

Etude de nouvelles fonctionnalités en optimisation topologique

Auteur : Deserranno, Corentin

Promoteur(s) : Duysinx, Pierre

Faculté : Faculté des Sciences appliquées

Diplôme : Master en ingénieur civil mécanicien, à finalité spécialisée en technologies durables en automobile

Année académique : 2018-2019

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/6711>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT
AÉROSPATIAL & MÉCANIQUE
ANNÉE ACADÉMIQUE 2018-2019



Etude de nouvelles fonctionnalités en optimisation topologique

*Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade de master ingénieur civil
mécanicien, à finalité spécialisée en technologies durables en automobile*

DESERRANNO Corentin
20142537

Promoteur : DUYSINX Pierre

Maîtres de stage : BRUYNEEL Michaël

JOSSIEAUX Julie

Membres du jury : BRULS Olivier

ARNST Maarten

Remerciements

Je tiens à remercier, tout d'abord, mon promoteur académique, le professeur Pierre Duysinx pour sa proposition de thème extrêmement innovant et prometteur et pour la pertinence de ses remarques.

Je voudrais ensuite remercier mon promoteur industriel, Michaël Bruyneel. Il m'a intégré à son équipe sur un projet de recherche mais aussi fait profiter de son expérience, de ses idées novatrices, de ses commentaires constructifs et de ses relectures attentives.

De nombreuses autres personnes m'ont également accompagné tout au long de ce travail et parmi elles, Julie Jossieaux. Je n'oublierai jamais son aide, sa disponibilité, sa patience et ses conseils au quotidien, toujours si cruciaux.

Je remercie aussi mes lecteurs, les professeurs Olivier Bruls et Maarten Arnst pour le temps et l'intérêt qu'ils vont, je l'espère, porter à ce travail.

Enfin, j'adresse à mes proches une profonde reconnaissance et gratitude pour leurs relectures et leur indéfectible soutien tout au long de mes cinq années d'études.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Présentation de l'entreprise	2
1.2	Présentation du contexte	2
1.3	Questions abordées et méthodes	2
2	Optimisation des structures	4
2.1	Formulation générale	4
2.2	Optimisation de forme	5
2.2.1	Paramétrisation de la géométrie	5
2.2.2	Paramétrisation du maillage	6
2.3	Optimisation topologique	7
2.3.1	Méthode des "level-sets"	11
2.4	Optimisation topologique multi-matériaux	13
2.5	Optimisation bi-niveaux	13
2.6	Formulations utilisées dans ce travail	14
2.7	Solveur utilisé : NLOpt	16
2.7.1	"Method of Moving Asymptotes" (MMA)	16
2.7.2	"Constrained Optimization BY Linear Approximation" (COBYLA)	17
3	Présentation des logiciels	18
3.1	OOFELIE	18
3.2	ADX	18
4	Présentation de l'application étudiée	19
4.1	Description de l'application	19
4.2	Géométrie	19
4.3	Maillage	20
4.4	Conditions limites	22
5	Convergence de maillage	24
6	Optimisation topologique avec OOFELIE	26
6.1	Variation du pourcentage de matière conservée	26
6.2	Variation de l'exposant de la loi SIMP	29
6.3	Variation de la taille du filtre sur les densités	30
6.4	Optimisation topologique sur l'ensemble de la pièce	34
6.5	Optimisation topologique avec zones non-optimisables	35
6.6	Optimisation topologique multi-matériaux	36
6.7	Optimisation topologique multi-blocs	38
7	T-splines	40
8	Sélection du domaine optimisable	42

9	Optimisation de forme	44
9.1	Optimisation de forme des coordonnées selon l'axe "z"	44
9.2	Optimisation de forme des coordonnées dans le plan "xy"	46
9.3	Optimisation de forme de toutes les coordonnées	48
9.4	Récapitulatif	50
10	Optimisation topologique sur le domaine sélectionné par T-splines	53
10.1	Mono-bloc mono-matériau	53
10.2	Mono-bloc multi-matériaux	54
10.3	Cas complexe : multi-blocs multi-matériaux	55
11	Optimisations découplées	58
12	Optimisation bi-niveaux	61
13	Conclusion et perspectives futures	65

Table des figures

1	Évolution des normes EURO pour des voitures de particuliers <i>source : European Automobile Manufacturers' Association (ACEA)</i>	1
2	Illustration d'une optimisation topologique multi-blocs.	3
3	Différentes sous-classes de l'optimisation des structures.	5
4	Exemple d'une plaque trouée dans le cas d'une optimisation de forme basée sur la géométrie.	6
5	Exemple d'une plaque trouée dans le cas d'une optimisation de forme basée sur le maillage.	6
6	Exemple d'une plaque trouée dans le cas d'une optimisation de forme basée sur le maillage avec une frontière en dents de scie.	7
7	Loi de pénalisation SIMP avec plusieurs valeurs d'exposants p	9
8	Illustration de l'avantage de pénalisation de la loi SIMP avec $p = 3$	9
9	Comparaison de la loi de pénalisation SIMP $p = 3$ avec la loi de pénalisation RAMP $q = 4$ et RAMP $q = 5$	10
10	Représentation schématique du support du level-set et du domaine borné.	11
11	Représentation schématique du level-set et du domaine borné.	11
12	Illustration 2D de la sélection du domaine d'optimisation.	11
13	Illustration 2D de la sélection du domaine d'optimisation à l'aide de deux level-sets.	12
14	Formulation générale d'une optimisation bi-niveaux de type hiérarchique.	13
15	Exemple d'un schéma illustrant le processus d'une optimisation bi-niveaux (forme et topologie).	14
16	Illustration des points de contrôle et du résultat associé d'une courbe (au-dessus) et d'une surface (en-dessous) de type NURBS.	15
17	Illustration d'une optimisation des coordonnées des noeuds du T-mesh.	15
18	Représentation schématique de l'algorithme utilisé pour une optimisation bi-niveaux couplée.	16
19	Procédure itérative pour des optimisations MMA, entre autres.	17
20	Illustration d'un exemple de carter de boîte de vitesses.	19
21	Représentation de la géométrie d'une moitié de carter dessinée dans le logiciel NX.	20
22	Plan des dimensions du carter étudié.	20
23	Division de la géométrie en 5 corps à mailler.	21
24	Représentation du maillage réalisé dans le logiciel NX.	21
25	Représentation des forces extérieures.	22
26	Représentation de l'encastrement.	22
27	Figure pouvant représenter un élément "MEAN" comme un "RBE" en fonction des considérations.	23
28	Définition des éléments "MEAN" dans cette étude.	23
29	Echelle des pseudo-densités valable pour les 3 premières sous-sections.	26

30	Illustration d'une optimisation topologique avec différentes contraintes volumiques (filtre posé à 2 fois la longueur de la maille considérée, loi SIMP exposant 3).	27
31	Compliance en fonction de la contrainte volumique imposée exprimée en pourcentage de matière à conserver.	28
32	Temps de calcul en fonction de la contrainte volumique imposée exprimée en pourcentage de matière à conserver.	28
33	Loi SIMP avec différents exposants p lors d'une optimisation topologique avec une contrainte volumique de 60% et avec, pour le filtre, un voisinage de 2 fois la longueur de la maille considérée.	30
34	Illustration d'une structure en damier dans le cas d'une optimisation topologique (60% volume, loi SIMP exposant 3) sur le carter où le filtre est inactif.	31
35	Solution avec un filtre tenant compte d'un voisinage de 2 fois la longueur caractéristique de la maille permettant la comparaison avec la solution sans filtre.	31
36	Implémentation d'un filtre tenant compte d'un voisinage de x fois la longueur caractéristique de la maille.	33
37	Optimisation topologique aluminium/vide (60%/40%) sans restriction.	34
38	Optimisation topologique aluminium/vide (60%/40%) avec des zones non-optimisables.	35
39	Optimisation topologique bi-matériaux entre de l'aluminium et du plastique (6GPa) avec des zones non-optimisables.	37
40	Optimisation topologique multiblocs : aluminium/plastique (50%/50%) pour la première couche et aluminium/vide (20%/80%) pour les surépaisseurs. Présence des mêmes zones non-optimisables que précédemment.	39
41	T-Mesh où les noeuds (en bleu) et les faces (en rouge) sont numérotés.	40
42	Surface T-spline engendrée par le T-Mesh.	41
43	Zoom sur les renforcements dans la surface T-spline.	41
44	Bloc à partir duquel le domaine d'optimisation est sélectionné.	42
45	Résultat de l'analyse statique de la surface initiale : géométrie globale et déplacements.	42
46	Résultat de l'optimisation de forme des hauteurs : géométrie globale et déplacements.	44
47	Comparaison des coupes avant et après optimisation de forme.	45
48	Convergence de la compliance en fonction des itérations dans le cas d'une optimisation de forme sur les coordonnées z .	46
49	Convergence de la compliance en fonction des itérations dans le cas d'une optimisation de forme sur les coordonnées x et y .	46
50	Résultat de l'optimisation de forme des coordonnées dans le plan "xy" : géométrie globale et déplacements.	47
51	Résultat de l'optimisation de forme de toutes les coordonnées : géométrie globale et déplacements.	48
52	Convergence de la compliance en fonction des itérations dans le cas d'une optimisation de forme sur les coordonnées x , y et z .	49
53	Comparaison des coupes après optimisation de forme selon les coordonnées z et après optimisation de forme sur toutes les coordonnées.	51

54	Optimisation topologique entre de l'aluminium et du vide à parts égales.	53
55	Optimisation topologique multi-matériaux : aluminium/plastique (50%/50%).	54
56	Optimisation topologique multiblocs : aluminium/plastique (50%/50%) pour la première couche et aluminium/vide (20%/80%) pour les surépaisseurs.	56
57	Résultat des optimisations découplées.	59
58	Schéma de l'optimisation bi-niveaux considérée ici.	61
59	Résultat de l'optimisation bi-niveaux.	62
60	Convergence de la compliance au cours des itérations de forme de l'optimisation bi-niveaux.	63
61	Convergence de la compliance au cours des itérations topologiques de l'optimisation bi-niveaux.	63
62	Répartitions des déplacements selon les directions x, y et z.	70

Liste des tableaux

1	Intensités des forces extérieures.	22
2	Résumé du test de convergence de maillage.	24
3	Nombre de noeuds et d'éléments pour les différentes tailles moyennes de mailles investiguées.	24
4	Temps de calcul et compliance en fonction du pourcentage de matière à conserver lors de l'optimisation topologique.	29
5	Coordonnées "z" avant et après optimisation de forme des noeuds 11 à 20 (inclus) et du noeud 35.	45
6	Coordonnées "x" avant et après optimisation de forme des noeuds 11 à 20 (inclus) et du noeud 35.	47
7	Coordonnées "y" avant et après optimisation de forme des noeuds 11 à 20 (inclus) et du noeud 35.	48
8	Coordonnées "x" avant et après optimisation de forme des noeuds 11 à 20 (inclus) et du noeud 35.	49
9	Coordonnées "y" avant et après optimisation de forme des noeuds 11 à 20 (inclus) et du noeud 35.	49
10	Coordonnées "z" avant et après optimisation de forme des noeuds 11 à 20 (inclus) et du noeud 35.	50
11	Tableau récapitulatif de la compliance et du déplacement maximal avant et après les optimisations de forme étudiées ci-dessus.	50
12	Tableau récapitulatif des gains exprimés en pourcentage après les optimisations de forme étudiées ci-dessus.	51
13	Tableau récapitulatif des valeurs de compliance des différents cas et des gains relatifs.	63
14	Caractéristiques de l'ordinateur utilisé pour les premières parties.	68
15	Caractéristiques de l'ordinateur utilisé pour les dernières parties.	68
16	Résumé du test de convergence de maillage avec lecture des déplacements maxima sur l'échelle.	69
17	Tableau récapitulatif des déplacements maxima selon la direction particulière x avant et après les optimisations de forme étudiées.	70
18	Tableau récapitulatif des déplacements maxima selon la direction particulière y avant et après les optimisations de forme étudiées.	71
19	Tableau récapitulatif des déplacements maxima selon la direction particulière z avant et après les optimisations de forme étudiées.	71

1 Introduction

En matière environnementale, les normes imposées par l'Europe sont de plus en plus contraignantes (cf. figure 1) en termes, entre autres, d'émissions de polluants contribuant au réchauffement climatique tels le dioxyde de carbone et les hydrocarbures imbrûlés mais également quant aux polluants atmosphériques qui altèrent la qualité de l'air. La piètre qualité de l'air provient essentiellement de la présence d'oxydes d'azote et de particules fines, émis en grande partie par le secteur de l'automobile [1, 2]. Bien que les études ne s'accordent pas vraiment sur les chiffres exacts, le nombre de décès liés à ces polluants atmosphériques paraît gigantesque : une, voire plusieurs dizaines de milliers par an, rien qu'en Belgique. C'est pourquoi une réduction d'émissions de ces polluants est impérative.

Euro standard	Introduction dates		Petrol		Diesel		Petrol & Diesel
	New approvals	All new registrations	NOx (g/km)	Mass of particles (g/km)	NOx (g/km)	Mass of particles (g/km)	Number of ultra-fine particles per km
Euro 1	1 July 1992	31 December 1992	0.97 ⁽¹⁾	-	0.97 ⁽¹⁾	0.14	-
Euro 2	1 January 1996	1 January 1997	0.5 ⁽¹⁾	-	0.9 ⁽¹⁾	0.1	-
Euro 3	1 January 2000	1 January 2001	0.15	-	0.5	0.05	-
Euro 4	1 January 2005	1 January 2006	0.08	-	0.25	0.025	-
Euro 5	1 September 2009	1 January 2011	0.06	0.0045 ⁽²⁾	0.18	0.0045	6 × 10 ¹¹ (3)
Euro 6	1 September 2014	1 September 2015	0.06	0.0045 ⁽²⁾	0.08	0.0045	6 × 10 ¹¹ (4) (5)

⁽¹⁾ Expressed as HC+NOx.
⁽²⁾ Applicable to direct injection petrol engines.
⁽³⁾ Applicable to diesel engines only.
⁽⁴⁾ Limit of 6 × 10¹² in the case of direct injection petrol engines.
⁽⁵⁾ Common limit of 6 × 10¹¹ for direct injection petrol engines and diesel engines from September 2017/September 2018.

FIGURE 1 – Évolution des normes EURO pour des voitures de particuliers
source : European Automobile Manufacturers' Association (ACEA)

Les solutions techniques destinées à réduire l'émission de polluants du secteur automobile sont diverses mais la réduction de la consommation semble l'une des plus efficaces. En effet, cette action concerne directement la source de tous les polluants émis.

L'optimisation des structures trouve dès lors tout son sens dans l'optique d'une réduction de la consommation des véhicules actuels. En effet, son principal intérêt réside dans un allègement considérable des pièces étudiées qui entraîne une réduction de la masse totale des véhicules et donc de leur consommation.

La masse importe énormément même dans le cas de véhicules utilisant des technologies considérées comme plus respectueuses de l'environnement. Les véhicules électriques, par exemple, possèdent une distance d'autonomie limitée par la capacité de leur batterie. Cette distance limite augmenterait si la masse totale du véhicule diminuait.

L'optimisation vise également à satisfaire au mieux les demandes et attentes du client en développant des produits de plus haute performance.

1.1 Présentation de l'entreprise

"GD-Tech" est l'acronyme de "Global Design Technology". Il s'agit d'un bureau d'ingénieurs-conseils dont la mission principale consiste à fournir des services couvrant l'ensemble du processus du développement de produits. Les services de consultance peuvent être fournis dans les bureaux de l'entreprise ou bien directement chez le client.

Fondée en 1998, "GD-Tech" emploie actuellement environ 200 personnes. Ce nombre est atteint en comptant les différentes filiales de l'entreprise dans les bureaux d'Alleur, de Bordes, les consultants travaillant directement auprès des clients mais aussi les ingénieurs des sous-filiales de "GD-Tech" que sont "Open Engineering" et "Sami Engineering".

Les secteurs d'expertise concernent majoritairement le transport - aéronautique, automobile, naval et spatial - mais peuvent être aussi variés que la défense, les appareils médicaux, le nucléaire ou encore l'éclairage LED.

La spécificité de l'entreprise provient probablement de son département « Sécurité, sûreté et trafic », expert en dynamique rapide applicable à toute optimisation de protections industrielles, aux dispositifs de sécurité routière - glissières, bollards anti-intrusion, ... - à la reconstitution d'accidents ou encore à la gestion du trafic.

Un autre bureau particulier de l'entreprise est le bureau d'études scientifiques regroupant des ingénieurs calculs et se focalisant sur des projets de recherche financés en partie par la Région Wallonne ou l'Europe. Il s'agit du bureau dans lequel ce travail a été réalisé et rédigé.

1.2 Présentation du contexte

Les nouvelles fonctionnalités exposées dans ce travail ont été étudiées dans le cadre d'un projet industriel confidentiel mené par "GD-Tech". Il s'agit de l'optimisation d'un carter de boîte de vitesses. Cette pièce est normalement réalisée d'un seul bloc moulé en aluminium mais le constructeur automobile souhaiterait à présent utiliser une structure plus légère, toujours étanche (pour empêcher la perte d'huile), faite de plastique et d'aluminium.

Au vu de la confidentialité du projet, la géométrie actuelle du constructeur ne peut être dévoilée et l'application de ce mémoire diffère de la pièce industrielle bien qu'elle s'en inspire. Cette application sera plus complètement décrite à la section [4.1](#).

1.3 Questions abordées et méthodes

Au cours de ce travail, une attention toute particulière est accordée aux optimisations de forme et optimisations topologiques. Différentes fonctionnalités de l'optimisation topologique, comme le multi-matériaux et le multi-blocs, sont étudiées. Une optimisation topologique multi-matériaux consiste, comme son nom l'indique, en une optimisation topologique entre plusieurs matériaux, avec ou sans présence de vide. Une optimisation topologique multi-blocs, quant à elle, consiste en une composition d'optimisations topologiques où le choix entre différents matériaux (et le vide) peut différer d'une sous-région à l'autre, comme illustré à la figure [2](#). Ces sous-régions sont couramment appelées blocs.

Un autre objectif prometteur de ce travail réside en la combinaison de ces types d'optimisation (de forme et de topologie), aussi bien de manière découplée que couplée. Ces approches seront d'ailleurs comparées l'une par rapport à l'autre.

En outre, le domaine à optimiser sera imposé à l'aide d'une méthode innovante basée sur la méthode des "level-sets". Ici, une courbe "T-spline" constitue le support qui sert à la création des level-sets. Une T-Spline n'est rien d'autre qu'une "Non-Uniform Rational Basis Spline" (NURBS) qui permet en plus de réaliser des jonctions en forme de "T", d'où son nom (cf. section 2.2).

Material 1 Material 5 Void Bloc n°1	Material 2 Material 1 Material 6 Bloc n°2
Material 3 Material 1 Material 2 Void Bloc n°3	Material 4 Material 7 Material 8 Void Bloc n°4

FIGURE 2 – Illustration d'une optimisation topologique multi-blocs.

La section 2 met en avant les choses connues sur l'optimisation des structures et décrit notamment une méthode innovante employée dans ce travail, basée sur la méthode des "level-sets". Une présentation des logiciels suit à la section 3. A la section 4, l'application est décrite dans son ensemble et une convergence de maillage est alors réalisée à la section 5. A la section 6, différentes optimisations topologiques sont effectuées sur cette application et différents paramètres sont analysés tels que le pourcentage volumique, l'exposant de la loi SIMP, la taille de voisinage du filtre et différentes contraintes volumiques. A la section 7, la T-spline servant de support à la construction du level-set est décrite. La section 8 décrit le procédé de sélection du domaine d'optimisation. Sur ce domaine, diverses optimisations de forme et de topologie sont exécutées aux sections 9 et 10 respectivement. Ensuite, des optimisations de forme et de topologie combinées sont étudiées de manière découplée, soit l'une à la suite de l'autre, à la section 11 et de manière couplée, soit l'une pendant l'autre, à la section 12. Pour terminer, une conclusion des résultats est rédigée et diverses perspectives futures sont abordées.

2 Optimisation des structures

Cette section sert à dépeindre le tableau des choses connues dans le domaine de l'optimisation des structures et permettra donc également d'indirectement mettre en valeur les nouveautés apportées par ce travail.

2.1 Formulation générale

Dans un problème d'optimisation, on minimise (maximise) une ou plusieurs fonctions objectifs tout en respectant un certain nombre de contraintes. Les méthodes d'optimisation reposent généralement sur un socle mathématique important, et ce, peu importe le domaine d'application (logistique, finances, mécanique ...) [3]. Un problème d'optimisation se présente le plus couramment sous la forme suivante [4] :

$$\begin{aligned} \min_{x_i} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_j(x) \leq g_j^{max}, \quad j = 1, \dots, m \\ & h_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, l \\ & x_i^{min} \leq x_i \leq x_i^{max}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

où x_i sont les variables de conception, f est la fonction objectif, $g_j(x)$ et $h_k(x)$ sont respectivement les contraintes d'inégalité et d'égalité. En pratique, les fonctions intervenant dans le problème d'optimisation sont la masse, les déplacements, la première des fréquences propres, les contraintes locales de Von Mises, ...

En mécanique des structures, les solutions analytiques n'existent pas, ou uniquement pour des cas simples. Pour la résolution de problèmes industriels, on recourt à la méthode des éléments finis. L'optimisation est donc basée sur des approches numériques et demande des ressources (informatiques) importantes.

L'optimum est atteint une fois qu'aucun progrès sur la fonction objectif n'est possible sans violer une contrainte [3].

En optimisation des structures, il existe différentes sous-classes, en fonction des éléments de la structure à optimiser, c'est-à-dire les variables de conception. Ces sous-classes sont illustrées à la figure 3 avec, de gauche à droite, l'optimisation de dimensionnement, l'optimisation de forme et l'optimisation topologique respectivement.

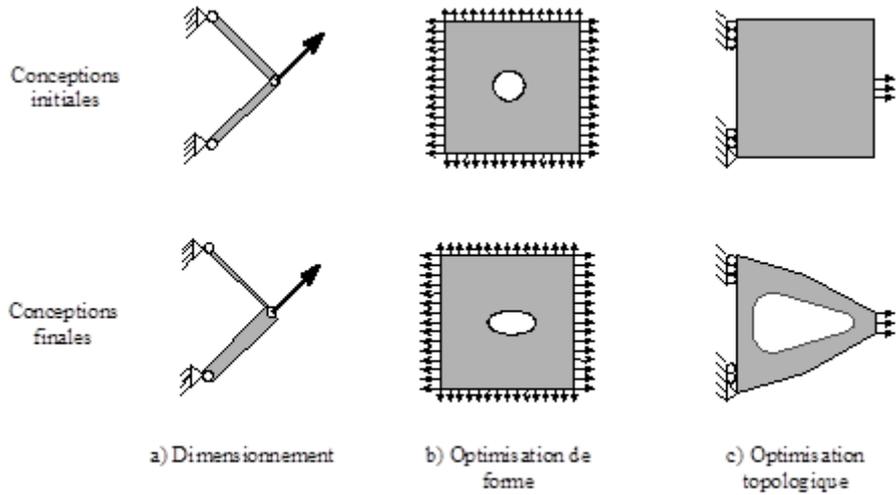


FIGURE 3 – Différentes sous-classes de l'optimisation des structures.

En dimensionnement optimal, figure 3a, on modifie par exemple les aires des sections de barres ou les épaisseurs de coques, sans modifier la forme ni la topologie, autrement dit sans permettre l'apparition ni la disparition d'éléments structuraux ou de trous. Cette sous-classe d'optimisation des structures ne sera pas traitée dans ce travail.

Les optimisations de forme et de topologie sont quant à elles décrites dans les paragraphes suivants.

2.2 Optimisation de forme

L'optimisation de forme (voir figure 3b), comme son nom l'indique, a pour but de trouver la meilleure forme pour un problème donné. L'optimisation de forme a principalement trouvé ses applications dans le secteur aéronautique telle que l'optimisation du profil d'une aile afin de réduire la traînée, le bruit émis ou encore rendre l'appareil furtif [5].

Lorsque l'optimisation de forme géométrique est appliquée à des structures modélisées par éléments finis, le paramétrage peut être lié soit au maillage, soit directement à la géométrie.

2.2.1 Paramétrisation de la géométrie

Lorsque l'optimisation de forme est liée à la géométrie, cela signifie que les paramètres de l'optimisation correspondent à certaines dimensions de cette géométrie qui sont laissées libres d'être ajustées lors de l'optimisation.

Dans le cas, par exemple, d'une plaque trouée comme représentée à la figure 4 ci-dessous, les paramètres peuvent être les deux rayons, R_1 et R_2 , qui conditionnent la taille de l'ellipse, soit ceux qui influencent la frontière du trou de la plaque. Ces paramètres sont définis au niveau CAO (Conception Assistée par Ordinateur), c'est-à-dire dans le modelleur géométrique.

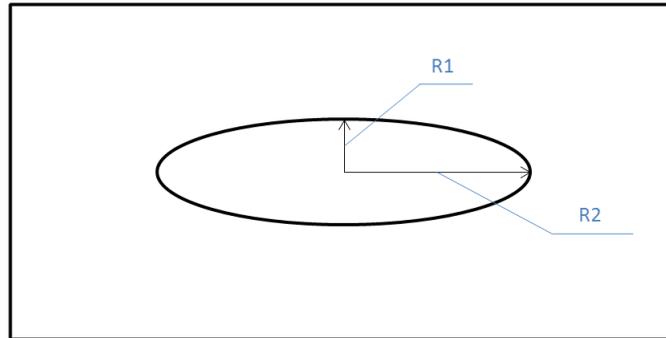


FIGURE 4 – Exemple d’une plaque trouée dans le cas d’une optimisation de forme basée sur la géométrie.

Dans le cas d’un paramétrage lié à la géométrie, les éventuels problèmes d’ordre numérique dans la reconstruction géométrique peuvent conduire à une erreur au cours de l’actualisation de la géométrie [6].

2.2.2 Paramétrisation du maillage

Dans le cas, cette fois, d’une paramétrisation effectuée à partir du maillage, souvent aussi appelée "morphing" en anglais, les paramètres sont les positions/coordonnées des noeuds du maillage.

Toujours dans l’exemple d’une plaque trouée, les paramètres ne sont donc plus les rayons de l’ellipse mais les coordonnées des noeuds de la frontière interne, comme représenté à la figure 5.

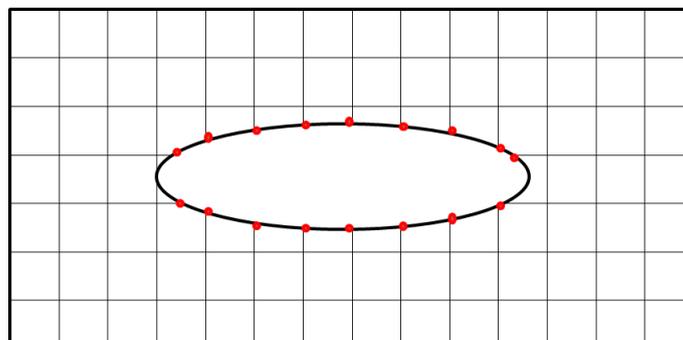


FIGURE 5 – Exemple d’une plaque trouée dans le cas d’une optimisation de forme basée sur le maillage.

Dans le cas d’un paramétrage lié au maillage, le maillage résultant peut être significativement distordu (et même devenir invalide) lors de fortes variations de géométries liées à l’optimisation de forme.

La structure résultante peut par exemple présenter des frontières en dents de scie [6] ainsi que représenté à la figure 6 ci-dessous :

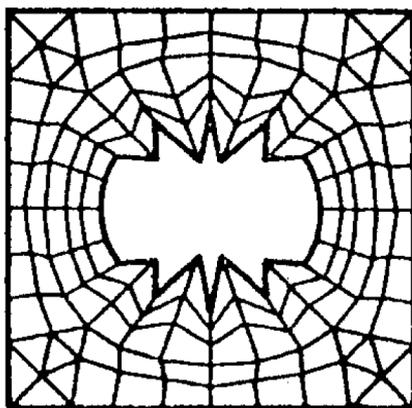


FIGURE 6 – Exemple d'une plaque trouée dans le cas d'une optimisation de forme basée sur le maillage avec une frontière en dents de scie.

2.3 Optimisation topologique

L'optimisation topologique permet de supprimer de la matière du domaine de conception donné, sans aucun a priori, dans le but de minimiser/maximiser l'objectif tout en satisfaisant les contraintes imposées. L'optimisation topologique consiste, de manière plus complète, en la recherche de la distribution optimale des propriétés de matériau(x) dans un domaine de conception défini.

Dans le cas d'une structure représentée par éléments finis, le maillage sert de domaine de conception. Néanmoins, seules les propriétés mécaniques associées à chaque élément varient. Le maillage est alors fixé dans le cadre de l'optimisation topologique.

De plus, aucun élément du maillage n'est supprimé définitivement. En effet, si jamais un élément du maillage était supprimé de manière irréversible, la solution optimale finale pourrait ne plus être atteinte [3].

En mécanique, l'objectif le plus courant de l'optimisation topologique consiste à réduire le poids d'une pièce tout en conservant un maximum de raideur, soit conserver la matière uniquement là où elle est la plus essentielle. L'objectif de masse ou de volume à conserver est fixé par l'utilisateur et s'exprime donc comme une contrainte tandis que la fonction objectif consiste à minimiser la compliance. Cette dernière correspond aux déplacements sous des chargements imposés.

Il existe également la possibilité de minimiser le volume (ou la masse) sous des contraintes de déplacements imposés.

De nombreuses recherches sont réalisées pour prendre en compte les contraintes mécaniques σ (à ne pas confondre avec les contraintes d'optimisation). De nombreux défis persistent effectivement. Par exemple, l'imposition de valeurs maximales pour les contraintes mécaniques conduit à de nombreuses contraintes supplémentaires et la taille du problème devient démesurément grande [3].

Par définition, le problème d'optimisation topologique est de nature discrète. Toutefois, pour raison numérique, les variables de conception sont considérées continues. Ces dernières, appelées "pseudo-densités", peuvent varier entre 0 et 1. Lorsque la pseudo-densité d'un élément est nulle, cela signifie physiquement qu'aucune matière n'est présente à

cet endroit tandis que lorsque cette valeur est unitaire, la matière est bel et bien présente. Les valeurs intermédiaires rendent difficile l'interprétation de la solution mais sont cependant utiles numériquement. D'ailleurs, afin d'éviter les problèmes numériques, les pseudo-densités ne peuvent exactement s'annuler [7].

La formulation la plus classique d'un problème d'optimisation topologique est donc la suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mu} \quad & C \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{g} \\ & V \leq V_{max} \end{aligned}$$

où $C = \mathbf{g}^T \mathbf{q}$ représente la compliance, \mathbf{K} la matrice globale de raideur, \mathbf{q} le vecteur des déplacements nodaux, \mathbf{g} le vecteur des déplacements appliqués et $V = \sum_{i=1}^n \mu_i V_i$ le volume où n est le nombre d'éléments et μ_i et V_i sont respectivement la pseudo-densité et le volume de l'élément i considéré.

En pratique, la pseudo-densité d'un élément i , μ_i , est définie telle que :

$$\rho_i = \mu_i \cdot \rho_0$$

où ρ_0 correspond à la masse volumique du matériau de référence utilisé et où ρ_i correspond donc à la masse volumique effective de l'élément i .

Le module de Young E peut également être exprimé sous cette forme faisant intervenir les variables de conception. La méthode la plus classique est appelée "Simply Isotropic Material with Penalization" (SIMP). Elle présente une grande simplicité et elle s'impose donc naturellement car elle est particulièrement adaptée à la résolution d'optimisations topologiques. Cette méthode consiste en la formule suivante :

$$E_i = \mu_i^p \cdot E_0$$

où l'exposant p , supérieur à l'unité, sert de pénalisation des densités intermédiaires.

En pratique toutefois, la loi SIMP modifiée est préférée pour éviter toute singularité. Elle s'écrit telle que ci-dessous, ce qui signifie que tout élément "vide" possède tout de même un module de Young non nul, à savoir E_{min} .

Cette écriture présente l'avantage que les pseudo-densités peuvent évaluer zéro sans toutefois poser de problèmes numériques [7].

$$E_i = E_{min} + \mu_i^p \cdot (E_0 - E_{min})$$

où, à nouveau, l'exposant p , supérieur à l'unité, sert de pénalisation des densités intermédiaires.

Cet exposant p est également appelé facteur de pénalisation puisque, si la pseudo-densité d'un élément est élevée (> 0.9), il existe un intérêt substantiel à considérer l'élément comme plein. Cela fournira en effet, dans le cas où $p = 3$, un gain de rigidité de 27.1% lié à une augmentation de masse de seulement 10%. Dans le cas contraire, celui d'une faible pseudo-densité (< 0.4), considérer un élément vide n'aura pour conséquence

néfaste qu'une perte de rigidité de 6.4% mais permettra un gain de masse de 40%, toujours dans le cas d'un exposant $p = 3$.

Cet effet est aisément compréhensible à l'aide de la figure 7 qui représente la loi de pénalisation SIMP pour plusieurs valeurs du facteur de pénalisation p et de la figure 8 qui montre l'intérêt significatif de la méthode de pénalisation.

Bien que l'exposant p soit par habitude choisi entier, aucune restriction n'existe et il pourrait très bien être sélectionné comme réel.

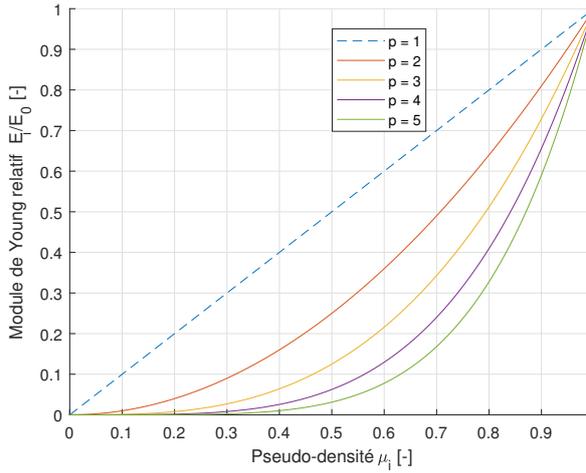


FIGURE 7 – Loi de pénalisation SIMP avec plusieurs valeurs d'exposants p .

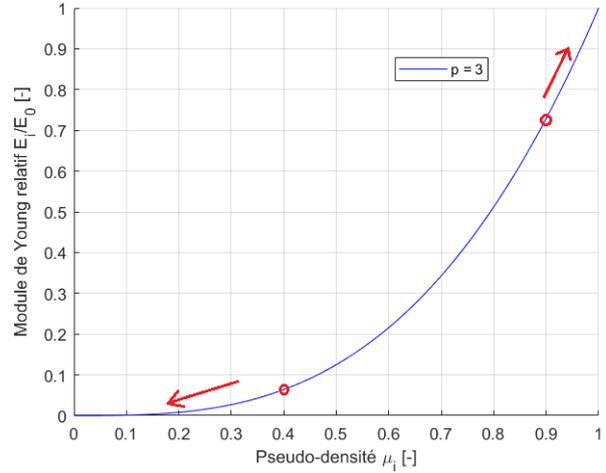


FIGURE 8 – Illustration de l'avantage de pénalisation de la loi SIMP avec $p = 3$.

D'autres méthodes utilisent toutefois la définition de pseudo-densité différemment. Ainsi, la méthode "Rational Approximation of Material Properties" (RAMP) permet notamment de pallier certains manques de la loi SIMP lorsque la masse intervient dans la fonction objectif par exemple. Cette loi s'écrit comme :

$$E_i = \frac{\mu_i}{1 + q(1 - \mu_i)} E_0$$

où q est le facteur de pénalisation également défini par l'utilisateur.

Un exposant $q = 5$ pour la loi de pénalisation RAMP correspond approximativement à un exposant $p = 3$ pour la loi de pénalisation SIMP [8] comme observé à la figure 9 ci-dessous. L'exposant $q = 4$ de la loi RAMP équivaut aussi relativement bien à l'exposant $p = 3$ de la loi SIMP, bien qu'un peu plus éloigné.

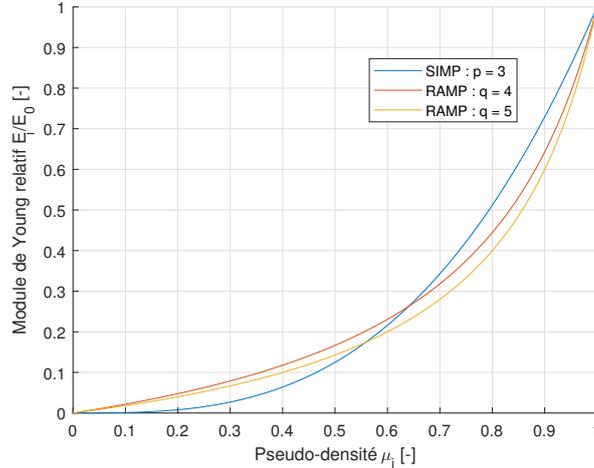


FIGURE 9 – Comparaison de la loi de pénalisation SIMP $p = 3$ avec la loi de pénalisation RAMP $q = 4$ et RAMP $q = 5$.

Des structures parasites en damier, soit des alternances régulières de pseudo-densités de 0 et 1, et/ou présentant des membres structuraux très fins peuvent apparaître.

Il existe plusieurs manières d’éviter l’apparition de ces structures en damier qui compliquent l’interprétation du résultat, par exemple les méthodes de filtres, les plus populaires compte tenu de leur facilité d’implémentation, ou encore les méthodes de contrainte, sur le périmètre par exemple, plus complexes à utiliser de par le réglage de la valeur de contrainte [9].

Dans ce travail, seuls les filtres sur les densités sont considérés.

Un filtre sur les densités correspond à un filtre qui remplace la pseudo-densité de la maille courante par une moyenne entre les pseudo-densités des mailles environnantes. Les mailles environnantes prises en compte dans ce calcul dépendent de la taille du voisinage définie par l’utilisateur. Cette taille de voisinage peut, par exemple, être définie de manière absolue par l’utilisateur qui donne le rayon de la sphère servant à déterminer quelles mailles sont considérées.

Une définition relative indirecte de ce rayon de la sphère est également autorisée. Dans ce cas, le rayon est calculé comme étant le produit entre le paramètre¹ introduit par l’utilisateur et la taille moyenne de la maille considérée. Cette taille moyenne de la maille considérée est calculée, en 3D, comme $(L_x + L_y + L_z)/3$ où $L_{w=x;y;z} = w_{max} - w_{min}$. Les coordonnées minimales et maximales, w_{min} et w_{max} , sont aisément déterminées une fois que les positions de tous les noeuds formant la maille sont récupérées.

Le critère d’arrêt d’une optimisation topologique se base, dans la plupart des cas, sur la variation des variables de conception entre deux itérations. Si, entre deux itérations, la variation maximale des pseudo-densités ne dépasse pas une certaine tolérance, la solution finale est considérée comme atteinte. L’ordre de cette valeur limite est régulièrement choisi entre un centième et un millième.

1. Supérieur à l’unité pour que le filtre soit effectif.

2.3.1 Méthode des "level-sets"

Une méthode relativement récente et innovante a été considérée. Il s'agit de la méthode appelée méthode des "level-sets". Dans un domaine borné (en noir aux figures 10 et 11) qui peut admettre les formes les plus libres, on définit une courbe (en bleu) telle que représentée sur le schéma à la figure 10.

A partir de cette courbe, on peut construire un level-set, représenté en vert à la figure 11.

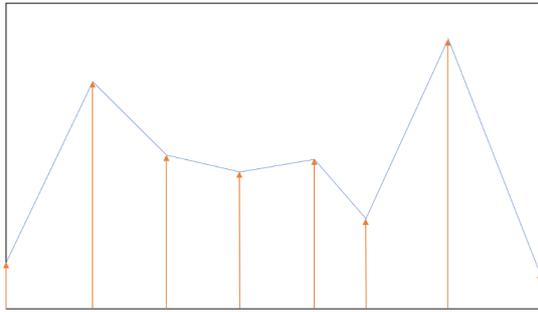


FIGURE 10 – Représentation schématique du support du level-set et du domaine borné.

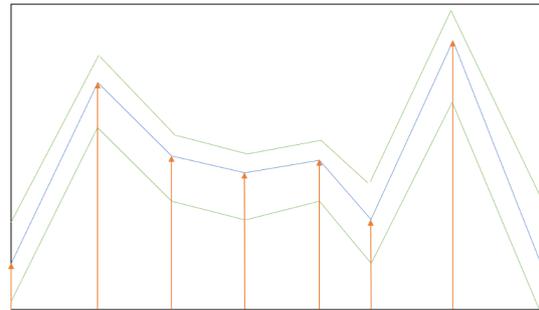


FIGURE 11 – Représentation schématique du level-set et du domaine borné.

La frontière de la géométrie sur laquelle les différentes optimisations seront effectuées est alors paramétrée à l'aide de ce level-set.

La figure 12 en 2D ci-dessous permet de décrire comment se déroule la sélection du domaine sur lequel les diverses optimisations peuvent être réalisées. Le bloc rectangulaire déjà maillé est représenté en noir tandis que la courbe qui sert de support au level-set, une simple courbe linéaire par morceaux dans le cadre de cet exemple, est représentée en bleu.

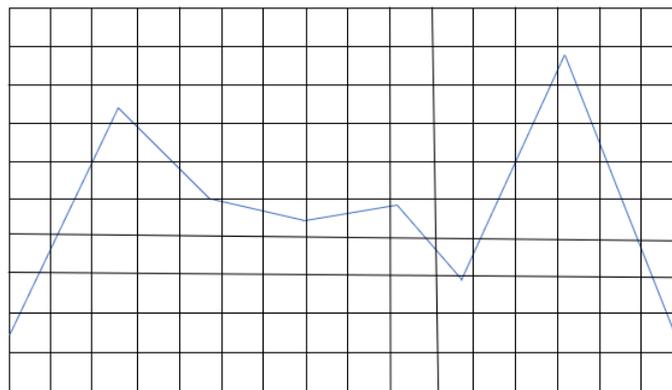


FIGURE 12 – Illustration 2D de la sélection du domaine d'optimisation.

A partir du level-set, les différents éléments du maillage peuvent être déterminés comme activés, c'est-à-dire appartenant au domaine sur lequel les optimisations sont effectuées, ou inactivés et n'appartenant donc pas à ce domaine.

Pour ce faire, plusieurs techniques existent. Deux techniques simples pour commencer :

1. Lorsqu'une partie de l'élément, même minime, est traversée par le level-set, l'élément est considéré comme activé et appartient donc, dans son entièreté, au domaine d'optimisation.
2. Lorsqu'une partie de l'élément, même minime, est traversée par le level-set, l'élément est considéré comme inactivé et n'appartient donc pas, dans son entièreté, au domaine d'optimisation.

Les avantages (de simplicité) et désavantages en résultant sont aisément compréhensibles sans détails supplémentaires.

Une troisième technique, choisie dans cette étude, consiste à considérer la position moyenne. Cette position moyenne correspond à la moyenne arithmétique des coordonnées de tous les noeuds appartenant à l'élément. Si cette position moyenne se situe du côté où l'on conserve les éléments, l'élément reste activé tandis qu'il est inactivé dans le cas inverse.

En pratique, il est également possible d'utiliser deux level-sets de manière similaire à ce qui est représenté à la figure 13 où l'intérieur entre les deux level-sets (en vert) correspond au domaine d'optimisation. Sur cette figure, tous les éléments en mauve sont concernés par le procédé de sélection qui correspond à l'une des techniques décrites au paragraphe précédent.

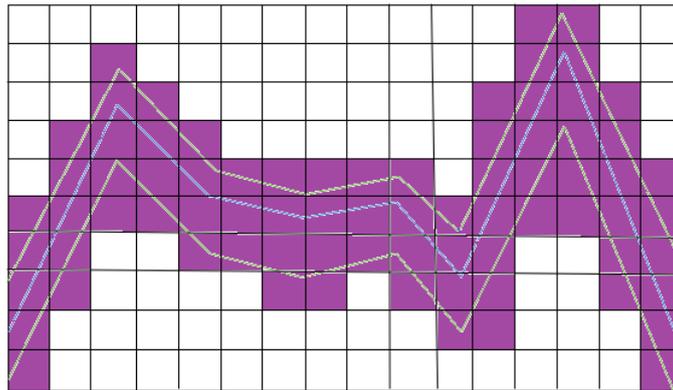


FIGURE 13 – Illustration 2D de la sélection du domaine d'optimisation à l'aide de deux level-sets.

L'un des principaux avantages de la méthode des level-sets est que le domaine considéré est maillé une seule et unique fois. Tout problème de remaillage est donc évité. Dès lors, le coût de cette méthode, en termes de temps de calcul, reste modéré puisqu'elle sélectionne le domaine à partir d'un maillage fixe [10, 11].

Un autre avantage est, comme déjà souligné, que cette méthode des level-sets peut servir à définir un domaine sur lequel on réalise une optimisation de forme ou de topologie. Il est également possible, sur ce même domaine, de réaliser une combinaison d'une optimisation de forme avec une optimisation topologique. Cette dernière remarque est détaillée plus complètement à la sous-section 2.5 relative à l'optimisation bi-niveaux et à la sous-section 2.6 qui reprend les différentes techniques utilisées au cours de cette étude.

2.4 Optimisation topologique multi-matériaux

En se basant sur l'article [12] de Sigmund, une extension de l'optimisation topologique à du multi-matériaux est définie en introduisant une nouvelle variable de conception par élément. En effet, tout comme dans une optimisation topologique entre un matériau et le vide, une variable de conception telle une pseudo-densité définit la présence ou non de matériau. La seconde variable alors introduite sert à sélectionner le matériau de l'élément considéré parmi les différents matériaux autorisés. Cela allonge bien entendu le temps de calcul puisque le nombre de variables de conception double. Cet allongement du temps de calcul reste toutefois limité.

Les deux variables de conception décrites ci-dessus peuvent toujours être pénalisées, par exemple, telles que [13, 14] :

$$E_i = \mu_{i,0}^p \left(\mu_{i,1}^p E_1 + (1 - \mu_{i,1})^p E_2 \right)$$

2.5 Optimisation bi-niveaux

De nombreuses et diverses formulations bi-niveaux existent. Les applications d'optimisation bi-niveaux sont vastes et la majorité d'entre elles peuvent s'écrire sous la forme hiérarchique suivante :

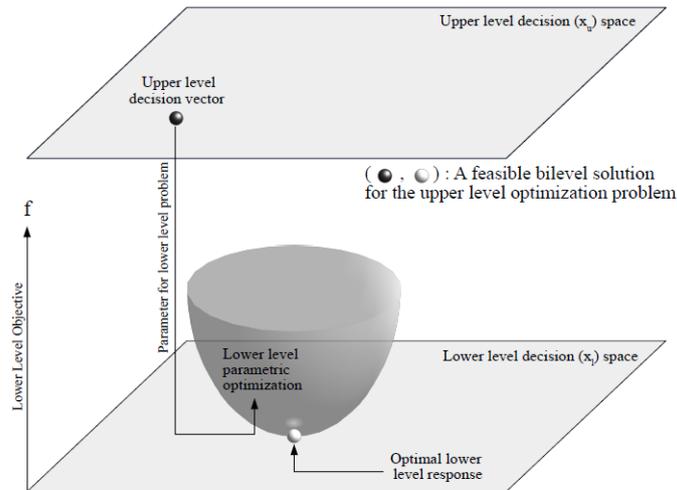


FIGURE 14 – Formulation générale d'une optimisation bi-niveaux de type hiérarchique.

Cette figure montre que le résultat de toute décision ou solution provenant de "l'autorité supérieure", afin d'optimiser ses objectifs, est affecté par la réponse des "entités inférieures" qui cherchent, elles aussi, à optimiser leurs objectifs [15]. Bien entendu, les décisions de la hiérarchie se voient également impactées par les choix des subordonnés.

L'optimisation bi-niveaux possède l'avantage d'autoriser un objectif double. Par exemple, un objectif aérodynamique, e.g. de minimisation de la traînée ou maximisation de la portance, et un objectif de réduction de masse. Ce précédent exemple illustre parfaitement pourquoi un des secteurs intéressés est l'aéronautique, et le transport de manière plus globale.

En optimisation des structures, une optimisation bi-niveaux consiste généralement à combiner une optimisation de forme avec une optimisation topologique.

Un schéma qui illustre le fonctionnement d'un tel processus est repris à la figure 15. Il provient de la référence [16].

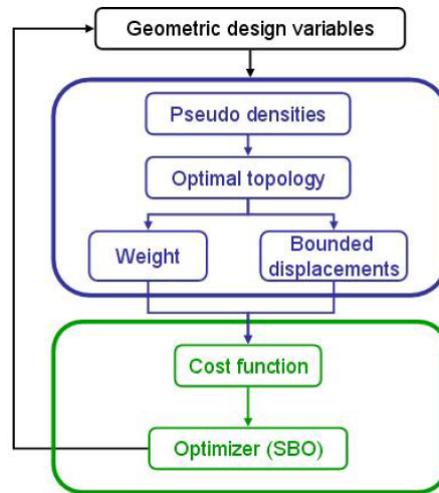


FIGURE 15 – Exemple d'un schéma illustrant le processus d'une optimisation bi-niveaux (forme et topologie).

Il existe deux niveaux de variables de conception. Le premier (encadré noir) inclut les paramètres géométriques globaux alors que le second (encadré bleu) inclut les pseudo-densités utilisées pour l'optimisation topologique.

Les variables de conception géométriques impactent bien entendu le résultat de l'optimisation topologique de manière importante et inversement.

Les critères d'arrêt peuvent être définis indépendamment l'un de l'autre : un critère pour l'optimisation de forme géométrique et un autre, éventuellement différent, pour l'optimisation topologique sans que cela entraîne des soucis de cohérence.

2.6 Formulations utilisées dans ce travail

Cette sous-section reprend les différents points d'état de l'art abordés ci-dessus qui sont utilisés au cours de ce travail.

Tout d'abord, l'optimisation topologique de type classique est utilisée avec la loi de pénalisation SIMP et un filtre sur les densités où le voisinage est défini de manière indirecte comme décrit à la sous-section 2.3.

Le critère d'arrêt est imposé sur les variables de conception avec une valeur d'un millième.

Ensuite, plusieurs optimisations de forme paramétriques basées sur la géométrie sont effectuées sur un domaine de conception défini à l'aide de la méthode des level-sets. Le support utilisé pour la création des level-sets est une T-spline.

La catégorie des T-splines est une catégorie de la famille des "Non-Uniform Rational Basis Splines" (NURBS). Par rapport à une NURBS, une T-spline permet en plus, de

réaliser des jonctions en forme de "T", d'où son nom. Comme une NURBS, elle est définie par des points de contrôle.

L'avantage résultant est que la représentation d'une surface complexe nécessite moins de points de contrôle [17].

Une illustration des points de contrôle et du résultat associé d'une courbe NURBS et d'une surface NURBS est représentée à la figure 16 ci-dessous.

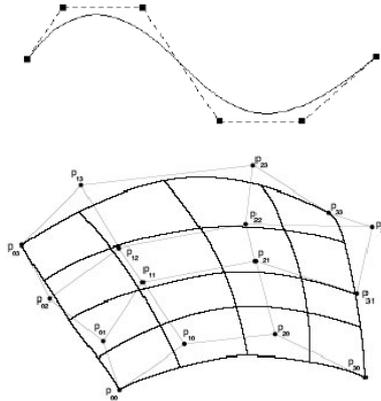


FIGURE 16 – Illustration des points de contrôle et du résultat associé d'une courbe (au-dessus) et d'une surface (en-dessous) de type NURBS.

L'optimisation de forme peut alors porter sur les coordonnées des points de contrôle qui définissent la (ou les) T-spline(s) comme illustré ci-dessous, et plus complètement décrit à la section 8.

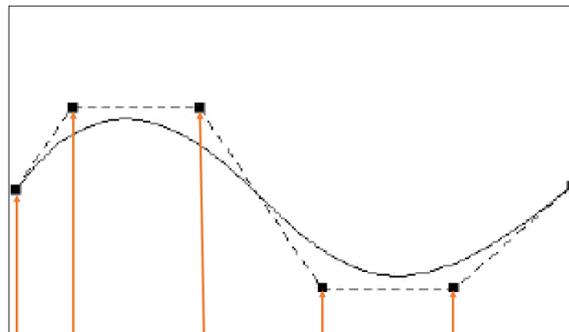


FIGURE 17 – Illustration d'une optimisation des coordonnées des noeuds du T-mesh.

Dans la pratique ici, deux level-sets sont utilisés de manière similaire à ce qui est représenté à la figure 13 où l'intérieur entre ces deux level-sets correspond au domaine d'optimisation topologique. La technique de sélection des éléments appartenant (ou non) au domaine est basée sur la position moyenne de l'élément comme décrit à la sous-section 2.3.1.

Sur le domaine résultant, aussi bien des optimisations de forme que de topologie peuvent être réalisées. Ces optimisations peuvent également être combinées, soit de manière découplée où une optimisation topologique est effectuée sur la forme optimale, soit

de manière couplée. Lorsqu'elles sont couplées, cela signifie ici qu'une optimisation topologique entière est réalisée après qu'une itération sur les paramètres géométriques de l'optimisation de forme soit exécutée.

Les dimensions du domaine optimisable, qui varient lors d'une optimisation de forme, impactent nettement l'optimisation topologique [16].

Dans tous les cas étudiés ici, la fonction objectif ne sera pas le poids ("weight"), comme illustré à la figure 15, mais la compliance et les contraintes ne seront pas des déplacements limites ("bounded displacements") mais des pourcentages volumiques de matière à conserver.

L'algorithme utilisé dans ce travail peut ainsi se résumer par la représentation schématique suivante :

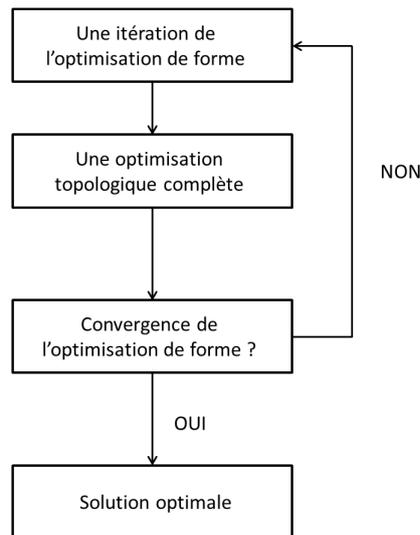


FIGURE 18 – Représentation schématique de l'algorithme utilisé pour une optimisation bi-niveaux couplée.

Remarquons finalement que la fonction objectif à minimiser considérée dans tous les cas présentés dans ce travail est la compliance tandis que les contraintes s'expriment toutes sous forme de pourcentages volumiques de matière à conserver.

2.7 Solveur utilisé : NLOpt

NLOPT est une bibliothèque en accès libre qui regroupe plusieurs méthodes d'optimisation. Deux méthodes d'intérêt qui sont utilisées dans ce travail sont la "Method of Moving Asymptotes" (MMA), soit la méthode des asymptotes mobiles en français et COBYLA, acronyme anglais de "Constrained Optimization BY Linear Approximation".

2.7.1 "Method of Moving Asymptotes" (MMA)

Cette méthode est utilisée pour la résolution de toutes les optimisations topologiques réalisées dans ce travail.

En premier lieu, il convient de choisir un point de départ. Ensuite, à chaque itération, une approximation explicite du problème à résoudre est générée à partir d'un point

donné et forme un sous-problème. Dans ce dernier, les fonctions objectifs et contraintes sont approximées sous la forme de fonctions convexes. Ces approximations sont principalement basées sur les gradients de l'itération courante mais aussi (implicitement) sur les informations des précédentes itérations. Le sous-problème est alors résolu et donne lieu à une unique solution optimale qui devient le nouveau point à partir duquel un sous-problème est formé, et ainsi de suite [18, 19]. Le processus est interrompu lorsque le critère de convergence est atteint ou simplement lorsque l'utilisateur est satisfait de la solution actuelle.

Un schéma général de la procédure itérative d'optimisations utilisant des approximations, dont MMA entre autres, est illustré ci-dessous à la figure 19 et provient de [20].

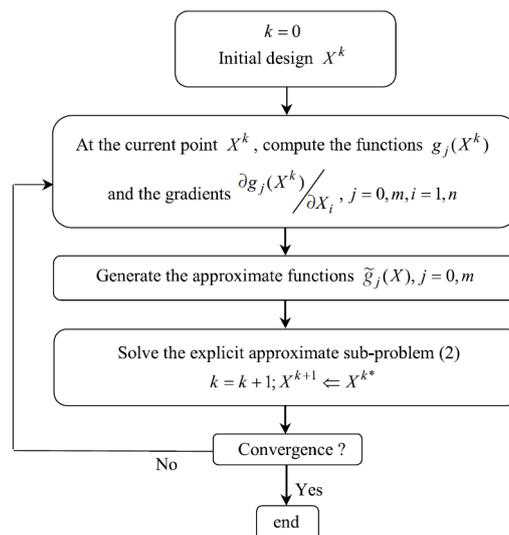


FIGURE 19 – Procédure itérative pour des optimisations MMA, entre autres.

2.7.2 "Constrained Optimization BY Linear Approximation" (COBYLA)

Cette méthode est utilisée pour la résolution de toutes les optimisations de forme réalisées dans ce travail.

Il s'agit d'une méthode n'utilisant aucune dérivée. L'algorithme utilise des approximations polynomiales linéaires des fonctions objectifs et des contraintes. L'échantillon est composé de points aux sommets d'un simplexe [21]. A chaque itération, un nouveau vecteur de variables peut remplacer un des sommets du simplexe, soit parce qu'il permet d'améliorer la forme, soit parce que c'est le meilleur vecteur trouvé jusqu'à présent. Cette notion de "meilleur vecteur" se définit à l'aide d'une fonction mérite, favorisant la limitation de la plus grande violation. Un intervalle de confiance est utilisé et permet de limiter les variations des variables de conception. La taille de cet intervalle de confiance ne peut jamais croître mais, au contraire, décroît lorsqu'un simplexe bien conditionné échoue à améliorer les variables. La procédure se termine lorsque la taille de l'intervalle de confiance atteint la taille minimale définie par l'utilisateur. L'algorithme est aisé à utiliser mais seulement pour un nombre restreint de variables sans quoi les approximations linéaires deviennent inefficaces [22].

3 Présentation des logiciels

3.1 OOFELIE

OOFELIE, acronyme de "Object Oriented Finite Element Led by Interactive Executor", est un logiciel éléments finis multiphysiques développé par "Open Engineering" et capable de s'intégrer notamment à l'interface du logiciel NX. C'est en effet l'interface de NX qui a été utilisée pour la modélisation géométrique, la réalisation du maillage et l'imposition des conditions limites concernant l'application du carter de la boîte de vitesses.

Ce programme apporte des avantages énormes lors d'études multi-physiques qui regroupent la thermique, la mécanique, l'acoustique mais aussi les combinent en vibro-acoustique par exemple. Ce programme permet encore de modéliser l'interaction fluide-structure.

3.2 ADX

Le logiciel ADX ("Automated Design eXplorer") consiste en une multitude d'outils et est également développé par "Open Engineering". Il s'agit en réalité d'une interface graphique permettant de réaliser aussi bien des modifications de paramètres définies par l'utilisateur que des plans d'expérience ou des optimisations dans l'espace de conception de manière automatisée.

ADX permet notamment de réaliser des optimisations de forme accompagnées, soit d'un étirement de maillage ("morphing") qui maintient les mêmes éléments et connectivités en changeant la position des noeuds, soit de la réalisation d'un nouveau maillage dans son entièreté ("remesh"). Toutefois, ADX démontre toute sa puissance lors de toute optimisation bi-niveaux où une optimisation topologique est réalisée à chaque itération de l'optimisation de forme, soit à l'intérieur même du processus itératif de forme.

4 Présentation de l'application étudiée

Dans cette section, la modélisation de l'application du carter via l'interface du logiciel NX est décrite, aussi bien la géométrie que le maillage ou encore les conditions limites.

4.1 Description de l'application

L'application étudiée dans le cadre de ce travail est un carter de boîte de vitesses, soit le composant entourant le système de transmission qui permet de supporter les éléments mécaniques en mouvement, de les protéger de l'environnement extérieur (pas d'intrusion) et de contenir le lubrifiant de manière étanche.

Dans une moindre mesure, le carter sert également de barrière sonore et facilite l'installation du système de transmission dans son ensemble.

La figure 20 ci-dessous illustre un tel composant.



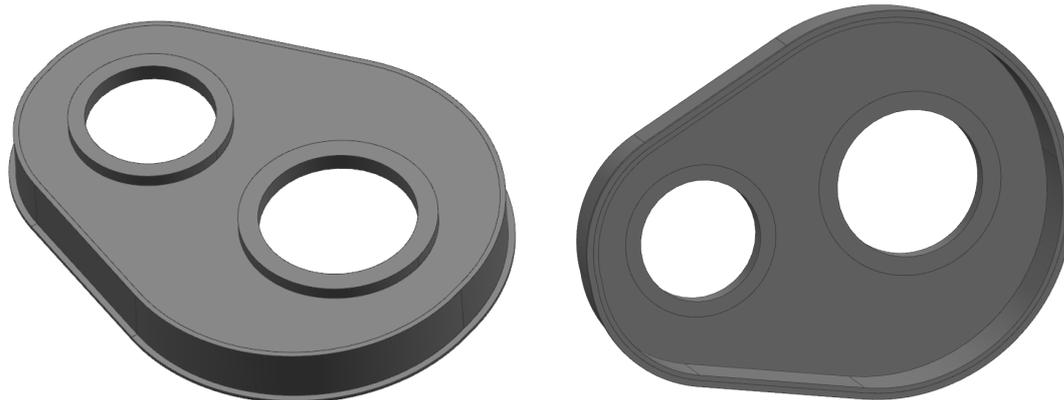
FIGURE 20 – Illustration d'un exemple de carter de boîte de vitesses.

Le carter est généralement constitué de deux moitiés symétriques moulées en aluminium. C'est pourquoi une seule moitié du carter est étudiée au cours de ce travail. Rappelons que l'objectif du constructeur, à terme, est de considérer plusieurs matériaux lors de la fabrication de cette pièce.

4.2 Géométrie

La géométrie du carter a été réalisée à partir d'un fichier CATIA disponible sur le site GRABCAD. Des simplifications ont alors été imaginées, principalement dans le but d'éliminer des parties non désirées ou des parties n'apportant aucune information. Ces dernières n'auraient alors fait que ralentir tous les calculs réalisés par la suite sans aucune influence sur le résultat d'optimisation. Les chanfreins, congés de raccordement et trous de fixation ne sont pas représentés car ils compliquent inutilement le maillage puisqu'aucun intérêt n'est porté aux concentrations de contraintes présentes dans ces zones dans la formulation du problème d'optimisation. Le résultat peut être observé à la figure 21 et les dimensions à la figure 22.

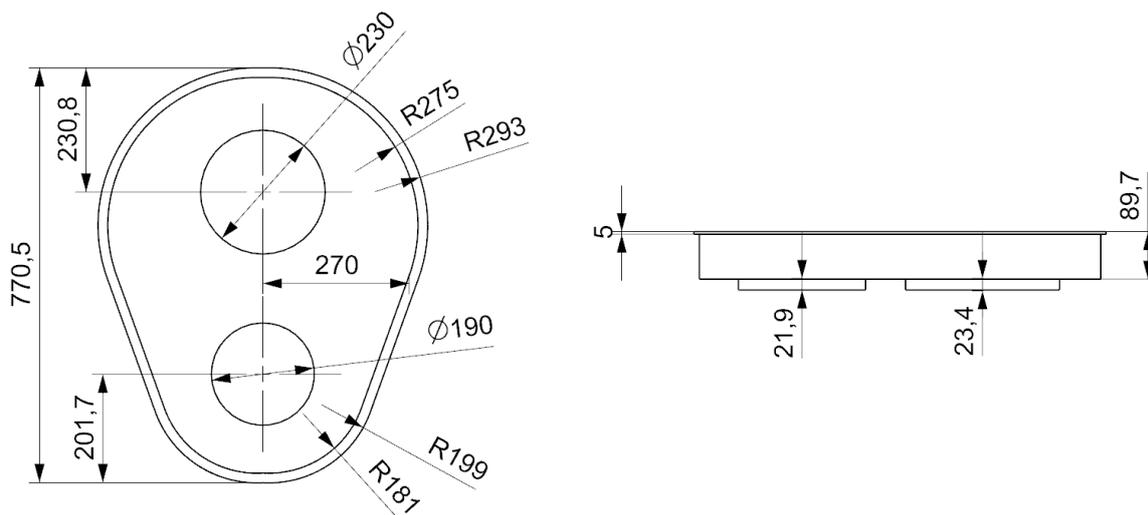
En outre, l'assemblage des deux moitiés symétriques est orienté parallèlement aux arbres et réalisé à l'aide d'un système de fixation classique de type vis. Ces éléments de fixation ne sont pas non plus représentés par souci de simplification.



(A) Vue de la surface externe

(B) Vue de la surface interne

FIGURE 21 – Représentation de la géométrie d’une moitié de carter dessinée dans le logiciel NX.



(A) Vue du dessus

(B) Vue latérale

FIGURE 22 – Plan des dimensions du carter étudié.

4.3 Maillage

Premièrement, le corps est séparé en 5 parties différentes (voir figure 23) afin de réaliser un maillage hexaédrique le plus régulier possible, notamment aux pourtours des trous car les forces s’appliquent au centre des trous comme décrit à la sous-section suivante. Un maillage hexaédrique est souhaité non seulement pour une meilleure qualité d’éléments mais aussi pour une question de visualisation des résultats des optimisations topologiques. Les éléments tétraédriques ont donc été évités le plus possible.

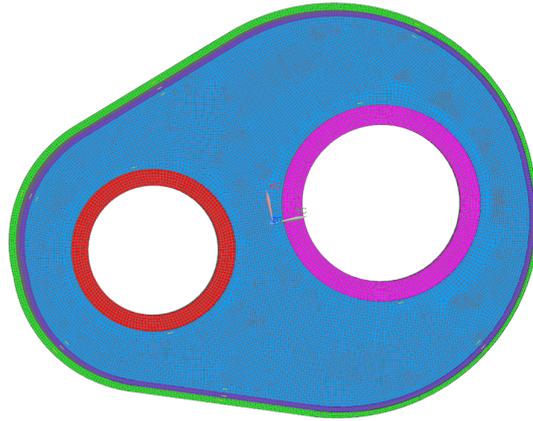
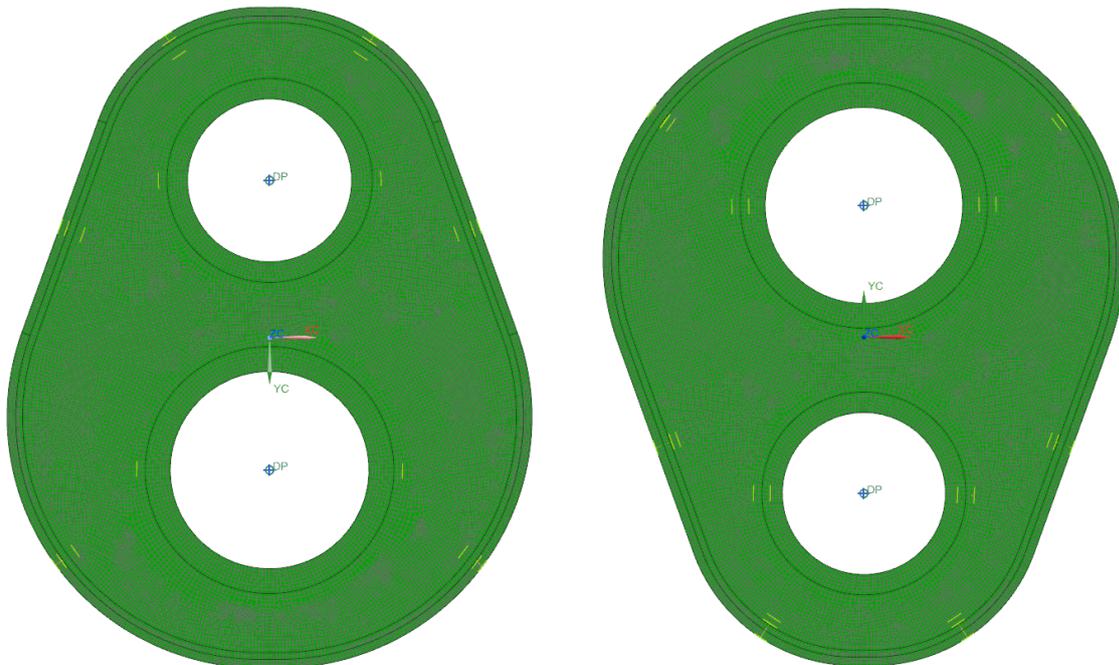


FIGURE 23 – Division de la géométrie en 5 corps à mailler.

En outre, les éléments hexaédriques sont choisis comme étant du second ordre afin, entre autres, de représenter la flexion le plus précisément possible.

Les maillages des différents corps doivent impérativement être connectés pour respecter la physique de la structure. Cette connectivité est garantie en imposant un maillage coincident ("*mesh mating conditions > glue coincident*") représenté en vert clair à la figure 24 et, dans une moindre mesure, à la figure 25. Imposer un maillage conforme revient à imposer que chaque noeud d'un des corps soit obligatoirement relié à un noeud du second corps, et non, par exemple, au milieu d'une arête de ce second corps.

Il semble dès lors intéressant d'imposer une taille de maille moyenne identique partout. Cette taille moyenne commune possède également du sens au regard de l'optimisation topologique, notamment pour une question de visualisation de résultats.



(A) Vue de la surface externe

(B) Vue de la surface interne

FIGURE 24 – Représentation du maillage réalisé dans le logiciel NX.

4.4 Conditions limites

La fixation se fait sur tout le pourtour (cf. figure 26) ou surépaisseur appelée "flange", servant à l'assemblage des deux parties du carter dont, pour rappel, une seule est considérée ici. Il semble en effet non utile de complexifier le problème en encastrant le flange en certains points uniquement. Cela induirait en effet des problèmes de définition des conditions limites lorsqu'on réalisera des optimisations de forme basées sur les T-splines. Bien qu'encastrer tout le pourtour ait pour effet de légèrement rigidifier l'ensemble de la structure, les concentrations de contrainte dans cette région ne sont pas ici prises en compte lors de la résolution des problèmes d'optimisation. En effet, ce bord extérieur sera par définition parmi les zones non-optimisables et fabriqué en aluminium dans tous les cas.

Précisons encore que la fixation correspond bien à un encastrement et que tous les degrés de liberté sont donc bloqués.

Un seul cas de chargement général est étudié dans ce travail. Les forces sont appliquées selon les trois axes du repère aux deux centres des trous. Il existe donc un couple non appliqué directement mais bel et bien pris en compte dans les directions et l'intensité de ces forces. Ces dernières sont d'intensités comparables à celles données par le constructeur automobile pour le projet industriel mené par GDTech. Les forces s'appliquent comme représenté à la figure 25 ci-dessous :

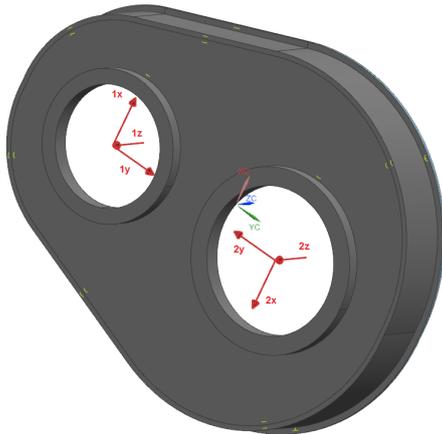


FIGURE 25 – Représentation des forces extérieures.

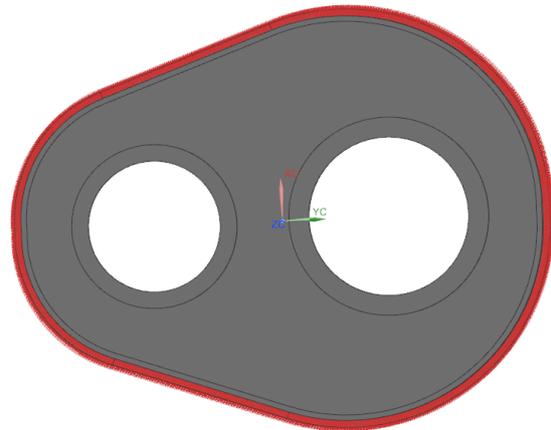


FIGURE 26 – Représentation de l'encastrement.

Les intensités des forces représentées à la figure 25 ci-dessus, sont reprises à la table 1 ci-dessous.

FORCE	Au point 1	Au point 2	Rapport entre les deux
Selon l'axe "x"	0.46 F	0.17 F	2.7
Selon l'axe "y"	1.00 F	0.29 F	3.4
Selon l'axe "z"	0.86 F	0.06 F	14.3

TABLE 1 – Intensités des forces extérieures.

où F est une valeur en Newtons qui n'est pas dévoilée pour raison de confidentialité.

Lors de la création du maillage, un noeud a été créé à chaque centre des trous afin d'y appliquer les forces. Il a ensuite fallu relier ce noeud au reste du maillage. Pour ce faire, des "Averaged Kinematic Constraint Elements", appelés éléments "MEAN", ont été sélectionnés. Ces éléments sont utilisés dans le but de déterminer les translations et rotations moyennes d'un groupe de noeuds. Contrairement aux éléments rigides où un groupe de noeuds est contrôlé par un noeud "maître", dans les éléments "MEAN", la position d'un noeud "esclave" est contrôlée par un groupe de noeuds "maîtres" [23].

La figure ci-dessous peut correctement décrire un élément "MEAN" si le noeud bleu central est le noeud esclave et les noeuds alentours, en rouge, le groupe de noeuds maîtres. Cette figure peut néanmoins également représenter un "Rigid Body Element" (RBE), soit un élément rigide en français, si ce même noeud central (en bleu) est considéré comme le noeud maître et le groupe de noeuds rouges alentours, les noeuds esclaves.

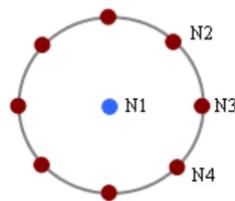


FIGURE 27 – Figure pouvant représenter un élément "MEAN" comme un "RBE" en fonction des considérations.

L'explication de la définition des éléments "MEAN" dans cette étude semble simple et suffisante à l'aide de la figure 28 ci-dessous.

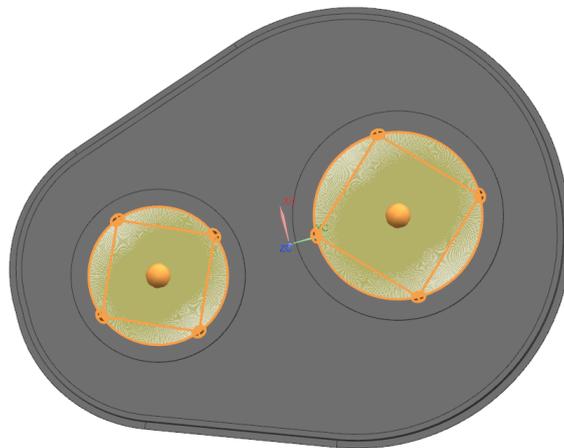


FIGURE 28 – Définition des éléments "MEAN" dans cette étude.

5 Convergence de maillage

Le but de cette section est de déterminer un maillage suffisamment convergé que pour donner des résultats corrects. Pour ce faire, une analyse statique a été réalisée sur la géométrie du carter avec le maillage et les conditions limites décrites dans la section ci-dessus. Les différentes tailles moyennes de maille testées et les valeurs de déplacement associées sont reprises à la table 2. Les déplacements ont tous été relevés au même point, sur la ligne joignant les deux centres de trous, juste au bord du trou le plus chargé. Les valeurs sont donc très proches des déplacements maxima mais non sélectionnées comme celles renseignées par l'échelle afin d'éviter toute erreur éventuelle.²

L'erreur relative est calculée par rapport au maillage le plus fin testé et est également affichée à la table 2. Ce maillage le plus fin testé, dont la taille de maille moyenne est de 3 millimètres est constitué de 926181 noeuds, 188737 éléments et 2747331 degrés de liberté. Il ne peut pas être raffiné pour atteindre une taille moyenne de maille de 2 millimètres, non supportée par le logiciel. Les nombres de noeuds et d'éléments pour toutes les tailles de maillage envisagées sont tous repris à la table 3.

Taille moyenne de maille [mm]	Déplacements [mm]	Erreur relative [%]	Temps [s]
20	1.6427	7.45	4.98
15	1.7001	4.21	7.17
10	1.7209	3.04	15.17
8	1.7293	2.57	25.36
6	1.7336	2.33	52.49
4	1.7640	0.61	227.10
3	1.7749	0.00	1758.13

TABLE 2 – Résumé du test de convergence de maillage.

Taille moyenne de maille [mm]	Nombre de noeuds	Nombre d'éléments
20	12461	1870
15	20226	2986
10	42075	6424
8	67529	10508
6	126968	20560
4	396031	74048
3	926181	188737

TABLE 3 – Nombre de noeuds et d'éléments pour les différentes tailles moyennes de mailles investiguées.

2. Finalement dans ce cas, la lecture des déplacements maxima sur l'échelle n'induisait pas d'erreur significative (voir table 16 dans les annexes).

En optimisation topologique, il n'est pas nécessairement important d'avoir une convergence de maillage parfaite étant donné que le résultat de l'optimisation ne peut être exploité tel quel et qu'une étude de la nouvelle géométrie doit être effectuée avant d'obtenir des valeurs de déplacements et de contraintes mécaniques semblables à la réalité. Toutefois, la représentation correcte de la raideur doit être impérativement assurée. Puisqu'il s'agit d'un calcul d'erreur relative par rapport au meilleur maillage testé et non par rapport aux déplacements réels en ce point, le premier maillage admettant une erreur de moins de 1% est sélectionné, soit celui correspondant à une taille de maille moyenne de 4 millimètres, surligné dans les tables 2 et 3. Le temps de calcul pour une analyse statique lié à cette taille moyenne de maille reste acceptable, moins de 4 minutes, bien que l'on observe déjà une hausse par rapport au temps de calcul pour une taille moyenne de maille de 6 millimètres. Cette hausse devient d'ailleurs plus importante lorsque la taille moyenne de maille passe de 4 millimètres à 3 millimètres. Un raffinement de maillage est dès lors à éviter si possible, sous peine d'une élévation vraiment significative du temps de calcul.

6 Optimisation topologique avec OOFELIE

Cette section sert à présenter les résultats des différentes optimisations topologiques réalisées sur le carter de la boîte de vitesses.

Une première partie est consacrée à la variation du pourcentage de matière conservée. Elle est suivie d’investigations sur les valeurs à sélectionner pour le filtre sur les densités ainsi que sur l’exposant de la loi de pénalisation SIMP. Pour ces trois premières sections, aucune zone non-optimisable n’est imposée et l’échelle des pseudo-densités est identique. Cette dernière est affichée à la figure 29.

Ensuite, les résultats d’optimisations topologiques sous diverses conditions sont présentés, y compris les résultats d’optimisations multi-matériaux et/ou multi-blocs.

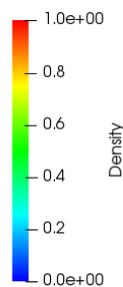


FIGURE 29 – Echelle des pseudo-densités valable pour les 3 premières sous-sections.

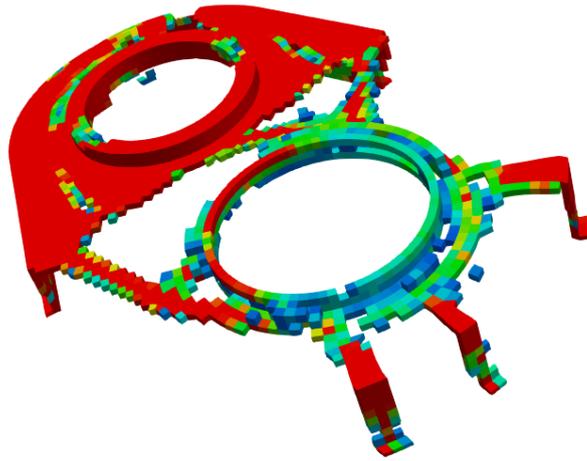
Dans cette section, la fonction objectif est toujours la minimisation de la compliance et les contraintes s’expriment sous forme d’un pourcentage volumique à respecter. Ce dernier varie dans la première sous-section et au cours des sous-sections mais est toujours précisé.

6.1 Variation du pourcentage de matière conservée

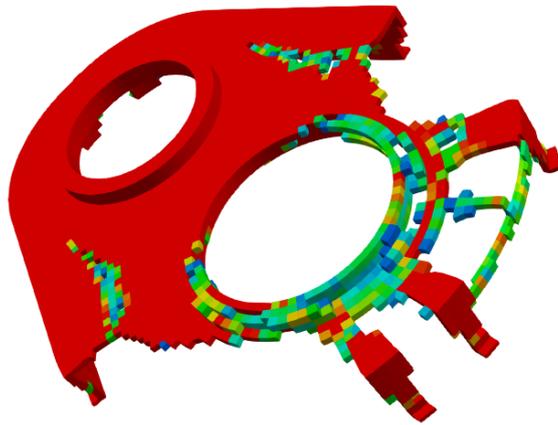
Les figures 30a, 30b et 30c illustrent l’effet d’une variation de la contrainte volumique fixée à 40%, 60% et 80% respectivement. Les pseudo-densités inférieures à 0.1 ne sont pas affichées ici contrairement aux pseudo-densités intermédiaires.

Au vu des résultats, on observe que la matière est prioritairement conservée aux alentours du petit logement de palier ce qui semble tout à fait cohérent avec les forces imposées reprises à la table 1 dans la section 4.4. Par la suite, l’optimiseur privilégie le renforcement entre les deux logements de palier.

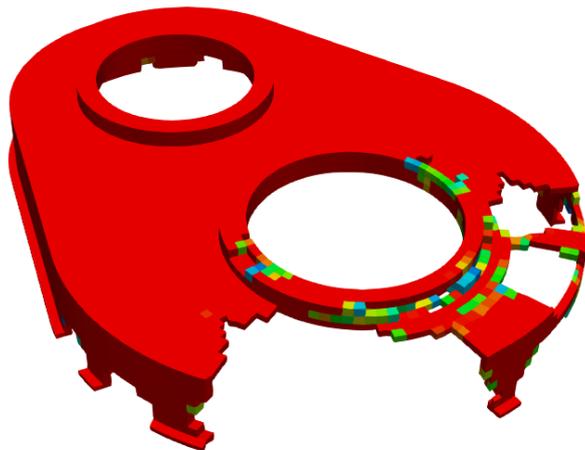
En outre, l’apparition de raidisseurs, sous forme de pattes notamment dans la région du grand logement de palier, est très nette et varie en fonction du pourcentage de matière à conserver imposé.



(A) 40%



(B) 60%



(C) 80%

FIGURE 30 – Illustration d’une optimisation topologique avec différentes contraintes volumiques (filtre posé à 2 fois la longueur de la maille considérée, loi SIMP exposant 3).

Logiquement, la compliance augmente lorsque le pourcentage de matière à conserver diminue. Elle passe en effet de 8.28 [J] pour 80% de matière conservée à 9.71 [J] pour 60% et 16.52 [J] pour 40%. Il reste intéressant de remarquer que l'évolution n'est pas linéaire et qu'une réduction de matière de 80% à 60% impacte moins significativement la raideur en comparaison d'une réduction de 60% à 40% qui la réduit plus nettement.

Remarquons que la compliance pour le modèle initial, soit celui avec 100% de matière conservée, possède une compliance de 7.97 [J].

L'évolution de la compliance est reprise sur le graphique à la figure 31 ci-dessous et confirme que la tendance n'est pas du tout linéaire. Comme déjà constaté, plus la réduction de matière s'effectue pour des pourcentages de matière à conserver faibles, et plus la hausse de compliance est importante.

Les valeurs de compliance ayant servi à la création du graphe sont toutes reprises à la table 4, excepté celle correspondant à 100% de matière puisqu'aucune optimisation topologique n'est nécessaire dans ce cas.

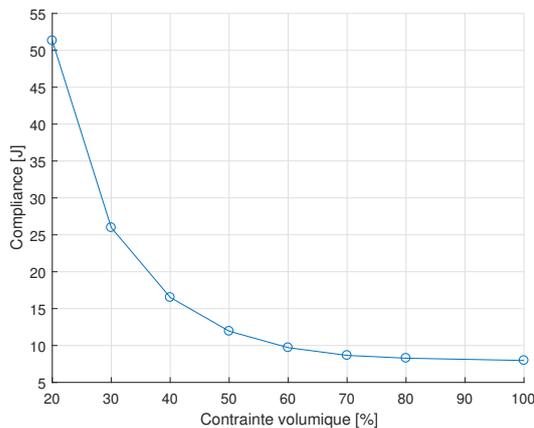


FIGURE 31 – Compliance en fonction de la contrainte volumique imposée exprimée en pourcentage de matière à conserver.

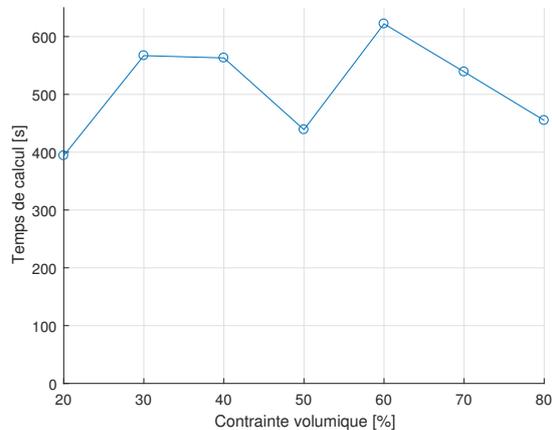


FIGURE 32 – Temps de calcul en fonction de la contrainte volumique imposée exprimée en pourcentage de matière à conserver.

Mentionnons encore que le temps de calcul reste inférieur à une petite dizaine de minutes et ne varie que faiblement avec la contrainte imposée sur le pourcentage de matière à conserver, comme affiché à la figure 32. Les temps CPU des différents calculs, en plus des valeurs de compliance, sont repris à la table 4. Bien que le temps de calcul varie si la même optimisation (avec le même pourcentage de matière à conserver) est exécutée plusieurs fois, les valeurs affichés ici donnent une bonne idée de l'ordre de grandeur de ce temps de calcul.

Contrainte volumique	Temps de calcul [s]	Compliance [J]
20%	394	51.31
30%	567	25.98
40%	563	16.52
50%	439	11.94
60%	622	9.71
70%	539	8.66
80%	455	8.28

TABLE 4 – Temps de calcul et compliance en fonction du pourcentage de matière à conserver lors de l’optimisation topologique.

6.2 Variation de l’exposant de la loi SIMP

Différents exposants ont été testés et les résultats peuvent être comparés à l’aide des figures 33a, 33b, 33c et 33d. Notons que les pseudo-densités inférieures à 0.1 ne sont pas affichées.

Bien que le résultat obtenu via un facteur de pénalisation de 2 permette de plus facilement repérer les chemins de force visuellement, la présence de trop nombreuses densités intermédiaires rend le choix de discrétisation difficile pour l’ingénieur. On observe une élimination déjà importante des densités intermédiaires en passant d’un exposant 2 à 3.

Néanmoins, une pénalisation trop importante peut régulièrement conduire à des optimums locaux, très sensibles au dimensionnement initial et à la procédure itérative utilisée.

Sur les figures 33a, 33b, 33c et 33d, une perte d’information est constatée lorsqu’on augmente l’exposant p , et ce principalement au niveau des "indentations", sortes de "griffes", sur la surface supérieure du carter. Dès que l’on passe de l’exposant 3 à l’exposant 4, il devient impossible d’affirmer que, sur la surface supérieure, les indentations continues se prolongent toujours et ne deviennent pas des trous uniquement. Cet effet se visualise encore plus aisément lorsque l’exposant est augmenté jusque 5. Cette information peut sembler inutile a priori mais aide potentiellement l’ingénieur lors du (re)dessin de la pièce, par exemple, s’il tient en plus compte des contraintes de fabrication.

En conclusion, le choix de la loi SIMP modifiée ayant déjà été discuté à la section 2.3, l’exposant utilisé sera de 3. La présence nécessaire ou non de matière avec cet exposant semble suffisamment claire contrairement à l’exposant 2 qui ne paraît pas suffisamment pénalisant. En outre, il semble inutile de l’augmenter au-delà sous peine de se restreindre à l’obtention d’optimums locaux.

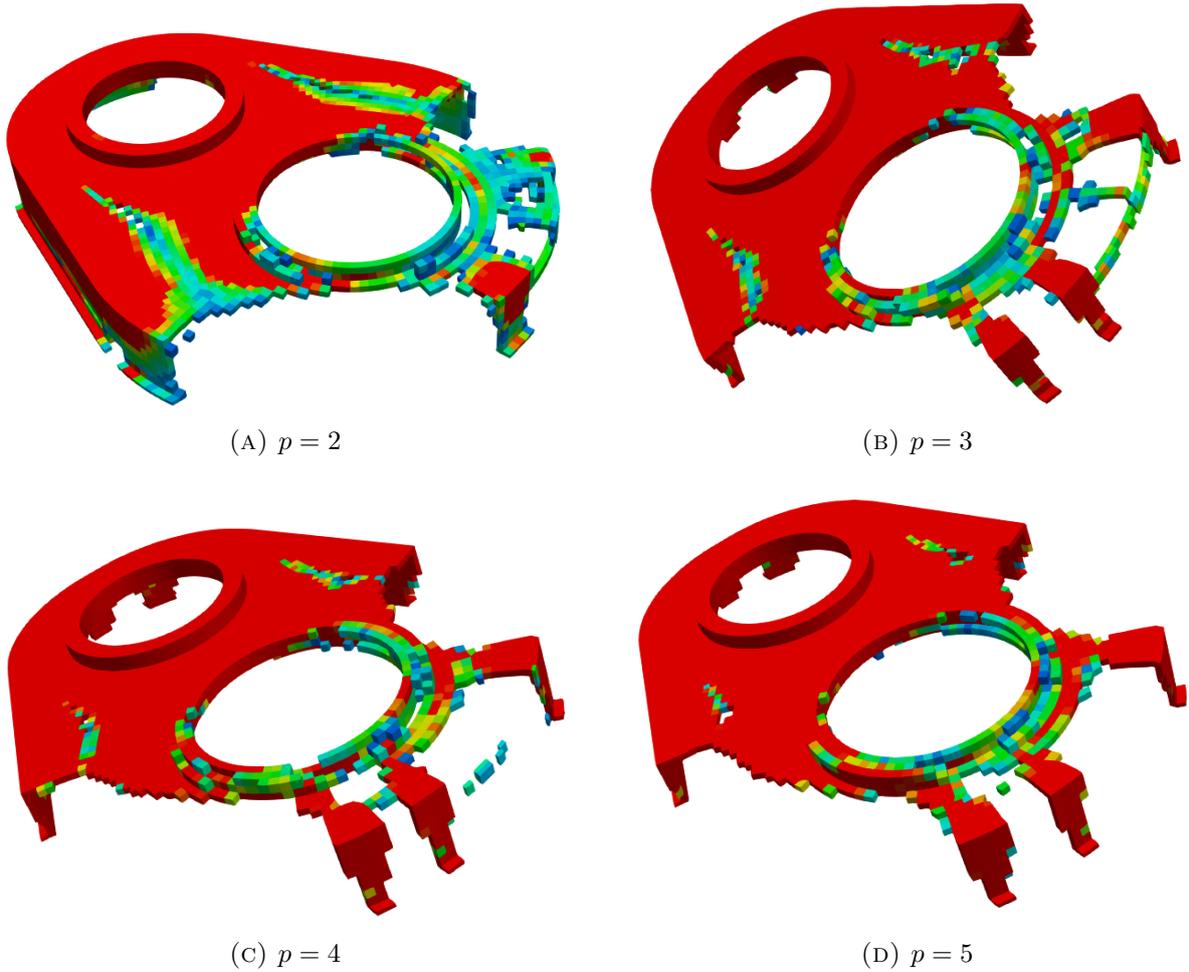


FIGURE 33 – Loi SIMP avec différents exposants p lors d’une optimisation topologique avec une contrainte volumique de 60% et avec, pour le filtre, un voisinage de 2 fois la longueur de la maille considérée.

6.3 Variation de la taille du filtre sur les densités

Dans le cas du carter, en comparant les figures 34a et 34b où le filtre est inactif avec les figures 35a et 35b où un filtre sur les densités est imposé, on observe une structure en damier dans certaines zones. Ce phénomène est principalement marqué dans la zone du grand trou et des indentations.

Un autre problème, plus flagrant encore, réside en la présence de membres structuraux très fins ainsi que d’espaces entre membres structuraux très réduits. Cette solution permet dès lors difficilement de décider, si, oui ou non, ces éléments/vides doivent être conservés.

Dans notre cas, le choix d’un filtre sur les densités est privilégié car il montre couramment une bonne efficacité et est assez intuitif. Son fonctionnement et ses effets restent compréhensibles et les résultats obtenus aisément interprétables [24].

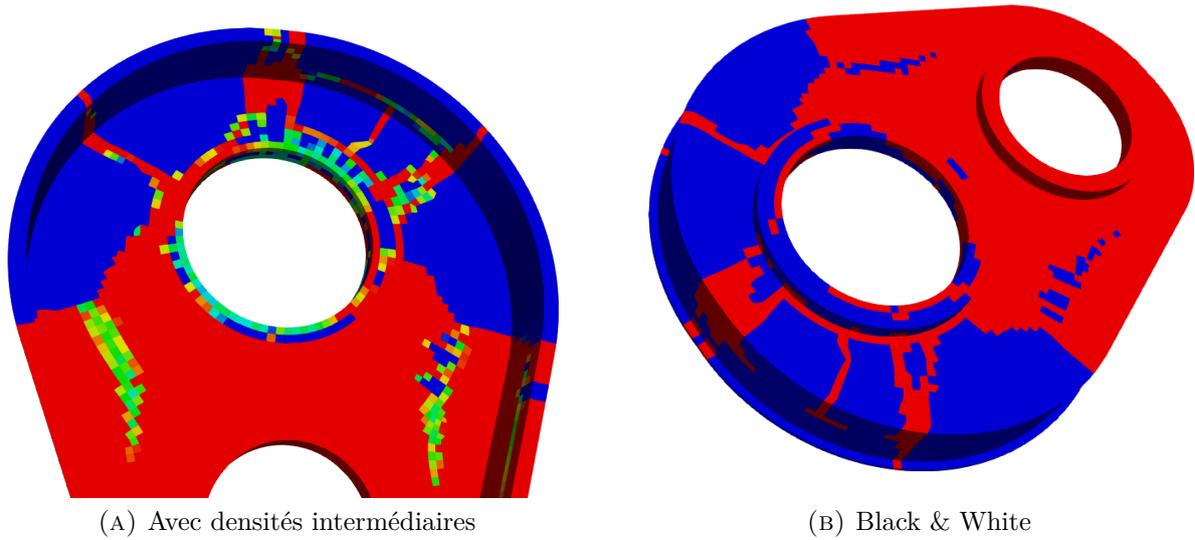


FIGURE 34 – Illustration d’une structure en damier dans le cas d’une optimisation topologique (60% volume, loi SIMP exposant 3) sur le carter où le filtre est inactif.

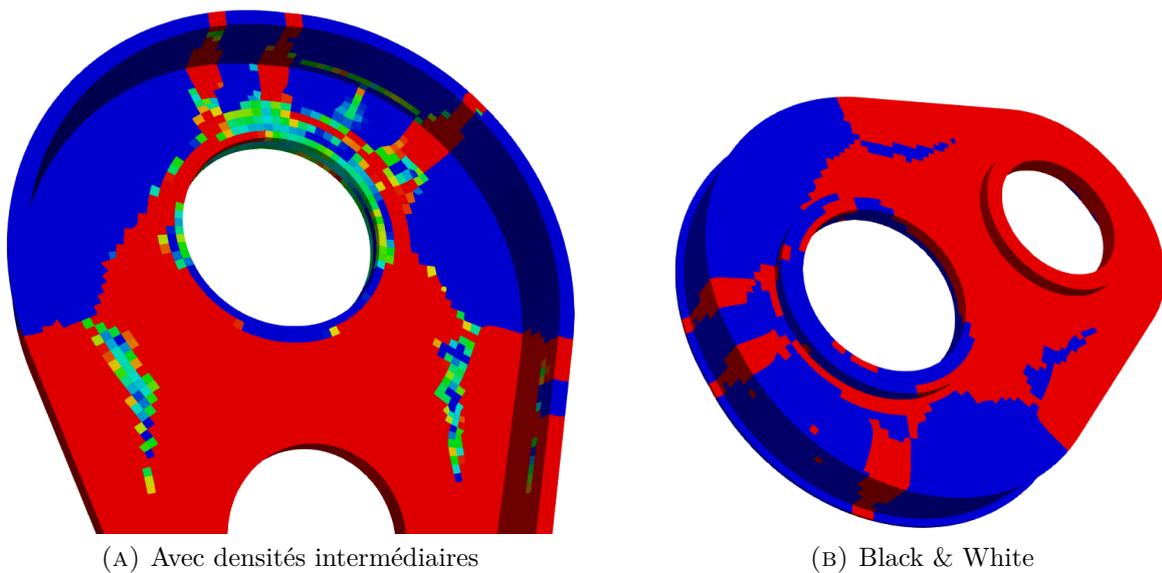


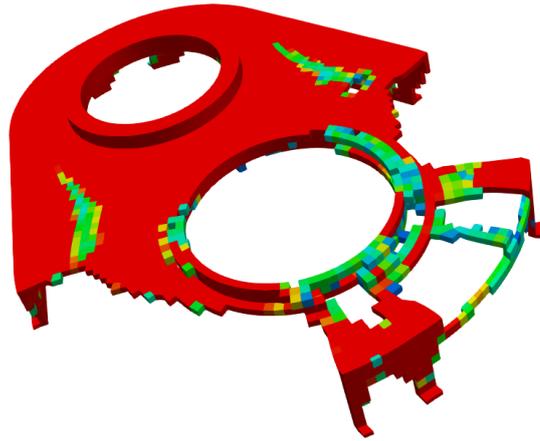
FIGURE 35 – Solution avec un filtre tenant compte d’un voisinage de 2 fois la longueur caractéristique de la maille permettant la comparaison avec la solution sans filtre.

Les figures 34b et 35b correspondent, respectivement, aux versions "Black & White" des figures 34a et 35a, c’est-à-dire où les densités intermédiaires inférieures à 0.5 sont considérées comme étant du vide (et donc affichées en bleu) et les densités intermédiaires supérieures à 0.5 sont considérées comme étant de la matière (et donc affichées en rouge).

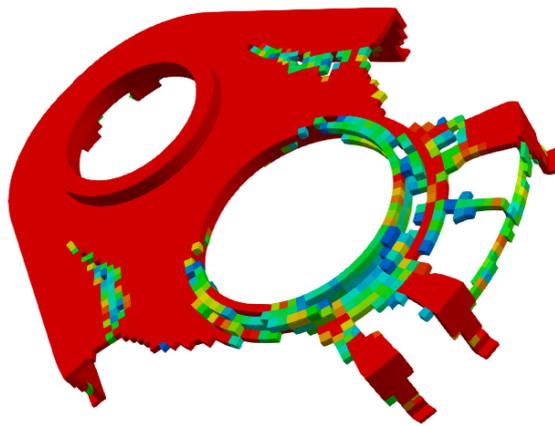
La figure 35a ci-dessus permet, une fois comparée à la figure 34a, de se rendre compte que les pseudo-densités nulles et unitaires alternent moins rapidement et sont fréquemment séparées par une zone de densités intermédiaires. Cette comparaison confirme l’effet bénéfique du filtre et l’assistance à la décision que ce dernier fournit.

Notons que si, par la suite, de trop nombreuses densités intermédiaires interviennent lors de l'ajout du filtre et induisent un problème décisionnel, une augmentation de l'exposant p de la loi SIMP permettrait de limiter cette apparition.

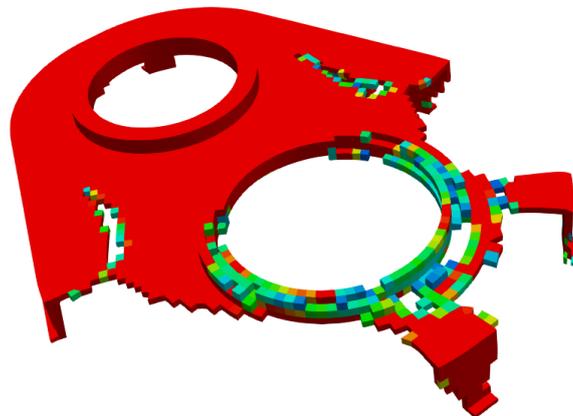
Un filtre sur les densités est dès lors introduit et différentes valeurs de voisinage sont testées. Les résultats sont repris aux figures [36a](#), [36b](#), [36c](#) où, encore une fois, les pseudo-densités inférieures à un dixième ne sont pas affichées.



(A) $x = 1.5$



(B) $x = 2.0$



(C) $x = 2.5$

FIGURE 36 – Implémentation d'un filtre tenant compte d'un voisinage de x fois la longueur caractéristique de la maille.

Les descriptions théoriques précédentes permettent de bien comprendre pourquoi, lorsqu'on impose un filtre sur un voisinage de deux fois et demie la longueur caractéristique de la maille, un des éléments structuraux disparaît tandis qu'un autre s'épaissit. De plus, au niveau des indentations notamment, on constate qu'au fur et à mesure que le voisinage considéré est agrandi, les densités intermédiaires deviennent de plus en plus tranchées et qu'en l'occurrence, elles se rapprochent d'une valeur nulle dans ces zones.

Le compromis d'un filtre dont le voisinage correspond à 2 fois la longueur de la maille considérée semble à privilégier car il permet d'éviter trop de densités intermédiaires et de conserver suffisamment d'informations par rapport aux éléments structuraux de taille intermédiaire, contrairement aux filtres dont le voisinage est de, respectivement, 1.5 fois et 2.5 fois la taille de la maille considérée.

6.4 Optimisation topologique sur l'ensemble de la pièce

Une optimisation topologique entre de l'aluminium et du vide est réalisée où la fonction objectif à minimiser est la compliance et où la contrainte correspond à un pourcentage de matière exigé de 60%.

Le résultat est présenté à la figure 37. Notons encore que les pseudo-densités inférieures à 0.5 sont associées à du vide tandis que celles supérieures à 0.5 sont considérées comme étant de la matière. Le vide n'est, par choix, évidemment pas affiché.

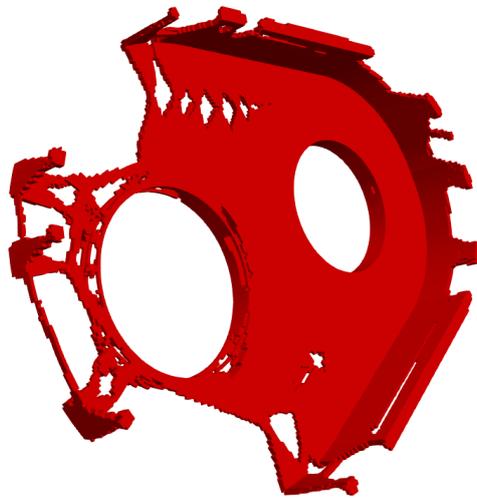


FIGURE 37 – Optimisation topologique aluminium/vide (60%/40%) sans restriction.

Ce résultat est le même que celui à la figure 30b en version "Black & White" qui, pour rappel, signifie que les pseudo-densités inférieures à 0.5 sont assimilées à du vide, et donc pas affichées, tandis que les pseudo-densités supérieures à 0.5 sont assimilées à de la matière. Les commentaires quant à la priorité du renforcement, notamment plus important aux alentours du petit logement de palier, restent donc tout à fait valables.

Comme déjà mentionné à la table 4, la compliance correspondant à une contrainte volumique de 60% de matière conservée est de 9.71 [J].

6.5 Optimisation topologique avec zones non-optimisables

Il existe la possibilité de définir une région avec un matériau donné et de ne pas la considérer lors de l'optimisation topologique, autrement dit de la laisser intègre. Ces régions s'appellent zones non-optimisables ou encore "passive regions". Une zone non-optimisable est définie en imposant toutes les pseudo-densités de cette région inchangées et égales à la valeur requise par l'utilisateur : 0 si vide et 1 si matériau dans le cas d'une optimisation mono-matériau.

Dans notre cas, l'imposition des logements pour les paliers et du flange comme zones non-optimisables possède un intérêt sensible de par la définition de ces zones. D'ailleurs, les zones de fixation sont couramment imposées non modifiables à cause de la reprise d'efforts souvent non négligeables mais aussi et surtout à cause de la fonction de fixation de la zone.

A nouveau, une optimisation aluminium/vidé est considérée avec pour objectif la minimisation de la compliance et comme contrainte une proportion de matière souhaitée de 60%. Remarquons toutefois que les régions fixées non optimisables, soit les logements des paliers et le flange, sont définies comme étant de l'aluminium mais ne comptent pas dans la proportion de 60% de matière souhaitée. Les 60% s'appliquent donc ici sur le volume total initial moins le volume des zones non-optimisables. Cette dernière remarque permet de comprendre pourquoi la proportion de matière paraît plus importante à la figure 38a ci-dessous que pour le cas de base à la figure 37.

Une plus faible compliance, de 9.07 [J] au lieu de 9.71 [J] dans le cas sans régions passives, autrement dit une rigidité plus importante, s'explique également par un volume de matière final plus important.

Dans le cas où la contrainte volumique est de 60% mais, cette fois, en incluant les régions passives dans le pourcentage, la compliance est de 11.19 [J]. Cette hausse par rapport au cas de la figure 37 à la sous-section précédente se comprend car l'algorithme doit placer une partie de la matière dans une zone où le renforcement n'est pas prioritaire. Ce dernier résultat est affiché à la figure 38b.

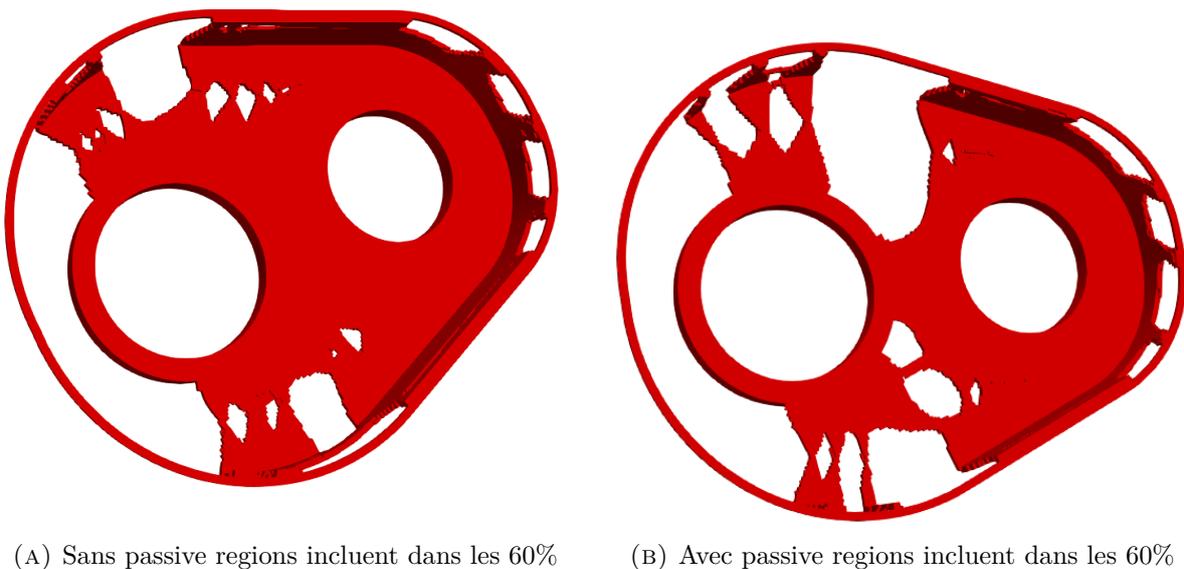


FIGURE 38 – Optimisation topologique aluminium/vidé (60%/40%) avec des zones non-optimisables.

Les pseudo-densités inférieures à 0.5 sont à nouveau associées au vide et non affichées tandis que celles supérieures sont sélectionnées comme correspondant à de la matière.

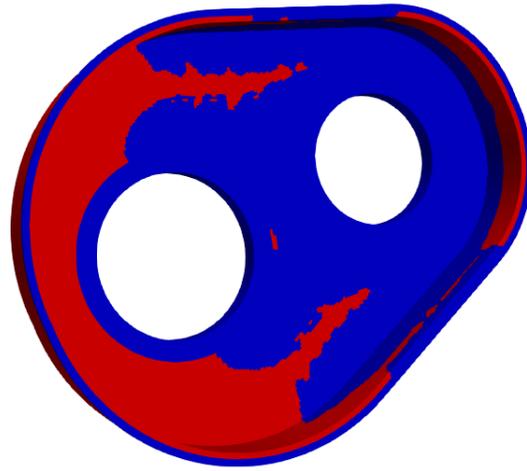
6.6 Optimisation topologique multi-matériaux

Le logiciel OOFELIE permet de réaliser des optimisations entre plusieurs matériaux et le vide ou bien entre plusieurs matériaux uniquement. Il est toutefois nécessaire que les propriétés des matériaux considérés influençant fortement la fonction objectif diffèrent suffisamment l'une de l'autre. Dans la pratique, une différence d'environ un ordre de grandeur est conseillée.

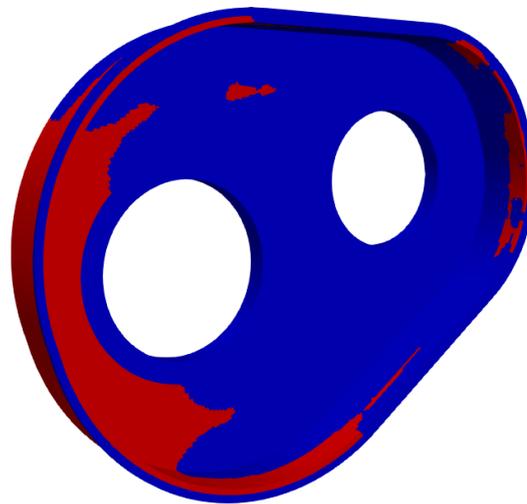
Trois optimisations topologiques entre de l'aluminium et du plastique (sans vide) ont été réalisées avec pour objectif de minimiser la compliance dans tous les cas. Les régions passives décrites à la sous-section précédente ont été conservées au cours de ces trois optimisations bi-matériaux. Le plastique considéré est le même pour chacune des trois optimisations et présente un module de Young de 6GPa et un coefficient de Poisson égal à celui de l'aluminium, soit 0.33.

La seule différence entre les trois optimisations bi-matériaux réside dans la contrainte volumique, soit le pourcentage d'aluminium requis au maximum.

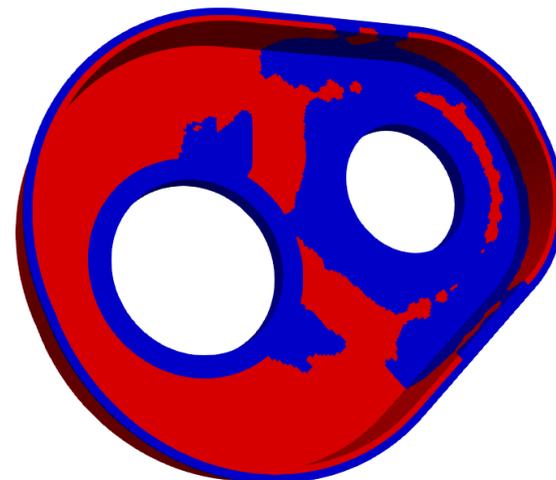
A la figure 39a, la quantité de plastique demandée équivaut à celle de l'aluminium, tandis qu'aux figures 39b et 39c, la quantité d'aluminium est d'au maximum 70% et 30% respectivement. L'aluminium est ici représenté par la couleur bleue alors que la couleur rouge indique la présence de plastique.



(A) 50% Aluminium / 50% Plastique



(B) 70% Aluminium / 30% Plastique



(C) 30% Aluminium / 70% Plastique

FIGURE 39 – Optimisation topologique bi-matériaux entre de l'aluminium et du plastique (6GPa) avec des zones non-optimisables.

De manière semblable au résultat obtenu lors de l'optimisation topologique la plus simple (cf. section 6.4), l'algorithme privilégie une plus grande raideur, localisée aux alentours du petit logement (cf. figure 39c), là où les forces sont les plus importantes. Lorsque la quantité d'aluminium autorisée est supérieure à la quantité nécessaire pour correctement rigidifier le petit logement de palier, l'optimisation favorise alors la jonction entre les deux logements de palier (cf. figure 39a) et finit, lorsque la quantité d'aluminium est vraiment importante, par rigidifier les alentours du grand logement de palier (cf. figure 39b).

6.7 Optimisation topologique multi-blocs

Différentes optimisations topologiques peuvent être effectuées sur différentes régions, appelées blocs. Autrement dit, une optimisation topologique avec certains matériaux peut être réalisée sur une certaine partie de la pièce tandis que, sur une autre région, d'autres matériaux peuvent être utilisés pour l'optimisation topologique (cf. figure 2).

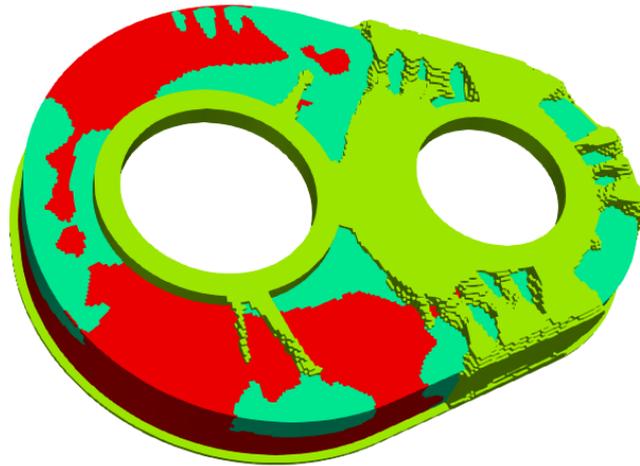
L'intérêt d'une optimisation topologique multi-blocs dans le cas de notre application (cf. section 4.1) est le fait de pouvoir réaliser une optimisation où le vide est proscrit sur la première couche, ici une optimisation topologique entre de l'aluminium et du plastique. Cette première épaisseur sans aucun trou a pour objectif de conserver le carter étanche (et donc d'empêcher toute fuite d'huile), une des fonctions principales de ce dernier. Des surépaisseurs sont alors définies comme zones d'optimisation entre le matériau rigide, ici l'aluminium, et le vide afin d'obtenir des raidisseurs et rigidifier la structure. Le poids de la structure multi-blocs a diminué de manière significative par rapport à la pièce coulée entièrement réalisée en aluminium.

Dans le but de permettre l'apparition de ces raidisseurs, la pièce est étendue latéralement/radialement d'une épaisseur équivalente à celle du flange, soit 10mm, mais aussi sur la face supérieure d'une épaisseur égale à la hauteur des logements des paliers, soit environ 20mm.

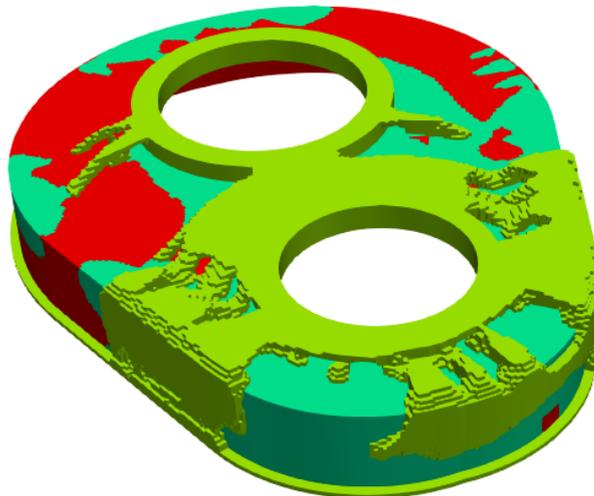
Le pourcentage d'aluminium demandé pour la première couche du carter, soit celle avec le plastique et pas de vide comme décrite ci-dessus, est d'au maximum 50% du volume du bloc 1. Le pourcentage volumique demandé pour l'optimisation entre l'aluminium et le vide est quant à lui de 20% du volume du bloc 2, considérant les deux surépaisseurs réunies. Le résultat est présenté aux figures 40a et 40b ci-dessous où la couleur bleu turquoise représente l'aluminium du premier bloc et la couleur verte représente l'aluminium du second bloc (surépaisseurs) tandis que la couleur rouge est dédiée au plastique. Le vide n'est quant à lui pas affiché.

Les commentaires concernant le cas de l'optimisation multi-matériaux du carter de la section 6.6 restent valables pour la première couche de ce nouveau calcul. Néanmoins, on remarque une légère différence par rapport au cas de l'optimisation topologique multi-matériaux mais non multi-blocs, représenté à la figure 39a. Cette différence survient dans la région du grand logement de palier. En effet, on observe dans ce cas-ci la présence d'aluminium au lieu du plastique autour du grand logement de palier, du côté gauche du carter à la figure 40a, ce qui n'était pas constaté précédemment.

Concernant la deuxième couche maintenant, on observe premièrement un raidisseur particulièrement volumineux entre les deux logements de palier. Deuxièmement, on note l'apparition nette de raidisseurs fins et distincts qui rayonnent à partir du logement du petit palier vers l'extérieur du carter. Finalement, on remarque seulement 3 raidisseurs aux alentours du grand palier, et aucun partant dans la direction opposée du petit palier. Cette dernière remarque permet sûrement en partie d'expliquer le choix d'aluminium au lieu de plastique dans cette région du premier bloc.



(A) Première vue (face externe)



(B) Seconde vue (face externe)

FIGURE 40 – Optimisation topologique multiblocs : aluminium/plastique (50%/50%) pour la première couche et aluminium/vide (20%/80%) pour les surépaisseurs. Présence des mêmes zones non-optimisables que précédemment.

7 T-splines

La définition de la surface "T-spline" passe dans notre cas par le contrôle de la position des points de contrôle. La surface est directement et uniquement liée aux points de contrôle et construite à partir de ces derniers. Le "T-mesh" résultant de la jonction des points de contrôle entre eux est affiché dans le plan "xy" à la figure 41 où les noeuds, équivalents aux points de contrôle, sont numérotés en bleu tandis que les faces sont numérotées en rouge.

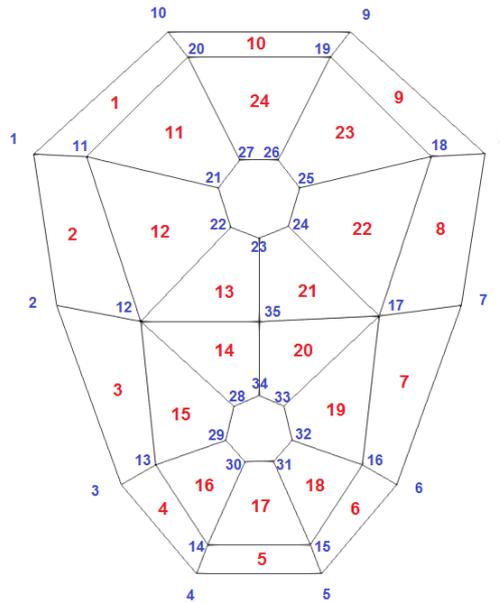


FIGURE 41 – T-Mesh où les noeuds (en bleu) et les faces (en rouge) sont numérotés.

Mentionnons le fait qu'une des lignes de conduite lors de la réalisation du T-mesh est que les faces doivent être les plus rectangulaires et les plus régulières possibles, donc les moins déformées possibles.

Une autre règle est qu'un noeud doit idéalement être connecté à 4 autres noeuds uniquement. Dans notre cas, il est impossible de respecter cette dernière ligne de conduite. Celle-ci a été respectée pour tous les noeuds excepté les numéros 12 et 17 qui sont tous deux reliés à 6 autres noeuds. Ces points sont appelés "extraordinary points", soit points extraordinaires en français. Le problème engendré consiste en une légère déformation très locale de la surface. En plus de légèrement faire apparaître les lignes se rejoignant en ces points, cette déformation se présente sous la forme d'un renforcement.

La surface engendrée par ce T-mesh est affichée à la figure 42 et un zoom sur les renforcements, encadrés en rouge, est présenté à la figure 43.

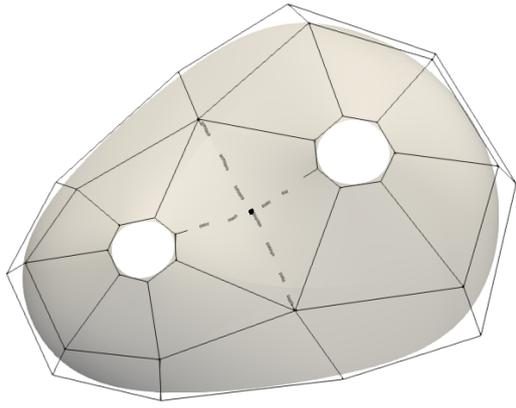


FIGURE 42 – Surface T-spline engendrée par le T-Mesh.

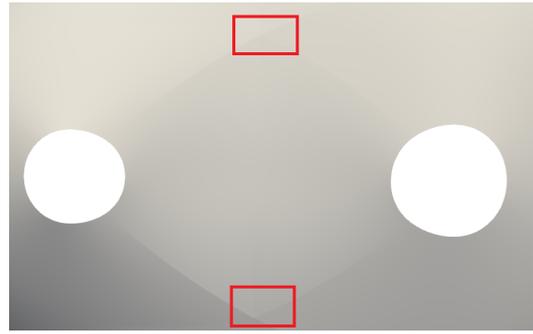


FIGURE 43 – Zoom sur les renforcements dans la surface T-spline.

8 Sélection du domaine optimisable

La première étape consiste à définir un bloc maillé dans lequel la T-spline, décrite et montrée à la section précédente, permet de délimiter une couche sur laquelle toutes les optimisations de forme et/ou topologiques pourront être réalisées.

L'épaisseur de la couche définie par la T-spline a été sélectionnée comme égale à 10mm tandis que l'espace pour les raidisseurs lors de la future optimisation topologique est de 30mm. Le bloc résultant, à partir duquel le domaine d'optimisation est sélectionné, est affiché déjà maillé à la figure 44 ci-dessous.

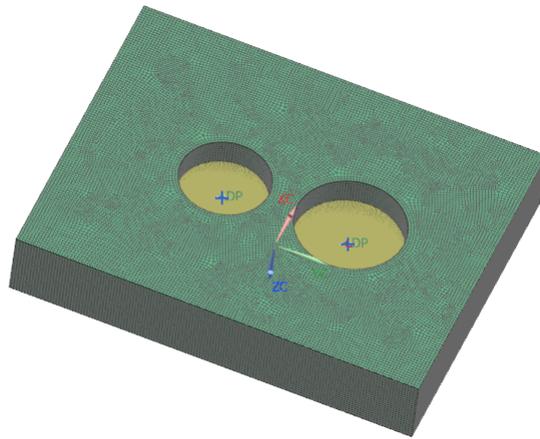


FIGURE 44 – Bloc à partir duquel le domaine d'optimisation est sélectionné.

Le taille moyenne de maille a pu être sélectionnée en conséquence du choix de l'épaisseur. En effet, il est essentiel d'essayer de conserver un minimum de 3 mailles partout sur l'épaisseur afin de correctement représenter le comportement de la structure (et particulièrement la flexion). Une taille moyenne de maille de 3mm a dès lors été sélectionnée.

Le résultat de la géométrie ainsi que les déplacements calculés via une analyse statique sont affichés à la figure 45 ci-dessous.

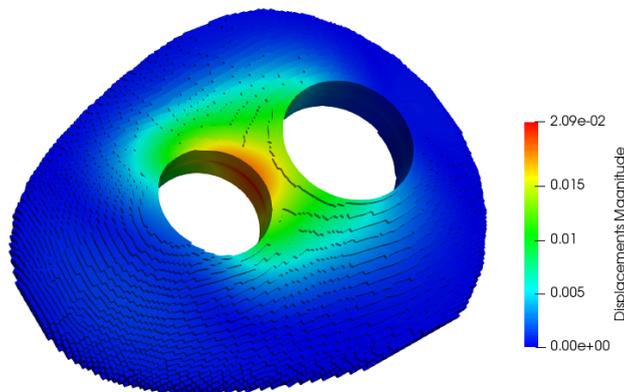


FIGURE 45 – Résultat de l'analyse statique de la surface initiale : géométrie globale et déplacements.

On observe que le déplacement maximal atteint la valeur de 0.0209mm. Il apparaît également une fine ligne au milieu du logement du petit palier où les déplacements semblent plus importants. Cela est dû à la définition de l'élément "MEAN" placé à cet endroit mais ne représente absolument pas une quelconque réalité.

A partir du volume décrit ci-dessus, des optimisations de forme peuvent être réalisées. Toutes les optimisations de forme, dans cette étude, concernent uniquement les coordonnées des points de contrôle, et plus particulièrement les coordonnées des noeuds "internes" du T-mesh de 11 à 20 inclus, plus le noeud 35 situé entre les deux logements de paliers.

De même, des optimisations topologiques sont réalisées sur ce domaine d'optimisation, aussi bien en mono-bloc et mono-matériau qu'en multi-blocs et multi-matériaux.

Toutes ces optimisations, de forme et topologiques, présentent pour objectif de minimiser la compliance.

9 Optimisation de forme

Dans cette section, des optimisations de forme sont réalisées sur le domaine sélectionné à l'aide des level-sets. La méthode de sélection de ce domaine correspond exactement à celle décrite à la section 8. Comme déjà mentionné, le bloc de départ est utilisé avec les choix d'épaisseur de 10mm et de taille de raidisseurs de 30mm et le maillage est identique à celui représenté à la section précédente, figure 44. Le domaine d'optimisation résultant est donc exactement identique à celui représenté à la figure 45.

9.1 Optimisation de forme des coordonnées selon l'axe "z"

Une première optimisation de forme est réalisée sur toutes les hauteurs des points de contrôle autorisés à bouger, soit sur les coordonnées selon l'axe "z" des noeuds 11 à 20 et le noeud 35 du T-mesh. Les paramètres lors de cette optimisation de forme sont donc au nombre de 11.

L'évolution de ces paramètres reste toutefois bornée par une valeur minimale nulle. De même, leur évolution reste bornée par une valeur maximale correspondant à la hauteur maximale de la structure. Cette hauteur maximale est choisie comme égale à la hauteur des noeuds définissant les deux trous, c'est-à-dire les noeuds 21 à 27 (compris) et 28 à 34 (compris) respectivement pour le grand et petit trou, et vaut 44.85mm.

Le résultat optimal de cette optimisation de forme de 30 itérations survient à la 16^{ème} itération. Il se trouve à la figure 46 et peut être comparé avec celui de la surface initiale, à la section 8, figure 45.

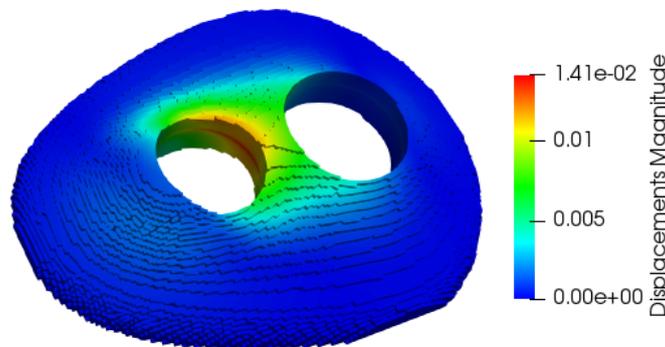


FIGURE 46 – Résultat de l'optimisation de forme des hauteurs : géométrie globale et déplacements.

Ce qui frappe immédiatement, est la difficulté visuelle de se rendre compte a priori des changements de forme et de répartition de déplacements entre le résultat de l'optimisation et la géométrie initiale. Une comparaison entre les coupes de la géométrie non optimisée et de la géométrie après optimisation selon les coordonnées z, à la figure 47, permet toutefois d'observer ces changements géométriques plus clairement.

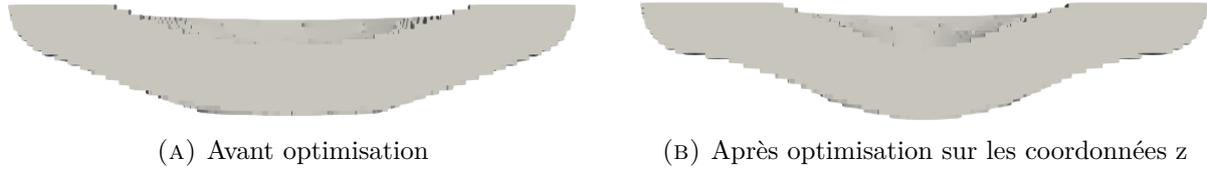


FIGURE 47 – Comparaison des coupes avant et après optimisation de forme.

On observe que la forme évolue assez nettement. La forme optimisée correspond maintenant plutôt à une cloche qu'à un dôme, comme avant optimisation. Comme cela peut également être observé à la table 5, la base de la structure se voit renforcée sur tout le pourtour. Le renforcement de la partie centrale passe, quant à lui, par un ajout de matière localisé entre les deux logements de palier. Cette dernière constatation est consistante avec les résultats des optimisations topologiques déjà présentés à la section 6.

Les gains entre les deux compliances et entre les deux intensités du déplacement maximal confirment également l'intérêt d'une optimisation. En effet, la compliance est réduite de $141782.83 \cdot 10^{-6}$ J à $105753.76 \cdot 10^{-6}$ J, ce qui correspond à un gain relatif de 25.4% et le déplacement maximal passe de 0.0209mm à 0.0141mm, soit une réduction de 32.5%.

Tous les noeuds de 11 à 20 passent d'une hauteur initiale de 20mm à la hauteur minimale nulle, excepté le noeud 19 qui descend seulement jusqu'à 3.36mm. La tendance est donc à un abaissement maximal de tous les noeuds internes. Le noeud 35 quant à lui, situé entre les deux logements de palier, passe à la hauteur maximale de 44.85mm.

Coordonnées "z"	Avant [mm]	Après [mm]
Noeud 11	20	0
Noeud 12	20	0
Noeud 13	20	0
Noeud 14	20	0
Noeud 15	20	0
Noeud 16	20	0
Noeud 17	20	0
Noeud 18	20	0
Noeud 19	20	3.36
Noeud 20	20	0
Noeud 35	20	44.85

TABLE 5 – Coordonnées "z" avant et après optimisation de forme des noeuds 11 à 20 (inclus) et du noeud 35.

Comme déjà mentionné, l'itération donnant l'optimum est la 16^{ème} sur les 30 réalisées. Cela laisse sous-entendre que la convergence a bel et bien été atteinte au bout de ces 30 itérations et potentiellement même avant, ce qui est confirmé par le graphe 48 ci-dessous représentant l'évolution de la compliance au cours des 30 itérations.

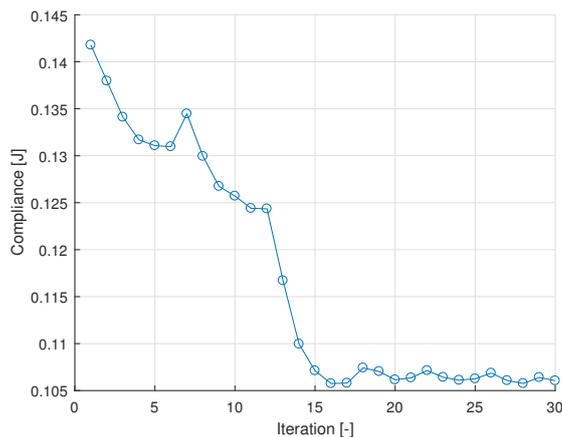


FIGURE 48 – Convergence de la compliance en fonction des itérations dans le cas d’une optimisation de forme sur les coordonnées z.

9.2 Optimisation de forme des coordonnées dans le plan "xy"

Une seconde optimisation de forme est réalisée sur les coordonnées selon l’axe "x" et selon l’axe "y", toujours des noeuds 11 à 20 inclus, plus le noeud 35. Ces points de contrôle sont autorisés à se mouvoir autour de leur position initiale d’une distance de 10mm selon l’axe x et de 5mm selon l’axe y.

Au vu du nombre de paramètres plus élevé, 22 au lieu de 11, le nombre d’itérations a cette fois été fixé à 40 itérations. Le graphe à la figure 49 ci-dessous montre l’évolution de la compliance en fonction du nombre d’itérations. Bien que l’optimum survienne tardivement, à la 39^{ème} itération, cette figure 49 permet de conclure que la convergence a bien été atteinte.

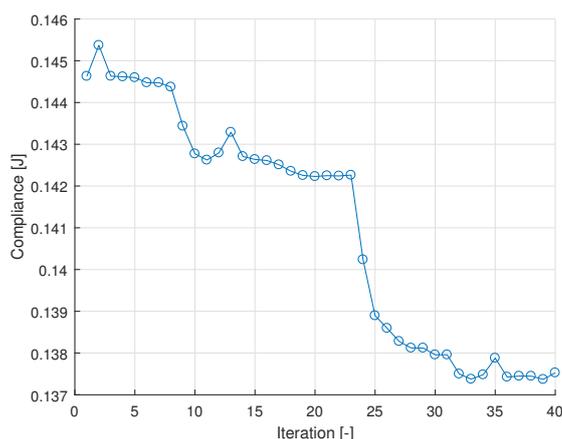


FIGURE 49 – Convergence de la compliance en fonction des itérations dans le cas d’une optimisation de forme sur les coordonnées x et y.

Le résultat après la 39^{ème} des 40 itérations est fourni ci-dessous à la figure 50.

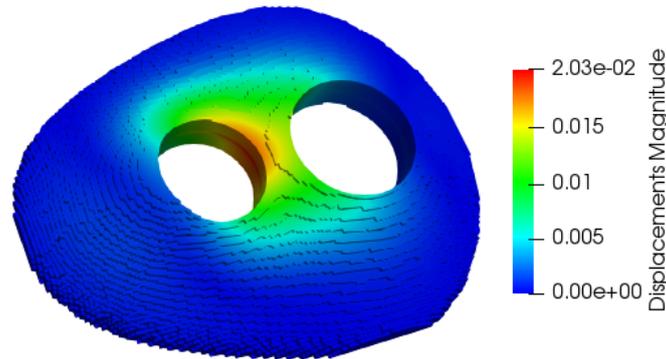


FIGURE 50 – Résultat de l'optimisation de forme des coordonnées dans le plan "xy" : géométrie globale et déplacements.

De nouveau, la forme ne semble visuellement pas fortement modifiée. Dans ce cas, le gain de l'optimisation de forme sur les coordonnées "x" et "y" n'est pas majeur, ni en terme de compliance, ni en terme de déplacement maximal. Ces derniers sont en effet réduits de $144629.32 \cdot 10^{-6}$ J à $137370.29 \cdot 10^{-6}$ J et de 0.0209mm à 0.0203mm, soit 5.0% et 2.9% respectivement.

Il paraît toutefois logique que le gain soit plus faiblement impacté par une optimisation sur les coordonnées "x" et "y" seulement, plutôt que par une optimisation sur les coordonnées "z". En revanche, une combinaison d'optimisations des coordonnées "x" et "y", en plus d'une optimisation des coordonnées "z", pourrait favoriser une réduction plus importante de la compliance et du déplacement maximal. Cette remarque est étudiée à la sous-section suivante.

Coordonnées "x"	Avant [mm]	Après [mm]
Noeud 11	-121.08	-117.00
Noeud 12	-83.03	-73.03
Noeud 13	-72.60	-62.60
Noeud 14	-36.07	-26.07
Noeud 15	36.07	30.21
Noeud 16	72.60	62.60
Noeud 17	84.41	79.98
Noeud 18	121.13	118.26
Noeud 19	50.19	47.58
Noeud 20	-50.19	-47.22
Noeud 35	0	6.27

TABLE 6 – Coordonnées "x" avant et après optimisation de forme des noeuds 11 à 20 (inclus) et du noeud 35.

Coordonnées "y"	Avant [mm]	Après [mm]
Noeud 11	103.87	103.64
Noeud 12	-12.72	-9.56
Noeud 13	-114.23	-110.10
Noeud 14	-170.72	-165.72
Noeud 15	-170.72	-166.50
Noeud 16	-114.23	-109.87
Noeud 17	-8.88	-5.95
Noeud 18	104.02	109.02
Noeud 19	174.48	174.17
Noeud 20	174.48	174.27
Noeud 35	-12.86	-13.41

TABLE 7 – Coordonnées "y" avant et après optimisation de forme des noeuds 11 à 20 (inclus) et du noeud 35.

9.3 Optimisation de forme de toutes les coordonnées

Cette fois, une optimisation de forme a été réalisée sur toutes les coordonnées des mêmes points de contrôle, de 11 à 20 inclus plus le noeud 35. Les bornes de variation de ces coordonnées sont les mêmes que pour les deux optimisations précédentes à savoir de 0mm à 44.85mm pour les coordonnées selon l'axe "z" et une variation de ± 10 mm et ± 5 mm par rapport à la position initiale des coordonnées selon l'axe "x" et "y" respectivement.

Puisque le nombre de paramètres est encore plus élevé, 33 à présent, le nombre d'itérations a de nouveau été augmenté pour atteindre la convergence, à 50 itérations cette fois (cf. figure 52).

Cette fois, l'optimum est atteint au bout de la dernière des itérations, soit la 50^{ème}. Le résultat est affiché à la figure 51.

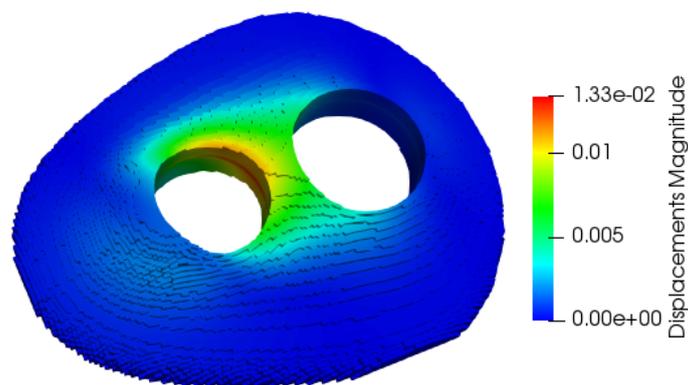


FIGURE 51 – Résultat de l'optimisation de forme de toutes les coordonnées : géométrie globale et déplacements.

Comme mentionné ci-dessus, la convergence est atteinte au bout des 50 itérations réalisées ici. Cette affirmation est basée sur le graphe de la figure 52 ci-dessous.

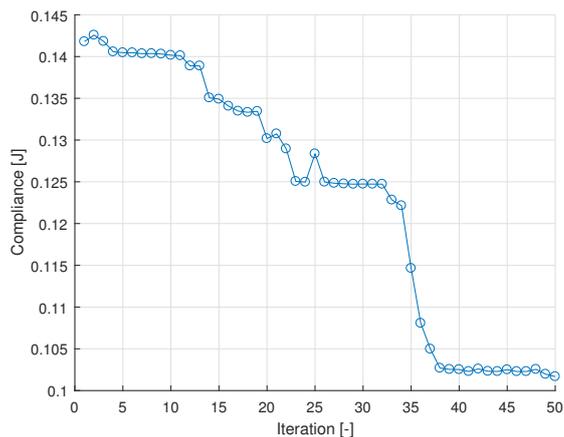


FIGURE 52 – Convergence de la compliance en fonction des itérations dans le cas d’une optimisation de forme sur les coordonnées x, y et z.

<u>Coordonnées "x"</u>	Avant [mm]	Après [mm]
Noeud 11	-121.08	-118.98
Noeud 12	-83.03	-73.03
Noeud 13	-72.60	-62.60
Noeud 14	-36.07	-29.20
Noeud 15	36.07	34.55
Noeud 16	72.60	67.26
Noeud 17	84.41	76.82
Noeud 18	121.13	123.24
Noeud 19	50.19	49.98
Noeud 20	-50.19	-43.54
Noeud 35	0	6.93

TABLE 8 – Coordonnées "x" avant et après optimisation de forme des noeuds 11 à 20 (inclus) et du noeud 35.

<u>Coordonnées "y"</u>	Avant [mm]	Après [mm]
Noeud 11	103.87	103.80
Noeud 12	-12.72	-11.17
Noeud 13	-114.23	-110.85
Noeud 14	-170.72	-167.76
Noeud 15	-170.72	-168.59
Noeud 16	-114.23	-112.18
Noeud 17	-8.88	-6.10
Noeud 18	104.02	109.02
Noeud 19	174.48	174.43
Noeud 20	174.48	174.45
Noeud 35	-12.86	-14.12

TABLE 9 – Coordonnées "y" avant et après optimisation de forme des noeuds 11 à 20 (inclus) et du noeud 35.

Coordonnées "z"	Avant [mm]	Après [mm]
Noeud 11	-20	0
Noeud 12	-20	0
Noeud 13	-20	0
Noeud 14	-20	0.91
Noeud 15	-20	0
Noeud 16	-20	0
Noeud 17	-20	0
Noeud 18	-20	0
Noeud 19	-20	-5.48
Noeud 20	-20	-6.05
Noeud 35	-20	-44.85

TABLE 10 – Coordonnées "z" avant et après optimisation de forme des noeuds 11 à 20 (inclus) et du noeud 35.

Comme imaginé à la sous-section précédente, l'optimisation de toutes les coordonnées est celle qui donne les meilleurs résultats en terme de compliance et de déplacement maximal. La compliance est réduite de $141787.17 \cdot 10^{-6}$ J à $101680.35 \cdot 10^{-6}$ J, soit une réduction de 28.3% tandis que le déplacement maximal passe lui de 0.0209mm à 0.0133mm, soit une baisse de 36.4%.

Il est nécessaire de faire une remarque quant à la valeur initiale de compliance. En effet, cette dernière varie entre les optimisations des sous-sections 9.1, 9.2 et 9.3 alors que cela n'est pas censé être le cas. Cette variation reste cependant légère et n'entraîne pas de différence dans le résultat obtenu. Elle provient en réalité d'une légère différence dans les coordonnées initiales imposées. Les valeurs initiales des coordonnées à optimiser ne sont entrées qu'avec une précision de 10^{-3} tandis que les coordonnées non optimisées possèdent une précision de 10^{-4} . Cette légère incohérence permet d'expliquer la différence de compliance initiale entre les différentes optimisations.

9.4 Récapitulatif

Comme mentionné à la sous-section précédente, l'optimisation de forme sur toutes les coordonnées est celle qui fournit les meilleurs résultats. Les valeurs récapitulatives sont reprises à la table 11 où la valeur de compliance initiale est bien celle de l'analyse effectuée avant optimisation.

De même, les gains, exprimés en pourcentages, sont tous repris à la table 12.

	Compliance [J]	Déplacement maximal [mm]
Avant optimisation	0.141782	0.0209
Sur les coordonnées z	0.105754	0.0141
Sur les coordonnées x et y	0.137370	0.0203
Sur les coordonnées x, y et z	0.101680	0.0133

TABLE 11 – Tableau récapitulatif de la compliance et du déplacement maximal avant et après les optimisations de forme étudiées ci-dessus.

GAINS EN POURCENTAGE sur :	Compliance	Déplacement maximal
Optimisation sur les coordonnées z	25.4%	32.5%
Optimisation sur les coordonnées x et y	5.0%	2.9%
Optimisation sur les coordonnées x, y et z	28.3%	36.4%

TABLE 12 – Tableau récapitulatif des gains exprimés en pourcentage après les optimisations de forme étudiées ci-dessus.

L'amélioration du déplacement maximal dans le cas d'une optimisation sur toutes les coordonnées vaut légèrement plus que la somme des gains, pris séparément, obtenus lors des optimisations sur les coordonnées z et sur les coordonnées x et y.

L'amélioration de la compliance, quant à elle, est inférieure à la somme des gains pris séparément. Cela s'explique entre autres par une valeur initiale de compliance légèrement différente dans les cas étudiés.

Comparons à présent les différences de résultat entre l'optimisation sur les coordonnées z uniquement et l'optimisation sur toutes les coordonnées.

Au vu d'une compliance plus faible dans le cas d'une optimisation sur toutes les coordonnées plutôt que simplement sur les coordonnées z, on peut penser que la liberté donnée dans le plan xy permet aux coordonnées z de mieux s'ajuster pour encore réduire la compliance. Toutefois, cet effet est minime. Comme représenté aux tableaux 5 et 10, les coordonnées z sont similaires dans les deux cas et la tendance est identique.

Comme déjà décrit à la sous-section 9.1, les hauteurs des noeuds 11 à 20 tendent vers la borne minimale nulle tandis que la hauteur du noeud 35 atteint la valeur maximale de 44.85mm.

Cette constatation permet de comprendre pourquoi le gain de l'optimisation sur toutes les coordonnées n'excède que légèrement la somme des gains de l'optimisation des coordonnées z et de l'optimisation des coordonnées x et y.

De même, la figure 53 ci-dessous permet de se rendre compte visuellement que la coupe de la structure optimisée ne varie pratiquement pas.

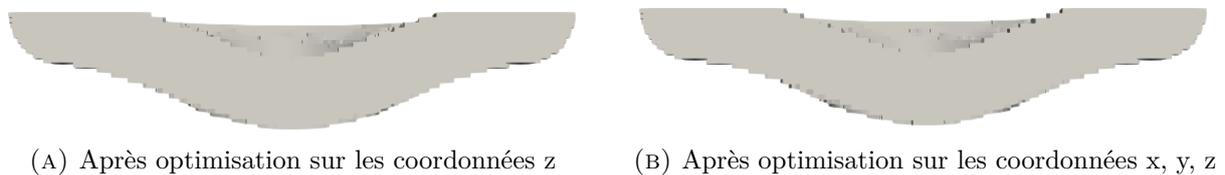


FIGURE 53 – Comparaison des coupes après optimisation de forme selon les coordonnées z et après optimisation de forme sur toutes les coordonnées.

Enfin, lorsque l'on compare les coordonnées x et y dans le cas d'une optimisation sur ces coordonnées uniquement ou bien d'une optimisation sur l'ensemble des coordonnées, les variations sont limitées à quelques noeuds. L'impact sur la compliance semble donc vraiment faible puisqu'une optimisation sur ces coordonnées ne nous donne déjà qu'une diminution de compliance de 5% et que les changements des coordonnées x et y entre ces deux optimisations de forme sont minimales.

En conclusion, au vu du faible impact de l'optimisation de forme des coordonnées x et y sur la compliance et sur le déplacement maximal, il est choisi d'uniquement réaliser une optimisation de forme sur les coordonnées z lors de la suite de ce travail et notamment dans le cadre de l'optimisation bi-niveaux. En effet, pratiquement 20 itérations de forme supplémentaires sont nécessaires pour atteindre la convergence dans le cas d'une optimisation de forme sur toutes les coordonnées. Rappelons que pour chacune de cette vingtaine d'itérations sur la forme, une optimisation topologique complète doit être réalisée et le temps de calcul est donc impacté très significativement.

Mentionnons encore que seules les amplitudes des déplacements généralisés ont été comparées dans le corps principal. Toutefois, une analyse des résultats selon les trois directions de l'espace est également présentée en annexe et confirme globalement les conclusions déjà tirées.

10 Optimisation topologique sur le domaine sélectionné par T-splines

Dans cette section, des optimisations topologiques vont être réalisées sur le domaine sélectionné à l'aide des level-sets. La méthode correspond exactement à celle décrite à la section 8 et celle utilisée pour l'optimisation de forme. Le même bloc de départ est utilisé avec les mêmes choix d'épaisseur de 10mm et de taille de raidisseurs de 30mm. Le maillage est lui aussi identique. Le domaine d'optimisation résultant correspond donc exactement à celui représenté à la section 8, figure 45 et à celui déjà utilisé lors des optimisations de forme. La fonction objectif reste identique, à savoir la compliance, tandis que différentes contraintes volumiques sont imposées.

10.1 Mono-bloc mono-matériau

Premièrement, une optimisation topologique mono-bloc mono-matériau est réalisée entre de l'aluminium et du vide avec, comme contrainte, 50% de matière à conserver.

Le résultat est affiché à la figure 54 ci-dessous où les pseudo-densités supérieures à 0.5 sont associées à de la matière tandis que celles inférieures à 0.5 sont associées à du vide et donc non affichées.

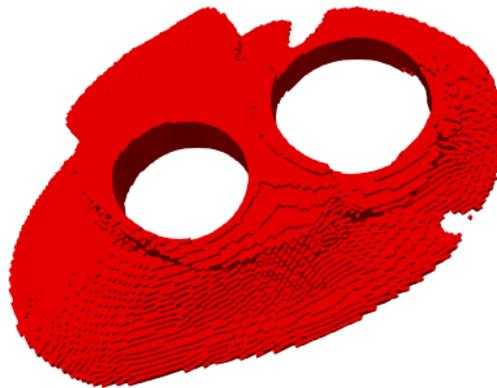


FIGURE 54 – Optimisation topologique entre de l'aluminium et du vide à parts égales.

On observe que la base de la structure est conservée en grande partie, excepté deux manquements dans les alentours du grand logement de palier. Ces manquements, de part et d'autre du carter, restent cependant assez éloignés du grand logement de palier (sur les bords).

Concernant la partie supérieure, peu de matière y est conservée et celle-ci se trouve principalement localisée au niveau de la section entre les deux logements de palier et autour du petit trou.

C'est également l'une des premières fois que l'on note une dissymétrie aussi marquée. L'algorithme a placé une proportion de matière plus importante dans la partie supérieure de la figure 54. Cela reste néanmoins cohérent avec les forces appliquées, voir figure 25 et table 1.

La compliance vaut dans ce cas mono-bloc mono-matériau : $154118 \cdot 10^{-6}$ J

10.2 Mono-bloc multi-matériaux

Le cas étudié ici correspond à une optimisation topologique bi-matériaux. Le problème est similaire à celui de la sous-section précédente. La différence réside dans le fait que le choix ne s'effectue plus entre de l'aluminium et du vide mais entre de l'aluminium et du plastique (6GPa toujours). Le vide n'est alors plus autorisé.

Le résultat de cette optimisation est affiché selon 2 vues différentes à la figure 55 où l'aluminium est représenté par la couleur bleue turquoise tandis que la couleur rouge est attribuée au plastique.

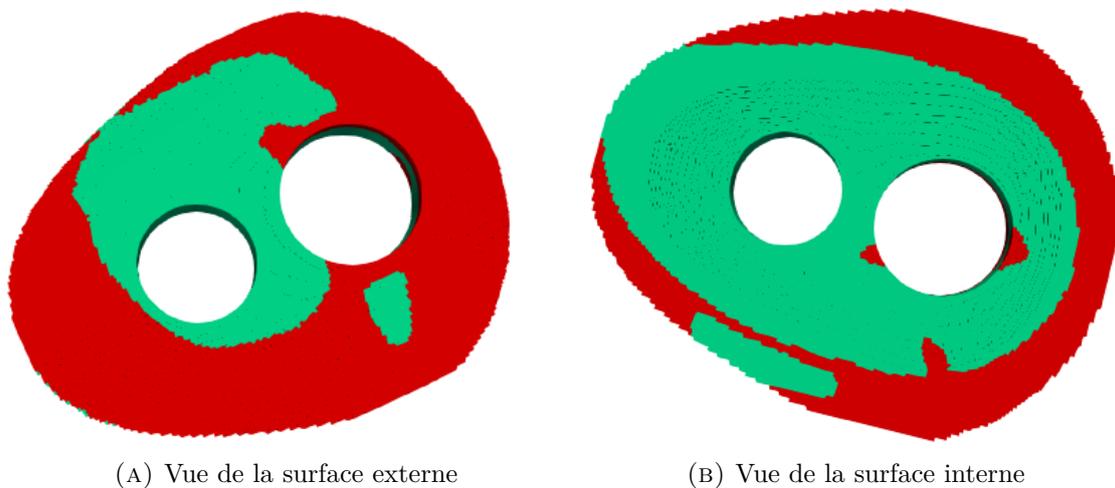


FIGURE 55 – Optimisation topologique multi-matériaux : aluminium/plastique (50%/50%).

On observe, comme à la figure 54, que la fortification de la partie inférieure de la structure est privilégiée par rapport à la partie supérieure, surtout dans une zone relativement proche des logements de palier. Cette remarque persiste cette fois pour une zone plus éloignée autour du petit logement de palier.

Le renforcement de la partie supérieure de la structure passe prioritairement par la section entre les deux trous et le pourtour du petit logement de palier.

La dissymétrie observée à la sous-section précédente demeure et ce sur toute la hauteur du carter afin de consolider au maximum cette région.

La compliance a naturellement baissé par rapport au cas de la sous-section précédente puisque la proportion volumique de vide a été remplacée par du plastique. Cette compliance vaut à présent $151865 \cdot 10^{-6}$ J, soit une baisse de 1.5%. Rappelons que le but premier de l'introduction de plastique ne relève pas d'un renforcement de la structure mais réside dans le fait d'assurer l'une des fonctions premières du carter, à savoir l'étanchéité.

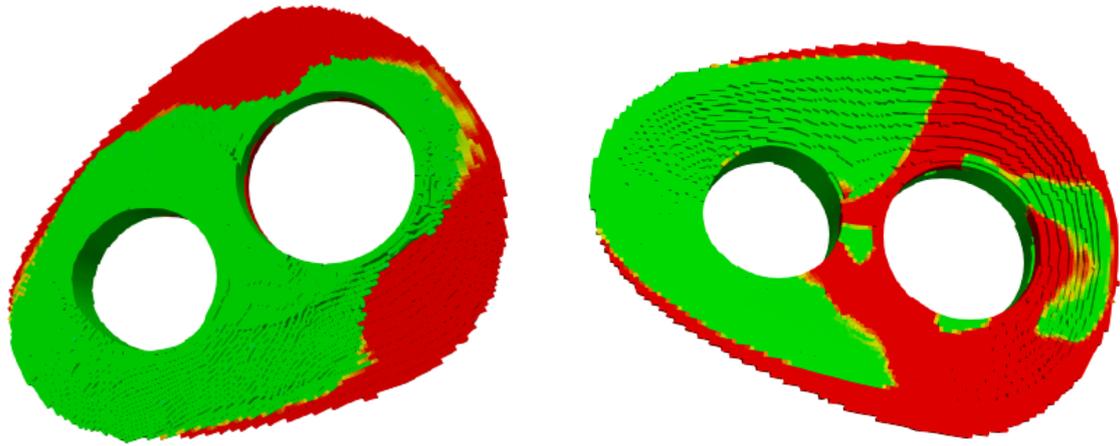
10.3 Cas complexe : multi-blocs multi-matériaux

Le cas le plus complexe d'optimisation topologique étudié à la section 6, multi-blocs et multi-matériaux, a de nouveau été étudié mais, cette fois, sur le domaine sélectionné par la méthode des level-sets.

Une optimisation multi-blocs a donc été réalisée où deux blocs ont été définis. Le bloc inférieur a toujours pour but d'assurer la fonction d'étanchéité du carter de la boîte de vitesses. L'apparition de vide y est donc proscrite. Dès lors, une optimisation topologique multi-matériaux entre de l'aluminium et du plastique (6GPa toujours) à parts égales, c'est-à-dire 50% de chacun de ces matériaux, est effectuée sur ce premier bloc. Le deuxième bloc, qui sert à faire apparaître des raidisseurs, subit, quant à lui, une optimisation entre de l'aluminium, 20% maximum, et du vide.

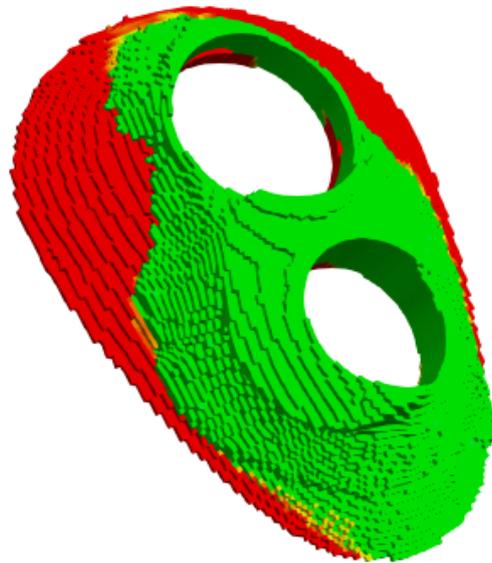
Les coordonnées des noeuds précédemment optimisables sont ici imposées à leur valeur initiale, reprises aux colonnes "Avant" des tables 8, 9 et 10 entre autres.

Le résultat après 30 itérations est affiché à la figure 56 ci-dessous selon 3 différentes vues, la dernière mettant particulièrement en lumière l'apparition des raidisseurs. Le rouge est alloué au plastique tandis que le vert représente l'aluminium des deux blocs.



(A) Vue de la surface externe

(B) Vue de la surface interne



(c) Vue des raidisseurs

FIGURE 56 – Optimisation topologique multiblocs : aluminium/plastique (50%/50%) pour la première couche et aluminium/vide (20%/80%) pour les surépaisseurs.

Le renforcement du petit logement de palier est la première priorité. Ce renforcement s'effectue sur toute la hauteur du domaine, de la base jusqu'à la hauteur maximale des raidisseurs.

Ensuite, le renforcement entre les deux logements de paliers est également important, mais s'effectue cette fois principalement par l'intermédiaire de raidisseurs et peu dans la partie inférieure de la structure.

Enfin, le renforcement plus léger du grand logement de palier s'effectue par un fin pourtour de raidisseurs en plus d'un appui inférieur légèrement décollé du grand logement de palier, visible sur le côté droit de la figure 56b.

Les contraintes volumiques de l'optimisation diffèrent des cas des deux sous-sections précédentes si bien que la matière totale à conserver est différente dans ce cas. Cela impacte directement le résultat, y compris la valeur de compliance qui ne peut plus être comparée aux cas précédents.

Une fois cette remarque bien établie, ce résultat peut tout de même être comparé visuellement au cas de la sous-section précédente.

Au vu de la définition des deux blocs, il apparaît que le renforcement du petit logement de palier devient plus essentiel que la fortification de la section entre les deux logements. En effet, le petit logement de palier se voit consolidé sur toute sa hauteur et jusqu'à une distance notable. En revanche, le pourcentage volumique d'aluminium à conserver dans la première couche se voit restreint et la section entre les trous devient donc principalement renforcée par des raidisseurs d'aluminium mais peu au niveau de la base.

Cette quantité d'aluminium restreinte explique que le grand logement de palier se voie consolidé moins substantiellement. Elle a également pour effet de créer la sorte d'appui déjà décrite.

Du point de vue de la compliance à présent, on observe qu'elle atteint le minimum de $229175 \cdot 10^{-6}$ J.

Comme déjà remarqué, cette valeur n'est toutefois pas comparable avec la compliance obtenue pour les cas des sous-sections 10.1 et 10.2 puisque la quantité de matière restante diffère.

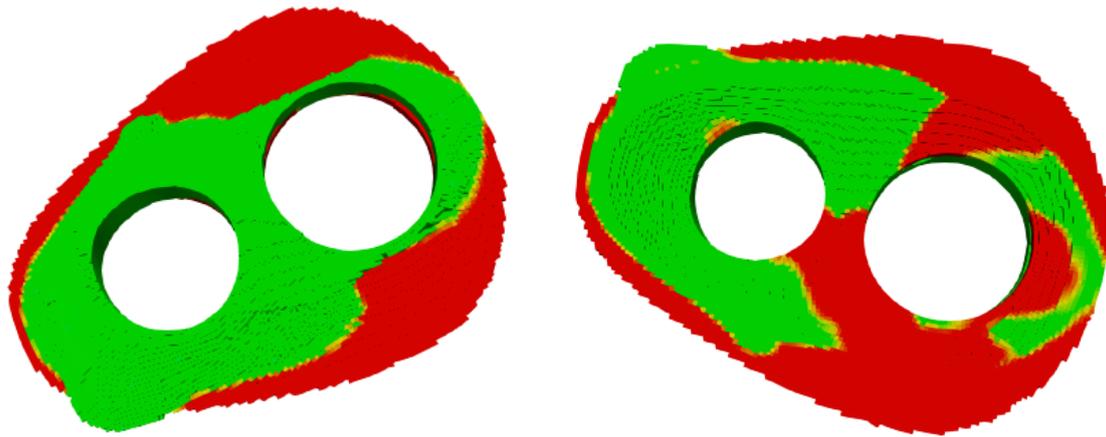
11 Optimisations découplées

A présent, une optimisation topologique va être réalisée sur la géométrie obtenue après optimisation de forme où, suite à la remarque rédigée à la fin de la sous-section 9.4, seules les coordonnées z des noeuds 11 à 20 et 35 ont été optimisées. Leurs valeurs sont reprises dans les colonnes "Après" de la table 5. L'optimisation topologique alors réalisée possède les mêmes fonctions objectifs et contraintes que celle à la sous-section 10.3.

Le résultat de l'optimisation de forme a déjà été présenté à la sous-section 9.1 et l'optimum est pour rappel atteint à la 16^{ème} des 30 itérations réalisées.

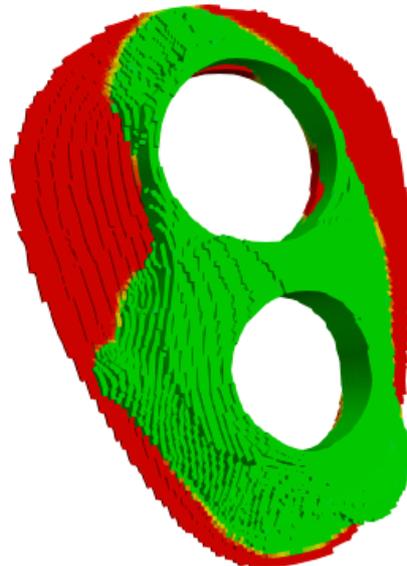
Pour l'optimisation topologique aussi, le nombre d'itérations maximal est fixé à 30.

Le résultat alors obtenu après l'optimisation topologique, réalisée à partir de l'optimum fourni par l'optimisation complète de forme, est présenté à la figure 57 ci-dessous selon 3 différentes vues.



(A) Vue de la surface externe

(B) Vue de la surface interne



(c) Vue des raidisseurs

FIGURE 57 – Résultat des optimisations découplées.

On remarque que, logiquement, la priorité de renforcement est conservée.

En premier lieu, le petit logement de palier est renforcé à partir de la surface supérieure, incluant les raidisseurs depuis leur hauteur maximale, jusque tout en bas.

En second lieu, l'espace intermédiaire entre les deux logements de palier se voit également consolidé dans la partie supérieure avec une surépaisseur maximale. Cette dernière ne se prolonge cependant pas jusqu'à l'extrémité inférieure de la pièce, comme dans le cas présenté à la sous-section 10.3. En outre, la dissymétrie de part et d'autre des trous du carter est toujours aussi marquée.

Enfin, les abords du grand logement de palier se voient aussi fortifiés dans la partie supérieure mais avec une épaisseur de raidisseurs relativement faible. De plus, on retrouve à nouveau l'appui inférieur légèrement décollé du grand logement de palier, comme dans le cas du résultat à la sous-section 10.3.

Globalement, le résultat visuel obtenu est similaire au cas complexe d'une optimisation topologique sans optimisation de forme au préalable, voir figure 56 à la sous-section 10.3,

Les principales différences sont la dissymétrie déjà évoquée, ainsi que le prolongement des raidisseurs dans la région inférieure gauche de la figure 57a.

La combinaison d'une optimisation de forme avec une optimisation topologique, même découplées, a pour effet de sensiblement réduire la compliance. En effet, la compliance n'est plus que de $165099 \cdot 10^{-6}$ J au lieu de $229175 \cdot 10^{-6}$ J (dans le cas de la section 10.3), soit une diminution de 28%.

L'effet d'une combinaison, de manière couplée, d'une optimisation topologique avec une optimisation de forme est investiguée à la section ci-après.

12 Optimisation bi-niveaux

Cette fois, l'optimisation de forme et l'optimisation topologique n'ont pas été réalisées successivement mais de manière couplée. Concrètement, une optimisation topologique est réalisée, dans son entièreté, à chaque itération de l'optimisation de forme.

Comme mentionné à la section 9.4, seules les coordonnées z sont choisies comme optimisables pour une raison d'efficacité d'optimisation et de temps de calcul.

Pour l'optimisation topologique, le cas plus complexe est étudié, soit celui envisagé à la sous-section 10.3 et lors des optimisations découplées avec deux blocs et plusieurs matériaux.

La convergence de l'optimisation de forme est assurée exactement de la même manière que lorsqu'elle est effectuée seule, soit en imposant un nombre maximum d'itérations de 30. De même, 30 itérations sont suffisantes dans le cas de l'optimisation topologique.

Le schéma d'une optimisation bi-niveaux couplée présenté à la figure 18 à la section 2.6 peut être adapté à cette optimisation bi-niveaux comme montré à la figure 58 ci-dessous.

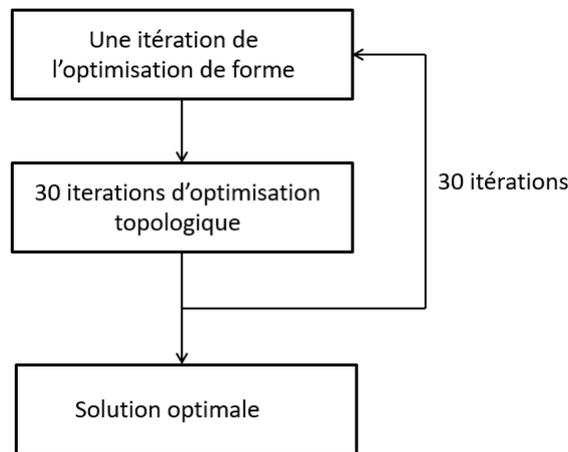


FIGURE 58 – Schéma de l'optimisation bi-niveaux considérée ici.

Le résultat optimum obtenu lors de la 30^{ème} itération topologique, soit la dernière, de la 26^{ème} itération de forme est présenté ci-dessous à la figure 59 selon 3 vues différentes.

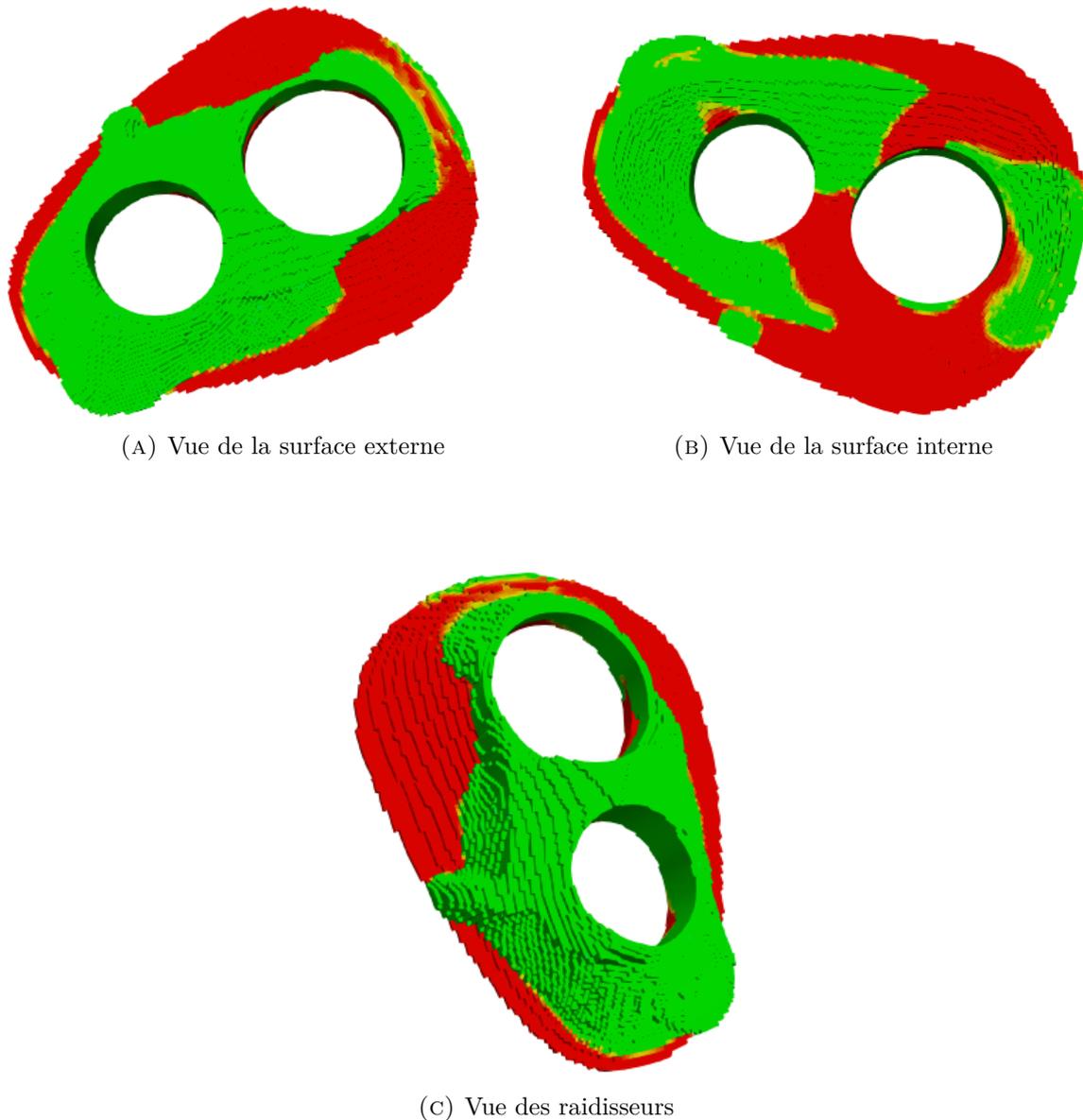


FIGURE 59 – Résultat de l'optimisation bi-niveaux.

On voit immédiatement des changements assez importants comparé au résultat de l'optimisation topologique effectuée sur le domaine initial de la section 10.3 où aucune optimisation de forme n'a encore été effectuée et où les coordonnées des noeuds correspondent donc toujours aux coordonnées initiales.

Bien que le petit logement de palier corresponde toujours à la région la plus renforcée, on remarque à la figure 59b que ce renforcement ne s'effectue plus jusqu'à la surface inférieure sur tout le pourtour du trou.

La section séparant les deux logements de palier se voit, elle, renforcée de la même manière que dans le cas des optimisations découplées (cf. figure 57 à la section 11) mais avec un appui pour le grand logement de palier plus large et plus proche du trou.

A nouveau, on distingue un prolongement des raidisseurs dans la région inférieure gauche de la figure 59a. Sur cette figure, on note également une nouveauté : une extension des raidisseurs vers le nord dans la partie centrale. On retrouve également cette extension dans le bas de la figure 59b. Cette fortification de ce côté du carter, le même que pour la section entre les deux paliers, contribue à accentuer la dissymétrie de la structure.

La compliance dans le cas de cette optimisation bi-niveaux est de $162415 \cdot 10^{-6}$ J. Cette valeur est tout de même moins élevée que dans le cas d'optimisations découplées où, pour rappel, la compliance est de $165099 \cdot 10^{-6}$ J. Le gain obtenu en couplant les optimisations de forme et de topologie est donc de 1.6%, peut-être moins conséquent qu'espéré au vu de temps de calcul important. Ce point est néanmoins rediscuté par la suite.

Le tableau 13 ci-dessous reprend les valeurs de compliance dans le cas d'une optimisation topologique seule, d'optimisations de forme et de topologie découplées et d'optimisations de forme et de topologie couplées. Ces valeurs de compliance sont comparées à l'aide d'un gain relatif, exprimé en pourcentage, par rapport à la plus haute valeur de compliance, correspondant logiquement au cas de l'optimisation topologique seule.

	Compliance [J]	Gain en [%]
Optimisation topologique	0.229175	/
Optimisations découplées	0.165099	28.0
Optimisations couplées	0.162415	29.1

TABLE 13 – Tableau récapitulatif des valeurs de compliance des différents cas et des gains relatifs.

Par rapport à la convergence maintenant, on observe aux figures 60 et 61 ci-dessous qu'elle a bel et bien été atteinte dans ce cas-ci également. L'optimum est atteint lors de la 26^{ème} des 30 itérations de forme, et bien entendu lors de la dernière itération de l'optimisation topologique effectuée lors de cette itération de forme puisque la compliance, une fois son maximum atteint, décroît continuellement au cours du procédé itératif de l'optimisation topologique. Cette dernière évolution est montrée à la figure 61.

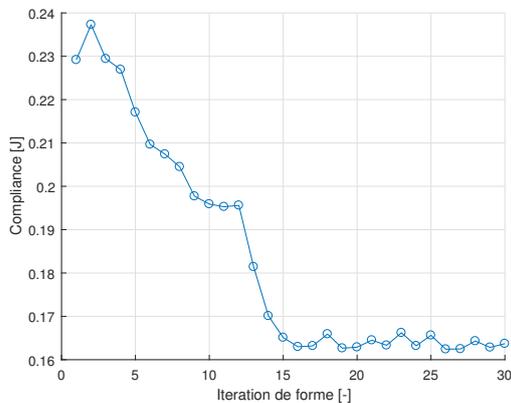


FIGURE 60 – Convergence de la compliance au cours des itérations de forme de l'optimisation bi-niveaux.

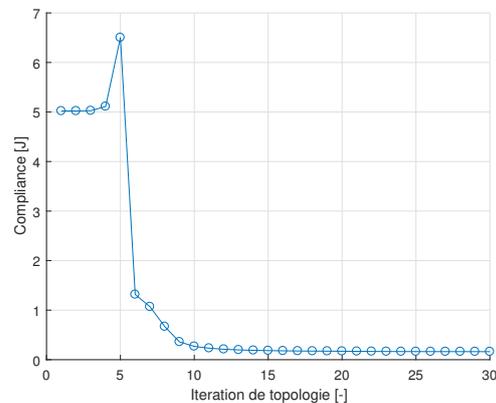


FIGURE 61 – Convergence de la compliance au cours des itérations topologiques de l'optimisation bi-niveaux.

Le graphe qui montre l'évolution de la compliance lors de l'optimisation de forme dans le cadre de l'optimisation bi-niveaux, voir figure 60, ressemble naturellement beaucoup à celui de l'optimisation de forme des coordonnées z sans optimisation topologique intercalée, voir figure 48.

Le graphe qui montre l'évolution de la compliance lors de l'optimisation topologique dans le cadre de l'optimisation bi-niveaux possède également la forme classique d'un graphe de convergence d'optimisation topologique réalisée avec le logiciel OOFELIE.

Toutefois, l'optimisation de forme n'a cure de connaître la géométrie parfaite de l'optimisation topologique. Seule la valeur de compliance importe et influe sur l'itération de forme suivante. C'est pourquoi, au vu de la figure 61, il serait plus opportun de limiter l'optimisation topologique à une dizaine ou maximum une quinzaine d'itérations avant de réaliser une nouvelle itération sur la forme. La possibilité d'imposer un critère sur la compliance lors des itérations topologiques intermédiaires permettrait donc de diviser le temps de calcul par un facteur proche de 2. Ce critère pourrait également se traduire sous la forme d'un nombre d'itérations maximal.

Notons néanmoins que le problème provient du fait que la dernière optimisation topologique, contrairement aux précédentes, doit être réalisée de manière complète avec un critère sur les pseudo-densités ou bien un nombre d'itérations maximal plus important, 30 dans ce cas. Cependant cette possibilité d'imposer un critère différent pour les dernières des optimisations topologiques n'existe pas à l'heure actuelle dans OOFELIE. Cette nouveauté nécessiterait un développement futur mais s'avérerait capitale, toujours dans le but d'une réduction du temps de calcul.

13 Conclusion et perspectives futures

Le but de ce travail était d'étudier de nouvelles fonctionnalités en optimisation des structures dans le cadre d'une application industrielle qu'est un carter de boîte de vitesses. L'objectif était de conserver les fonctions primordiales de ce carter, telle l'étanchéité, tout en réduisant la masse de cette pièce.

Pour ce faire, une revue de la littérature a tout d'abord été effectuée avant une prise en main des logiciels qui ont permis l'étude des nouvelles fonctionnalités.

Ensuite, différents paramètres et diverses fonctions contraintes ont été analysés au cours d'optimisations topologiques comprenant l'utilisation de plusieurs matériaux et plusieurs blocs.

Une méthode innovante basée sur la méthode des level-sets a alors été utilisée pour sélectionner un nouveau domaine d'optimisation dont la forme peut varier. Cet objectif a été satisfait à l'aide de T-splines qui ont servi de support à la création du level-set.

Des optimisations de forme selon les différents axes ont alors été réalisées et comparées entre elles. Cela a mis en évidence que l'optimisation de forme selon les coordonnées z permettait d'obtenir un gain substantiel tout en conservant un temps de calcul raisonnable. Le bénéfice d'une optimisation selon toutes les coordonnées restait en effet limité en fonction du temps de calcul alors nécessaire.

A partir du même domaine d'optimisation sélectionné par la méthode des level-sets, des optimisations topologiques ont également pu être définies. Ce travail a mis en avant un gain important lié à une combinaison entre une optimisation de forme et une optimisation topologique, davantage encore lorsque les optimisations sont effectuées de manière couplée, soit imbriquées l'une dans l'autre. Toutefois, en l'état actuel des choses, ces optimisations couplées ne peuvent être rentables, en terme de temps de calcul, sans un développement essentiel d'un critère d'arrêt spécifique pour les optimisations topologiques intermédiaires, c'est-à-dire lorsque la forme optimale n'a pas encore été atteinte. Le temps pourrait alors être divisé par un facteur proche de 2 voire 3.

D'autres perspectives consisteraient à évaluer d'autres fonctions objectifs que la compliance, par exemple l'imposition d'une masse maximale de la structure. Il pourrait également se révéler intéressant d'imposer localement des limites de déplacements maxima.

Au vu de la capacité du logiciel à réaliser des analyses multi-physiques, il serait certainement intéressant d'étudier l'acoustique voire la vibro-acoustique de la structure optimisée.

Il paraît également opportun de vérifier que les conclusions tirées au cours de ce travail restent valables pour d'autres applications.

Enfin, concevoir les étapes de fabrication de la pièce s'avère être une tâche importante au vu de la complexité des résultats exposés.

Références

- [1] **Agence wallonne de l'air et du climat (AWAC)**. Emission de particules en suspension (pm10 et pm2.5). <http://www.awac.be/index.php/2017-03-28-09-19-01/emission-de-pm-10-et-pm2-5> consulté le 17-04-2019.
- [2] **Bruxelles environnement**. Emission de particules fines (pm 10 primaires). <https://environnement.brussels/etat-de-lenvironnement/synthese-2015-2016/air/emissions-de-pm10-primaires> consulté le 17-04-2019.
- [3] **M. BRUYNEEL & al.** Optimisation des structures mécaniques : Méthodes numériques et éléments finis. 2014.
- [4] **P. DUYSINX & P. TOSSINGS**. Structural and multidisciplinary optimization. 2018. <http://www.ingveh.ulg.ac.be/index.php?page=meca0027> consulté le 13-02-2019.
- [5] **A. HENROT & J. SOKOLOWSKI**. Qu'est-ce que l'optimisation de forme? *Université Henri Poincaré – Nancy*, 2003.
- [6] **V. BRAIBANT & P. MORELLE**. Shape optimal design and free mesh generation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2 :223–231, 1990.
- [7] **M.P. BENDSOE & O. SIGMUND**. Topology optimization : Theory, methods and applications. 2003.
- [8] **J.-J. YI & al.** A topology optimization method based on element independent nodal density. *Journal of Central South University*, 21 :558–566, 2014.
- [9] **O. SIGMUND**. Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33 :401–424, 2007.
- [10] **G. ALLAIRE & al.** A level-set method for shape optimization. 2002.
- [11] **G. ALLAIRE & al.** Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 194 :363–393, 2004.
- [12] **O. SIGMUND**. Design of multiphysics actuators using topology optimization - part 2 : Two-material structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6577–6604, 2000.
- [13] **M. P. BENDSOE & O. SIGMUND**. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 69 :635–654, 1999.
- [14] **E. LUND & J. STEGMANN**. On structural optimization of composite shell structures using a discrete constitutive parametrization. *Wind Energy*, 8 :109–124, 2005.
- [15] **A. SINHA & al.** A review on bilevel optimization : from classical to evolutionary approaches and applications. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 22 :276–295, 2018.

- [16] **M. BRUYNEEL & al.** Application of a bi-level scheme including topology optimization to the design of an aircraft pylon. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 44 :739–750, 2011.
- [17] **T.W. SEDERBERG & al.** T-spline simplification and local refinement. *ACM Transactions on Graphics*, 23 :276–283, 2004.
- [18] **K. SVANBERG.** The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization. *International journal for numerical methods in engineering*, 24 :359–373, 1987.
- [19] **K. SVANBERG.** The method of moving asymptotes - modelling aspects and solution schemes. 1998.
- [20] **M. BRUYNEEL, P. DUYSINX, C. FLEURY.** A family of mma approximations for structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 24 :263–276, 2002.
- [21] **M. PEYREGA.** Optimisation sans dérivées sous contraintes. 2016.
- [22] **M.J.D. POWELL.** An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *Computer Journal*, 7 :155–162, 1964.
- [23] **SIEMENS.** Samcef documentation (USER MANUAL V18). Novembre 2015.
- [24] **O. SIGMUND.** Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33 :401–424, 2007.
- [25] **OPEN ENGINEERING S.A.** OOFELIE : :ADX (USER MANUAL V1.5). Octobre 2018.
- [26] **M.P. BENDSOE & O. SIGMUND.** Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 69 :635–654, 1999.
- [27] **H.A. ESCHENAUER & N. OLHOFF.** Topology optimization of continuum structures : A review. *Applied Mechanics Reviews*, 54 :331–389, 2001.
- [28] **G. ALLAIRE & al.** Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. *Control and Cybernetics*, 34 :59–80, 2005.

Annexes

1. Caractéristiques de l'ordinateur sur lequel tous les calculs jusque la section 7 ont été effectués :

Operating system	Windows 7
Processor	Intel core i7 3770
	4-core
	3.4GHz
Memory	32GB RAM
Graphics	Nvidia Quadro K600
Year	2009

TABLE 14 – Caractéristiques de l'ordinateur utilisé pour les premières parties.

Caractéristiques de l'ordinateur sur lequel tous les calculs après la section 7 ont été effectués

Operating system	Windows 10
Processor	Intel core i7 7740
	4-core
	4.3GHz
Memory	64GB RAM
Graphics	Nvidia Quadro P1000
Year	2017

TABLE 15 – Caractéristiques de l'ordinateur utilisé pour les dernières parties.

2. Convergence de maillage avec les déplacements maxima lus sur l'échelle :

Taille moyenne de maille [mm]	Déplacements [mm]	Erreur relative [%]
20	1.65177	7.37
15	1.70907	4.27
10	1.73086	2.94
8	1.73726	2.58
6	1.74247	2.29
4	1.77297	0.58
3	1.78327	0

TABLE 16 – Résumé du test de convergence de maillage avec lecture des déplacements maxima sur l'échelle.

3. Comparaison des déplacements selon des directions particulières avant et après optimisation de forme :

La figure 62 ci-dessous montre les répartitions des déplacements selon les directions particulières x, y et z respectivement. L'échelle des couleurs reste standard/classique où le bleu foncé représente des déplacements peu élevés tandis que le rouge vif représente des déplacements extrêmes. Cette répartition de déplacements est identique avant et après n'importe laquelle des optimisations de forme envisagées ici.

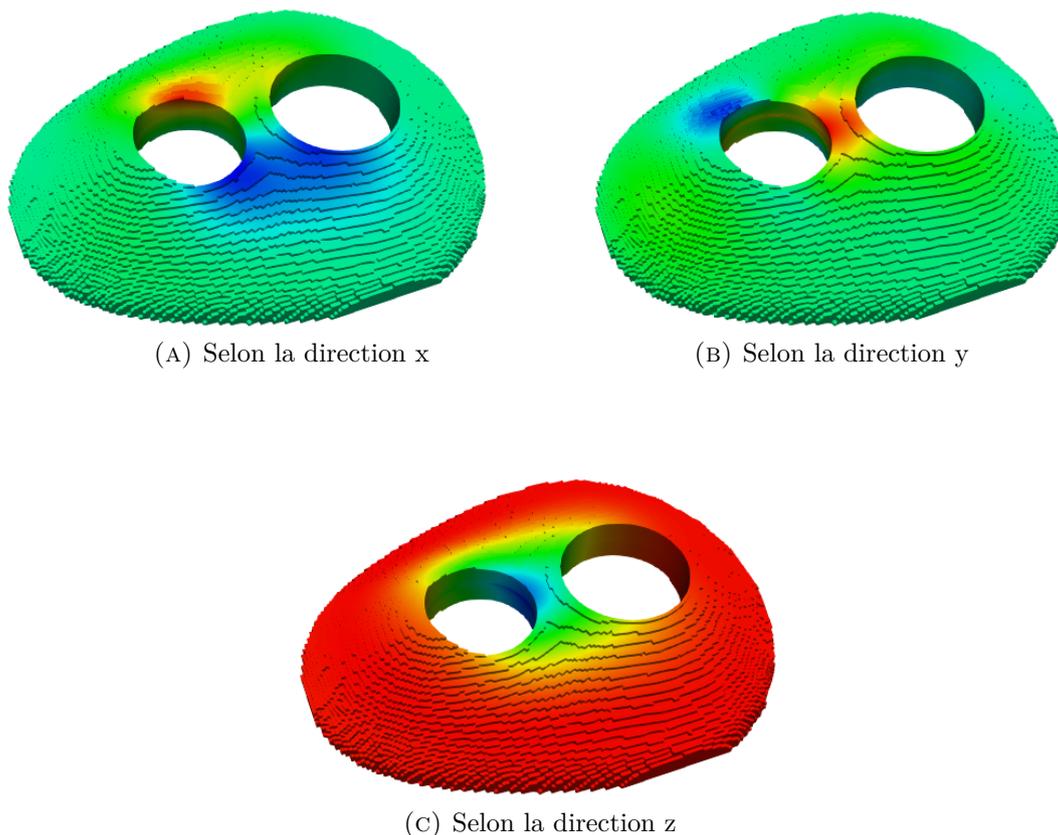


FIGURE 62 – Répartitions des déplacements selon les directions x, y et z.

Les déplacements maxima varient quant à eux nettement avant et après les différentes optimisations de forme réalisées. Ces valeurs sont reprises aux 3 tables ci-dessous selon les 3 directions particulières x, y et z.

SELON LA DIRECTION X	Déplacement maximum [mm]	Gain en [%]
Avant optimisation	0.00994	/
Sur les coordonnées z	0.00813	18.2
Sur les coordonnées x et y	0.00971	2.3
Sur les coordonnées x, y et z	0.00764	23.1

TABLE 17 – Tableau récapitulatif des déplacements maxima selon la direction particulière x avant et après les optimisations de forme étudiées.

SELON LA DIRECTION Y	Déplacement maximum [mm]	Gain en [%]
Avant optimisation	0.00468	/
Sur les coordonnées z	0.00473	-1.1
Sur les coordonnées x et y	0.00457	2.4
Sur les coordonnées x, y et z	0.00466	0.4

TABLE 18 – Tableau récapitulatif des déplacements maxima selon la direction particulière y avant et après les optimisations de forme étudiées.

SELON LA DIRECTION Z	Déplacement maximum [mm]	Gain en [%]
Avant optimisation	0.00028	/
Sur les coordonnées z	0.00021	25
Sur les coordonnées x et y	0.00026	7.1
Sur les coordonnées x, y et z	0.00019	32.1

TABLE 19 – Tableau récapitulatif des déplacements maxima selon la direction particulière z avant et après les optimisations de forme étudiées.

Si on analyse ces tableaux, on remarque que les tendances des valeurs de déplacement maximal sont toujours identiques dans le cas des directions particulières x et z. Autrement dit, ces valeurs sont minimales dans le cas d'une optimisation de forme sur toutes les coordonnées et la somme des gains des optimisations de forme selon les coordonnées z et selon les coordonnées x et y est légèrement inférieure au gain donné par l'optimisation de forme sur toutes les coordonnées.

En revanche, selon la direction particulière y, une optimisation de forme selon les coordonnées z pénalise le résultat. Cet effet est très clair dans le cas d'une optimisation selon les coordonnées z uniquement où le déplacement maximal selon la direction y augmente. En outre, on observe qu'une optimisation de forme sur toutes les coordonnées donnent un moins bon résultat qu'une optimisation de forme selon les coordonnées x et y seulement. Ce qui est plus marquant encore et un peu étonnant est que le gain obtenu lors d'une optimisation sur toutes les coordonnées est plus limité que lorsqu'on additionne les gains des deux autres optimisations.