distinction entre plusieurs types de problèmes. Dans son travail, Ross explique que les novices ont tendance à s'attarder sur le contexte et non sur la structure conceptuelle des problèmes et il suggère de rendre les problèmes d'une même catégorie similaires superficiellement ce qui aiderait les élèves à catégoriser les types de problèmes, pour ensuite, une fois les élèves plus aptes, pouvoir se détacher de cette dépendance superficielle et catégoriser uniquement par les aspects structurels des problèmes. Il donne pour expliciter son propos un exemple sur une leçon qui porterait sur le raisonnement proportionnel : tous les problèmes de conversion de mesure seraient présentés par des exemples sur la construction d'un pont et le type de problèmes liés aux mélanges serait exposé via des exemples sur la préparation de limonade. Quilici et Mayer ont étudié cette approche avec des élèves dans le domaine des statistiques, en testant une approche mettant l'accent dans l'exemple sur une similitude superficielle, une autre mettant l'accent dans l'exemple sur la structure, ou encore une mettant l'accent sur une condition mais sans faire intervenir un exemple. Ces différentes expériences leur ont permis de conclure que les exemples mettant en avant la structure sont efficaces pour montrer aux étudiants que la dépendance aux caractéristiques superficielles ne fonctionne pas.
Enfin, plusieurs chercheurs se sont demandé s'il fallait combiner des worked examples et des problèmes pratiques dans les leçons de résolution de problèmes. Trafton et Reiser l'ont expérimenté en concevant deux procédés qui prenaient en compte six paires de worked examples et problèmes pratiques. Dans le premier procédé, ceux-ci étaient placés en alternance, il y avait donc après chaque exemple un problème qui suivait : exemple 1, exercice 1, exemple 2, exercice 2,..., exemple 6, exercice 6. L'autre procédé consistait à donner d'abord les six exemples un à la suite de l'autre puis suivaient les six exercices qui y étaient associés : exemple 1 , exemple 2 ,..., exemple 6, exercice 1 , exercice 2, ..., exercice 6. Les auteurs ont ensuite comparé les résultats en prenant en

compte le temps de résolution ainsi que la précision de celle-ci. Ils ont constaté que ce sont les élèves ayant eu le procédé en alternance qui ont produit des résolutions plus précises en moins de temps. Cette constatation correspond avec un certain modèle d'apprentissage qui suggère que pour ce type de procédé les étudiants ont l'exemple disponible dans leur mémoire quand ils font l'exercice.

3. Interagir avec le milieu d'apprentissage

   Les caractéristiques énoncées ici sont basées sur la manière dont les élèves utilisent les exemples et non plus sur les exemples ou la conception des leçons.
   Bien que différents auteurs comme Sweller, Cooper, Tarmizi supposaient implicitement que des différences individuelles dans la façon d'aborder les exemples n'existaient pas, différentes études ont montré le contraire. Une des plus influentes est celle menée par Chi et ses collègues qui s'intéressent à ces différences et à leurs impacts sur l'apprentissage. Cette recherche s'est faite dans le domaine de la physique, ces auteurs ont examiné comment les étudiants utilisaient des exemples pour maîtriser une leçon de physique élémentaire. Ils ont analysé que le manque de généralisation venait d'une incompréhension dans le modèle de résolution du problème qui souvent était due au caractère incomplet des exemples. Or, les élèves vont s'expliquer différemment ces parties incomplètes des exemples. Ils ont qualifié cet effet d'auto-explication, et ils ont constaté que les élèves ayant appris plus efficacement seraient ceux qui pendant l'étude des exemples s'expliquent ceux-ci, c'est-à-dire, ils s'expliquent la structure de la résolution ou encore ils s'expliquent correctement les justifications manquantes de la résolution. Renkl a également contribué à ces recherches et a, en plus, cherché à identifier les différentes types d'auto-explication chez les élèves à partir de données verbales. Il en déduit que parmi les élèves qui réussissent, certains ont des raisonnements anticipatifs, c'est-à-dire, qu'ils anticipent l'étape suivante dans la solution et pratiquent une auto-vérification via les étapes de l'exemple afin de déterminer si l'étape envisagée correspond à celle proposée dans l'exemple tandis que d'autres ont des explications fondées sur des principes, c'est-à-dire, qu'ils cherchent à exprimer la structure de l'exemple tout en expliquant l'idée des sous-objectifs et du domaine dans lequel les solutions se trouvent. Mais comme peu d'élèves participant à cette étude ont fourni un style de résolution dite de réussite, Renkl a qualifié la plupart des auto-explications comme étant passives ou superficielles, c'est-à-dire que les élèves ne se sont pas assez attardés sur les exemples et donc n'ont pas pu créer cette opportunité d'auto-explication.
   Plusieurs approches, que je ne détaillerai pas, sont proposées, par différents auteurs, pour favoriser cette pratique d'auto-explication chez les élèves. Plusieurs de ces approches concernent des caractéristiques intra-exemples comme l'identification de sous-objectifs, l'utilisation d'exemples incomplets et l'utilisation d'exemples ayant une structure unifiée. Ces approches ont, en général, un effet positif sur l'auto-explication tout comme une formation directe des élèves à l'auto-explication. Par

contre, en dehors des caractéristiques intra-exemples, les données récoltées des différentes études sur l'amélioration de l'auto-explication via des incitations sociales sont moins encourageantes. Cela consiste, par exemple, à permettre à l'élève de jouer un rôle d'enseignant auprès d'un autre élève, désigné comme co-apprenant, dans le but d'encourager les élèves à comprendre en profondeur les exemples sachant qu'ils peuvent avoir ce rôle à jouer.

Je me suis limitée à des explications brèves des différentes recherches sur les worked examples, le but étant de pouvoir expliquer certains de mes choix dans la section suivante et de permettre aux lecteurs d'avoir une vue d'ensemble des caractéristiques avec lesquelles on peut jouer, tout en leur laissant l'opportunité d'approfondir ce sujet via l'article mentionné en début de section, s'ils le souhaitent.

3.3.2 Construction de la séance

Le but de cette remédiation est d'essayer de rendre les problèmes d'optimisation plus accessibles aux étudiants et de confronter ceux-ci à leurs erreurs récurrentes lors de résolutions de ce type de problèmes. Pour atteindre cet objectif, je me suis basée sur la catégorisation des problèmes d'optimisation selon ce qui doit être optimisé dans les problèmes, donc basée sur l'échelle de difficulté de ceux-ci, cf. FIGURE 3.1. Je voulais donc présenter différents problèmes d'optimisation en commençant par optimiser des fonctions qui semblent plus faciles, d'après les étudiants, puis des plus difficiles, tout en leur montrant les similitudes entre les résolutions des problèmes ; ceci en leur présentant les problèmes et leur résolution sous la forme de worked examples. En effet, la matière et les exercices ayant déjà été abordés et le temps imparti n'étant que de deux heures, cela me paraissait être un bon compromis pour combiner ces deux approches et permettre de s'adapter au mieux à la contrainte du grand nombre d'étudiants présents.
J'ai donc dû opérer différents choix lors de la construction de cette séance de remédiation, les voici avec leurs explications :

- Le choix de la nature des fonctions à optimiser.
  Tout d'abord, étant donné les exercices que les étudiants ont l'habitude de traiter dans les séances d'exercices et ceux qu'ils sont amenés à résoudre lors des examens, j'ai décidé de faire des problèmes d'optimisation ayant pour grandeurs à optimiser des longueurs, des aires ou des volumes mais aussi des coûts.

- Le nombre de worked examples.
  J'ai décidé de faire trois exemples pour différentes raisons. Tout d'abord, comme je traite deux catégories de problèmes d'optimisation et que les caractéristiques inter-exemples des worked examples suggéraient au moins deux exemples du même type, ici on peut considérer qu'ils sont tous du même type en se basant sur la façon de

résoudre, j'ai décidé d'en faire deux plus simples, faisant intervenir ceux de la catégorie aires et longueurs, et un plus complexe, faisant intervenir un problème de la catégorie coût, comme conseillé par l'étude de Reed et Bolstad. Ce choix permet aux étudiants d'étudier une manière de résoudre similaire dans trois problèmes différents appartenant à deux catégories différentes. De plus, ne disposant que de deux heures, je préférais me limiter à trois exemples et laisser du temps libre aux étudiants pour leur permettre de résoudre d'autres exercices en autonomie. J'ai donc proposé deux exercices à résoudre : le premier similaire aux deux premiers exemples, c'est-à-dire un problème d'aire repris de l'examen d'août 2017, et le second, un problème plus complexe de temps, accompagné d'un dessin pour éviter que les étudiants ne soient bloqués à l'étape de la représentation. Les énoncés de ces problèmes sont repris dans le point suivant.

- Disposition des exemples et des exercices.
  J'ai décidé de commencer par les trois exemples, puis de laisser les étudiants travailler sur les deux exercices. Cette disposition permet d'établir directement des similitudes entre les trois problèmes d'optimisation et donc de donner plus de sens à la catégorisation de Schneider et Henrotay [14] et [15], même si du point de vue des worked examples, une disposition en alternance était conseillée. Voici les cinq énoncés dans l'ordre annoncé :

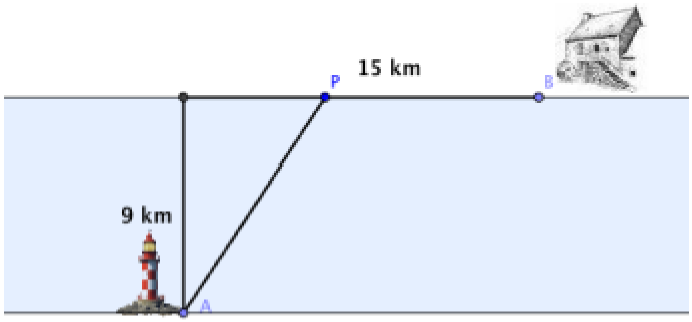
Exemple 1 : Un parterre de fleurs rectangulaire a une surface de 100 m^2. Une allée en fait le tour et sa largeur est égale à $0,75$ m le long des grands côtés du parterre et $1,5$ m le long des petits côtés. Quelles doivent être les dimensions de la surface totale (parterre et allée) pour que celle-ci soit minimale ?

Exemple 2 : Un fil de longueur L doit être coupé en deux parties. Avec l'une, on forme un triangle équilatéral et avec l'autre, un carré. Comment faut-il couper le fil pour que l'aire totale des deux figures soit minimale ?

Exemple 3 : On doit fabriquer un conteneur en métal de forme cylindrique sans couvercle et d'une capacité de 24π cm^3. Le matériau du fond coûte $0,15$ euros par cm^2 et celui pour le bord coûte 0,05 euros par cm^2. Si la fabrication ne donne lieu à aucun déchet, quelles doivent être les dimensions du cylindre pour qu'il coûte le moins cher possible ?

Exercice 1 : Lors de travaux d'aménagement, vous devez concevoir une annexe rectangulaire accolée à un living (le mur commun aux deux pièces est donc déjà existant). Quelles dimensions donner à cette annexe pour que sa surface S soit maximale sachant que la longueur totale des murs de la nouvelle construction L vous est imposée ? Appliquez ensuite votre résultat pour une longueur totale de nouvelle construction égale à 20 m.

Exercice 2 : Le gardien d'un phare (A) doit rejoindre le plus vite possible sa maison côtière (B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h. Où doit-il accoster (P) pour que le temps de parcours soit minimal ? La côte est supposée rectiligne.



- Choix dans la résolution des problèmes.
  De façon générale, dans ce cours, les problèmes d'optimisation sont vus comme application des dérivées. On va donc expliquer aux étudiants un certain procédé pour résoudre ces problèmes, cependant, j'ai choisi le deuxième exemple afin de leur montrer une deuxième façon de faire et essentiellement mettre en évidence le fait que le procédé de résolution n'est pas unique, mais que la méthode enseignée leur permettra de résoudre tous les problèmes qui leur seront proposés. Ensuite, concernant l'organisation de la résolution, j'ai effectué une séparation visuelle d'étapes, que j'ai étiquetées, pour permettre l'identification des sous-objectifs de la résolution. Et pour chacune de ces étapes j'ai effectué, de manière précise, la résolution et écrit les différentes façons de procéder ; par exemple, pour la vérification du type d'extremum ou d'un point d'inflexion.

- L'auto-explication.
  Étant donné le manque de compréhension relevé chez les étudiants à travers les différentes étapes de la résolution et leur erreurs récurrentes, j'ai décidé de faire une partie "remarques et explications" dans le document de la remédiation. En effet, cette partie permet d'expliquer et/ou de faire des remarques sur chaque étape de résolution afin d'améliorer la compréhension de celle-ci et d'attirer l'attention des étudiants sur les erreurs régulièrement commises lors de ces résolutions. J'ai décidé de réaliser

cette partie sous forme écrite, plutôt qu'orale uniquement, car les étudiants n'étant pas toujours attentifs tout au long de la période de cours, elle pourra être consultée pendant la résolution de leurs problèmes. De plus, la prise de notes n'étant pas nécessaire, on peut espérer une meilleure attention de la part des étudiants.
Cette partie permet, à mon sens, durant la séance et plus tard lors de la préparation de l'examen, d'améliorer l'auto-explication. D'une part, toutes les explications étant notées dans le document, quand l'étudiant relit l'exemple, il peut comprendre les étapes effectuées et s'expliquer pourquoi elles ont été faites. D'autre part, cette partie évite également les mauvaises auto-explications que des prises de notes incomplètes ou inexistantes peuvent engendrer.

Afin d'assurer au mieux le bon déroulement de la séance, deux étudiantes-monitrices étaient présentes dans un premier temps pour noter les commentaires, questions ou interventions des étudiants et dans un second temps permettre lors de la résolution des deux exercices par les étudiants, de les rediriger vers un exemple ou répondre à leurs questions.
Voici le déroulement général de la séance, certaines des questions posées aux étudiants ainsi que leurs réponses et réactions seront précisées ultérieurement.
En début de séance, j'explique brièvement aux étudiants le déroulement de celle-ci et le contenu du document utilisé. Ensuite, le but est de les faire participer en posant des questions pour orienter la résolution et mettre en évidence l'étiquetage des étapes et la façon de procéder. Je peux ainsi, par la résolution écrite, leur expliquer comment j'ai procédé en ne m'attardant pas sur les calculs, mais bien sur la méthode de résolution utilisée. Quand j'arrive à l'étape où l'on cherche les extremums d'une fonction, avant de dévoiler la résolution de l'étape, je reconstruis avec eux la partie explicative de cette étape pour leur permettre de comprendre comment déterminer les extremums d'une fonction. Ensuite, je reprends la résolution et à la fin de l'exemple je résume l'ensemble du procédé effectué. Je procède ensuite de la même façon pour l'exemple deux, sans revenir à la partie "remarques et explications" pour la recherche d'extremums. Et tout au long de la résolution, j'attire leur attention ou je leur pose des questions de façon à mettre en évidence les similitudes et les différences entre les deux exemples. Ce deuxième exemple me permet notamment de leur montrer que selon la façon dont on modélise on peut déjà prendre en compte une contrainte et que pour écrire la fonction qui ne dépend que d'une variable on doit faire appel parfois à des données de l'énoncé mais aussi parfois, à des connaissances antérieures qui ne sont pas indiquées dans l'énoncé. Puis à la fin de l'exemple deux, je mets en évidence l'existence de différentes manières de résoudre des problèmes d'optimisation et je leur en fais découvrir une autre. Certaines sont plus rapides que d'autres et je leur précise pourquoi on a choisi de leur enseigner la méthode basée sur les dérivées. Je termine par l'exemple trois, toujours en procédant de la même façon. Cette façon de faire me permet d'interagir avec les étudiants, de montrer des similitudes et différences entre les problèmes et un procédé de résolution commun, mais aussi, d'expliquer les étapes et surtout de pointer avec eux les problèmes qu'ils rencontrent lors de ces étapes pour qu'ils puissent y prêter attention à l'avenir. A la fin des trois exercices, je résume le procédé de résolution commun à ces trois problèmes. Les

trois quarts d'heure restants de la séance sont consacrés à la résolution des deux exercices en autonomie et à l'aide du document utilisé durant la séance ; document qui leur a été envoyé par mail à la fin de mes explications. En effet, pour ne pas fausser le jeu et éviter que les étudiants lisent le contenu de ce document pour répondre à mes questions, celui-ci ne leur avait pas été transmis au préalable. Seuls les énoncés des trois exemples et des deux exercices leur avaient été transmis avant pour qu'ils puissent, s'ils le souhaitaient, essayer de les résoudre, comme pour les autres remédiations. Durant ce travail en autonomie, la ressource principale des étudiants était ce document.

3.3.3 Analyse de la séance de remédiation

Durant la séance de remédiation j'ai posé différentes questions tout au long du développement des exemples. Je reprends ci-dessous quelques questions et/ou commentaires des étudiants. Ensuite, je décrirai les ressentis de la remédiation, c'est-à-dire, le mien mais également celui des étudiants. En effet, j'ai demandé à ceux-ci, à la fin de la séance de deux heures, d'écrire anonymement sur un papier leurs commentaires, positifs et/ou négatifs, à propos de celle-ci.

Étant donné le nombre d'étudiants, quarante-sept en début de séance, il arrive que des étudiants arrivent pendant la séance, j'ai procédé par vote à main levée concernant les réponses aux questions : soit je proposais des réponses à certaines questions, soit quand un étudiant avait une remarque ou une réponse à une question je demandais combien de personnes étaient d'accord avec cet étudiant. Les deux étudiantes-monitrices comptaient les mains levées et notaient les remarques des étudiants. Cette façon de procéder n'étant pas très précise, les nombres d'étudiants donnés dans cette section sont valables à un ou deux étudiants près. Certains étudiants ne votaient pas, particulièrement au début, il a fallu un petit temps d'adaptation à ce nouveau style de remédiation pour qu'ils soient moins timides et osent donner leur avis.
Avant de commencer la séance de remédiation, j'ai demandé aux étudiants "quand on vous parle de problèmes d'optimisation, à quoi cela vous fait-il penser ? Est-ce que cela vous fait penser à un mot, à rien du tout ?". Un étudiant a répondu "trouver des maximums et des minimums". J'ai répercuté la proposition à l'ensemble de l'auditoire et vingt-deux personnes étaient du même avis. Les autres étudiants n'osaient pas encore trop intervenir. Ensuite, avant de commencer les résolutions des exemples et après avoir expliqué le déroulement de la séance aux étudiants, j'ai lu les trois énoncés des exemples proposés et j'ai demandé aux étudiants si de prime abord, en lisant uniquement l'énoncé ils trouvaient un problème plus difficile qu'un autre ou pas. Un étudiant trouvait l'exemple un plus difficile, pour huit autres étudiants, c'était l'exemple deux qui leur semblait le plus difficile, pour dix-huit étudiants c'était le troisième exemple et une personne trouvait les trois exemples de même difficulté.
J'ai commencé ensuite à expliquer comment résoudre le premier exemple, une des questions que je leur pose dans la résolution est de savoir ce qu'on cherche à optimiser. Un

étudiant me dit d'abord les longueurs x et y mais personne d'autre ne le suit, un autre étudiant propose la surface totale. Ils sont vingt-deux à penser la même chose et quatre disent qu'ils ne savent pas. Une autre question que je leur ai notamment posée, après avoir écrit la fonction exprimant la surface totale dépendant d'une seule variable : "Quand on a une fonction à une variable comment peut-on faire pour trouver les minimums et les maximums ?". Une étudiante propose de dériver, je lui demande pourquoi et elle répond qu'elle ne sait pas mais qu'elle se souvient qu'il faut dériver. Un moment opportun pour faire remarquer aux étudiants qu'il est important de comprendre les procédés utilisés afin de réduire le risque d'erreurs lors la résolution.

Dans l'exemple deux, quand il s'agit de savoir ce qu'on cherche à optimiser, une grande majorité dit que c'est l'aire totale des deux figures et au moins un étudiant ne sait pas ce qu'il faut optimiser. Ensuite, quand il s'agit de savoir s'il y a une contrainte et laquelle, une quinzaine d'étudiants pense qu'il n'y en a pas, trois ne savent pas et deux pensent qu'il y en a une. Parmi eux, un étudiant dit que la contrainte pour lui, c'est le fait qu'on nous impose un triangle équilatéral, ce qui m'amène à préciser à nouveau le mot contrainte avec eux : on nous impose une condition qui lie les quantités variables qui interviennent dans le problème, comme pour le premier exemple où on nous impose une surface de 100 m^2 et cela nous donne un lien entre les deux longueurs x et y qui est $100 = x.y$. A la fin de la résolution, je leur ai demandé comment procéder si dans l'énoncé la longueur imposée était de 10 m, faudrait-il refaire tout le développement ou pourrait-on y parvenir plus rapidement ? Ils savent me décrire comment procéder, ce qui me permet d'insister sur le fait que L représente une donnée en général, ce qui a l'avantage, si je me pose cette question pour différentes longueurs, de résoudre le problème de façon générale et ensuite de pouvoir calculer après plus rapidement pour les longueurs que je désire. Donc, il n'est pas étonnant de garder certaines lettres parfois dans les résolutions quand on prend une donnée fixée de manière générale. Et donc il faut rester prudent : une lettre n'est pas forcément associée à une variable. Puis je leur ai demandé s'il était possible de résoudre ce problème autrement, je leur ai montré une méthode mais en existe-t-il une autre ne faisant pas intervenir les dérivées ? Comme il y a eu peu de réponses, je leur ai demandé s'ils y avaient déjà pensé. Trois étudiants ont répondu qu'ils s'étaient demandé si on pouvait faire autrement. Donc j'ai enchaîné sur une deuxième façon de faire, et je leur ai expliqué que la méthode qu'on leur enseigne n'est pas toujours la plus rapide mais elle nous assure de pouvoir répondre aux problèmes.

Je termine par l'exemple 3, après l'explication de la modélisation, un étudiant m'a demandé d'expliquer à nouveau comment on pouvait trouver la surface latérale du cylindre, j'ai donc tenté de lui faire comprendre en prenant une feuille et en l'enroulant pour représenter la surface latérale du cylindre. J'ai ensuite poursuivi les explications de la résolution de l'exemple trois mais beaucoup d'étudiants bloquaient sur le développement du cylindre, essentiellement pour trouver la valeur de la longueur du rectangle.

Une remarque importante émanant de certains étudiants, à la fin des explications, était qu'ils ne comprenaient pas pourquoi il fallait vérifier que c'était un maximum ou un minimum. J'ai pris une fonction du troisième degré pour leur expliquer qu'en dérivant et en annulant on avait une solution mais si on regardait sur le graphique de la fonction, que j'ai représentée avec géogebra, il s'agissait des coordonnées d'un point d'inflexion et non d'un extremum. Ensuite, j'ai aussi donné un autre exemple pour leur faire comprendre que même s'il s'agit d'un extremum ils ne savent pas encore à cette étape-là si c'est un maximum ou un minimum. Mais on sentait encore un malaise chez les étudiants par rapport à cette étape.

Concernant la deuxième partie de la remédiation, la plupart des étudiants n'ont fait qu'un exercice et ils ne sont pas tous arrivés au bout de celui-ci. Malgré le fait qu'on les ait prévenus que le but était de se débrouiller avec le document et de ne pas poser des questions comme "je fais quoi après ?", beaucoup d'étudiants ont gardé cette habitude, donc, on a essayé à chaque fois pour ce style de question de les orienter dans le document pour les aider à répondre seuls à leurs questions. Les problèmes survenus dans le premier exercice sont des problèmes déjà rencontrés auparavant, comme le problème dû à la nature de L : les étudiants ne savent pas distinguer un paramètre d'une variable. Il y avait de mauvaises représentations de la situation, ou encore des questions sur le fait que le mur entre ou non en ligne de compte.

En ce qui concerne mon ressenti de la séance, je crois que cela a pu paraître fort long à certains étudiants, car malgré mes nombreux essais pour les faire participer, au final, j'ai eu le monopole de la parole. Pendant la construction de la séance, j'avais envisagé une intervention par boitiers électroniques qui peut motiver certains étudiants, mais ici le contexte ne le permettait pas. En effet, les questions proposées étaient ouvertes ce qui ne correspond pas aux réponses possibles par boitiers.

Trente étudiants m'ont remis un bout de papier pour donner leur avis sur la remédiation. Pour la plupart ils la trouvaient bien détaillée et expliquée, cependant les avis divergent, certains étudiants préfèrent un nombre réduit d'exemples bien détaillés quitte à faire moins d'exercices et d'autres, peu nombreux, préfèrent se limiter aux exercices en plus grand nombre comme dans une remédiation classique. Par contre, en général, ils ont un avis commun sur le temps consacré aux exercices : il leur semblait trop court. Lorsque l'on donne une séance à un grand nombre de personnes, la façon de faire ne convient pas à tous. Par exemple, un étudiant aimait le style de la remédiation mais a avoué qu'il avait besoin d'écrire pour comprendre, d'autres trouvaient cela un peu trop long sans pouvoir être actif. Il faut donc essayer d'améliorer encore ce type de remédiation en prenant en compte les constats des étudiants que j'avais également ressentis. Il serait peut-être plus judicieux d'intercaler des exercices semblables aux exemples entre ceux-ci pour rendre les étudiants plus actifs, mais encore faut-il pouvoir gérer les deux heures de temps pour être sûr de présenter les trois exemples. Ou encore, après le deuxième exemple proposer un exercice de la même catégorie et puis faire le troisième exemple et permettre ensuite aux étudiants de faire des exercices seuls. Mais il est clair que ce facteur temps dessert la remédiation.

3.4 Analyse de l'examen de juin 2018

J'ai procédé de façon similaire que pour l'examen de janvier 2018 pour analyser les septante-huit copies de la question d'optimisation des étudiants de l'examen de juin 2018. J'ai encodé ces nouvelles données dans le tableau contenant les données de janvier 2018 afin de pouvoir comparer, plus facilement, l'évolution de chaque étudiant dans sa résolution.

Concernant l'examen en général

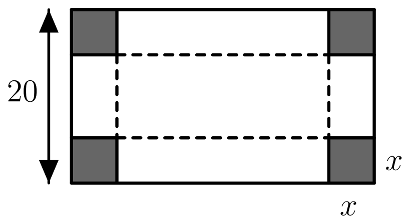
Comme précédemment, je vais donner quelques chiffres plus généraux avant de détailler les problèmes rencontrés. Pour cet examen, comme pour celui d'août, les points bonus obtenus à l'interrogation ne sont plus pris en compte dans la note finale de l'examen. L'exemplaire de l'examen de juin 2018 est l'exemplaire fourni aux étudiants lors de la simulation d'examen de décembre, dans le cadre du projet feedback, pour l'année académique 2017-2018. La professeure de mathématique a demandé aux étudiants lors de l'examen d'indiquer sur leur copie s'ils étaient présents à la simulation d'examen ou pas afin de pouvoir analyser au mieux les données et de prendre éventuellement ce facteur en compte.

- 78 étudiants ont présenté l'examen.
  17 l'ont signé.
- 36 étudiants ont réussi l'examen.
  Parmi ceux-ci : - 23 étaient présents lors de la simulation d'examen.
  - 11 n'étaient pas présents lors de la simulation d'examen.
  - 2 étudiants ne l'ont pas précisé sur leurs feuilles.
  42 étudiants ont raté l'examen.
  Parmi ceux-ci : - 20 étaient présents lors de la simulation d'examen.
  - 22 n'étaient pas présents lors de la simulation d'examen.

Il faut noter qu'il y a moins de participation à l'examen en juin étant donné la possibilité de passer l'examen en août pour les étudiants qui estimeraient avoir une session déjà trop lourde. De plus, ceux qui auraient uniquement cet échec, s'il est de 9/20, peuvent éventuellement tenter de réussir tous les autres cours et réussir leur année malgré cet échec.

Concernant la question de l'optimisation

La question de l'examen était la suivante : "*On construit une boîte rectangulaire en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille de carton mesurant 32 cm sur 20 cm. Déterminez la hauteur x de la boîte de volume maximal.*"



<ins>Diagramme</ins>

Les observations récoltées lors de l'analyse des résolutions de la question d'optimisation sont représentées dans un diagramme à la FIGURE 3.2. Comme précédemment, les nombres en gras, concernent tous les étudiants ayant passé l'examen tandis que les nombres entre parenthèses concernent les étudiants ayant raté l'examen et qui devront vraisemblablement le représenter pendant la session d'août. Comme l'énoncé du problème est accompagné d'un schéma représentant la situation, on peut espérer une diminution du nombre étudiants qui habituellement sont bloqués dans la schématisation du problème.

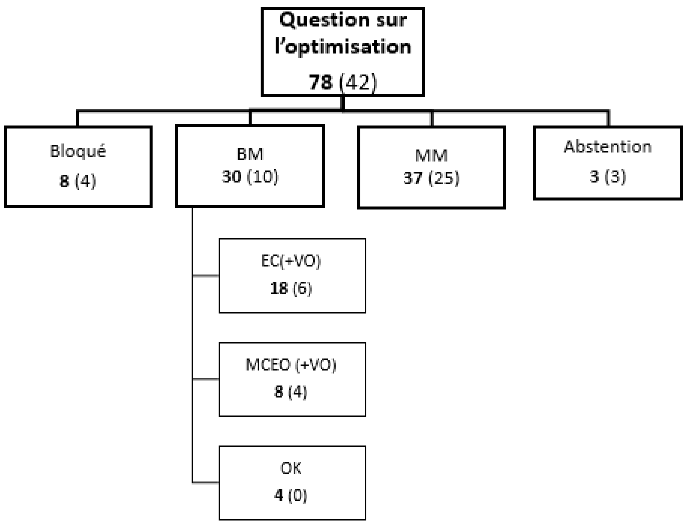


FIGURE 3.2 – Diagramme des difficultés décelées chez les étudiants lors de l'examen de juin 2018

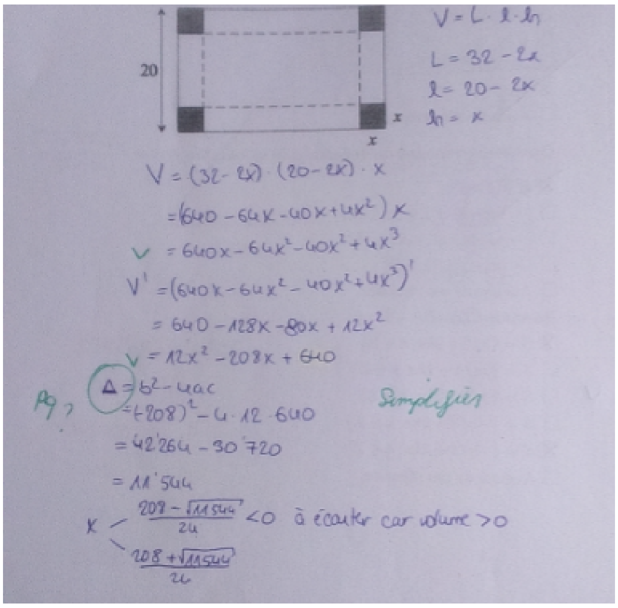
Explication du diagramme

Voici les erreurs commises par les septante-huit étudiants ayant présenté l'examen de juin 2018.

- 3 étudiants se sont abstenus de répondre à la question, soit 3,85 %.

- 8 étudiants ont seulement écrit une formule et ils se sont parfois trompés dans celle-ci. Parmi eux, sept étudiants ont écrit, correctement ou pas, l'expression du volume et un seul étudiant a écrit l'expression de la surface intérieure de la feuille.

- 39 étudiants ont utilisé une mauvaise méthode de résolution.
  Parmi ceux-là, voici quelques procédés utilisés lors de la résolution du problème :
  - ► treize étudiants, après avoir dérivé la fonction à optimiser, n'annulent pas la fonction dérivée mais ils font le calcul du delta sur l'expression qu'ils ont obtenue.

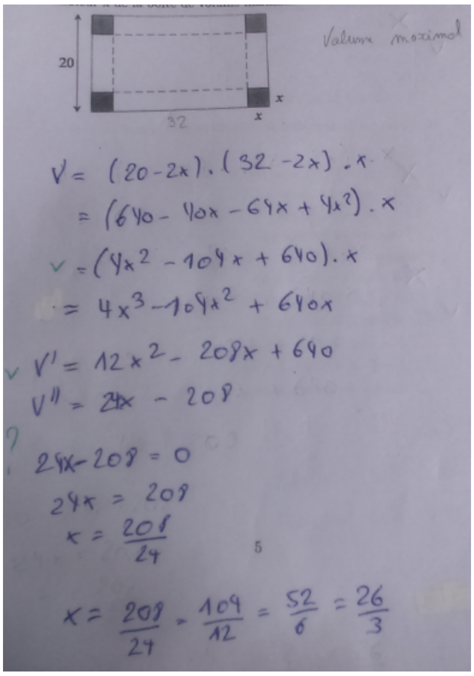


  - ► Deux autres étudiants ont calculé le delta sur l'expression du volume et deux sur l'expression de la surface intérieure.

  - ► Deux étudiants ont annulé l'expression du volume et ils ont ensuite cherché les racines de la fonction.

- ▶ Trois autres étudiants annulent la formule du volume pour trouver une valeur pour x.

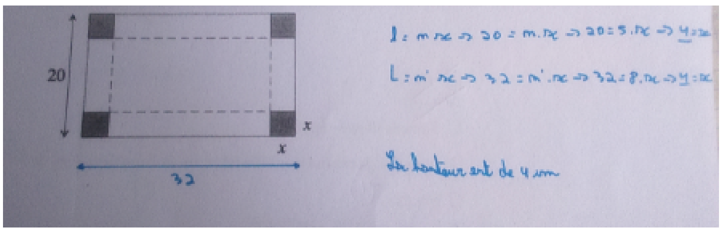
- ▶ Un étudiant dérive deux fois l'expression du volume puis annule cette dérivée seconde pour trouver une valeur pour x.



- ▶ Un étudiant égale l'expression de l'aire totale de la feuille à l'aire intérieure de la boîte afin de trouver une valeur pour x.

- ▶ Un autre étudiant dérive l'expression du périmètre puis annule cette dérivée première, ensuite, comme il arrive à une solution qui ne le satisfait pas, il prend à nouveau la formule du périmètre mais cette fois, il l'annule pour trouver une valeur pour x.

- ▶ Il y a eu d'autres procédés également. Voici quelques-uns de ceux-ci.



- 28 étudiants ont utilisé la méthode suggérée pendant le cours.
  Parmi ceux-là, j'ai distingué trois groupes :

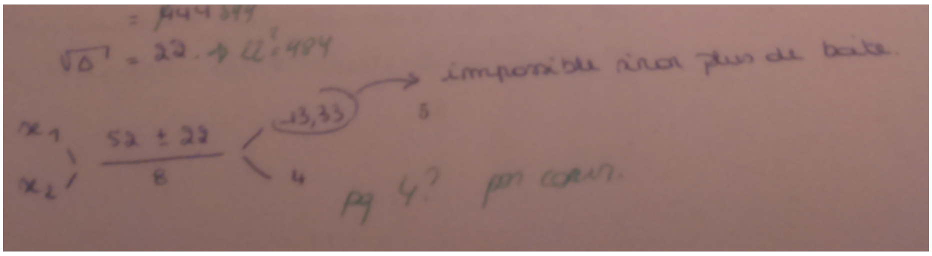
- 4 étudiants ont résolu correctement le problème.

- 16 étudiants ont utilisé la méthode proposée mais ils ont fait une ou plusieurs erreurs de calcul. Par exemple :
  - ⋆ Erreurs en distribuant des termes dans une expression.
  - ⋆ Erreurs de simplification, comme "$V = 4.x.(16-x).(10-x) \Rightarrow V = x.(16-x).(10-x)$", erreur commise par de nombreux étudiants.
  - ⋆ Erreurs dans le calcul d'une dérivée comme "$(x^3)' = 2.x^2$".
  - ⋆ Erreurs dans la formule du delta ou encore dans les formules donnant les racines d'un polynôme du second degré.
  - ⋆ Erreurs ou incapacité de calculer certaines racines carrées comme "$\sqrt{12544}$".
  - ⋆ Un étudiant a inversé les résultats des liens entre la concavité d'une fonction et sa dérivée seconde.
  - ⋆ Un étudiant donne comme solution, la racine carrée de la valeur trouvée pour x.
  - ⋆ Un autre étudiant utilise la méthode enseignée, il trouve une valeur pour x puis il vérifie avec la dérivée seconde que la valeur trouvée donne un volume maximum ou minimum. Cependant il donne comme réponse pour la valeur de x la valeur trouvée en calculant la dérivée seconde en x.
  - ⋆ Certains étudiants se trompent dans l'expression de départ du volume.

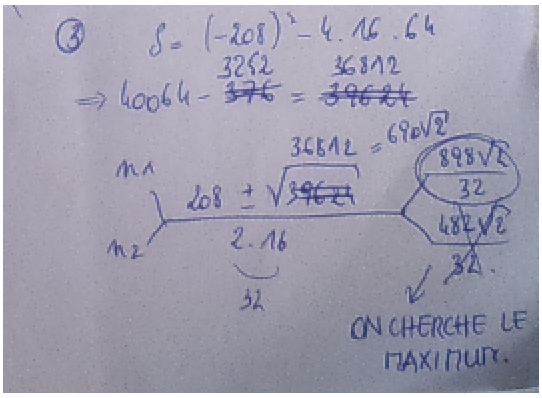
- 8 étudiants ont utilisé la méthode proposée mais pas sur la bonne fonction, et pour certains, ils ont en plus oublié de vérifier s'il s'agissait bien d'un maximum. Tous ces étudiants ont optimisé la fonction exprimant la surface intérieure de la feuille délimitée par les pointillés.

Quelques chiffres supplémentaires :

Dans la résolution de ce problème d'optimisation, les étudiants obtenaient deux réponses positives pour la valeur de x. Cependant, une était à exclure car la valeur de x rendait la construction de la boîte impossible. Lors de la résolution de ce problème, douze étudiants ont obtenu des réponses qui n'étaient pas possibles et ne l'ont pas remarqué. Parmi ces étudiants neuf ont utilisé la méthode enseignée et trois ont utilisé une mauvaise méthode. Par contre, dix étudiants ont rejeté une réponse mais sans justificatif. Parmi eux, six ont utilisé la méthode enseignée et quatre une mauvaise méthode. Cinq étudiants ont dû se souvenir de la réponse de l'exercice car ils trouvent "$x = 4$", alors que leurs calculs ne permettent pas d'arriver à ce résultat et l'un d'eux écrit "dans mes souvenirs".



Je termine par une dernière justification, assez surprenante, trouvée dans une copie d'examen et mettant en évidence la non compréhension de l'objectif de l'exercice :



L'étudiant choisit entre les deux solutions en prenant la plus grande numériquement et en justifiant ce choix par la recherche d'un maximum.

Comparaison des performances de janvier et juin 2018 des étudiants

Comme la population d'étudiants de l'analyse de l'examen de janvier 2018 n'est pas la même que celle de l'analyse de l'examen de juin 2018, je ne peux pas comparer directement les proportions obtenues dans les différentes catégories des diagrammes. Par contre, j'ai décidé de comparer les résolutions des septante-huit étudiants ayant présenté l'examen

de juin avec leur résolution de janvier.
Parmi les septante-huit étudiants ayant passé l'examen de juin 2018 :

- 33 étudiants étaient dans la catégorie "MM" en janvier. La répartition de ces étudiants dans les catégories de juin est :
  - 1 étudiant dans la catégorie "Bloqué".
  - 13 étudiants dans la catégorie "BM".
  - 19 étudiants dans la catégorie "MM".

- 19 étudiants étaient dans la catégorie "BM" en janvier. La répartition de ces étudiants dans les catégories de juin est :
  - 2 étudiants dans la catégorie "Bloqué".
  - 10 étudiants dans la catégorie "BM".
  - 7 étudiants dans la catégorie "MM".

- 20 étudiants étaient dans la catégorie "Dessin+Bloqué" en janvier. Je n'ai pas fait la distinction entre ceux qui avaient bien représenté ou pas, étant donné qu'elle n'avait pas lieu d'être faite en juin. Je voulais seulement savoir s'ils étaient toujours bloqués dans leur raisonnement ou s'ils avaient évolué d'une quelconque manière. La répartition de ces étudiants dans les catégories de juin est :
  - 3 étudiants dans la catégorie "Bloqué".
  - 7 étudiants dans la catégorie "BM".
  - 8 étudiants dans la catégorie "MM".
  - 2 étudiants dans la catégorie "Abstention".

- 4 étudiants étaient dans la catégorie "NP" en janvier, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas présenté l'examen. La répartition de ces étudiants dans les catégories de juin est :
  - 2 étudiants dans la catégorie "Bloqué".
  - 1 étudiant dans la catégorie "MM".
  - 1 étudiant dans la catégorie "Abstention".

- 1 étudiant était dans la catégorie "Abstention" en janvier. Celui-ci se trouve dans la catégorie "MM" pour l'examen de juin.

- 1 étudiant ne s'était pas présenté le jour de l'examen de janvier. Celui-ci se trouve dans la catégorie "MM" pour l'examen de juin.

On peut voir dans ces analyses que vingt étudiants, ayant une mauvaise méthode ou étant bloqués au début de leur résolution en janvier, ont au moins une idée de la méthode à appliquer, même s'ils ont fait des erreurs de calcul ou s'ils ne l'ont pas appliquée sur la bonne fonction, etc. Par contre, on peut être interpellé par les neufs étudiants qui étaient dans la catégorie "BM" en janvier et sont passés dans la catégorie "Bloqué" ou "MM" en juin. Parmi les sept étudiants de la catégorie "MM" en juin, six ont procédé de façon similaire : ils ont dérivé la fonction à optimiser, ensuite ils n'ont pas regardé les valeurs annulant l'expression mais ont fait le calcul du delta sur la fonction dérivée.

3.5 Pistes envisagées pour les années futures

Comme décrit tout au long de ce mémoire, les obstacles rencontrés par les étudiants lors de la résolution des problèmes d'optimisation sont nombreux. Envisager des solutions pour certains de ces obstacles lors de périodes prévues, comme pendant les remédiations, peut apporter de l'aide à certains étudiants mais ce n'est certes pas suffisant. Une des difficultés lors de ces résolutions est la compréhension de la méthode enseignée, les étudiants ne comprennent pas pourquoi on fait intervenir les dérivées ou ils ne cherchent pas à le comprendre et se contentent d'essayer d'appliquer une méthode. Or, même lors de la remédiation que j'ai entreprise avec eux, des obstacles subsistaient comme le fait de comprendre l'intérêt d'une étude de signe ou du calcul d'une dérivée seconde de la fonction pour la distinction entre un maximum, un minimum, et un point d'inflexion. Par conséquent, je propose dans cette section quelques pistes pour les années futures.

- **Pour le cours théorique.**
  Après consultation du cours théorique, je propose les changements suivants afin de remédier plus tôt à certaines difficultés rencontrées par les étudiants.
  Par exemple, on pourrait apporter quelques ajouts dans les diapositives sur les dérivées, plus particulièrement, dans celle concernant le rôle de la dérivée première. Plus précisément, dans la partie destinée aux maximums et minimums d'une fonction dérivable, on peut insister davantage sur le fait que, d'une part, quand on a un extremum en un point d'une fonction on sait que sa dérivée en ce point est nulle. Et d'autre part, quand la dérivée d'une fonction en un point est nulle alors trois cas sont à distinguer : si la dérivée passe du positif au négatif en ce point, si la dérivée passe du négatif au positif en ce point et si la dérivée reste de même signe. Ces apports théoriques seront complétés par des graphiques de fonctions illustrant ces différents cas. Les étudiants ayant suivi des parcours scolaires différents, certains n'ayant pas abordé les dérivées, ces apports pourraient peut-être les aider. De plus, ces graphiques pourraient également être utilisés pour comprendre le rôle de la dérivée seconde. Cette manière de faire pourrait mettre en avant la recherche d'extremums et permettre, par la suite, de rendre plus spontanée l'utilisation de la dérivée dans les résolutions de problèmes d'optimisation. D'autre part, l'explication de la résolution d'un problème d'optimi-

sation pourrait être envisagée sous la forme d'un exemple, comme décrit dans la remédiation à l'annexe F. Le temps imparti au cours théorique ne permet pas d'en faire plus d'un, mais il servirait de première approche aux étudiants.

- **Pour la séance d'exercices.**
  Un changement qui pourrait être envisagé, lors de la séance d'exercices prévue pour les problèmes d'optimisation du premier quadrimestre, serait de donner le document de la remédiation aux étudiants pour qu'ils puissent le lire puis travailler en autonomie les exercices que l'on aura sélectionnés dans la liste et ainsi leur permettre de travailler avec un procédé en alternance, comme mentionné dans les caractéristiques inter-exemples des worked examples. Mais pour ce fonctionnement, il faudrait que l'horaire n'impose pas quatre heures consécutives, ou du moins que la séance de répétition ne porte pas sur la théorie du matin même, ce qui permettrait aux étudiants de digérer la matière et de disposer de temps avant la séance pour la préparer. De cette façon, pendant la séance, les étudiants-moniteurs et la professeure pourraient faire des liens entre les différents problèmes afin de montrer des similitudes entre ces problèmes aux étudiants. La participation des étudiants serait certainement plus active s'ils avaient eu le temps de prendre connaissance du contenu du document avant la séance et ils pourraient aussi poser leurs questions sur les parties plus théoriques non comprises.
  Une autre possibilité, lors de cette séance d'exercices, serait de ne pas utiliser le document mais faire tout de même des liens entre les exercices pour mettre en avant cette catégorisation de problèmes d'optimisation. Donc, pouvoir d'un exercice à l'autre montrer les similitudes et les différences avec les exercices précédents et établir l'ordre des exercices sur base des catégories de la FIGURE 3.1.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai détaillé les supports fournis aux étudiants tant théoriques que pratiques et à partir de différentes études de recherche, j'ai mis au point une autre manière d'aborder une remédiation sur les problèmes d'optimisation. L'impact de la mise en place d'une séance de ce type est compliqué à quantifier en terme d'apport chez les étudiants, mais les analyses de l'examen de juin 2018 reflètent une amélioration pour un certain nombre d'entre eux, dans leur façon de résoudre les problèmes d'optimisation. Cependant, il faut rester prudent dans ce type d'analyse, il aurait fallu comparer ces résultats avec ceux de la session de juin de l'année académique 2016-2017, pour savoir si des améliorations similaires étaient présentes ou non sans le changement de remédiation. Comme proposé dans les pistes, il faudrait, par exemple, mettre en place certaines stratégies durant le premier quadrimestre et observer l'évolution des étudiants à travers la simulation d'examen, l'examen et aussi les remédiations. Cette comparaison devrait se faire sur plusieurs années afin de détecter éventuellement s'il y a des améliorations dans les résolutions des étudiants et à quoi elles pourraient être dues.

Conclusion

Comme on a pu le souligner dans ce mémoire, un professeur confronté à un public de premier bachelier, en pleine transition secondaire-supérieur, est également confronté à de nombreuses contraintes pouvant faire obstacle au partage du savoir et de la connaissance. Cela, quelle que soit la filière suivie par les étudiants. S'il est vrai que certains dispositifs peuvent aider d'une part, le professeur à mieux connaître son auditoire et certaines de ses "failles", et d'autre part, les étudiants à s'intégrer au mieux dans la vie universitaire, comme par exemple le projet Feedback First-Year Project (FFYP) avec les simulations d'examens ou encore les QCM. Ces dispositifs ne permettent pas au professeur de traiter les problèmes plus spécifiques des étudiants dans sa discipline. Dès lors, il est nécessaire de s'intéresser aux recherches didactiques dans ce domaine et de porter une attention plus particulière aux productions des étudiants ainsi qu'à leurs questions pour tenter de solutionner ces problèmes.

Je me suis penchée sur les productions des étudiants de premier bachelier en architecture, en analysant différents documents tels que plusieurs exemplaires d'examens, mais également en construisant un questionnaire permettant de mettre en lumière certaines de leurs difficultés. Au-delà des difficultés plus techniques comme l'application de formules diverses ou les erreurs de calcul, les difficultés principales des étudiants sont liées à la traduction de la langue courante au langage mathématique, ou encore relèvent de problèmes de modélisation, ou de méconnaissance des objets mathématiques manipulés et de leur utilité. J'ai notamment pu constater que ces difficultés ne sont pas forcément liées au nombre d'heures de mathématiques suivies par l'étudiant pendant ses études secondaires, et que souvent, ses connaissances de la matière sont essentiellement procédurales.

Dans le cas des problèmes d'optimisation, sur lesquels je me suis attardée, les étapes de la méthode enseignée, liée à la dérivée, sont mal comprises par un grand nombre d'étudiants et la modélisation du problème pose également des difficultés. Les étudiants ont tendance à ne pas réfléchir sur la signification de ce qu'ils écrivent et se raccrochent à ce qu'ils savent faire pour trouver une solution : ils annulent des paramètres, dérivent mais pas la bonne fonction, utilisent la méthode de résolution des équations du second degré mais pas à bon escient, etc.

Différents travaux de recherches, dont ceux de Schneider et Henrotay [14] et [15] et de Aktsinson [16], m'ont permis de construire une séance de remédiation afin d'essayer de combler certaines lacunes des étudiants dans la compréhension des étapes de la méthode enseignée pour la résolution des problèmes d'optimisation et de mettre en évidence les similitudes entre les problèmes. Mais également de confirmer certaines difficultés persistantes. Après avoir comparé les copies des étudiants ayant passé l'examen en juin 2018 avec leurs copies de janvier 2018, on peut observer une amélioration dans la résolution des problèmes d'optimisation en juin 2018, pour une partie des étudiants. Cependant, cette remédiation s'étant déroulée uniquement au cours de l'année académique 2017-2018, et l'efficacité de ce type de dispositif étant difficile à évaluer, on ne peut affirmer que la progression des étudiants dans la résolution et la compréhension de ce type de problèmes est une conséquence ou non de ce dispositif. Il faudrait comparer ces résultats sur plusieurs années.
D'autre part, différentes améliorations peuvent encore être apportées au dispositif que j'ai mis en place et testé lors d'une séance de remédiation, mais également d'autres pistes peuvent être envisagées, tant pour le cours théorique que pratique, pour essayer de combler les lacunes des étudiants plus tôt dans l'année académique.
Je préconise de s'attarder sur les pistes dégagées pour le premier quadrimestre, afin que les difficultés des étudiants soient traitées au plus tôt.

Annexe A

Programme bloc 1 architecture

Vue bloc

Bloc 1

Cours obligatoires

Domaine d'enseignement et de recherche (DER) : Sciences et Techniques

		Organisation	Théorie	Pratique	Autres	Crédits
ARCH0110-1	*Construction 1* Pierre Leblanc	Q2	48	-	-	4
ARCH0111-1	*Mathématique 1* Sylvie Jancart	Q1	24	24	-	4
ARCH0112-1	*Structure 1* Jean-Marie Bleus, Thibaut Brogneaux	Q2	24	24	-	4
ARCH0126-1	*Introduction à l'utilisation des géodonnées appliquées à l'architecture* Pierre Hallot	Q2	24	-	-	2
ARCH0119-1	*Matériaux 1* Henriette Michaux, Dimitri Schmitz	Q1	44	4	-	4

Domaine d'enseignement et de recherche (DER) : Histoire, Théorie, Sciences humaines et sociales

		Organisation	Théorie	Pratique	Autres	Crédits
ARCH0122-1	*Connaissance de l'architecture contemporaine : XXe siècle - partie 1* Andre Rouelle	Q1	24	-	-	2
ARCH0123-1	*Théorie de l'architecture 1* Patrick Bribosia	Q1	20	4	-	2
ARCH0125-1	*Psychosociologie dans ses rapports à l'architecture et à l'urbanisme* David Tieleman	Q1	24	-	-	2
ARCH0222-1	*Connaissance de l'architecture contemporaine : XXe siècle - partie 2* Andre Rouelle Corequis ▾	Q2	24	-	-	2
ARCH0124-1	*Introduction à l'histoire de la philosophie dans ses rapports à l'architecture* Stéphane Dawans	Q2	24	-	-	2

Domaine d'enseignement et de recherche (DER) : Ville, Territoire, Paysage

ARCH0151-1	*Sciences du milieu 1* Francis Tourneur	Q1	24	-	-	2
ARCH0251-1	*Sciences du milieu 2* Georges Mabille Corequis ▾	Q2	24	-	-	2

Domaine d'enseignement et de recherche (DER) : Etude et représentation de l'Espace et de la Forme

ARCH3265-1	*Ecriture de l'espace 1A*	Q1				2
	Atelier 1 Patrick Bribosia, Mariette Dorthu, Gérald Dupagne, Michele Hougardy		2	22	-	
	Atelier 2 Sarah Behets, Carine Driesmans, Aniceto Exposito-Lopez, Benedicte Henry		-	24	-	
ARCH3266-1	*Ecriture de l'espace 1B*	Q2				2
	Atelier 1 Patrick Bribosia, Mariette Dorthu, Gérald Dupagne, Michele Hougardy		4	20	-	
	Atelier 2 Sarah Behets, Carine Driesmans, Aniceto Exposito-Lopez, Benedicte Henry Corequis ▾		-	24	-	
ARCH3267-1	*Construction graphique de l'espace 1 A* Fréderic Delvaux, Fabien Denoël, Gérald Dupagne, Dimitri Schmitz, Xavier Van Rooyen	Q1	8	16	-	2
ARCH3268-1	*Construction graphique de l'espace 1B* Dimitri Schmitz Corequis ▾	Q2	8	16	-	2

Domaine d'enseignement et de recherche (DER) : Projet d'architecture

ARCH0141-1	*Projets d'architecture 1* Michaël Bianchi, Patrick David, Mariette Dorthu, Sibrine Durnez, Pierre Hallot, Paul-Christian Hautecler, Claude-Lucie Hick, Pierre Leblanc, Pascal Noe, Sebastien Ochej, Andre Rouelle, Jean-Marc Schepers, Margarida Tavares Alvares Serrão, Benoît Vandenbulcke, Xavier Van Rooyen, Antoine Wang - Suppl : Jean-Pierre Caumiant, Nicolas Duvivier, Margarida Serrao	TA	-	256	-	20

Voyage d'études annuel : visites commentées de réalisations architecturales

Annexe B

Répertoire de problèmes 2016-2017

Répertoire de problèmes de l'année académique 2016-2017 :

Problèmes rencontrés par les étudiants lors des séances :

Séance 1 : Exercices sur les nombres et les opérations

- Jongler avec les doubles fractions.
- Difficultés à détecter et effectuer les produits remarquables

Séances 2 et 3 : Exercices de trigonométrie

- Problèmes de compréhension des énoncés/du vocabulaire (ex : déclivité 100%)
- Problèmes dans le choix des formules de trigonométrie pour résoudre le problème
- Certains étudiants n'envisagent pas toutes les solutions lors de le recherche de valeurs : trouver x pour que $\cos(x) = 0$ (pas de prise en compte ou incompréhension du $2k\pi$ près)

PARTIE PROBLEMES

- Problème pour passer de degré en degrés-minutes-secondes
- Mêmes problèmes que dans les thèmes précédents.

Séances 4 et 5 : Exercices sur les études de fonctions

- Incompréhension des différents cas du signe de x dans les inégalités. Par exemple, lors d'exercices sur le calcul de domaine de différentes fonctions, les étudiants étaient confrontés à cette inégalité lors d'un calcul : $\mid x \mid < 1$. Certains étudiants ne comprenaient pas pourquoi on devait distinguer des cas en fonction du signe de x.
- Réexpliquer pourquoi on regarde le terme de plus grand exposant dans les limites tendant vers l'infini.

- Dérivée de fonction composée, problème pour comprendre la formule, associer les fonctions f et g dans les exercices.

- Incompréhension de l'annulation de la dérivée pour le problème d'optimisation.

- Incompréhension des étapes du problème d'optimisation.

- Incompréhension (ou vérification de la compréhension) de l'énoncé.

Séance 6 : Exercices sur les exponentielles

- Savoir quoi poser pour obtenir équation du second degré (revoir règles des exposants)

- Revoir règles des exposants (et savoir les appliquer si la base de l'exposant est différente de x)

Séances 7 et 8 : Exercices sur les intégrales et exercices supplémentaires

- Ils ont des difficultés à déterminer les primitives et ils ne connaissent pas les formes particulières de certaines d'entre elles.

- Incompréhension de la construction en représentation polaire.

- Difficultés à trouver les bornes des intégrales pour calculer une certaine surface dans un graphique.

- Ils ne savent pas comment commencer l'exercice.

- Ils ne savent pas quand l'intégrale est définie par rapport à x ou y et quelles bornes prendre (mauvaise compréhension des formules de l'intégrale donnée pour calculer les révolutions)

Annexe C

Répertoire de problèmes 2017-2018

Répertoire de problèmes de l'année académique 2017-2018

Problèmes rencontrés par les étudiants lors des séances :

Séance 1 : Exercices sur les nombres et les opérations

- Certains étudiants n'appliquent pas correctement les formules des produits remarquables, ils oublient le $2ab$.

- Certains étudiants n'appliquent pas correctement les formules des puissances, par exemple, certains marquent $(3b)^2 = 3b^2$

- Certains étudiants ne voient pas toujours quand ils peuvent utiliser les produits remarquables, par exemple, dans un exercice comme $(x + y + z - 1)(x + y - z + 1)$

- Certains étudiants ne voient pas toujours la mise en évidence à effectuer.

- Certains étudiants ne comprennent pas toujours les énoncés, par exemple, si on leur donne une expression et qu'on leur demande de la réécrire sous forme d'une somme de termes ou d'un produit de facteurs, ils ne comprennent pas ce qu'ils doivent faire.

- Certains étudiants ne maîtrisent pas les propriétés sur les racines.

- Problème dans la compréhension des exercices, ils lisent mal, par exemple, un des exercices était :
  "Montrer que si p est un nombre entier quelconque, alors la différence $p^3 - p$ est égale au produit de trois nombres entiers consécutifs."
  Plusieurs élèves on écrit l'égalité à laquelle on devait arriver et après ils ne savaient pas quoi faire, ils écrivaient même l'égalité suivante : $p^3 - p = x(x + 1)(x + 2)$. Ils utilisent d'une part p et d'autre part x, il n'arrivent pas à voir que dans ce cas l'inconnue est p ou alors x mais qu'il n'y en a qu'une seule.
  Quand on leur demande : "Soustrayez $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ "
  Certains font comme calcul : $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}$ au lieu de $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$.

- Ils avaient un exercice où on leur donnait, en français, deux relations avec le nombre d'or et on leur demandait d'exprimer la suite sous la forme de $a\phi + b$. Les étudiants ne savaient pas comment commencer l'exercice.

Séances 2 et 3 : Exercices de trigonométrie

- "Calculer les nombres trigonométriques de...", ils ne savent pas ce qu'ils doivent chercher alors que ce terme est utilisé dans le cours théorique.

- Quand on demande de simplifier une expression du type $\sin(180° - \alpha) + \sin(360° - \alpha)$, certains ne comprennent pas ce qu'ils doivent faire.

- Quand on leur demande de vérifier une égalité et qu'ils se retrouvent bloqués, ils ne pensent pas à développer l'autre membre de l'égalité ou à utiliser une autre formule trigonométrique pour que cela marche. Comme si pour eux il n'y avait qu'une possibilité pour que cela marche.
  Pour vérifier l'égalité d'une somme de carrés faisant intervenir la fonction sec, certains ne pensent pas à utiliser la trigonométrie et restent bloqués sur le fait qu'on ne sait pas utiliser les produits remarquables.

- Certains étudiants n'arrivent pas à utiliser toutes les informations qu'on leur donne, par exemple, quand on leur précise dans quel quadrant se trouve un angle ils n'en déduisent aucune information concernant le sin ou le cos.

- "Calculer sans calculatrice $\sin(120°)$", pour calculer, certains n'utilisent pas des angles connus donc ils tournent en rond et même s'ils se rendent compte qu'ils ne connaissent pas le nouvel angle qu'ils ont, ils ne pensent pas à transformer les 120 degrés en une somme ou une différence de deux angles particuliers.

- Certains ne comprennent pas ce qu'il faut faire quand on leur donne un produit comme "$\sin(50°).\cos(80°)$" et qu'on leur demande de le transformer en une somme algébrique ou inversement.

- Explication de certains mots comme "faîtage" ou "déclivité de $x\%$".

- Dans la résolution d'un exercice, on divise $360.\sqrt{2}$ par 2 , on l'avait écrit comme ceci : $360.\frac{\sqrt{2}}{2}$. Un étudiant ne comprenait pas pourquoi on avait fait cela , on lui a demandé ce qu'il aurait fait et il a répondu qu'il diviserait chaque facteur par 2.

- Quand ils n'ont pas la bonne solution que dans le syllabus pour des possibilités d'angles trigonométriques ils ne vérifient pas sur leur cercle pour comparer si c'est le même angle mais écrit différemment.

- Dans la résolution d'une équation du style "$\sin(2x) = \sin(-x)$", la plupart note juste une solution "$2x = -x + 2k\pi$" mais pas l'autre avec l'angle supplémentaire.

- "Évaluez $\cos(15°)$" certains n'arrivent pas à voir qu'on peut procéder de la même manière que dans les premiers exercices et exprimer 15° en fonction de deux angles particuliers pour trouver la réponse. Donc ils ne savent pas comment commencer l'exercice.

  PARTIE PROBLEMES

- Certains étudiants n'arrivent pas à représenter la situation d'un problème : "Calculer la hauteur d'une tour dressée au bord d'une falaise sachant qu'à 100 m, on voit une falaise sous un angle de 43° et la tour sous un angle de 12° supplémentaires."

- Quand on leur pose un problème avec un losange et qu'on leur donne la valeur d'une des diagonales. Certains pensent qu'ils doivent déjà savoir s'il s'agit de la grande ou de la petite diagonale pour pouvoir commencer l'exercice.

- Dans un exercice, on parle de pente moyenne car on a un palier à la fin et on doit en tenir compte. Les élèves n'arrivent pas à comprendre pourquoi on calcule la pente moyenne, ce que cela signifie par rapport au pourcentage de la pente donnée initialement.

- "L'angle sous lequel il aperçoit la tour est de 30°", ils ne placent pas bien l'angle dans le triangle ou ils ne savent pas où le placer.

Séances 4 et 5 : Exercices sur les études de fonctions

- Dans un exercice où on calcule le domaine de définition, le dénominateur d'une fonction était $\cos(3x)$, certains ne savent pas comment trouver les valeurs pour que $\cos(3x) \neq 0$.

- Beaucoup d'élèves confondent les fonctions $(f \circ g)$ et $(g \circ f)$.

- Dans les limites : "$\infty - \infty = \infty$? ou $= 0$?"

- Certains ne savent pas pourquoi on regarde les coefficients de plus haut degré quand on calcule une limite vers l'infini. De plus, certains étudiants ne regarde pas la limite à gauche et la limite à droite pour calculer la limite de $\frac{|x|}{x}$ de x tendant vers 0.

- Lorsque l'on cherche les asymptotes obliques, une fois qu'on a trouvé le m, pour chercher le p plusieurs élèves ont demandé : "On doit faire la limite de $f(x) - mx$, le m on l'a trouvé, on peut le remplacer mais le x est égal à quoi ?"

- Pour les dérivées, ils ne savent pas toujours quelle(s) formule(s) utiliser et ils n'arrivent pas toujours à les appliquer correctement : ils n'arrivent pas toujours à associer les fonctions f et g des formules avec celles dans leurs exercices. Il y a énormément de fautes dans les calculs de dérivées, particulièrement pour les dérivées de fonctions composées.

- Dans l'exercice "Parmi tous les rectangles de périmètres donnés, quel est celui qui a la plus grande aire ?", une remarque revient chez la plupart des étudiants : "il nous manque des informations, on n'a pas les dimensions du rectangle", "Il manque des données pour l'exercice ?", "Le périmètre vaut quoi ?". Ils n'arrivent pas à commencer l'exercice car il n'y a pas de valeurs numériques pour les côtés du rectangle

- Pour un même type d'exercice que précédemment, "Pour un volume V donné,..", une question qui revient souvent : "Le volume vaut quoi ?".

- En général, ils ne savent pas comment résoudre un problème d'optimisation. Ils ne pensent pas à utiliser les deux relations qu'on leur donne dans l'énoncé pour leur résolution et ils sont bloqués dès qu'on leur donne des lettres pour une certaine valeur. Dans les équations, beaucoup enlèvent la lettre qui représente la valeur du périmètre ou du volume donné dans l'équation sans prendre conscience que cela signifie qu'ils l'annulent.

Séance 6 : Exercices sur les exponentielles

- Ils n'arrivent pas à mettre 1 sous une base quelconque.

- Dans des exercices avec une équation de sommes d'exponentielles, ils sont bloqués et ne voient pas qu'ils peuvent poser l'exponentielle égale à une nouvelle variable pour revenir à une équation du second ou troisième degré.

Séances 7 et 8 : Exercices sur les intégrales

- Quand ils primitivent, beaucoup se trompent avec les fonctions de fonctions donc ils écrivent ce genre de réponses : "$\int \frac{7}{\sqrt{1-49x^2}}dx = 7\arcsin(7x) + k$", "$\int (3x^2 + 4)^3 dx = \frac{(3x^2+4)^4}{4} + k$".

Certains utilisent la substitution mais ils ne posent pas les bonnes choses pour simplifier leurs intégrales. Par exemple, pour le premier exemple ci-dessus, ils posent $t = 1 - 49x^2$ et donc ils sont coincés ensuite.
Ils ne pensent pas spécialement à faire par parties en prenant une des fonctions qui vaut 1.
Donc, en général, ils ne savent pas quelle méthode utiliser et ils ne pensent pas à essayer différentes méthodes jusqu'à trouver la bonne.

- Certains tournent en rond en utilisant la méthode par parties plusieurs fois et ils ne savent pas quoi faire d'autre pour trouver la réponse.

- Quand on leur demande de calculer l'aire entre différentes courbes, ils ne prennent pas toujours la bonne aire et pour trouver les bornes de l'intégrale ils ne savent pas quelles valeurs prendre. Ils n'ont pas le réflexe de tracer les courbes sur un graphique.

- Pour la représentation polaire, ils confondent avec la représentation cartésienne et ils ne savent pas comment tracer une fonction avec les coordonnées polaires. Pour construire le tableau des valeurs, ils demandent comment faire.

- Ils sont souvent bloqués dans les intégrales à $\sin^2$ ou $\cos^2$ et ils ne pensent pas à utiliser les formules trigonométriques dont celles de Carnot.

- Ils ont les mêmes problèmes quand on leur demande de calculer l'aire entre des courbes en coordonnées polaires que dans les cartésiennes. D'une part tracer les courbes, puis bien situer l'aire qu'on cherche à calculer et déterminer correctement les bornes surtout qu'ici ils essayent de faire comme pour les coordonnées cartésiennes alors qu'on n'est pas dans le même système de coordonnées.

- Pour les coordonnées paramétriques, ils ne savent pas commencer l'exercice, ils ne savent pas quelle formule utiliser.

- Pour les volumes de révolution, ils ont des difficultés à visualiser en 3 dimensions et savoir comment on construit l'intégrale pour calculer l'aire. En particulier pour déterminer les bornes et la fonction.
  Ils ne calculent pas correctement le carré d'une expression, notamment quand il s'agit d'un produit remarquable.

Annexe D

Questionnaire

Questionnaire

Question 1

Traduire les phrases suivantes en langage mathématique :

a) x vaut le double de 3 augmenté de b le tout divisé par 4

b) Soient 3 personnes : François, Stéphanie et Jérôme. Le salaire de François vaut 65 pourcent de celui de Jérôme augmenté des deux tiers de celui de Stéphanie

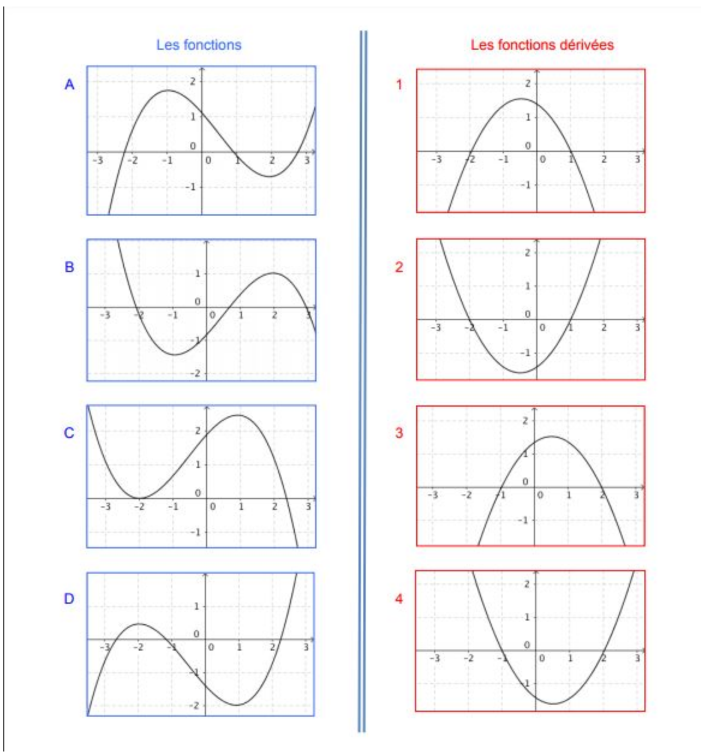
c) Soit un rectangle de longueur b, de largeur a et de périmètre donné. Donner l'expression de l'aire de ce rectangle uniquement en fonction de la variable a.

Question 2

Parmi les graphiques suivants, on donne les courbes de 4 fonctions dans la colonne de gauche et celles de leurs dérivées dans la colonne de droite. Associer chaque fonction à sa dérivée. Justifier.

Réponses :

A	B	C	D



Question 3

Soient deux hommes, la somme de l'âge du premier avec le double de l'âge du deuxième est égale à 150. Quel est le plus grand produit possible des deux âges ? Donner l'âge des deux personnes dans ce cas-là.

Question 4

Laquelle ou lesquelles des propositions suivantes expriment la dérivée de $x^5 v^3$? Justifier. (Entourez la ou les bonnes réponses)

a) $x^5.3v^2$

b) $5x^4.v^3$

c) $5x^4.v^3 + x^5.3v^2$

d) 0

e) Aucune des propositions n'est correcte.

Nombre d'heures par semaine de mathématiques en 6ème secondaire (terminale) : ....

Etiez-vous en secondaire l'année passée ? Si non, que faisiez-vous ?..........

Remarque(s) :

Annexe E

Séance de remédiation sur l'optimisation de l'année académique 2016-2017

Remédiation 3 : Optimisation

Rappels

Rôle de la dérivée première

Croissance et décroissance

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$ une fonction continue sur $[a;b] \subset I$ et dérivable sur $]a;b[$.

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a;b[$, alors f est strictement croissante sur $[a;b]$.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a;b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a;b]$.

Maximum et minimum

Soit f une fonction continue en c, dérivable sur un intervalle ouvert $]a;b[$ contenant c. Supposons que $f'(c) = 0$.

- Si f' passe du positif au négatif en c, alors $f(c)$ est un maximum local de f.
- Si f' passe du négatif au positif en c, alors $f(c)$ est un minimum local de f.

Rôle de la dérivée seconde

Concavité

Soit f une fonction font la dérivée seconde f'' existe sur $]a;b[$. Alors le graphe de f

- tourne sa concavité vers les y positifs sur $]a;b[$ si $f''(x) > 0$ sur $]a;b[$;
- tourne sa concavité vers les y négatifs sur $]a;b[$ si $f''(x) < 0$ sur $]a;b[$.

Point d'inflexion

Un point $(c; f(c))$ du graphe d'une fonction f est un point d'inflexion si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- f est continue en c ;
- la concavité change de sens en c.

Maximum et minimum

Soit f une fonction dont la dérivée seconde existe sur un intervalle ouvert $]a; b[$ contenant c et que $f'(c) = 0$.

- Si $f''(c) < 0$, alors f admet un maximum local en c.
- Si $f''(c) > 0$, alors f admet un minimum local en c.

Exercices

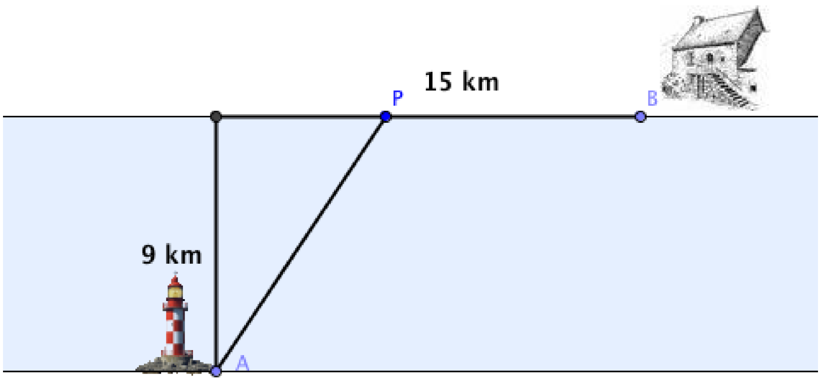
1. On doit fabriquer un conteneur en métal de forme cylindrique sans couvercle et d'une capacité de $24\pi\text{cm}^3$.
   Le matériau du fond coute 0.15 euros par cm^2 et celui pour le bord coute 0.05 euros par cm^2. Si la fabrication ne donne lieu à aucun déchet, quelles doivent être les dimensions du cylindre pour qu'il coute le moins cher possible.
2. Un parterre de fleurs rectangulaire a une surface de 100m^2. Une allée en fait le tour et sa largeur est égale à 0.75 m le long des grands cotés du parterre et 1.5 m le long des petits cotés.
   Si la surface totale (parterre et allée) est minimale, quelles sont les dimensions du parterre ?
3. De tous les triangles rectangles dont l'aire A est donnée, quel est celui

qui possède l'hypoténuse minimale. Quelles sont ses particularités ?

4. Un fil de longueur L doit être coupé en deux parties. Avec l'une, on forme un triangle équilatéral et avec l'autre, un carré. Comment faut-il couper le fil pour que l'aire totale des deux figures soit minimale ?

5. Un navire doit parcourir 40 km contre un courant de 10 km/h. Il consomme par heure une quantité de carburant égale au double du carré de sa vitesse. En supposant qu'il navigue à vitesse constante, quelle doit être sa vitesse pour minimiser la quantité de carburant consommé ?

6. Le gardien d'un phare (A) doit rejoindre le plus rapidement possible sa maison côtière (B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h. Où doit-il accoster (P) pour que le temps de parcours soit minimal ? La côte est supposée rectiligne.



Annexe F

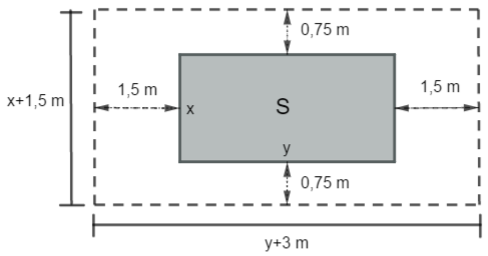
Remédiation sur l'optimisation pour l'année académique 2017-2018

Remédiation : les problèmes d'optimisation

Exemple 1 : Un parterre de fleurs rectangulaire a une surface de 100 m^2. Une allée en fait le tour et sa largeur est égale à $0,75$ m le long des grands côtés du parterre et $1,5$ m le long des petits côtés. Quelles doivent être les dimensions de la surface totale (parterre et allée) pour que celle-ci soit minimale ?

Résolution :

① Illustration et choix de variables décrivant le problème



- $S = 100$ m^2
- x est la largeur du parterre.
  y est la longueur du parterre.
  x et y sont positifs.
- La surface d'un rectangle est donnée par : longueur $\times$ largeur
  Donc $100 = y.x$
- S_T est la surface totale, c'est un rectangle de largeur $(x + 2 \,.\, 0,75)$ m , càd $(x + 1,5)$ m et de longueur $(y + 2 \,.\, 1,5)$ m, càd $(y + 3)$ m

② Quantité à optimiser et contrainte(s)

La surface totale, S_T, afin de trouver les dimensions de la surface S, càd les longueurs x et y.
Contrainte : $S = 100$ m^2,

③ Exprimer la quantité à optimiser sous la forme d'une fonction à une variable

$S_T(x, y) = (x + 1,5).(y + 3) = xy + 3x + 1,5y + 4,5$

or $100 = xy$ càd $y = \dfrac{100}{x}$

Donc $\quad S_T(x) = x.\dfrac{100}{x} + 3x + \dfrac{150}{x} + 4,5$

càd $\quad S_T(x) = 100 + 3x + \dfrac{150}{x} + 4,5$

càd $\quad S_T(x) = 3x + \dfrac{150}{x} + 104,5$

④ Trouver l'(les) extremum(s) de la fonction

Dériver $S_T(x)$: $\quad S'_T(x) = 3 - \dfrac{150}{x^2}$

Annuler la dérivée : $\quad S'_T(x) = 0$ ssi $3 - \dfrac{150}{x^2} = 0$

$$\text{ssi } 3 = \frac{150}{x^2}$$

$$\text{ssi } x^2 = \frac{150}{3}$$

$$\text{ssi } x^2 = 50$$

$$\text{ssi } x = \pm\sqrt{50}$$

Or x est une longueur, donc la solution négative est à rejeter.

On a donc $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

On a éventuellement un extremum en $x = 5\sqrt{2}$ et pour $y = \dfrac{100}{x}$ càd $y = \dfrac{100}{5\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$

⑤ Maximum, minimum ou point d'inflexion ?

Deux façons de vérifier cela :

•Étude de la croissance de la fonction

		$5\sqrt{2}$	
$S'_T(x)$	-	0	+
$S_T(x)$	$\searrow$	*min*	$\nearrow$

C'est donc un minimum

•Concavité de la fonction : dérivée seconde

$$S''_T(x) = \left(3 - \frac{150}{x^2}\right)' = \frac{300}{x^3}$$

Et $\quad S''_T(5\sqrt{2}) = \dfrac{300}{(5\sqrt{2})^3} > 0$

C'est donc un minimum

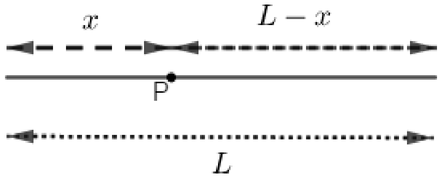
⑥ Conclusion

La surface totale est minimale quand le parterre a une largeur de $5\sqrt{2}$ m et une longueur de $10\sqrt{2}$ m.

Exemple 2 : Un fil de longueur L doit être coupé en deux parties. Avec l'une, on forme un triangle équilatéral et avec l'autre, un carré. Comment faut-il couper le fil pour que l'aire totale des deux figures soit minimale ?

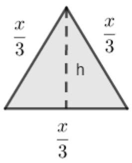
Résolution :

① Illustration et choix de variables décrivant le problème



- P est l'endroit où on coupe le fil.
  x est la longueur de la première partie du fil avec laquelle on forme le triangle équilatéral.
  $L-x$ est la longueur de la deuxième partie du fil avec laquelle on forme le carré.
  x varie entre 0 et L compris.

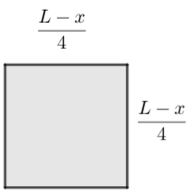
- L'aire du triangle, formé par la longueur x, est donnée par :



$$A_\triangle = \frac{x}{3}.h.\frac{1}{2} = \frac{x.h}{6}$$ où h est la hauteur du triangle

N.B : la formule trigonométrique de l'aire d'un triangle peut également être utilisée.

- L'aire du carré, formé par la longueur $L-x$, est donnée par :



$$A_\square = \left(\frac{L-x}{4}\right)^2$$

② Quantité à optimiser et contrainte(s)

L'aire totale des deux figures, afin de trouver où on coupe le fil, càd la longueur x.

③ Exprimer la quantité à optimiser sous la forme d'une fonction à une variable

$A_T(x,h) = A_{\triangle}(x,h) + A_{\square}(x)$

$A_T(x,h) = \dfrac{x.h}{6} + \dfrac{(L-x)^2}{16}$

Or par Pythagore $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 = h^2 + \left(\dfrac{x}{6}\right)^2$ ssi $h^2 = \left(\dfrac{x}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{6}\right)^2$

ssi $h^2 = \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{x^2}{36}$

ssi $h^2 = \dfrac{3x^2}{36}$

ssi $h^2 = \dfrac{x^2}{12}$

ssi $h = \pm\sqrt{\dfrac{x^2}{12}}$

ssi $h = \pm\dfrac{x}{2\sqrt{3}}$

Or h est une longueur, donc la solution négative est à rejeter.
Donc $h = \dfrac{x\sqrt{3}}{6}$

N.B : On aurait pu également utiliser les formules trigonométriques dans les triangles rectangles (SOH-CAH-TOA)

Donc on peut écrire,

$$A_T(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{36} + \frac{L^2 + x^2 - 2xL}{16}$$

$$A_T(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{1}{16}\right)x^2 - \frac{2L}{16}x + \frac{L^2}{16}$$

$$A_T(x) = \left(\frac{4\sqrt{3}+9}{144}\right)x^2 - \frac{L}{8}x + \frac{L^2}{16}$$

④ Trouver l'(les) extremum(s) de la fonction

Dériver $A_T(x)$: $\quad A'_T(x) = \dfrac{4\sqrt{3}+9}{144}.2.x - \dfrac{L}{8}$

$$\text{ssi } A'_T(x) = \frac{4\sqrt{3}+9}{72}x - \frac{L}{8}$$

Annuler la dérivée : $\quad A'_T(x) = 0 \text{ ssi } \dfrac{4\sqrt{3}+9}{72}x - \dfrac{L}{8} = 0$

$$\text{ssi } \frac{4\sqrt{3}+9}{72}x = \frac{L}{8}$$

$$\text{ssi } x = \frac{72}{4\sqrt{3}+9}.\frac{L}{8}$$

$$\text{ssi } x = \frac{9L}{4\sqrt{3}+9}.\frac{4\sqrt{3}-9}{4\sqrt{3}-9}$$

$$\text{ssi } x = \frac{9L(4\sqrt{3}-9)}{48-81}$$

$$\text{ssi } x = \frac{9L(9-4\sqrt{3})}{33}$$

$$\text{ssi } x = \frac{3L(9-4\sqrt{3})}{11}$$

On a éventuellement un extremum en $\quad x = \dfrac{3L(9-4\sqrt{3})}{11} \approx 0,57L$

⑤ Maximum, minimum ou point d'inflexion ?

Deux façons de vérifier cela :

•Étude de la croissance de la fonction

		$\frac{3L(9-4\sqrt{3})}{11}$	
$A'_T(x)$	-	0	+
$A_T(x)$	$\searrow$	*min*	$\nearrow$

C'est donc un minimum

•Concavité de la fonction : dérivée seconde

$$A''_T(x) = \left(\frac{4\sqrt{3}+9}{72}.x - \frac{L}{8}\right)'$$
$$= \frac{4\sqrt{3}+9}{72} > 0$$

Donc en particulier,
$$A''_T\left(\frac{3L(9-4\sqrt{3})}{11}\right) > 0$$

C'est donc un minimum

⑥ Conclusion

L'aire des deux figures est minimale quand la première partie du fil coupé à une longueur de $\dfrac{3L(9-4\sqrt{3})}{11}$ ($\approx 0,57L$).

Remarque :

Dans ce cas-ci, étant donné qu'on a une fonction du second degré à une variable, on aurait pu procéder autrement pour trouver l'extremum de la fonction. En effet, ce type de fonction s'écrit sous la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sa représentation graphique est une parabole et elle a un seul extremum, son sommet.

Or le sommet de la parabole a comme coordonnées $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

On a donc l'extremum en $\dfrac{-b}{2a}$,

càd dans ce cas-ci en $x = \dfrac{L}{8}.\dfrac{144}{2.(4\sqrt{3}+9)}$

càd en $x = \dfrac{9L}{4\sqrt{3}+9}$

càd en $x = \dfrac{3L(9-4\sqrt{3})}{11}$

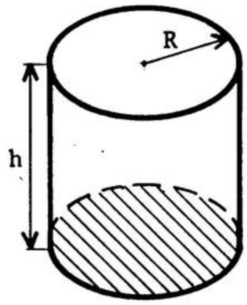
Et on vérifie si c'est un maximum ou un minimum par le signe de a.
Dans ce cas-ci, $a = \dfrac{4\sqrt{3}+9}{144} > 0$ donc l'extremum est un minimum.

On arrive à la même conclusion qu'avec l'autre méthode mais plus rapidement.

Exemple 3 : On doit fabriquer un conteneur en métal de forme cylindrique sans couvercle et d'une capacité de 24π cm^3. Le matériau du fond coûte $0,15$ euros par cm^2 et celui pour le bord coûte 0,05 euros par cm^2 . Si la fabrication ne donne lieu à aucun déchet, quelles doivent être les dimensions du cylindre pour qu'il coûte le moins cher possible ?

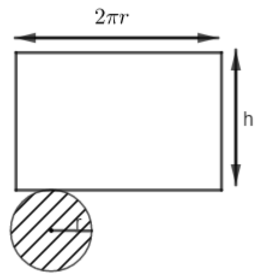
Résolution :

(1) Illustration et choix de variables décrivant le problème



N.B : L'illustration du cylindre étant copiée d'un autre exercice, le rayon de celui-ci n'a pas le bonne notation pour notre exemple, il devrait être noté r au lieu de R.

- $V = 24\pi$ cm^3
- h est la hauteur du cylindre.
  r est le rayon du disque formant la base du cylindre.
  r et h sont positifs.
- La surface du bord du cylindre est un rectangle, $A_{\square} = h.2\pi r$, et le coût du matériau est de $0,05$ €/cm^2
- La surface du fond du cylindre est un disque, $A_{\bigcirc} = \pi r^2$, et le coût du matériau est de $0,15$ €/cm^2



(2) Quantité à optimiser et contrainte(s)

Le coût de la fabrication, afin de trouver les dimensions du cylindre , càd h et r.
Contrainte : $V = 24\pi$ cm^3.

③ Exprimer la quantité à optimiser sous la forme d'une fonction à une variable

$C(r,h) = 0,15.A_{\bigcirc} + 0,05.A_{\square}$

ssi $C(r,h) = 0,15.\pi r^2 + 0,05.h.2\pi r$

$$\text{or } V = 24\pi \text{ et } V = base.hauteur = \pi r^2.h$$

$$\text{donc } 24\pi = \pi r^2 h \quad \text{càd} \quad h = \frac{24}{r^2}$$

Donc $C(r) = 0,15.\pi r^2 + 0,05.\dfrac{24}{r^2}.2\pi r$

ssi $C(r) = 0,15.\pi r^2 + \dfrac{2,4\pi}{r}$

④ Trouver l'(les) extremum(s) de la fonction

Dériver $C(r)$: $\quad C'(r) = 0,3\pi r - \dfrac{2,4\pi}{r^2}$

Annuler la dérivée : $\quad C'(r) = 0$ ssi $0,3\pi r - \dfrac{2,4\pi}{r^2} = 0$

$$\text{ssi } 0,3\pi r = \frac{2,4\pi}{r^2}$$

$$\text{ssi } 0,3\pi r^3 = 2,4\pi$$

$$\text{ssi } r^3 = \frac{2,4}{0,3}$$

$$\text{ssi } r^3 = 8$$

$$\text{ssi } r = \sqrt[3]{8}$$

$$\text{ssi } r = 2$$

On a éventuellement un extremum en $r = 2$ et pour $h = \dfrac{24}{r^2}$, càd $\quad h = \dfrac{24}{4} = 6$

⑤ Maximum, minimum ou point d'inflexion ?

Deux façons de vérifier cela :

•<u>Étude de la croissance de la fonction</u>

		2	
$S'_T(x)$	-	0	$+$
$S_T(x)$	$\searrow$	*min*	$\nearrow$

C'est donc un minimum

•<u>Concavité de la fonction : dérivée seconde</u>

$C''_T(x) = \left(0,3\pi r - \dfrac{2,4\pi}{r^2}\right)' = 0,3\pi + \dfrac{4,8\pi}{r^3}$

Et $\quad C''_T(2) = 0,3\pi + \dfrac{4,8\pi}{2^3} > 0$

C'est donc un minimum

⑥ Conclusion

La fabrication du conteneur a un prix minimum quand sa hauteur est de 6 cm et sa base est un disque de 2 cm de rayon .

Quelques remarques et explications :

⓪ Problèmes d'optimisation

Une des premières choses à faire quand on commence une nouvelle tâche est de vérifier la signification de celle-ci. Ici, c'est sur la signification de "problèmes d'optimisation" qu'on s'arrête.

Quand on parle de problèmes d'optimisation, on parle d'un problème qu'on modélise à l'aide d'une fonction et pour laquelle on essaye de trouver le(s) maximum(s) ou le(s) minimum(s) de cette fonction sur un certain domaine qui est défini par des contraintes.

En d'autres mots, on va retranscrire le problème posé sous une forme mathématique, c'est-à-dire modéliser le problème, puis à l'aide de théories mathématiques on va résoudre le problème.

① Illustration et choix de variables décrivant le problème

Cette étape nous permet de modéliser le problème posé, c'est-à-dire représenter la situation à l'aide d'une figure et déterminer les variables correspondant aux quantités recherchées ainsi que les relations mathématiques entre celles-ci.
Pour cela une bonne compréhension du français est nécessaire ainsi que certaines connaissances antérieures, comme les formules d'aires, de volumes, de périmètres, de Pythagore ou encore celle de la vitesse mais aussi savoir convertir dans une même unité de mesure.

Lors de l'examen de janvier 2018, 26% des étudiants ont oublié ou ont mal converti les unités de mesure. Plusieurs élèves ont également mal modélisé ou ont montré des incohérences entre leur dessin et leurs formules.

Conseils : Des allers-retours entre votre représentation et l'énoncé sont nécessaires. Il est important à la fin de votre représentation d'effectuer le chemin inverse, c'est-à-dire de se demander ce que représente votre modélisation afin de s'assurer que c'est bien la même chose que la situation décrite dans l'énoncé.
Faire un formulaire avec les connaissances antérieures utilisées dans les différents problèmes réalisés en classe.

② Quantité à optimiser et contrainte(s)

Lors de cette étape, on identifie la quantité à optimiser et dans quel but on le fait mais aussi la(les) contrainte(s) liée(s) au problème posé. Par exemple : les variables associées à des longueurs sont positives, une quantité (volume, périmètre,..) imposée.

Lors de l'examen, sur l'ensemble des étudiants ayant une bonne méthode de résolution de l'exercice, 24,7% se sont trompés sur la fonction qu'on devait optimiser.

Conseil : prendre le temps de relire l'énoncé et éviter de se précipiter dans la résolution du problème.

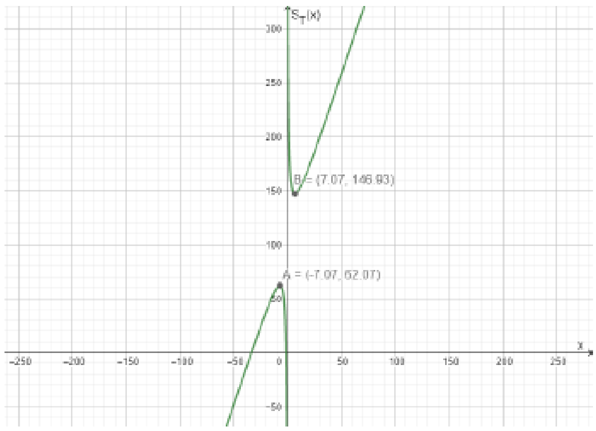
③ Exprimer la quantité à optimiser sous la forme d'une fonction à une variable

On cherche dans le problème des valeurs spécifiques, celles qui optimisent (maximisent ou minimisent) notre aire, volume, coût ou autre quantité. Pour trouver ces valeurs spécifiques, il faut d'abord avoir une vue d'ensemble sur les valeurs que peut prendre cette quantité. Donc dans un premier temps, on l'écrit sous la forme d'une fonction à plusieurs variables qui nous donne ainsi TOUTES les valeurs possibles. Ensuite dans un second temps, on l'écrit sous la forme d'une fonction à une variable puisque nous n'avons pas étudié les fonctions à plusieurs variables dans ce cours. Pour cela, on utilise une relation entre les différentes variables qui est soit indiquée dans l'énoncé sous forme d'une contrainte, soit on se sert d'une connaissance ne figurant pas dans l'énoncé comme le théorème de Pythagore.

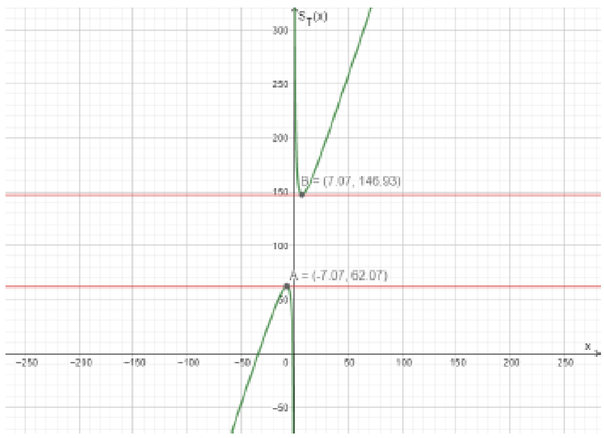
Ici, d'un problème à un autre, on peut avoir différents types de fonctions : fonction du second degré, trigonométrique ou autre.

④ Trouver l'(les) extremum(s) de la fonction

Lors de cette étape, on utilise une méthode numérique afin de trouver l'(les) extremum(s) d'une fonction.
Avant cela, pour vous permettre de comprendre cette méthode, visualisons l'ensemble des valeurs prises par la fonction du premier exemple, S_T, via son graphique représenté ci-dessous.

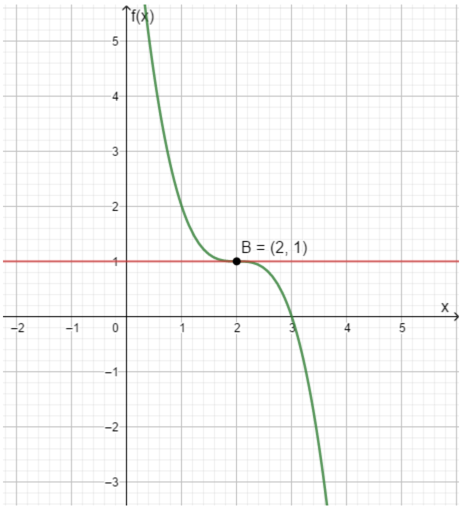


La variable x étant une longueur, on ne s'intéresse qu'à la partie droite du graphique, c'est-à-dire où les x ont des valeurs positives. Sur ce graphique, on repère facilement le minimum de la fonction.
Comme la représentation d'une fonction n'est pas toujours évidente, il faut trouver un moyen numérique afin d'obtenir l'(les) extremum(s).
Nous utilisons à ce moment-là des connaissances théoriques mathématiques vues lors des séances de cours théoriques.
Si on regarde la tangente en les points extremums du graphique, nous remarquons que celles-ci sont horizontales par rapport à l'axe OX, c'est-à-dire que la pente de ces tangentes est nulle.



Or l'interprétation géométrique du nombre dérivé d'une fonction en un point est la pente de la tangente au graphe en ce point. Donc le nombre dérivé de la fonction en un point extremum sera toujours nul. Donc pour trouver les valeurs qui optimisent une fonction, c'est-à-dire qui réalisent les extremums de la fonction, il faut dériver la fonction et l'annuler.
Mais ATTENTION, en faisant cela nous obtiendrons soit des extremums soit des points d'inflexion. En effet, si on sait qu'en un point extremum le nombre dérivé est

nul, à l'inverse, le fait d'avoir le nombre dérivé nul en un point ne nous permet pas de dire directement si on a un extremum ou un point d'inflexion. C'est pourquoi nous devons vérifier cela dans l'étape suivante.



Comme on peut le voir sur le graphique ci-dessus, la tangente en le point B est horizontale donc on a bien que le nombre dérivé en ce point est nul et pourtant le point B n'est pas un extremum mais un point d'inflexion.
Le détail de la vérification de la nature des points trouvés est fait à l'étape suivante.

Il peut arriver de trouver plusieurs valeurs nous donnant un extremum, comme par exemple pour la fonction S_T, il faut alors revenir au problème posé initialement pour regarder la signification de ces valeurs et éventuellement en exclure certaines qui ne répondent pas aux conditions du problème explicitées dans le point 2.
Comme dans le premier exemple où on a exclu une valeur négative car l'inconnue cherchée était une longueur.

Lors de l'examen, plus de 75% des étudiants n'ont pas compris ou n'avaient pas connaissance de cette méthode.
Bien sûr, il n'y a pas qu'une seule méthode possible pour la résolution d'un problème d'optimisation, comme montré dans la remarque de l'exemple 2. Cependant, la méthode décrite ci-dessus fonctionne toujours, même si dans certains cas elle s'avère plus longue qu'une autre.

Conseil : Cette méthode demande une maîtrise des formules de dérivation de fonctions, il est donc important de faire des exercices en dehors de ces problèmes pour que la dérivation d'une fonction n'empêche pas la résolution du problème.

⑤ Maximum, minimum ou point d'inflexion ?

Jusque là, nous avons obtenu des valeurs qui nous donnaient soit l'(les) extremum(s) d'une fonction soit le(s) point(s) d'inflexion de cette fonction. Donc à ce stade-ci, nous ne savons pas encore si ces valeurs nous donnent des maximums, des minimums ou des points d'inflexion.
Il est donc important de vérifier cette information afin de répondre à la question.
Pour ce faire, nous allons utiliser encore une fois nos connaissances mathématiques. Nous travaillons ici avec des fonctions, dès lors pour vérifier si nous avons soit un extremum soit un point d'inflexion et afin de pouvoir préciser de quel extremum il s'agit, nous pouvons soit utiliser les liens entre la croissance d'une fonction et sa dérivée ou encore les liens entre la dérivée seconde d'une fonction et sa concavité. Cela nous permet, dans les deux cas, d'avoir une illustration de l'allure de la fonction à l'endroit qui nous intéresse et de savoir si nous avons un maximum, un minimum ou un point d'inflexion.
A chacun de choisir parmi les deux propositions comment vérifier cette information. La deuxième nécessite une maîtrise de la dérivation de fonctions et la première est plutôt utilisée quand l'étude de la croissance se fait facilement.

Lors de l'examen, parmi les étudiants ayant une résolution cohérente, 47% ont oublié de vérifier que la valeur obtenue était un extremum et de préciser de quel extremum il s'agissait.

⑥ Conclusion

Pour finir, il ne faut pas oublier après avoir trouvé des solutions mathématiques à notre problème de revenir au problème posé initialement afin d'interpréter celles-ci et donc de vérifier qu'elles sont cohérentes avec le problème posé et d'exclure celles qui ne le sont pas afin de répondre à la question.

Bibliographie

[1] Marc Romainville. Esquisse d'une didactique universitaire. *Revue francophone de gestion*, pages 5–24, 2004.

[2] Aline Robert. Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. In *Recherches en didactique des mathématiques*, volume 18, pages 139–190. 1998.

[3] Michèle Artigue. Apprendre les mathématiques au niveau universitaire : ce que les recherches récentes nous apprennent dans ce domaine. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11 :269–288, 2006.

[4] Frédéric Praslon. Continuités et ruptures dans la transition terminale s/deug sciences en analyse : le cas de la notion de dérivée et son environnement. *Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O*, (3) :1–27, 1999.

[5] Yves Chevallard. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. IUFM d'Aix-Marseille, 1999.

[6] Yves Chevallard. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In *Actes du premier congrès de la théorie anthropologique (Baeza)*, 2007.

[7] Guy Brousseau. *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 1986.

[8] Martine De Vleeschouwer. *Enseignement à l'Université, perspective institutionnelle et contrat didactique. Le cas de la dualité en algèbre linéaire*. PhD thesis, Université de Namur, 2010.

[9] Guy Brousseau. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. In Guy Brousseau, editor, *La théorie des situations didactiques*, Recherches en Didactiques des Mathématiques, pages 115–160. La pensée sauvage, 1998.

[10] Maggy Schneider. *Traité de didactique des mathématiques. La didactique par des exemples et contre-exemples.* Presses Universitaires de Liège, 2008.

[11] Sylvie Jancart, Aude Silvestre, Nicolas Seijkens, and Laurent Leduc. Devices to counter the lack of practice in mathematics in a first year architecture programme. In *Proceedings of the Conference of the European Association for Practitioner Research on Improving Learning (EAPRIL) 2017, Issue 4*, 2018.

[12] David Nicol. *Transforming Assessment and Feedback : Enhancing Integration and Empowerment in the First Year.* Quality Assurance Agency, Scotland, 2008.

[13] Jean-Yves Gantois and Maggy Schneider. Introduire les dérivées par les vitesses. pour qui ? pourquoi ? comment ? *Petit X*, 79, 2008.

[14] Pierre Henrotay and Maggy Schneider. Compte-rendu de l'atelier « mathématiques ». In *Puzzle*, number 30, 2011.

[15] Pierre Henrotay and Maggy Schneider. Problèmes d'optimisation. illustration de quelques catégorisations possibles. Note de cours.

[16] Robert K. Atkinson, Sharon J. Derry, Alexander Renkl, and Donald Wortham. Learning from examples : Instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research*, 70(2) :181–214, 2000.

[17] Yves Chevallard. La théorie anthropologique des faits didactiques devant l'enseignement de l'altérité culturelle et linguistique le point de vue d'un outsider. In *Construction identitaire et altérité : Créations curriculaires et didactique des langues*, 2006.

[18] Christophe Michaut. L'éfficacité des dispositifs d'aide aux étudiants dans les universités. *Recherche et formation*, (43) :101–113, 2003.

[19] Christophe Michaut and Marc Romainville. L'échec dans l'université de masse. *Revue française de pédagogie*, 136 :194–195, 2001.

[20] Jonathan Philippe and Grégoire Wallenborn. Pratique enseignante et savoir enseigné : le mécanisme étrange de la transposition didactique. In *Rencontre d'été du pôle nord-est des IUFM*, 2003.

[21] Dominique Grootaers. Les étapes de la démocratisation scolaire. *Le journal de l'alpha*, (148) :8–15, 2005.

[22] Annie Bessot. Pourquoi s'intéresser aux transitions entre cycles d'enseignement ? comment problématiser les phénomènes didactiques liés à ces transitions ? In *5ième Colloque International Franco-Vietnamien en Didactique des Mathématiques*, 2015.

[23] Luc Trouche, Claire Cazes, Pierre Jarraud, Antoine Rauzy, and Christian Mercat. Transition lycée-université, penser des dispositifs d'appui. *Revue international des technologies en pédagogie universitaire*, 8(1-2) :37–47, 2011.

[24] Mariza Krysinska and Karin Van Wiele. Dérivées. GEM, 2015.

[25] Jean Schmets. *Analyse mathématique*. Université de Liège, 2004-2005. Notes de cours.

[26] Faculté Architecture de l'Université de Liège. Programme détaillé. `https://www.programmes.uliege.be/cocoon/programmes/T1ARCH01_B.html?`

[27] Sylvie Jancart. *Syllabus exercices 1er Bachelier Architecture*. Université de Liège. Note de cours.

[28] Sylvie Jancart. Mathématique. Note de cours.

[29] Philippe Parmentier. *Recherches et actions en faveur de la réussite en première année universitaire*. Presses universitaires de Namur, 2011.

[30] Enseignement Catholique. Programme mathématiques : Troisième degré - 5 et 6 général de transition. `http://admin.segec.be/documents/8015.pdf`.