

Comportement dynamique et étude de confort des planchers mixtes

Auteur : Huysmans, Estelle

Promoteur(s) : De Ville De Goyet, Vincent

Faculté : Faculté des Sciences appliquées

Diplôme : Master en ingénieur civil des constructions, à finalité spécialisée en "civil engineering"

Année académique : 2018-2019

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/6752>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



UNIVERSITÉ DE LIÈGE - FACULTÉ DES SCIENCES
APPLIQUÉES

Comportement dynamique et étude de confort des planchers mixtes

Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade
de master "Ingénieur Civil des Constructions" par
Huysmans Estelle

Composition du jury :
Vincent De Ville De Goyet (promoteur)
Vincent Denoël - Uliège
Yves Duchêne - Bureau Greisch
Jean-François Cap - Bureau Seco

Année Académique 2018 - 2019

Remerciements

Au terme de ce travail de fin d'études, je tiens à remercier toutes les personnes ayant contribué à son élaboration.

Tout d'abord, je remercie particulièrement mon promoteur Vincent De Ville pour son temps, son aide ainsi que ses précieux conseils.

Ensuite, je souhaite remercier Vincent Denoël qui a apporté de nombreuses suggestions et a largement contribué au bon avancement de ce travail. J'aimerais également le remercier lui et son équipe de m'avoir permis d'assister à un test de vibrations de deux planchers au CNIS (Centre National d'Incendie et de Secours) au Luxembourg.

Enfin, je désire également remercier Yves Duchêne du Bureau d'études Greisch pour sa participation à l'entièreté des réunions organisées et pour ses nombreuses explications.

Estelle Huysmans

Abstract

Nowadays, the use of composite steel-concrete floors is widespread. Being more sensitive to dynamic loadings, a special attention must be paid to them.

The purpose of this work is to study the dynamic behaviour of composite steel-concrete floors, especially the localization of the eigen modes. Two sources of localization are studied independently : the shift of one of the beams supporting the slab and the cracking of the slab.

To study the influence of the shift, a Matlab code is developed. It computes the form of eigen modes as well as the corresponding modal masses and natural frequencies. Depending on the combination of floor's parameters, some eigen modes do not extend over the entire floor but only on a part of it. Studies have shown that mode localization is increased when :

- a small number of spans with a large distance between the beams,
- the dimension of the floor in the direction of the beams is important,
- the slab is stiff compared to the beams,
- identical spans.

For the study of the influence of concrete cracking on the shape of eigen modes, Finelg software is used. It allows to calculate the eigen modes for a cracked state. The conclusions observed are that the more the state is cracked, the more the modes are localized.

Résumé

De nos jours, l'utilisation des planchers mixtes acier-béton est largement répandue. Étant plus sensibles aux sollicitations dynamiques, une attention toute particulière doit leur être accordée.

Le but de ce travail est d'étudier le comportement dynamique des planchers mixtes et en particulier, la localisation des modes propres. Deux sources de localisation sont étudiées de manières indépendantes : le décalage d'une des poutres servant d'appui à la dalle et la fissuration de la dalle.

Pour étudier l'influence du décalage, un code Matlab est développé permettant de connaître la forme des modes propres ainsi que les masses modales et fréquences propres correspondantes. En fonction de la combinaison des paramètres du plancher, certains modes propres ne s'étendent plus sur l'entièreté du plancher mais seulement sur une partie. Les études ont démontré que la localisation des modes diminuait lorsque :

- un faible nombre de portées avec une grande entre-distance entre les poutres,
- la dimension du plancher dans la direction des poutres est importante,
- la dalle est raide par rapport aux poutres,
- des portées identiques.

Pour l'étude de l'influence de la fissuration du béton sur la forme des modes propres, le logiciel Finelg est utilisé. Il permet de calculer les modes propres pour un état fissuré. Les conclusions observées sont que plus l'état est fissuré, plus les modes se localisent.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte	1
1.1.1	Les planchers mixtes acier-béton	1
1.1.2	Dynamique	2
1.2	Énoncé/problématique	4
1.3	Démarche	5
2	État de l’art	6
2.1	Charge dynamique créée par un piéton	6
2.1.1	Décomposition en série de Fourier	6
2.1.2	Décomposition polynomiale	9
2.1.3	Comparaison	11
2.2	Critères d’évaluation des vibrations	12
2.2.1	Critères sur l’accélération	12
2.2.2	Critères sur les fréquences	14
2.3	Module de Young du béton	15
2.4	Méthode proposée par l’HIVOSS	15
3	Étude analytique d’une plaque orthotrope	18
3.1	Introduction	18
3.2	Développements mathématiques	19
3.3	Conclusions	23
4	Étude analytique d’une plaque isotrope sur poutres multiples	25
4.1	Introduction	25
4.2	Développements mathématiques	25
4.2.1	Plaque isotrope	25
4.2.2	Ajout de la contribution des poutres	26
4.2.3	Décalage d’une des poutres servant d’appui à la dalle	30
4.2.4	Forme des modes	32
4.2.5	Critère de localisation des modes	33
4.3	Le nombre de formes à prendre en compte	34
4.3.1	Détermination de m_{max} et n_{max}	35
4.3.2	Vérification	40
4.3.3	Conclusions	41
4.4	Architecture du code Matlab	41
4.5	Validation du code Matlab	42
4.5.1	Cas 1 : poutres raides - 2 portées de 5m - $L_y = 5m$	43

4.5.2	Cas 2 : Dalle raide - 2 portées de 5m - $L_y=5m$	46
4.5.3	Autres cas	48
4.5.4	Conclusions	48
4.6	Comparaison avec les résultats de l'article des auteurs Christophe Pierre, De Man Tang et Earl H. Dowell	49
4.7	Variation des paramètres	51
4.7.1	Variations du décalage ΔL et du nombre de portée p de 5m . . .	51
4.7.2	Variations du décalage ΔL et la portée entre les poutres	56
4.7.3	Variations du décalage ΔL et de l'inertie des poutres I	59
4.7.4	Variations du décalage ΔL et de la longueur L_y	63
4.8	Conclusions	67
4.8.1	Combinaison optimale pour éviter la localisation de modes	67
4.8.2	Intervalle de fréquences des piétons	67
5	Influence de la fissuration sur les modes propres	69
5.1	Introduction	69
5.2	Simulations	70
5.2.1	Modèle	70
5.2.2	Analyse dynamique linéaire	71
5.2.3	Analyse dynamique non linéaire sous poids propre	73
5.2.4	Analyse dynamique non linéaire sous poids propre et sous les sur- charges d'exploitation	78
5.3	Conclusions	81
6	Exemple concret	82
6.1	Introduction	82
6.2	Géométrie	82
6.3	Tests	83
6.4	Résultats de Finelg et du code Matlab	84
6.5	Décalage de la poutre à mi-portée	86
6.6	Prise en compte de la fissuration	88
7	Conclusion générale	89
A	Résolution de l'équation du mouvement	90
B	Cas 3 - Poutres raides - 4 portées de 5m - $L_y = 5m$	92
B.1	Caractéristiques du plancher	92
B.2	Détermination de m_{max} ($n_{max} = 1$)	93
B.3	Comparaison des résultats avec ceux de Finelg	94
B.3.1	Erreur relative sur les valeurs des masses généralisées et des fré- quences	94
B.3.2	Comparaison de la forme des modes	95
C	Cas 4 - Dalle raide - 4 portées de 5m - $L_y = 5m$	96
C.1	Caractéristiques du plancher	96
C.2	Détermination de m_{max} ($n_{max} = 1$)	97
C.3	Comparaison des résultats avec ceux de Finelg	98

C.3.1	Erreur relative sur les valeurs des masses généralisées et des fré-	
	quences	98
C.3.2	Comparaison de la forme des modes	99
D	Cas 5 - Poutres raides - 2 portées de 5m - $L_y = 10m$	100
D.1	Caractéristiques du plancher	100
D.2	Détermination de m_{max} ($n_{max} = 1$)	101
D.3	Comparaison des résultats avec ceux de Finelg	102
D.3.1	Erreur relative sur les valeurs des masses généralisées et des fré-	
	quences	102
D.3.2	Comparaison de la forme des modes	103
E	Cas 6 - Dalle raide - 2 portées de 5m - $L_y = 10m$	104
E.1	Caractéristiques du plancher	104
E.2	Détermination de m_{max} ($n_{max} = 1$)	105
E.3	Comparaison des résultats avec ceux de Finelg	106
E.3.1	Erreur relative sur les valeurs des masses généralisées et des fré-	
	quences	106
E.3.2	Comparaison de la forme des modes	107
F	Cas 7 - Poutres raides - 4 portées de 5m - $L_y = 10m$	108
F.1	Caractéristiques du plancher	108
F.2	Détermination de m_{max}	109
F.3	Comparaison des résultats avec ceux de Finelg	110
F.3.1	Erreur relative sur les valeurs des masses généralisées et des fré-	
	quences	110
F.3.2	Comparaison de la forme des modes	111
G	Cas 8 - Dalle raide - 4 portées de 5m - $L_y = 10m$	112
G.1	Caractéristiques du plancher	112
G.2	Détermination de m_{max} ($n_{max} = 1$)	113
G.3	Comparaison des résultats avec ceux de Finelg	114
G.3.1	Erreur relative sur les valeurs des masses généralisées et des fré-	
	quences	114
G.3.2	Comparaison de la forme des modes	115
H	Fonctions Matlab	116
H.1	Plaque isotrope	116
H.2	Contribution des poutres	117
H.3	Main	119

Table des figures

1.1	Exemple de plancher mixte	1
1.2	Évolution de la réponse en fonction du rapport $\bar{\omega}/\omega_1$	3
2.1	Exemple de force verticale engendrée par le pas d'un piéton (Figure A.2 de l'ISO 10137 :2012 [5])	6
2.2	Exemple de force verticale engendrée par la marche d'un piéton sur une plateforme instrumentée longue de 3 mètres (Figure A.3 de l'ISO 10137 :2012 [5])	7
2.3	Différence entre les coefficients de Fourier entre la norme ISO et la publication du SCI	8
2.4	Comparaison des différentes courbes de charge de marche	9
2.5	Charge normalisée d'un pas	10
2.6	Série de pas à une fréquence de 2 Hz	11
2.7	Superposition des charges de pas	11
2.8	Comparaison des différentes courbes de charge de marche	11
2.9	Différentes positions considérées par la norme ISO 2631 (Figure 1 de la norme ISO 2631 [8])	13
2.10	Critères sur l'accélération verticale de bâtiments avec des équipements sensibles ($a = a_{RMS}$)	14
2.11	Principe de définition de l' $OS-RMS_{90}$ (Figure 2 du guide de dimensionnement des planchers de l'HIVOSS [3])	17
3.1	Simplification du modèle utilisé pour étudier le plancher mixte	18
4.1	Plancher mixte étudié	25
4.2	Cas de l'étude	30
4.3	Résultats obtenus	30
4.4	$\overline{\Delta l} = 0$ et $\bar{c} = 1000$	31
4.5	$\overline{\Delta l} = 0,01$ et $\bar{c} = 1000$	31
4.6	Décalage ΔL d'une poutre	31
4.7	Plancher cas 1	36
4.8	Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{max} = 1$ - cas 1	36
4.9	Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{max} = 1$ - cas 1 (suite)	37
4.10	Plancher cas 2	38

4.11 Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{max} = 1$ - cas 2	39
4.12 Modélisation de la position des poutres dans le logiciel Finelg	43
4.13 Évolution de la forme du 1 ^{er} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg	45
4.14 Évolution de la forme du 2 ^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg	45
4.15 Évolution de la forme du 2 ^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg	47
4.16 Évolution de la forme du 2 ^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg	47
4.17 Deux premiers modes fournis par l'article [11] pour $\overline{\Delta l} = 0.01$ et $\bar{c} = 1000$	50
4.18 Deux premiers modes dans la configuration choisie avec un décalage de la poutre intermédiaire de 0,4m	50
4.19 Deux premiers modes dans la configuration choisie avec un décalage de la poutre intermédiaire de 1,5m	50
4.20 Rapport M^*/M en fonction du décalage et du nombre de portées p de 5m	52
4.21 Évolution du rapport de la masse généralisée sur la masse totale pour un nombre de portées fixé	53
4.22 Évolution du rapport de la masse généralisée sur la masse totale	53
4.23 Évolution du rapport de la masse généralisée sur la masse totale du mode 4 pour $\Delta L = 0,25m$	54
4.24 Évolution de la forme du mode 4 en fonction de l'augmentation du nombre de portées	54
4.25 Évolution de la forme du mode 3 en fonction de l'augmentation du nombre de portées	55
4.26 Évolution de la forme du mode 5 en fonction de l'augmentation du nombre de portées	56
4.27 Rapport M^*/M en fonction du décalage et de l'augmentation de la portée L_x/p où p est fixé à 2	57
4.28 Évolution de la forme des modes 3 et 4 en fonction de l'augmentation des portées	58
4.29 Évolution du rapport de la masse généralisée sur la masse totale du mode 5 pour $\Delta L = 0,15m$ et $0,3m$	59
4.30 Changement des modes propres suite à l'ajout d'une poutre très raide à mi-portée d'une plaque isotrope	59
4.31 Rapport M^*/M en fonction du décalage et de l'inertie des poutres	60
4.32 Évolution de la forme des modes 1 et 2 en fonction de l'inertie de la poutre	61
4.33 Évolution de la forme des modes 3 et 5 en fonction de l'inertie de la poutre	62
4.34 Évolution de la forme du mode 4 en fonction de l'inertie de la poutre . .	62
4.35 Rapport M^*/M en fonction du décalage et de la longueur L_y des poutres	63
4.36 Évolution du rapport de la masse généralisée sur la masse totale pour les 5 premiers modes pour $\Delta L = 0,15m$	64
4.37 Évolution de la forme des modes 1 et 2 en fonction de la longueur de la poutre	65
4.38 Évolution de la forme des modes 3 et 4 en fonction de la longueur de la poutre	66

4.39	Évolution de la forme du mode 5 en fonction de l'inertie de la poutre . . .	66
4.40	Fréquence et masse généralisée de tous les planchers testés	67
5.1	Loi uniaxiale du béton	69
5.2	Modèle du plancher étudié	70
5.3	Schéma des armatures	71
5.4	Modes propres après un calcul dynamique linéaire (modes 1 et 2)	72
5.5	Modes propres après un calcul dynamique linéaire (modes 3 à 5)	72
5.6	Effet de la non linéarité géométrique	73
5.7	Méthode itérative de Newton-Raphson [12]	74
5.8	Déformée sous poids propre	75
5.9	Courbe chargement-déplacement sous poids propre	76
5.10	Modes propres après un calcul dynamique non linéaire (modes 1 à 4) . .	77
5.11	Modes propres après un calcul dynamique non linéaire (mode5)	77
5.12	Déformée sous poids propre	78
5.13	Courbe chargement-déplacement	79
5.14	Modes propres après un calcul dynamique non linéaire sous poids propre et surcharge d'exploitation (modes 1 à 5)	80
6.1	Plancher mixte du CNIS	82
6.2	Formes des 6 premiers modes propres	85
6.3	Sélection de la poutre décalée	86
6.4	Réduction de la masses généralisées	86
6.5	Évolution de la forme des modes si une des poutre est décalée de 0,4m .	87
6.6	Forme du mode 3 sous poids propre et charge d'exploitation	88
B.1	Plancher cas 3	92
B.2	Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{max} = 1$ - cas 3	93
B.3	Évolution de la forme du 1 ^{er} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 3	95
B.4	Évolution de la forme du 2 ^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 3	95
C.1	Plancher cas 4	96
C.2	Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{max} = 1$ - cas 4	97
C.3	Évolution de la forme du 1 ^{er} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 4	99
C.4	Évolution de la forme du 2 ^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 4	99
D.1	Plancher cas 5	100
D.2	Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{max} = 1$ - cas 5	101

D.3	Évolution de la forme du 1 ^{er} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 5	103
D.4	Évolution de la forme du 2 ^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 5	103
E.1	Plancher cas 6	104
E.2	Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{max} = 1$ - cas 6	105
E.3	Évolution de la forme du 1 ^{er} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 6	107
E.4	Évolution de la forme du 2 ^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 6	107
F.1	Plancher cas 7	108
F.2	Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres $n_{max} = 1$ - cas 7	109
F.3	Évolution de la forme du 1 ^{er} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 7	111
F.4	Évolution de la forme du 2 ^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 7	111
G.1	Plancher cas 8	112
G.2	Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{max} = 1$ - cas 8	113
G.3	Évolution de la forme du 1 ^{er} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 8	115
G.4	Évolution de la forme du 2 ^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 8	115

Liste des tableaux

2.1	Coefficients de Fourier α_k et déphasages ϕ_k	8
2.2	Coefficients K_1 à K_8 pour une fréquence de pas f_s donnée	10
2.3	Facteur multiplicateur	14
2.4	Fréquences critiques	15
2.5	Valeurs de l'amortissement (Tableau 3 du guide de dimensionnement des planchers de l'HIVOSS [3])	16
2.6	Valeurs limites de l' $OS-RMS_{90}$ en fonction de l'utilisation du plancher (Tableau 1 du guide de dimensionnement des planchers de l'HIVOSS [3])	17
4.1	Valeurs de termes $q_{mn}q_{in}$ et $\dot{q}_{mn}\dot{q}_{in}$ lorsque m, n et i varient de 1 à 2	28
4.2	Propriétés du plancher calculé - cas 1	35
4.3	Propriétés du plancher calculé - cas 2	38
4.4	Valeurs de m_{max} et de n_{max}	40
4.5	Erreur maximale lorsque $m_{max} = 40$ et $n_{max} = 40$	40
4.6	Fréquences propres et masses généralisées - cas 1	44
4.7	Fréquences propres et masses généralisées - cas 2	46
4.8	Récapitulatif des erreurs relatives entre les résultats du code Matlab et ceux du logiciel Finelg	48
5.1	Propriétés du plancher	71
5.2	Fréquences propres, masse généralisée et raideur généralisée pour le 5 premiers modes suite à un calcul dynamique linéaire	73
5.3	Fréquences propres, masse généralisée et raideur généralisée pour le 5 premiers modes suite à un calcul dynamique non linéaire	78
5.4	Fréquences propres, masse généralisée et raideur généralisée pour le 5 premiers modes suite à un calcul dynamique non linéaire sous poids propre et surcharge d'exploitation	81
6.1	Propriétés du plancher du CNIS	83
6.2	Fréquences propres et masse généralisée du plancher du CNIS	83
6.3	Fréquences propres et masses généralisées - CNIS	84
6.4	Fréquences propres et masse généralisée du plancher du CNIS où une des poutres est décalée de 0,4m	86
6.5	Comparaison des résultats du calcul dynamique linéaire et non linéaire	88
B.1	Propriétés du plancher calculé - cas 3	92
B.2	Fréquences propres et masses généralisées - cas 3	94
C.1	Propriétés du plancher calculé - cas 4	96
C.2	Fréquences propres et masses généralisées - cas 4	98

D.1	Propriétés du plancher calculé - cas 5	100
D.2	Fréquences propres et masses généralisées - cas 5	102
E.1	Propriétés du plancher calculé - cas 6	104
E.2	Fréquences propres et masses généralisées - cas 6	106
F.1	Propriétés du plancher calculé - cas 7	108
F.2	Fréquences propres et masses généralisées - cas 7	110
G.1	Propriétés du plancher calculé - cas 8	112
G.2	Fréquences propres et masses généralisées - cas 8	114

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

1.1.1 Les planchers mixtes acier-béton

Depuis quelques années, l'utilisation des planchers mixtes faisant collaborer l'acier et le béton est de plus en plus répandue. L'association adéquate de ces deux matériaux permet de tirer au mieux profit des avantages de chacun.

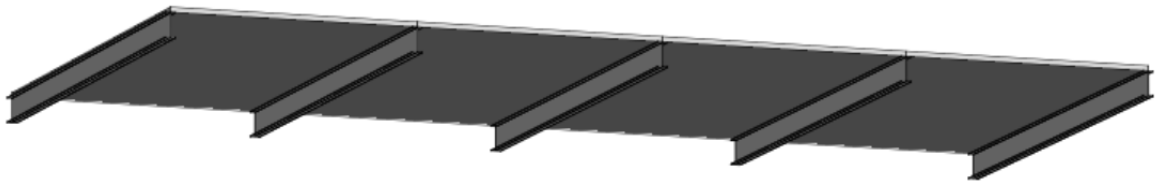


FIGURE 1.1 – Exemple de plancher mixte

L'acier et le béton sont des matériaux aux propriétés mécaniques différentes mais sont néanmoins compatibles et complémentaires. En effet, ils ont des coefficients de dilatation thermique approximativement identiques et leurs propriétés mécaniques se compensent, l'acier étant plus efficace lors de la reprise d'efforts en traction alors que le béton a un meilleur comportement en compression [1].

Les avantages structurels des planchers mixtes sont divers :

- Meilleure résistance des aciers vis-à-vis du feu et de la corrosion car ils sont protégés par le béton,
- Meilleure stabilité hors plan des poutres grâce à la dalle,
- Réduction de la hauteur du plancher et donc de son poids via la combinaison des poutres avec la dalle.

Le fait que les planchers mixtes soient pour un même chargement plus légers que d'autres planchers traditionnels, comme par exemple les dalles en béton armé, les rend très susceptibles aux vibrations et aux chargements dynamiques. Il est donc important

que la fréquence propre du plancher soit en dehors de la gamme de fréquences de la charge dynamique qui lui est appliquée afin d'éviter un phénomène de résonance possible amplifiant fortement les déplacements. Les piétons entraînent une charge dynamique dont la fréquence est de l'ordre de 2 Hz.

1.1.2 Dynamique

L'équation de base de la dynamique des structures pour un système à N degrés de liberté est la relation suivante [2] :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (1.1)$$

où $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ représentent respectivement les matrices structurelles de masse, de viscosité et de raideur et $\mathbf{P}$ est la charge dynamique appliquée.

En simplifiant le système à un seul degré de liberté et en imposant une charge sinusoïdale :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) &= \bar{p}\sin(\bar{\omega}t) \\ \Leftrightarrow \ddot{q}(t) + 2\omega_1\xi\dot{q}(t) + \omega_1^2q(t) &= \frac{\bar{p}}{m}\sin(\bar{\omega}t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ est la pulsation propre du système,} \\ \xi = \frac{c}{2m\omega_1} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \text{ est le coefficient d'amortissement,} \\ \frac{\bar{p}}{m}\sin(\bar{\omega}t) \text{ est la force dynamique appliquée d'amplitude } \frac{\bar{p}}{m} \text{ et de pulsation } \bar{\omega}. \end{array} \right.$$

L'étude des 3 cas limites suivants permet d'identifier les 3 types de réponses pouvant être obtenus en fonction du rapport $\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}$. Dans chacun des cas, un seul des termes du membre de gauche de l'équation (1.2) est prépondérant par rapport aux autres, ce qui donne des réponses aux comportements différents.

1. si $\frac{\bar{\omega}}{\omega_1} \ll$, l'équation s'écrit :

$$\omega_1^2 q(t) = \frac{\bar{p}}{m} \sin(\bar{\omega}t) \quad \Leftrightarrow \quad q(t) = \frac{\bar{p}}{k} \sin(\bar{\omega}t) \quad (1.3)$$

Dans le cas où la fréquence de charge est beaucoup plus faible que la fréquence propre du système, celui-ci est en chaque instant en équilibre avec les forces extérieures. Il s'agit de la solution quasi-statique.

2. si $\frac{\bar{\omega}}{\omega_1} \gg$, l'équation devient :

$$\ddot{q}(t) = \frac{\bar{p}}{m} \sin(\bar{\omega}t) \quad \Leftrightarrow \quad q(t) = -\frac{\bar{p}}{m\bar{\omega}^2} \sin(\bar{\omega}t) + At + B \quad (1.4)$$

où A et B sont des constantes d'intégration.

En ne considérant que le premier terme, il est constaté que la réponse est réduite par rapport à la réponse quasi-statique d'un facteur $\left(\frac{\omega_1}{\bar{\omega}}\right)^2$.

$$q(t) = -\frac{\bar{p}}{M\bar{\omega}^2} \sin(\bar{\omega}t) = -\frac{\bar{p}}{k} \left(\frac{\omega_1}{\bar{\omega}}\right)^2 \sin(\bar{\omega}t) \quad (1.5)$$

Dans ce cas, la fréquence d'oscillation du chargement est tellement rapide que le système "n'a pas le temps" de réagir. La force appliquée et la réponse engendrée sont alors en opposition de phase, représentée par le signe '-'. Par effet d'inertie, le système s'oppose au déplacement. Ce type de régime est naturellement appelé la réponse inertielle.

3. si $\frac{\bar{\omega}}{\omega_1} \approx 1$, l'équation se réduit à :

$$2\omega_1\xi\dot{q}(t) = \frac{\bar{p}}{m} \sin(\bar{\omega}t) \quad \Leftrightarrow \quad q(t) = -\frac{\bar{p}}{2m\omega_1\bar{\omega}\xi} \cos(\bar{\omega}t) + C \quad (1.6)$$

où C est une constante d'intégration. En n'analysant que le premier terme et en y introduisant la relation entre $\bar{\omega}$ et ω_1 , nous en déduisons que :

$$q(t) = -\frac{\bar{p}}{2m\omega_1^2\xi} \cos(\bar{\omega}t) = -\frac{\bar{p}}{k} \frac{1}{2\xi} \cos(\bar{\omega}t) \quad (1.7)$$

Dans ce cas, la réponse est fortement amplifiée d'un terme $\frac{1}{2\xi}$ puisqu'en construction, le coefficient d'amortissement ξ est relativement faible (entre 1% et 5%). Ce phénomène s'appelle la résonance. Il est donc évident que ce type de réponse est à éviter afin de limiter les déplacements transversaux d'un plancher. La fréquence de charge imposée par la marche d'un piéton doit donc être éloignée de la fréquence propre du plancher.

La résolution analytique complète de l'équation du mouvement (1.2) a été réalisée à l'Annexe A. L'évolution de la réponse obtenue suite à une excitation harmonique de fréquence $\bar{\omega}$ est présente à la FIGURE 1.2 où les 3 cas limites sont représentés.

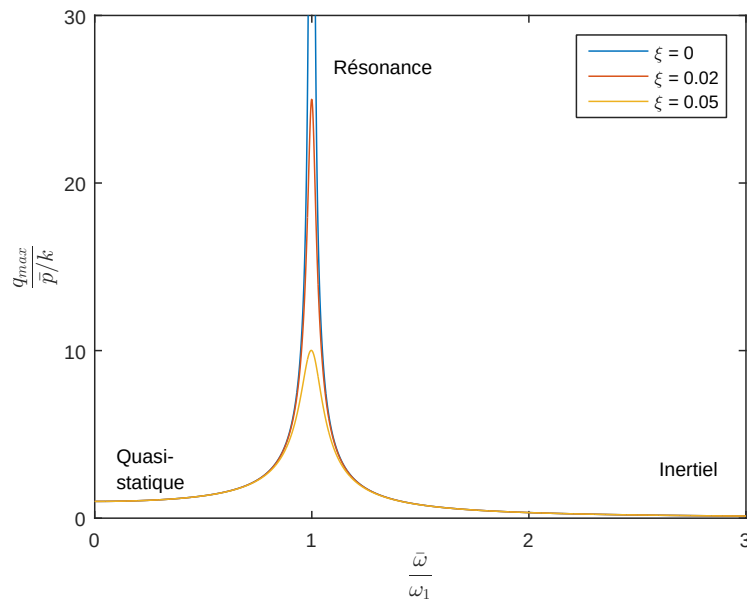


FIGURE 1.2 – Évolution de la réponse en fonction du rapport $\bar{\omega}/\omega_1$

1.2 Énoncé/problématique

Les normes actuelles ne prévoient ni une démarche à suivre ni des critères précis permettant d'étudier le confort de planchers. L'HIVOSS (Human Induced Vibrations Of Steel Structures) a publié un guide en 2007 [3] décrivant une méthode à suivre pour dimensionner un plancher soumis à des vibrations engendrées par la marche d'usagers pouvant nuire au confort d'autres usagers. Ce guide est accompagné d'un document de référence [4] contenant des informations supplémentaires sur la méthode à suivre. En fonction de la fréquence propre et de la masse généralisée du plancher étudié, des critères permettent de déduire si le confort des occupants est suffisant. Il serait donc intéressant de déterminer une méthode de calcul fournissant les valeurs des fréquences propres et des masses généralisées pour différents types de planchers.

Ensuite, sur base de cette méthode de calcul, une étude paramétrique est réalisée afin de déterminer l'influence des paramètres du plancher sur les propriétés dynamiques et sur la forme des modes propres. Pour un confort optimal, la fréquence propre du plancher doit être éloignée de la fréquence d'excitation mais la masse généralisée doit également être la plus grande possible pour limiter l'accélération transversale du plancher. Deux phénomènes influençant la masse généralisée sont étudiés :

1. la localisation des modes propres suite à l'irrégularité des portées entre les poutres,
2. la fissuration du béton.

L'irrégularité de la portée entre les poutres a un effet non négligeable sur la masse généralisée. Le décalage d'une des poutres entraîne la localisation des modes propres alors que ceux-ci sont répartis sur l'entièreté de la dalle lorsque les portées sont identiques. Cela réduit considérablement la masse généralisée. De plus, l'influence des paramètres géométriques du plancher mixte sur la masse généralisée est également étudiée.

Pour finir, le bureau d'études GREISCH a démontré lors du dimensionnement des planchers mixtes des tours DUO à Paris que la fissuration du béton influençait la forme des modes. La fissuration engendrait également la localisation de certains modes. Il serait donc intéressant d'analyser son influence sur la masse généralisée.

1.3 Démarche

Pour commencer, le chapitre 2 décrit l'état des connaissances actuel concernant le dimensionnement vibratoire de planchers sous charge dynamique.

Ensuite, le rapport est scindé en trois parties.

Tout d'abord, afin de mieux comprendre l'origine de la localisation des modes propres suite au décalage d'une des poutres servant d'appui à la dalle, des études analytiques sont réalisées afin de caractériser l'influence de chaque paramètre. La première étude simplifie le modèle à étudier par celui d'une plaque orthotrope afin d'étudier la différence de raideur dans les deux directions x et y de la dalle introduite par les poutres. Ensuite, un modèle plus détaillé est analysé. Le plancher mixte est modélisé par une plaque isotrope sur poutres multiples. La raideur des poutres n'est plus répartie uniformément sur la plaque mais est locale au niveau de leurs positions sous la plaque. Ces deux études sont réalisées respectivement aux chapitres 3 et 4. Le fait d'étudier ces deux types de plaques permettra de mieux comprendre les paramètres influençant les modes propres et les propriétés en découlant.

Ensuite, l'influence de la fissuration sur la forme des modes propres sera étudiée au chapitre 5. Pour cela, le logiciel Finelg est utilisé car il permet de réaliser un calcul dynamique non linéaire.

Un exemple concret sera ensuite présenté au chapitre 6. Et pour finir, le chapitre 7 résumera tous les points importants abordés ainsi que les conclusions trouvées.

Chapitre 2

État de l'art

2.1 Charge dynamique créée par un piéton

Il existe deux méthodes différentes proposées dans les ouvrages de référence. La première se base sur la décomposition de la charge en une série de Fourier. La seconde utilise une approximation polynomiale.

2.1.1 Décomposition en série de Fourier

La norme ISO 10137 :2012 [5] décrit les actions dynamiques créées par le mouvement humain. La courbe de chargement dynamique engendrée par un piéton dépend de nombreux paramètres, dont son poids, sa vitesse ou encore sa manière de se déplacer (marche, course, sauts, ...). Des tests ont permis d'évaluer les charges dynamiques engendrées par un piéton. Dans le cas de la marche, la courbe de chargement d'un pas prend la forme représentée à la FIGURE 2.1 et celle d'une personne marchant sur une distance de 3 mètres est à la FIGURE 2.2.

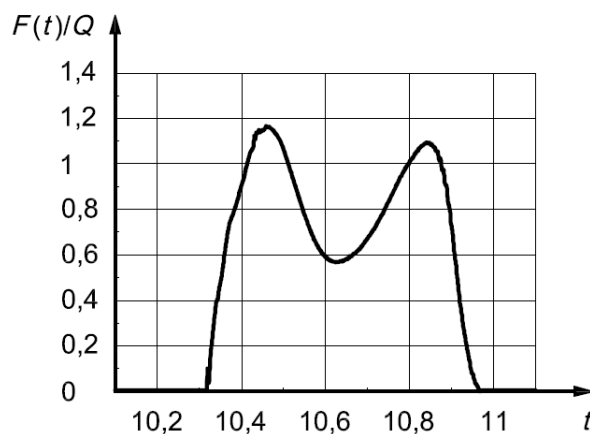


FIGURE 2.1 – Exemple de force verticale engendrée par le pas d'un piéton (Figure A.2 de l'ISO 10137 :2012 [5])

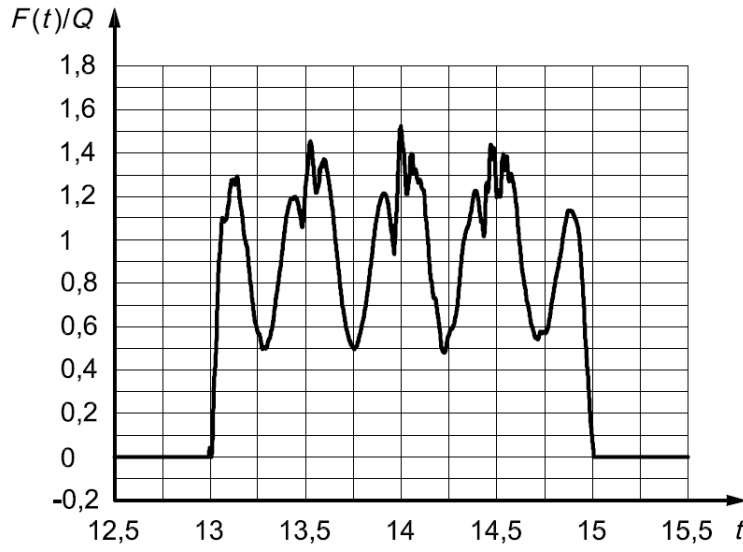


FIGURE 2.2 – Exemple de force verticale engendrée par la marche d’un piéton sur une plateforme instrumentée longue de 3 mètres (Figure A.3 de l’ISO 10137 :2012 [5])

La décomposition en série de Fourier permet de représenter tout signal de fréquence f et de forme quelconque en une série de fonctions sinusoïdales. La force dynamique verticale créée par la marche d’une personne à la FIGURE 2.2 peut donc être décomposée via la relation (2.1), de même pour la force dynamique engendrée dans la direction horizontale via l’équation (2.2).

$$F_v(t) = Q \left(1 + \sum_{k=1}^n \alpha_{k,v} \sin(2\pi k f t + \phi_{k,v}) \right) \quad (2.1)$$

$$F_h(t) = Q \left(1 + \sum_{k=1}^n \alpha_{k,h} \sin(2\pi k f t + \phi_{k,h}) \right) \quad (2.2)$$

où $\left\{ \begin{array}{ll} F_v & \text{est la force dynamique dans la direction verticale} \\ F_h & \text{est la force dynamique dans la direction horizontale} \\ Q & \text{est le poids statique de la personne} \\ \alpha_{k,v} & \text{est le coefficient de Fourier de la } k^{\text{ème}} \text{ harmonique dans la direction verticale} \\ \alpha_{k,h} & \text{est le coefficient de Fourier de la } k^{\text{ème}} \text{ harmonique dans la direction horizontale} \\ \phi_{k,v} & \text{est la phase de la } k^{\text{ème}} \text{ harmonique dans la direction verticale} \\ \phi_{k,h} & \text{est la phase de la } k^{\text{ème}} \text{ harmonique dans la direction horizontale} \\ n & \text{est le nombre d’harmonique permettant de décrire la charge dynamique} \end{array} \right.$

La norme recommande de ne tenir compte que des 3 premières harmoniques ($n = 3$) car au delà, elles ne sont que rarement significatives.

Définissons numériquement chaque terme :

— **Poids statique Q de la personne**

Les normes ne donnent aucune indication quant à la valeur numérique à prendre en compte pour ce paramètre. Cependant, la littérature scientifique recommande différentes valeurs en fonction de l’ouvrage.

- Le SCI (Steel Construction Institute) prend dans sa publication P354 [6] le poids d'une personne de 76 kg, c'est-à-dire $Q = 746 \text{ N}$.
- Les auteurs H. Bachmann et W. Ammann utilisent $Q = 800 \text{ N}$ dans leur ouvrage "Vibrations in structures - Induced by man and machines" [7].

— **Fréquence de marche f**

Les ouvrages [6] et [7] s'accordent sur des fréquences allant de 1,5 Hz à 2,5 Hz.

— **Les coefficients de Fourier α_k et les phases ϕ_k**

La norme ISO 10137 [5] propose des valeurs pour les coefficients de Fourier α_k , mais n'en donne aucune en ce qui concerne les phases ϕ_k contrairement aux ouvrages du SCI [6] et de Bachmann et Ammann [7]. Nous constatons au TABLEAU 2.1 que les expressions des coefficients de Fourier diffèrent en fonction de la référence. La FIGURE 2.3 donne une meilleure représentation des coefficients de Fourier obtenus avec la norme ISO et la publication du SCI.

	ISO 10137			SCI-P354			Bachmann-Ammann	
k	kf	$\alpha_{k,v}$	$\phi_{k,v}$	kf	$\alpha_{k,v}$	$\phi_{k,v}$	$\alpha_{k,v}$	$\phi_{k,v}$
1	$1,2 \rightarrow 2,4$	$0,37(f-1)$	-	$1,8 \rightarrow 2,2$	$0,436(f-0,95)$	0	0,4	0
2	$2,4 \rightarrow 4,8$	0,1	-	$3,6 \rightarrow 4,4$	$0,006(kf+12,3)$	$-\pi/2$	0,1	$-\pi/2$
3	$3,6 \rightarrow 7,2$	0,06	-	$5,4 \rightarrow 6,6$	$0,007(kf+5,2)$	π	0,1	$-\pi/2$

TABLEAU 2.1 – Coefficients de Fourier α_k et déphasages ϕ_k

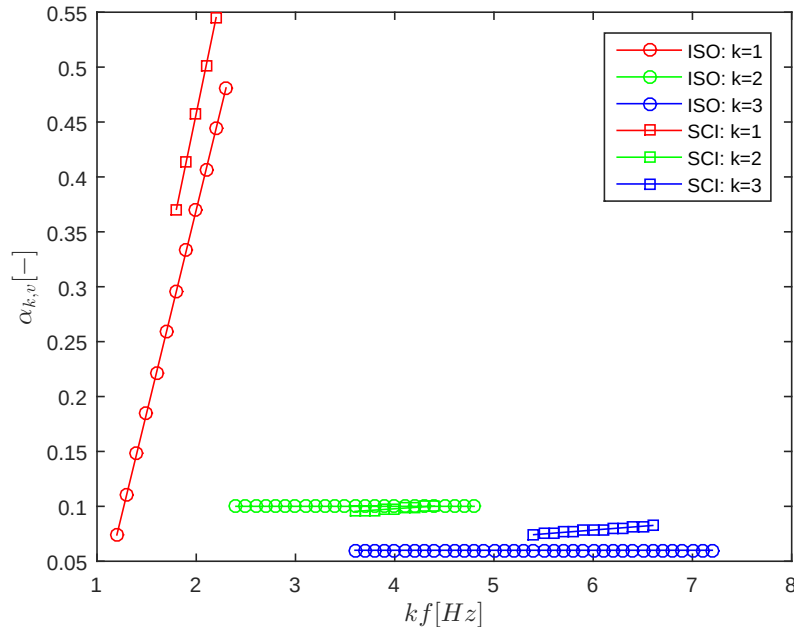


FIGURE 2.3 – Différence entre les coefficients de Fourier entre la norme ISO et la publication du SCI

Il est intéressant de comparer les courbes générées par une décomposition en série de Fourier en fonction des coefficients de Fourier α_k et des phases ϕ_k proposés par les différents ouvrages. Pour une fréquence de 2 Hz, les courbes engendrées sont les suivantes. Puisque la norme ISO 10137 ne définit pas de valeurs pour les déphasages, ils sont fixés à 0.

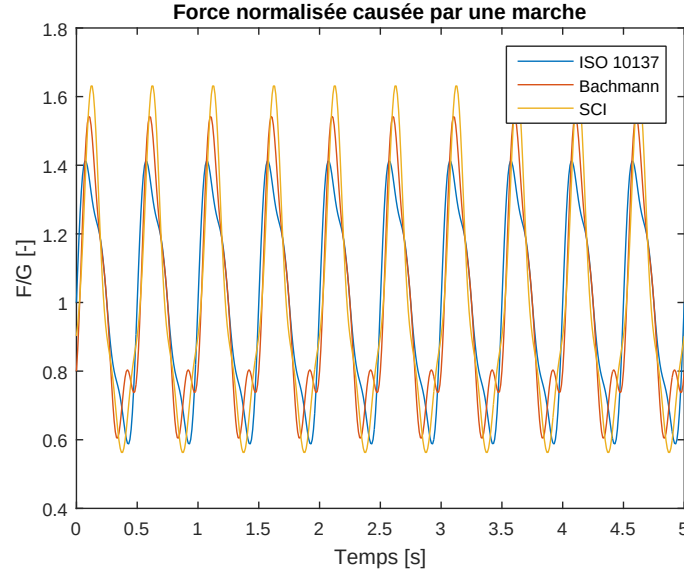


FIGURE 2.4 – Comparaison des différentes courbes de charge de marche

Les courbes sont de fréquences similaires mais d'amplitudes légèrement différentes. En effet, l'amplitude des courbes est majoritairement conditionnée par le coefficient de Fourier de la première harmonique. Pour une fréquence de 2 Hz, ils valent respectivement 0,37 pour l'ISO, 0,4 pour Bachmann et 0,4578 pour le SCI. Plus le coefficient de Fourier de la première harmonique est élevé, plus l'amplitude est importante.

Les coefficients de Fourier définis dans l'ouvrage de Bachmann ne dépendent pas de la fréquence de marche contrairement aux autres. Pour que les coefficients de Fourier de la première harmonique fournis par les autres ouvrages valent tous 0,4, il faut que :

- $f = 2,08$ Hz pour l'ISO,
- $f = 1,87$ Hz pour le SCI.

2.1.2 Décomposition polynomiale

Le document explicatif du guide de dimensionnement des planchers de l'HIVOSS [4] propose de décrire la force dynamique d'un piéton comme une série de pas dont leur expression F_s est représentée par le polynôme suivante :

$$F_s(t) = \begin{cases} Q(K_1t + K_2t^2 + K_3t^3 + K_4t^4 + K_5t^5 + K_6t^6 + K_7t^7 + K_8t^8) & \text{si } t < T_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3)$$

où les coefficients K_1 à K_8 sont donnés au TABLEAU 2.2, f_s est la fréquence de pas et T_s la durée de chargement d'un pas calculée via la formule suivante :

$$T_s = 2.6606 - 1.757f_s + 0.3844f_s^2 \quad (2.4)$$

	$f_s \leq 1,75\text{Hz}$	$1,75\text{Hz} < f_s < 2\text{Hz}$	$f_s \geq 2\text{Hz}$
K_1	$-8 f_s + 38$	$24 f_s - 18$	$75 f_s - 120,4$
K_2	$376 f_s - 844$	$-404 f_s + 521$	$-1720 f_s + 3153$
K_3	$-2804 f_s + 6025$	$4224 f_s - 6274$	$17055 f_s - 31936$
K_4	$6308 f_s - 16573$	$-29144 f_s + 45468$	$-94265 f_s + 175710$
K_5	$1732 f_s + 13619$	$109976 f_s - 175808$	$298940 f_s - 553736$
K_6	$-24648 f_s + 16045$	$-217424 f_s + 353403$	$-529390 f_s + 977335$
K_7	$31836 f_s - 33614$	$212776 f_s - 350259$	$481665 f_s - 888037$
K_8	$-12948 f_s + 15532$	$-81572 f_s + 135624$	$-174265 f_s + 321008$

TABLEAU 2.2 – Coefficients K_1 à K_8 pour une fréquence de pas f_s donnée

La FIGURE 2.5 représente l'évolution de la force normalisée créée par le pas d'un piéton en fonction de sa fréquence de marche. En comparant les forces dynamiques normalisées provoquées par un pas utilisées par l'HIVOSS (FIGURE 2.5) et par l'ISO (FIGURE 2.1), il peut être remarqué que les amplitudes sont plus élevées dans le cas de l'HIVOSS. La réponse sera donc également plus importante.

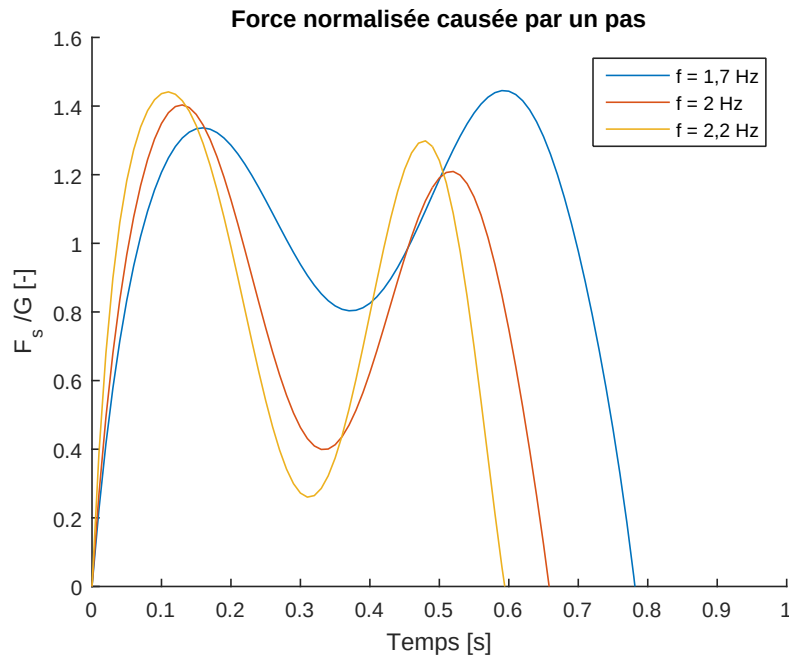


FIGURE 2.5 – Charge normalisée d'un pas

La fonction de charge de marche F est ensuite obtenue en répétant la charge d'un pas F_s à intervalle de temps régulier égal à $1/f_s$, comme représenté à la FIGURE 2.6. Naturellement, les pas se superposent l'un l'autre et leur somme permet d'obtenir la charge de marche F . La FIGURE 2.7 met en évidence la création de pics par superposition des charges causées par pas.

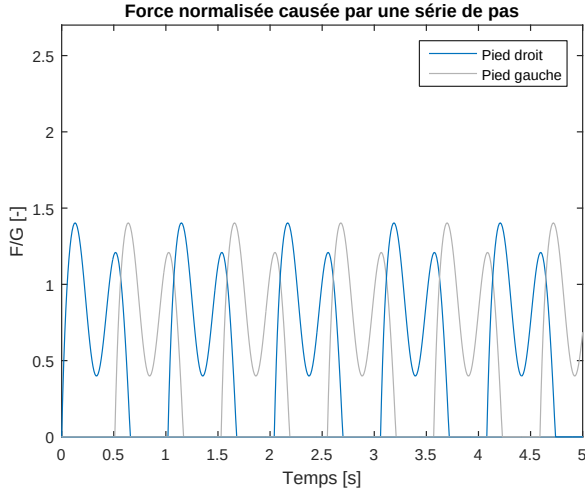


FIGURE 2.6 – Série de pas à une fréquence de 2 Hz

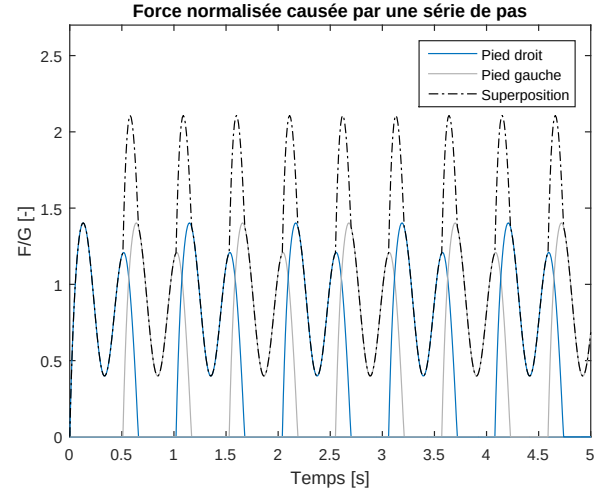


FIGURE 2.7 – Superposition des charges de pas

2.1.3 Comparaison

Il est intéressant de mettre en évidence les différences et similitudes entre les différentes fonctions de charge selon la méthode utilisée.

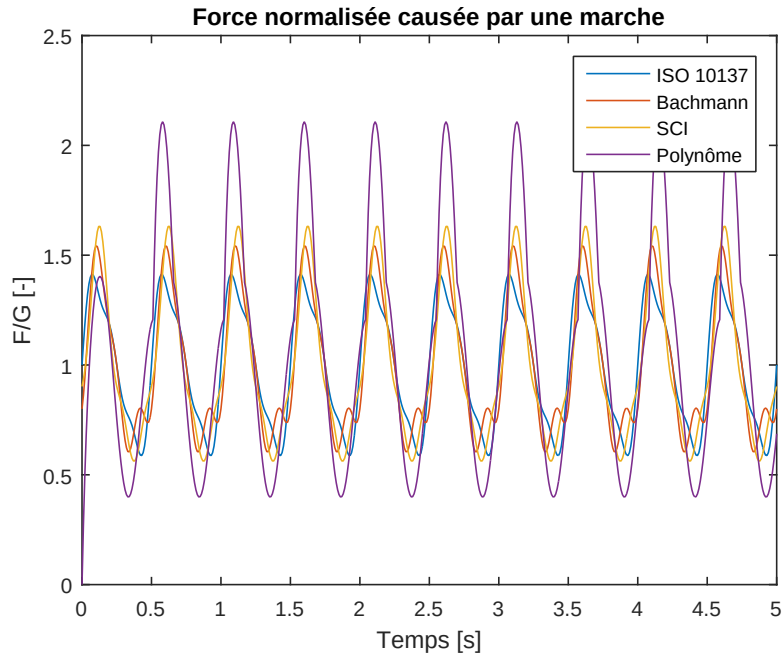


FIGURE 2.8 – Comparaison des différentes courbes de charge de marche

Il avait déjà été mentionné lors de la comparaison des forces normalisées causées par un pas que leurs amplitudes étaient plus importantes dans le cas de l'HIVOSS. Il est donc évident de retrouver cette conclusion en comparant les forces normalisées causées par plusieurs pas.

2.2 Critères d'évaluation des vibrations

2.2.1 Critères sur l'accélération

La norme ISO 2631-1 [8] détaille davantage l'évaluation des vibrations et leur perception.

De manière générale, l'humain ressent à un plus haut degré l'accélération par rapport à la vitesse et au déplacement. Les critères de confort se basent donc sur la réponse du plancher vis-à-vis de son accélération. Dans un problème dynamique où l'accélération est fonction du temps, il faut réussir à ne garder qu'une seule valeur servant de critère d'évaluation des vibrations. Il en existe différentes définitions :

- La valeur maximale de l'accélération a_{pic}
Elle est facile à déterminer mais ne donne aucune indication sur la durée durant laquelle le système est soumis à cette accélération.

- La valeur efficace de l'accélération a_{RMS}

$$a_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a_w(t)^2 dt} \approx \frac{a_{pic}}{\sqrt{2}} \text{ si la réponse est sinusoïdale} \quad (2.5)$$

Il s'agit de la valeur de l'accélération si celle-ci était constante et décrivait la même aire sous la courbe durant la période de temps T donnée.

- "Value dose vibration"

$$VDV = \sqrt[4]{\frac{1}{T} \int_0^T a_w(t)^4 dt} \quad (2.6)$$

En augmentant la puissance de l'accélération, cela donne plus d'importance aux grandes valeurs de l'accélération $a_w(t)$.

L'accélération $a_w(t)$ représente l'accélération pondérée (nommée "*weighted acceleration*" dans la norme ISO 2631 [8]) et se définit comme suit :

$$a_w = \sqrt{\sum_i (W_i a_i)^2} \quad (2.7)$$

Les coefficients de pondération W_i permettent de tenir compte de l'influence des vibrations engendrées par une personne non loin d'une autre personne en fonction de sa position : assise, debout ou couchée (FIGURE 2.9). La norme ISO 2631 [8] donne les différentes valeurs des facteurs de pondération en fonction des fréquences appliquées. Pour l'étude de confort suite à l'excitation créée par la marche d'un piéton, l'Eurocode prévoit les facteurs de pondération W_i égaux à 1.

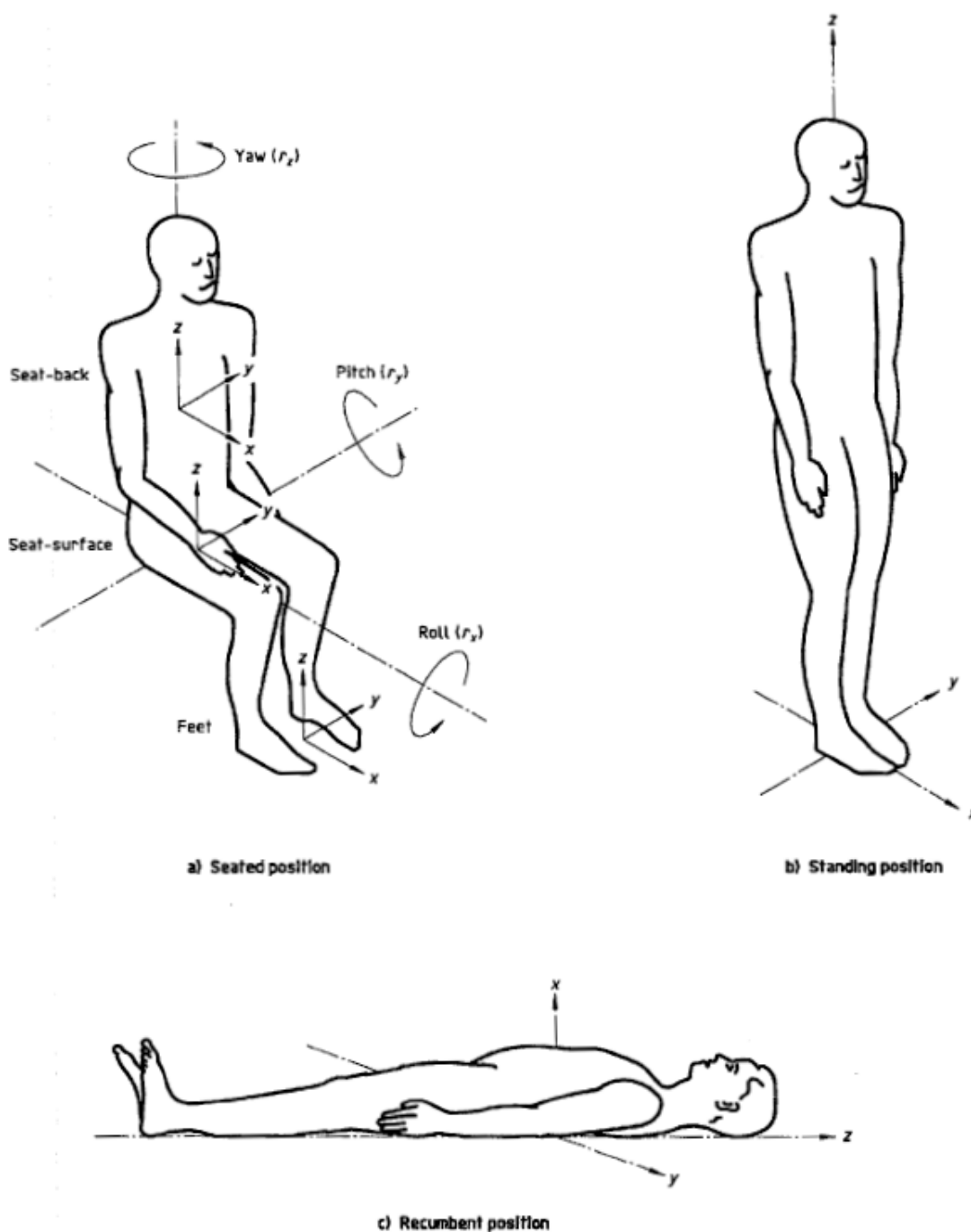


FIGURE 2.9 – Différentes positions considérées par la norme ISO 2631 (Figure 1 de la norme ISO 2631 [8])

L'annexe C de la norme ISO 10137 [5] donne un critère à la FIGURE 2.10 sur l'accélération pour les bâtiments ayant des équipements sensibles comme les hôpitaux ou les laboratoires. Le critère dépend de la fréquence de charge.

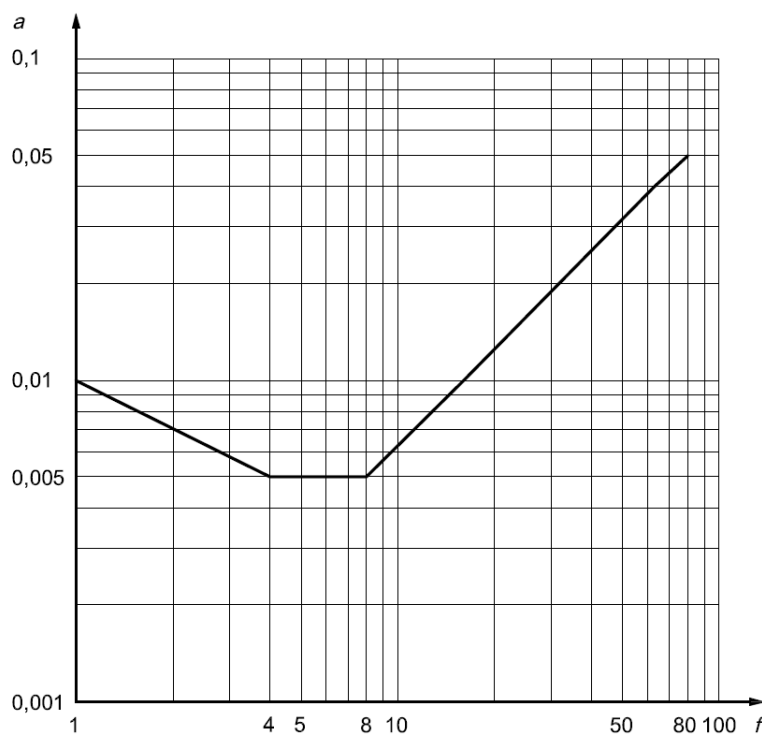


FIGURE 2.10 – Critères sur l'accélération verticale de bâtiments avec des équipements sensibles ($a = a_{RMS}$)

Cette valeur est ensuite multipliée par un facteur tenant compte de l'activité du bâtiment (TABLEAU 2.3).

Occupation	Temps	Facteur
Zone sensible (ex : hôpitaux, laboratoires, etc)	Jour	1
	Nuit	1
Zone résidentielle (ex : appartements, maisons, etc)	Jour	2 à 4
	Nuit	1,4
Bureaux silencieux	Jour	2
	Nuit	2
Bureaux, écoles, etc	Jour	4
	Nuit	4
Ateliers	Jour	8
	Nuit	8

TABLEAU 2.3 – Facteur multiplicateur

2.2.2 Critères sur les fréquences

La fréquence propre du plancher joue également un rôle important en ce qui concerne leurs vibrations. Le dimensionnement d'un plancher peut être fait de telle sorte que sa fréquence propre est suffisamment éloignée de la fréquence d'excitation d'un piéton. Il existe différentes valeurs de référence en fonction de l'ouvrage. Elles sont données au TABLEAU 2.4. Cependant, avoir une fréquence propre dans la gamme critique ne prédit pas

nécessairement des problèmes de confort liés aux vibrations trop importantes du planchers. C'est pourquoi l'HIVOSS a mis en place une méthode de dimensionnement (voir la section 2.4) lorsque le plancher peut potentiellement subir des soucis de vibrations.

Ouvrages/normes	Fréquence critique
HIVOSS [3]	< 9-10 Hz
ISO 10137 [5]	< 7,2 Hz
SCI-P354 [6]	< 10 Hz
Bachmann - Ammann [7]	< 7,5 Hz si dalle en béton armé
	< 8 Hz si dalle en béton précontraint
	< 8,5 Hz si dalle en béton armé sur poutres en acier
	< 9 Hz si dalle mixte sur poutres en acier

TABLEAU 2.4 – Fréquences critiques

2.3 Module de Young du béton

Pour le calcul des fréquences propres, il est important de connaître la raideur du plancher et donc le module de Young du béton. Le chargement dynamique engendre une augmentation du module de Young. Les ouvrages donnent différentes valeurs du module dynamique du béton.

- HIVOSS et Bachmann-Ammann : $E_{dyn} = 1,1E_{stat}$
- SCI : $E_{dyn} = \begin{cases} 38 \text{ kN/mm}^2 & \text{pour un béton normal} \\ 22 \text{ kN/mm}^2 & \text{pour un béton léger} \end{cases}$

2.4 Méthode proposée par l'HIVOSS

Vu le manque d'information dans les normes actuelles pour le dimensionnement vibratoire de planchers, l'HIVOSS a mis en place la méthode suivante [3].

1. Déterminer les caractéristiques dynamiques du plancher
 - fréquence propre,
 - masse généralisée,
 - amortissement.

Pour le calcul des caractéristiques dynamiques du plancher, 10-20% de la charge d'exploitation doit être prise en compte, car la charge appliquée sur le plancher influence la fréquence propre. Après avoir déterminé manuellement ou numériquement les matrices de masse $\mathbf{M}$ et de raideur $\mathbf{K}$, la fréquence propre f et la masse généralisée $\mathbf{M}^*$ peuvent en être déduites en résolvant l'équation suivante :

$$\left(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2\right)\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f = \frac{\omega}{2\pi} \\ \mathbf{M}^* = \phi^T \mathbf{M} \phi \end{cases} \quad (2.8)$$

L'amortissement est défini par

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \quad (2.9)$$

où ξ_1 est l'amortissement dû à la structure, ξ_2 celui du mobilier et ξ_3 celui créé par les finitions. Le guide de l'HIVOSS les définit dans différentes configurations réunies au TABLEAU 2.5.

Type	Amortissement (% de l'amortissement critique)
Amortissement de la structure ξ_1	
Bois	6%
Béton	2%
Acier	1%
Mixte acier-béton	1%
Amortissement du mobilier ξ_2	
Bureaux avec cloisons de 1 à 3 personnes	2%
Bureaux sans armoires ni étagères	0%
Bureaux ouvert "open space"	1%
Librairies	1%
Résidentiel	1%
Écoles	0%
Salles de sport	0%
Amortissement des finitions ξ_3	
Faux-plafond	1%
Faux-plancher	0%
Chape flottante	1%

TABLEAU 2.5 – Valeurs de l'amortissement (Tableau 3 du guide de dimensionnement des planchers de l'HIVOSS [3])

2. Lecture de $OS-RMS_{90}$

L' $OS-RMS_{90}$ se décompose en 3 parties :

- OS : One step = pas unique,
- RMS : Root Mean Square = valeur efficace,
- 90 : couvrir 90% des personnes marchant normalement.

L' $OS-RMS$ représente donc la valeur efficace de l'accélération induite par le pas d'une personne d'un certain poids et marchant à une certaine fréquence. Pour représenter au mieux la marche de chaque personne, l' $OS-RMS_{90}$ a été défini comme étant le fractile 90% des valeurs de $OS-RMS$. La FIGURE 2.11 donne la valeur de l' $OS-RMS_{90}$ en fonction de la masse généralisée du plancher et de sa fréquence propre. Il existe un diagramme par valeur du coefficient d'amortissement ξ .

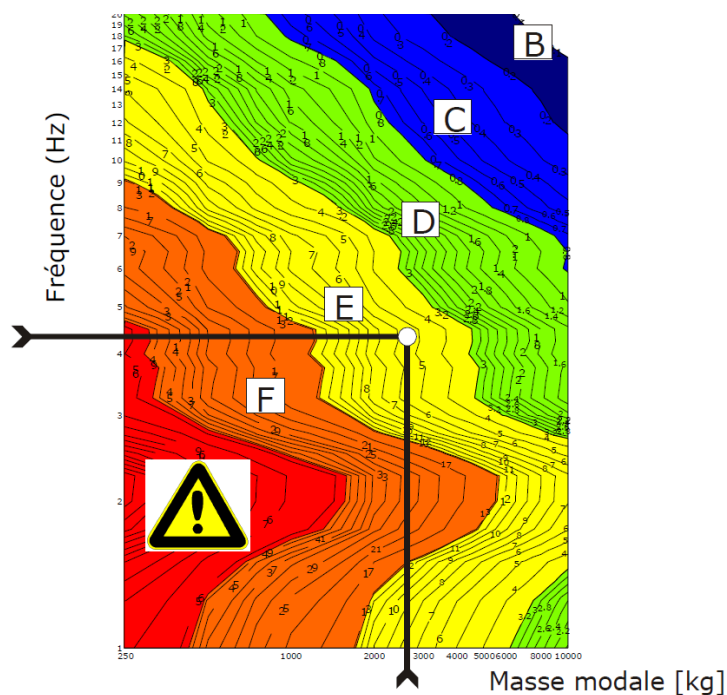


FIGURE 2.11 – Principe de définition de l' $OS-RMS_{90}$ (Figure 2 du guide de dimensionnement des planchers de l'HIVOSS [3])

3. Vérification du confort du plancher en fonction de son utilisation

Le TABLEAU ci-dessous, fourni par l'HIVOSS, définit la gamme de valeurs de l' $OS-RMS_{90}$ recommandée pour que le confort des occupants soit garanti. En fonction de la classe du plancher (A, B, C, D, E ou F), les bornes inférieures et supérieures de l' $OS-RMS_{90}$ sont fournies. Ensuite, en fonction de l'utilisation du plancher, nous pouvons déterminer si le confort du plancher est suffisant ou non.

Classe	OS-RMS ₉₀		Utilisation du plancher										
	Limite inférieure	Limite supérieure	Endroit sensible	Santé	Education	Résidentiel	Bureau	Réunion	Commerce	Hôtel	Prison	Industriel	Sport
A	0,0	0,1											
B	0,1	0,2											
C	0,2	0,8											
D	0,8	3,2											
E	3,2	12,8											
F	12,8	51,2											

Recommandé

Critique

Non recommandé

TABLEAU 2.6 – Valeurs limites de l' $OS-RMS_{90}$ en fonction de l'utilisation du plancher (Tableau 1 du guide de dimensionnement des planchers de l'HIVOSS [3])

Chapitre 3

Étude analytique d'une plaque orthotrope

3.1 Introduction

Avant toutes simulations numériques, il est important de comprendre le comportement de l'élément à étudier. C'est pourquoi une étude analytique au préalable est réalisée. Dans un premier temps, la modélisation d'un plancher mixte composé d'une dalle en béton armé supportée par une série de poutres parallèles en acier se réduit à celle d'une plaque orthotrope, c'est-à-dire une plaque dont les raideurs sont différentes dans les directions principales. Cette simplification est représentée à la FIGURE 3.1. Dans ce cas, l'étude des modes propres ne tient pas compte de tous comportements non linéaires pouvant notamment être introduits par la fissuration du béton mais permet d'avoir une première indication de l'évolution des modes propres lorsque les raideurs dans les directions principales x et y sont différentes, comme dans le cas d'un plancher mixte. Si la forme de certains modes propres d'une plaque orthotrope est localisée plutôt que diffusée sur l'entièreté de la plaque, il sera conclu que l'orthotropie d'un plancher mixte engendre la localisation de certains de ses modes propres.

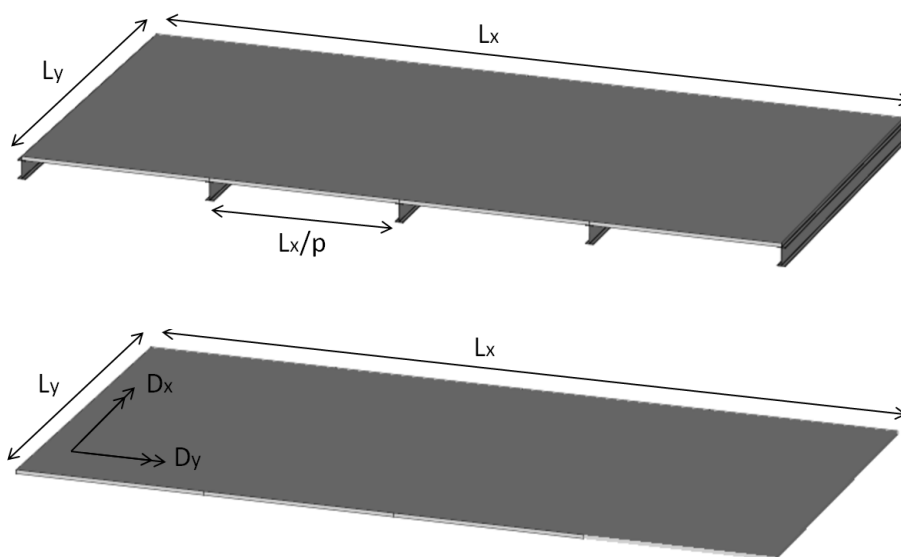


FIGURE 3.1 – Simplification du modèle utilisé pour étudier le plancher mixte

3.2 Développement mathématiques

L'équation de flexion d'une plaque orthotrope est tirée de l'ouvrage intitulé "*Theory of plates and shells*" écrit par S. Timoshenko [9].

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (3.1)$$

- w est le déplacement de la plaque selon z .
- q est la charge selon z appliquée sur la plaque. Pour la recherche des modes propres, les vibrations sont dites libres, signifiant que la charge appliquée est nulle ($q = 0$).
- D_x , D_y et D_1 sont des raideurs flexionnelles.

$$\begin{cases} D_x = \frac{E'_x h^3}{12} \\ E'_x = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} \end{cases} \quad \begin{cases} D_y = \frac{E'_y h^3}{12} \\ E'_y = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} \end{cases} \quad \begin{cases} D_1 = \frac{E'' h^3}{12} \\ E'' = \frac{\nu_x E_x}{1 - \nu_x \nu_y} = \frac{\nu_y E_y}{1 - \nu_x \nu_y} (*) \end{cases}$$

(*) Le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti permet de démontrer que $\nu_x E_x = \nu_y E_y$ et donc que les 2 termes de cette égalité sont égaux.

- D_{xy} est la raideur torsionnelle.

$$D_{xy} = \frac{Gh^3}{12}$$

La plaque orthotrope étudiée est de dimensions $L_x \times L_y$ dont les poutres sont positionnées parallèlement et équidistantes les unes des autres selon la direction y . La raideur D_y est donc plus importante que dans la direction perpendiculaire D_x .

Pour résoudre l'équation (3.1), la méthode de Ritz (aussi appelée la méthode de Galerkin) est utilisée. Elle a pour but de remplacer le système continu par un système discret en exprimant le champ de déformation par une combinaison linéaire de plusieurs formes de déformation. Les formes définies à l'équation suivante sont choisies sur base des développements mathématiques réalisés par S. Timoshenko dans son ouvrage intitulé "*Théorie des vibrations à l'usage des ingénieurs*" [10].

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (3.2)$$

La déformée w est alors représentée par une double somme dont chacun des termes se décompose suivant :

- q_{mn} étant l'amplitude de la déformée ne dépendant que du temps, aussi appelé q_i ,
- $\sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$ donnant la forme de la déformée, aussi appelé ϕ_i ,

où i est un indice parcourant l'ensemble des termes de la double somme. La déformée peut donc se réécrire sous la forme :

$$w(x, y) = q_1 \phi_1 + q_2 \phi_2 + \dots = \mathbf{q}^T \boldsymbol{\phi} \quad (3.3)$$

Vérifions que les conditions limites correspondent avec les formes imposées à l'équation (3.2). Une plaque rectangulaire de dimensions $L_x \times L_y$ simplement appuyée a pour conditions limites sur son pourtour $w = 0$. Les formes de vibration utilisées à l'équation (3.2) répondent bel et bien à ces critères.

En supposant que l'amortissement est nul, l'équation de dynamique à résoudre devient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = 0 \quad (3.4)$$

En projetant cette équation selon $\dot{\mathbf{x}}$ et en l'intégrant au cours du temps, l'équation de conservation de l'énergie est retrouvée.

$$\begin{aligned} \int \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} dt + \int \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{K} \mathbf{x} dt &= 0 \\ \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}}_{\mathbf{V}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}}_{\mathbf{U}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $\mathbf{V}$ et $\mathbf{U}$ sont respectivement les matrices d'énergie cinétique et potentielle de déformation élastique.

En décomposant la déformée en deux fonctions respectivement dépendantes du temps et de l'espace, cela revient à décomposer $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi} \mathbf{q}(t)$ et l'équation (3.5) devient :

$$\underbrace{\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}}}_{\mathbf{V}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}^* \mathbf{q}}_{\mathbf{U}} = 0 \quad (3.6)$$

où $\mathbf{M}^* = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}$ est la matrice de masse généralisée et $\mathbf{K}^* = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}$ est la matrice de raideur généralisée si $\boldsymbol{\phi}$ représente bel et bien la forme des modes propres. Le calcul des énergies potentielle et cinétique permet donc de déduire les matrices de masse et de raideur généralisées.

Énergie potentielle de déformation élastique

L'énergie potentielle accumulée par unité de volume pendant la déformation est défini comme :

$$dU = \left(\frac{\varepsilon_x \sigma_x}{2} + \frac{\varepsilon_y \sigma_y}{2} + \frac{\gamma_{xy} \tau_{xy}}{2} \right) dx dy dz \quad (3.7)$$

avec les déformations et contraintes valant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = E'_x \varepsilon_x + E'' \varepsilon_y = -z \left(E'_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E'' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = E'_y \varepsilon_y + E'' \varepsilon_x = -z \left(E'_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + E'' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (3.8)$$

En introduisant les expressions (3.8) dans l'équation (3.7), nous obtenons :

$$dU = z^2 \left[\frac{E'_x}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{E'_y}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + E'' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (3.9)$$

L'énergie potentielle de déformation de la plaque est déduite par intégration de cette équation.

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-h/2}^{h/2} dU dx dy dz \\ &= \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[\underbrace{\frac{D'_x}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2}_{U_1} + \underbrace{\frac{D'_y}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2}_{U_2} + \underbrace{D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}_{U_3} + \underbrace{2D_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2}_{U_4} \right] dx dy \end{aligned} \quad (3.10)$$

Remplaçons w par sa forme discrétisée et intégrons chaque terme de la somme séparément. Le premier terme se réduit à :

$$\begin{aligned} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} U_1 dx dy &= \frac{D_x}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[- \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 \sin \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \right]^2 dx dy \\ &= \frac{D_x}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} q_{mn} \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 \sin \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \dots \\ &\quad \dots q_{ij} \left(\frac{i\pi}{L_x} \right)^2 \sin \left(\frac{i\pi x}{L_x} \right) \sin \left(\frac{j\pi y}{L_y} \right) dx dy \\ &= \frac{D_x}{2} \int_0^{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} q_{mn} q_{ij} \left(\frac{mi\pi^2}{L_x^2} \right)^2 \sin \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \sin \left(\frac{i\pi x}{L_x} \right) \dots \\ &\quad \dots \underbrace{\left[\int_0^{L_y} \sin \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right)^2 \sin \left(\frac{j\pi y}{L_y} \right) dy \right]}_{= \frac{L_y}{2} \delta_{nj}} dx \\ &= \frac{D_x}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} q_{mn} q_{in} \left(\frac{mi\pi^2}{L_x^2} \right)^2 \frac{L_y}{2} \underbrace{\left[\int_0^{L_x} \sin \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \sin \left(\frac{i\pi x}{L_x} \right) dx \right]}_{= \frac{L_x}{2} \delta_{mi}} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} U_1 \, dx \, dy = \frac{D_x}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}^2 \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^4 \frac{L_x L_y}{4} \quad (3.11)$$

De la même manière,

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} U_2 \, dx \, dy = \frac{D_y}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}^2 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^4 \frac{L_x L_y}{4} \quad (3.12)$$

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} U_3 \, dx \, dy = D_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}^2 \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \frac{L_x L_y}{4} \quad (3.13)$$

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} U_4 \, dx \, dy = 2D_{xy} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}^2 \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \frac{L_x L_y}{4} \quad (3.14)$$

Pour conclure, l'énergie potentielle de déformation élastique d'une plaque orthotrope rectangulaire simplement appuyée sur ses bords vaut :

$$U = \frac{\pi^4 L_x L_y}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}^2 \left(\frac{D_x}{2} \frac{m^4}{L_x^4} + \frac{D_y}{2} \frac{n^4}{L_y^4} + (D_1 + 2D_{xy}) \frac{m^2 n^2}{L_x^2 L_y^2} \right) \quad (3.15)$$

Énergie cinétique de déformation

En supposant que la masse est répartie uniformément, l'énergie cinétique de déformation d'une plaque s'écrit :

$$V = \frac{\rho h}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \dot{w}^2 \, dx \, dy \quad (3.16)$$

où ρ est la masse volumique de la plaque et h son épaisseur.

En y introduisant (3.2) et en intégrant, nous obtenons :

$$V = \frac{\rho h}{2} \frac{L_x L_y}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_{mn}^2 \quad (3.17)$$

Équation des énergies et de vibration

La somme des deux énergies calculées donne l'équation énergétique d'une plaque orthotrope rectangulaire simplement appuyée sur ses bords.

$$\rho h \frac{L_x L_y}{8} \dot{q}_{mn}^2 + \frac{\pi^4 L_x L_y}{8} \left(D_x \frac{m^4}{L_x^4} + D_y \frac{n^4}{L_y^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{m^2 n^2}{L_x^2 L_y^2} \right) q_{mn}^2 = 0 \quad (3.18)$$

La mise sous forme quadratique comme montrée à l'équation (3.6) permet d'en tirer les masses et raideurs généralisées, respectivement notées M_{mn}^* et K_{mn}^* . Nous en déduisons donc l'équation de dynamique sous sa forme modale.

$$\underbrace{\rho h \frac{L_x L_y}{4}}_{M_{mn}^*} \ddot{q}_{mn} + \underbrace{\frac{\pi^4 L_x L_y}{4} \left(D_x \frac{m^4}{L_x^4} + D_y \frac{n^4}{L_y^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{m^2 n^2}{L_x^2 L_y^2} \right)}_{K_{mn}^*} q_{mn} = 0 \quad (3.19)$$

Les fréquences propres peuvent donc facilement être calculées sur base des matrices de masse et de raideur généralisées.

$$f_{mn} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{mn}^*}{M_{mn}^*}} \quad (3.20)$$

3.3 Conclusions

L'équation (3.19) permet de constater qu'à chacun des modes ne correspond qu'une seule valeur de masse généralisée et de raideur généralisée. Cela signifie que les matrices de masse et de raideur généralisées sont diagonales et que par conséquent, les formes imposées à l'équation (3.2) sont bel et bien celles des modes propres d'une plaque orthotrope. En effet, en décomposant la déformée par deux fonctions : une dépendante du temps et l'autre de l'espace, l'équation de dynamique à résoudre devient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = 0 \quad \xrightarrow{\mathbf{x}(t)=\phi\mathbf{q}(t)} \quad \underbrace{\mathbf{M}\phi}_{\mathbf{m}}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \underbrace{\mathbf{K}\phi}_{\mathbf{k}}\mathbf{q}(t) = 0 \quad (3.21)$$

Sachant que $\omega = \sqrt{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}}$, la relation suivante peut en être déduite :

$$(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2)\phi = 0 \quad (3.22)$$

L'orthogonalité des modes propres par rapport aux matrices de masse et de raideur est une de leurs propriétés fondamentales. En considérant deux modes propres différents ϕ_i et ϕ_j dont leurs valeurs propres sont respectivement ω_i et ω_j , il est déduit :

$$\mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\phi_i \quad (3.23)$$

$$\mathbf{K}\phi_j = \omega_j^2 \mathbf{M}\phi_j \quad (3.24)$$

En projetant selon le mode propre orthogonal et en soustrayant (3.24) par (3.23), il peut être écrit :

$$\phi_i^T \mathbf{K}\phi_j - \phi_j^T \mathbf{K}\phi_i = \omega_j^2 \phi_i^T \mathbf{M}\phi_j - \omega_i^2 \phi_j^T \mathbf{M}\phi_i \quad (3.25)$$

Puisque $\phi_i^T \mathbf{K}\phi_j$, $\phi_j^T \mathbf{K}\phi_i$, $\phi_i^T \mathbf{M}\phi_j$ et $\phi_j^T \mathbf{M}\phi_i$ sont des valeurs scalaires, elles sont égales à leurs transposées. L'équation (3.25) se transforme :

$$0 = (\omega_j^2 - \omega_i^2) \phi_j^T \mathbf{M}\phi_i \quad (3.26)$$

Puisque pour $i \neq j$, $\omega_i \neq \omega_j$, alors $\phi_j^T \mathbf{M}\phi_i = \phi_i^T \mathbf{M}\phi_j = 0$. Vu les équations (3.23) et (3.24), il est déduit que $\phi_j^T \mathbf{K}\phi_i = \phi_i^T \mathbf{K}\phi_j = 0$. Par conséquent, il est démontré que

lorsque $i \neq j$, les valeurs des masses et raideurs généralisées sont nulles. Les matrices de masse et de raideur généralisées sont donc diagonales si ϕ représente les modes propres du système. Cette démonstration provient du cours d' "*Analyse des structures II*" de M. Denoël [2] et permet donc de démontrer que les formes imposées à l'équation (3.2) sont bel et bien celles des modes propres d'une plaque orthotrope.

De plus, puisque la forme des modes propres est représentée par le produit de deux sinus, il n'y a pas une localisation observée de certains modes propres. Cela signifie que la différence de raideur entre les directions x et y n'est à priori pas la cause de la localisation des modes. Cependant, il serait néanmoins intéressant de pousser le raisonnement plus loin et d'étudier une plaque où localement, les poutres viendraient augmenter la raideur du système afin de se rapprocher d'avantage de la réalité. C'est ce qui a été réalisé dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Étude analytique d'une plaque isotrope sur poutres multiples

4.1 Introduction

Le fait de modéliser un plancher mixte par une plaque orthotrope permet en effet de tenir compte des différentes raideurs dans les deux directions x et y . Cependant, ces raideurs sont appliquées uniformément dans la direction leur correspondant. Or, les poutres amènent un ajout de raideur localement où elles se situent. C'est pourquoi il est intéressant de réaliser le même développement que précédemment mais pour une plaque isotrope représentant la dalle en y ajoutant la contribution des poutres.

Pour rappel, le plancher mixte à étudier représenté à la FIGURE 4.1 est de dimensions $L_x \times L_y$ et repose sur une série de poutres placées parallèlement dans la direction y . Le nombre de portées vaut p . Les dimensions ainsi que le rapport entre les raideurs des poutres et de la dalle seront variés afin d'étudier l'influence de chaque paramètre.

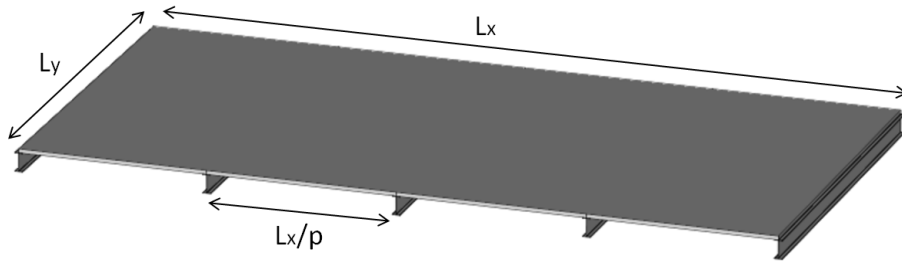


FIGURE 4.1 – Plancher mixte étudié

4.2 Développements mathématiques

4.2.1 Plaque isotrope

En appliquant le même raisonnement qu'au chapitre précédent, l'équation de vibrations d'une plaque isotrope est obtenue en remplaçant les propriétés orthotropes par les propriétés isotropes correspondantes. L'équation (3.19) se réduit à :

$$\underbrace{\rho h \frac{L_x L_y}{4} \ddot{q}_{mn}}_{M_{mn}^*} + \underbrace{\frac{\pi^4 L_x L_y}{4} D \left(\frac{m^4}{L_x^4} + \frac{n^4}{L_y^4} \right)}_{K_{mn}^*} q_{mn} = 0 \quad (4.1)$$

En effet, dans le cas d'un matériau isotrope, les rigidités flexionnelles et torsionnelles valent :

$$\left. \begin{aligned} D_x = D_y &= \frac{Eh^3}{1 - \nu^2} \\ D_1 + 2D_{xy} &= \frac{\nu Eh^3}{1 - \nu^2} + 2\frac{Gh^3}{12} = \frac{Eh^3}{1 - \nu^2} \end{aligned} \right\} = D$$

puisque l'isotropie permet de lier le module de cisaillement G au module de Young E et au coefficient de Poisson ν via la relation $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$.

4.2.2 Ajout de la contribution des poutres

La dalle de béton supposée comme ayant un comportement isotrope est supportée par une série de poutres en acier. Chacune de ces poutres amène une masse et une raideur supplémentaires. L'énergie potentielle de déformation élastique et l'énergie cinétique d'une poutre k se calculent respectivement de la manière suivante :

$$U_k = \frac{EI}{2} \int_0^{L_y} \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} \right)^2 dy \quad (4.2)$$

$$V_k = \frac{\mu}{2} \int_0^{L_y} \dot{v}_k^2 dy \quad (4.3)$$

où μ est la masse linéique de la poutre et v_k est sa déformée. Cette déformée doit être compatible avec celle de la plaque isotrope. En supposant que la plaque comporte p portées égales, les poutres se situent en $x = \frac{kL_x}{p}$ où k varie de 1 à $(p-1)$ et la condition de compatibilité pour une des poutres k est la suivante :

$$\begin{aligned} v_k(y) &= w\left(\frac{kL_x}{p}, y\right) \\ \Leftrightarrow v_k(y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi k}{p}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Comme lors du calcul des énergies pour une plaque orthotrope réalisé au chapitre précédent, les formes à l'équation (4.4) sont introduites dans la définition des énergies présentes aux équations (4.2) et (4.3). Commençons par l'énergie potentielle de déformation élastique de la $k^{\text{ème}}$ poutre.

$$U_k = \frac{EI}{2} \int_0^{L_y} \left[- \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \sin\left(\frac{m\pi k}{p}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right]^2 dy \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{EI}{2} \int_0^{L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} q_{mn} \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \sin \left(\frac{m\pi k}{p} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \dots \\
 &\dots q_{ij} \left(\frac{j\pi}{L_y} \right)^2 \sin \left(\frac{i\pi k}{p} \right) \sin \left(\frac{j\pi y}{L_y} \right) dy
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{EI}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} q_{mn} q_{ij} \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \left(\frac{j\pi}{L_y} \right)^2 \sin \left(\frac{m\pi k}{p} \right) \sin \left(\frac{i\pi k}{p} \right) \dots \\
 &\dots \underbrace{\left[\int_0^{L_y} \sin \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right)^2 \sin \left(\frac{j\pi y}{L_y} \right) dy \right]}_{=\frac{L_y}{2} \delta_{nj}}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$= \frac{EI}{2} \frac{L_y}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} q_{mn} q_{in} \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^4 \sin \left(\frac{m\pi k}{p} \right) \sin \left(\frac{i\pi k}{p} \right) \tag{4.8}$$

De même, l'énergie cinétique de déformation élastique de la $k^{\text{ème}}$ poutre vaut :

$$V_k = \frac{\mu}{2} \int_0^{L_y} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_{mn} \sin \left(\frac{m\pi k}{p} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \right]^2 dy \tag{4.9}$$

$$= \frac{\mu}{2} \frac{L_y}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_{mn} \dot{q}_{in} \sin \left(\frac{m\pi k}{p} \right) \sin \left(\frac{i\pi k}{p} \right) \tag{4.10}$$

Les énergies potentielle et cinétique de déformation élastique d'une plaque isotrope sur poutres multiples valent donc pour chacun des modes mn :

$$U_{mn} = \frac{\pi^4 L_x L_y}{8} D \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^2 q_{mn}^2 + \frac{EI}{2} \frac{L_y}{2} \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^4 \sin \left(\frac{m\pi k}{p} \right) \sin \left(\frac{i\pi k}{p} \right) q_{mn} q_{in} \tag{4.11}$$

$$V_{mn} = \rho h \frac{L_x L_y}{8} \dot{q}_{mn}^2 + \frac{\mu}{2} \frac{L_y}{2} \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \left(\frac{m\pi k}{p} \right) \sin \left(\frac{i\pi k}{p} \right) \dot{q}_{mn} \dot{q}_{in} \tag{4.12}$$

Afin d'en tirer les matrices de masse et de raideur, les énergies sont écrites sous leur forme quadratique, c'est-à-dire :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}^* \mathbf{q} \quad \text{et} \quad \mathbf{V} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{q}} \tag{4.13}$$

Il peut directement être remarqué que l'ajout des poutres va influencer la forme des modes de la plaque. En effet, le fait que la somme selon i ne se simplifie pas lors des calculs engendre que les matrices de masse et de raideur ne sont pas diagonales. Par conséquent, les déformées w et v_k imposées ne sont pas celles des modes propres. Cela est démontré via l'exemple ci-dessous.

Prenons le cas où m, n et i varient de 1 à 2. Cela revient à tenir compte de quatre modes différents : $mn = 11, 12, 21$ et 22 . L'indice i supplémentaire vient doubler le nombre de combinaisons possibles entre ces indices. Le TABLEAU 4.1 rassemble l'ensemble de ces combinaisons et les termes $q_{mn}q_{in}$ et $\dot{q}_{mn}\dot{q}_{in}$ correspondants.

m	n	i	$q_{mn}q_{in}$	$\dot{q}_{mn}\dot{q}_{in}$
1	1	1	q_{11}^2	$\dot{q}_{11}^2$
1	1	2	$q_{11}q_{21}$	$\dot{q}_{11}\dot{q}_{21}$
1	2	1	q_{12}^2	$\dot{q}_{12}^2$
1	2	2	$q_{12}q_{22}$	$\dot{q}_{12}\dot{q}_{22}$
2	1	1	$q_{21}q_{11}$	$\dot{q}_{21}\dot{q}_{11}$
2	1	2	q_{21}^2	$\dot{q}_{21}^2$
2	2	1	$q_{22}q_{12}$	$\dot{q}_{22}\dot{q}_{12}$
2	2	2	q_{22}^2	$\dot{q}_{22}^2$

TABLEAU 4.1 – Valeurs de termes $q_{mn}q_{in}$ et $\dot{q}_{mn}\dot{q}_{in}$ lorsque m, n et i varient de 1 à 2

Focalisons nous sur la matrice de raideur car le raisonnement sera identique pour la matrice de masse. Vu sa définition (4.13), la matrice de raideur se calcule en fonction de la matrice d'énergie potentielle de déformation élastique. Puisque le nombre de modes propres considéré est de 4, celle-ci est de dimensions 4×4 et comporte donc 16 composantes. Par conséquent, seules 8 des 16 composantes sont non nulles. Elle prend donc la forme suivante.

$$\mathbf{U}(q_{11}, q_{21}, q_{12}, q_{22}) = \begin{pmatrix} \alpha q_{11}^2 & \beta q_{11}q_{21} & 0 & 0 \\ \beta q_{21}q_{11} & \gamma q_{22}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta q_{12}^2 & \varepsilon q_{12}q_{22} \\ 0 & 0 & \varepsilon q_{22}q_{12} & \theta q_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Les facteurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ et θ sont les valeurs simplificatrices qui représentent chacun des termes non nuls de la matrice d'énergie potentielle. Par définition, cette matrice est symétrique. En effet, vérifions que les termes $\mathbf{U}(2,1)$ et $\mathbf{U}(1,2)$ sont bien identiques.

- Le terme $\mathbf{U}(2,1)$ correspond à $\beta q_{21}q_{11}$. Le TABLEAU 4.1 lui associe les indices $m = 2, n = 1$ et $i = 1$. En remplaçant dans l'équation (4.8), cela donne un facteur $\beta_{(2,1)}$ égal à :

$$\beta_{(2,1)} = \frac{EI}{2} \frac{L_y}{2} \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{\pi}{L_y} \right)^4 \sin \left(\frac{2\pi k}{p} \right) \sin \left(\frac{\pi k}{p} \right) \quad (4.15)$$

- Faisons de même avec le terme $\mathbf{U}(1,2)$, correspondant à $\beta q_{11}q_{21}$ et dont les indices valent $m = 1, n = 1$ et $i = 2$. Dans ces conditions, $\beta_{(1,2)}$ vaut :

$$\beta_{(1,2)} = \frac{EI}{2} \frac{L_y}{2} \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{\pi}{L_y} \right)^4 \sin \left(\frac{\pi k}{p} \right) \sin \left(\frac{2\pi k}{p} \right) \quad (4.16)$$

Les termes $\beta_{(2,1)}$ et $\beta_{(1,2)}$ sont bel et bien identiques, ce qui prouve la symétrie de la matrice d'énergie potentielle de déformation. Or, vu la définition de l'énergie potentielle (4.13), nous pouvons en déduire que la matrice de raideur prend la forme suivante. Elle

n'est donc pas diagonale mais ces termes sont symétriques par rapport à la diagonale principale.

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2\alpha & 2\beta & 0 & 0 \\ 2\beta & 2\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\delta & 2\varepsilon \\ 0 & 0 & 2\varepsilon & 2\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Le raisonnement étant identique pour les matrices d'énergie cinétique et de masse, celles-ci sont également symétriques. Cette propriété est importante car elle signifie que les vecteurs propres calculés à droite (4.18) et à gauche (4.19) sont identiques. Cela engendre deux conséquences : les valeurs propres sont réelles et les matrices de masse $\mathbf{M}^*$ et de raideur $\mathbf{K}^*$ généralisées sont diagonales.

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \phi = 0 \quad (4.18)$$

$$\phi^T (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (4.19)$$

Vu que les matrices de masse et de raideur sont non diagonales, les formes imposées à l'équation (3.2) ne décrivent pas celles des modes propres. Afin de calculer les "vrais" modes propres du plancher, il est nécessaire de passer par une étape numérique. Le logiciel de calcul Matlab a été utilisé pour calculer les valeurs propres ω^2 et les vecteurs propres ϕ liés aux matrices de masse $\mathbf{M}$ et de raideur $\mathbf{K}$ via la fonction `eig(K,M)`. Cette fonction retourne les solutions ϕ et ω^2 à l'équation $(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2)\phi = 0$ de telle sorte que la matrice de masse généralisée vaut la matrice identité, c'est-à-dire $\phi^T \mathbf{M} \phi = \mathbf{I}$. Cependant, le logiciel de calcul Finelg utilisant l'analyse par éléments finis utilise une normalisation des modes propres telle que la valeur maximale de la déformée du mode soit égale à ± 1 , i.e. $\max_{x,y} |w(x,y)| = 1$. Afin de comparer les résultats obtenus de manière analytique et via des simulations numériques, il est important de s'accorder sur la méthode utilisée. Dans la suite, la normalisation via la déformée du mode sera utilisée. Cela signifie que les vecteurs ϕ obtenus via Matlab doivent être modifiés de la manière suivante.

$$\frac{\phi_{Matlab,j}}{\alpha_j} = \phi_{Finelg,j} \Leftrightarrow \phi_{Matlab,j} = \alpha_j \phi_{Finelg,j} \quad \text{en un mode propre } j \quad (4.20)$$

où α_j est la valeur maximale de la déformée du mode considéré.

Les matrices de masse et de raideur généralisées sont également affectées par ce changement de normalisation des modes.

$$M_{Finelg,j}^* = \phi_{Finelg,j}^T M \phi_{Finelg,j} = \frac{1}{\alpha_j} \underbrace{\phi_{Matlab,j}^T M \phi_{Matlab,j}}_{=1} \frac{1}{\alpha_j} = \frac{1}{\alpha_j^2} \quad (4.21)$$

$$K_{Finelg,j}^* = \phi_{Finelg,j}^T K \phi_{Finelg,j} = \frac{1}{\alpha_j} \phi_{Matlab,j}^T K \phi_{Matlab,j} \frac{1}{\alpha_j} = \frac{1}{\alpha_j^2} K_{Matlab,j}^* \quad (4.22)$$

Ce changement n'affecte pas les fréquences propres.

4.2.3 Décalage d'une des poutres servant d'appui à la dalle

Les auteurs Christophe Pierre, De Man Tang et Earl H. Dowell étudient dans leur article "*Localized vibrations of disordered multispan beams : theory and experiment*" [11] l'évolution des modes propres d'une poutre de deux portées (FIGURE 4.2) initialement équivalentes en fonction de deux paramètres :

- la raideur en torsion de l'appui intermédiaire : $\bar{c} = \frac{2cl}{EI}$
- le décalage de l'appui intermédiaire d'une distance : $\bar{\Delta l} = \frac{\Delta l}{l}$

où l , E et I sont respectivement la longueur, le module de Young et l'inertie de la poutre.

Leur conclusion est résumée à la FIGURE 4.3. Le critère de localisation utilisé dépend des amplitudes maximales A_s et A_l de chaque portée :

$$A = \frac{A_s}{A_l} \quad \begin{cases} \text{si } A < 10\% : & \text{il y a localisation,} \\ \text{sinon :} & \text{il n'y a pas de localisation.} \end{cases} \quad (4.23)$$

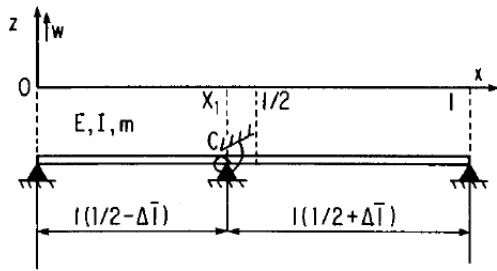


FIGURE 4.2 – Cas de l'étude

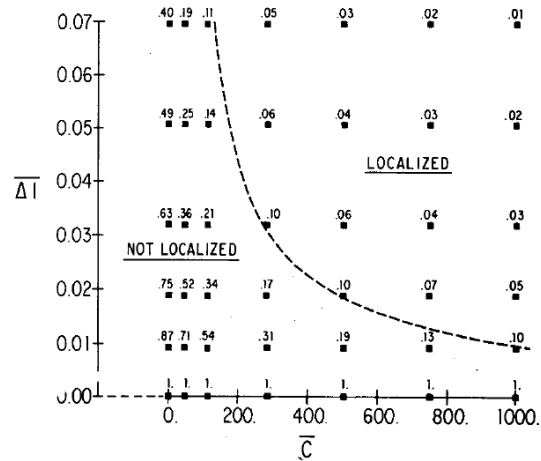
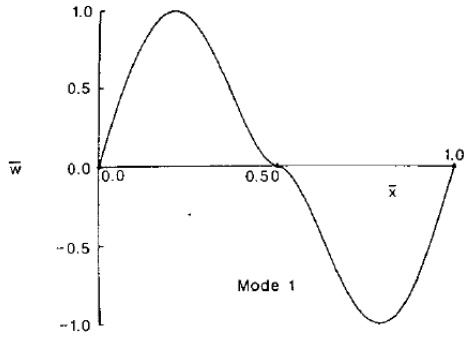
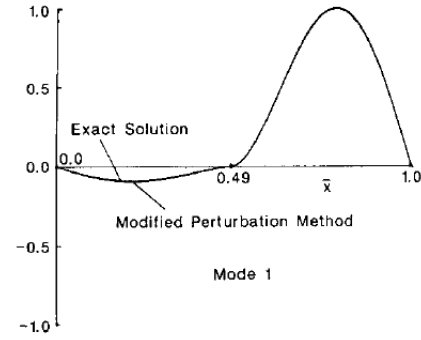
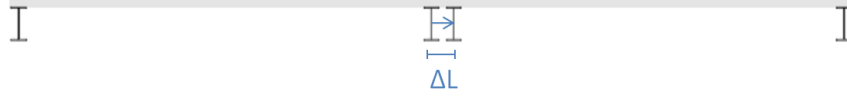


FIGURE 4.3 – Résultats obtenus

Ils ont constaté que la localisation des modes requiert un certain déplacement de l'appui intermédiaire mais également une certaine raideur torsionnelle de cet appui. Le décalage $\bar{\Delta l}$ peut être très faible et pourtant engendrer une localisation des modes, comme il est démontré aux FIGURES 4.4 et 4.5.


 FIGURE 4.4 – $\bar{\Delta l} = 0$ et $\bar{c} = 1000$

 FIGURE 4.5 – $\bar{\Delta l} = 0,01$ et $\bar{c} = 1000$

Afin de réaliser une étude similaire pour un plancher mixte, l'influence du décalage d'une des poutres d'une distance ΔL est également étudié.


 FIGURE 4.6 – Décalage ΔL d'une poutre

Sur les $p - 1$ poutres, seule une est décalée. Celle-ci prend la numérotation k_p . La condition de compatibilité de cette poutre décalée avec les formes imposées de w pour la dalle est différente des autres.

$$\begin{aligned} v_{k_p}(y) &= w\left(\frac{k_p L_x}{p} + \Delta L, y\right) \\ \Leftrightarrow v_{k_p}(y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x}\left(\frac{k_p L_x}{p} + \Delta L\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Les énergies potentielle et cinétique de déformation élastique varient donc légèrement pour cette poutre k_p . Les équations (4.11) et (4.12) deviennent :

$$\begin{aligned} U_{mn} &= \frac{\pi^4 L_x L_y}{8} D \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^2 q_{mn}^2 + \frac{EI L_y}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_p}}^{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^4 \sin\left(\frac{m\pi k}{p}\right) \sin\left(\frac{i\pi k}{p}\right) q_{mn} q_{in} \\ &+ \frac{EI L_y}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^4 \sin\left(\frac{m\pi}{L_x}\left(\frac{k_p L_x}{p} + \Delta L\right)\right) \sin\left(\frac{i\pi}{L_x}\left(\frac{k_p L_x}{p} + \Delta L\right)\right) q_{mn} q_{in} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} V_{mn} &= \rho h \frac{L_x L_y}{8} \dot{q}_{mn}^2 + \frac{\mu L_y}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_p}}^{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi k}{p}\right) \sin\left(\frac{i\pi k}{p}\right) \dot{q}_{mn} \dot{q}_{in} \\ &+ \frac{\mu L_y}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x}\left(\frac{k_p L_x}{p} + \Delta L\right)\right) \sin\left(\frac{i\pi}{L_x}\left(\frac{k_p L_x}{p} + \Delta L\right)\right) \dot{q}_{mn} \dot{q}_{in} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Naturellement, les matrices d'énergie cinétique et potentielle de déformation élastique ne sont pas diagonales, engendrant une forme analogue pour les matrices de masse et de raideur. La construction des matrices de masse et de raideur généralisées se fait ensuite comme précédemment.

4.2.4 Forme des modes

Pour rappel, les formes imposées au début du raisonnement étaient sous forme d'un produit de sinus, chacun dans une des directions de la plaque.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (4.27)$$

Si les formes à l'équation (4.27) représentent la forme des modes propres, les matrices de masse et de raideur généralisées sont diagonales, tout comme la matrice des modes propres ϕ . Chaque mode ne comporte alors qu'une seule valeur de q non nulle. Or, dans le cas étudié, il a été démontré que la forme des modes propres réellement observée était une combinaison des formes imposées à l'équation (4.27). Ce couplage ne se fait qu'entre des modes ayant la même valeur de n , c'est-à-dire des modes ayant le même nombre de demi-ondes selon la direction y de la plaque, i.e. la direction des poutres.

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} q_{in} \sin\left(\frac{i\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (4.28)$$

Comme expliqué précédemment, cette déformée est ensuite normée de sorte que sa valeur maximale valent ± 1 .

$$w(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} q_{in} \sin\left(\frac{i\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)}{\max_{x,y} \left| \sum_{i=1}^{\infty} q_{in} \sin\left(\frac{i\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right|} \quad (4.29)$$

Le calcul des modes et des fréquences propres a permis d'obtenir la matrice ϕ comprenant l'amplitude q_{in} de chaque sinus. Chaque colonne correspond à un mode. Reprenons l'exemple où m, n et i varient de 1 à 2. Les différents modes ont la forme suivante.

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix} \quad \phi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix}$$

Par exemple, en remplaçant les amplitudes q_{i1} du vecteur ϕ_1 , la déformée de ce mode prend la forme suivante :

$$w_{n=1}(x, y) = \frac{q_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) + q_{21} \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right)}{\max_{x,y} \left| q_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) + q_{21} \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) \right|} \quad (4.30)$$

4.2.5 Critère de localisation des modes

Le rapport de la masse généralisée sur la masse totale de plancher est utilisé comme critère de localisation des modes. Plus la localisation du mode est importante, plus la masse généralisée diminue. En effet, lorsque les déplacements w des modes du plancher sont connus, les masses généralisées de la dalle et des poutres peuvent être calculées séparément de la manière suivante.

$$M_{dalle}^* = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \mu_{dalle} w(x, y)^2 dx dy \quad \text{et} \quad M_{poutre}^* = \int_0^{L_y} \mu_{poutre} w(x_k, y)^2 dy \quad (4.31)$$

où $\mu_{dalle} = \frac{M_{dalle}}{L_x L_y}$ est la masse par unité de surface de la dalle en béton, $\mu_{poutre} = \frac{M_{poutre}}{L_y}$ est la masse par unité de longueur de la poutre et x_k est la position de la poutre.

$$x_k = \begin{cases} \frac{k L_x}{p} & \text{si la poutre n'est pas décalée} \\ \frac{k L_x}{p} + \Delta L & \text{si la poutre est décalée de } \Delta L \end{cases}$$

Dans le cas où la présence des poutres n'influence pas ou très peu les modes propres de la dalle, i.e. lorsque les poutres sont peu raides, la forme des modes propres est définie par (4.27) et les masses généralisées valent :

$$\begin{aligned} M_{dalle}^* &= \frac{M_{dalle}}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \sin^2 \left(\frac{m \pi x}{L_x} \right) \sin^2 \left(\frac{n \pi y}{L_y} \right) dx dy \\ &= \frac{M_{dalle}}{L_x L_y} \frac{L_x}{2} \frac{L_y}{2} \\ &= \frac{M_{dalle}}{4} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} M_{poutre}^* &= \frac{M_{poutre}}{L_y} \int_0^{L_y} \sin^2 \left(\frac{m \pi x_k}{L_x} \right) \sin^2 \left(\frac{n \pi y}{L_y} \right) dy \\ &= \frac{M_{poutre}}{L_y} \sin^2 \left(\frac{m \pi x_k}{L_x} \right) \frac{L_y}{2} \\ &= \frac{M_{poutre}}{2} \sin^2 \left(\frac{m \pi x_k}{L_x} \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Leur somme donne la masse généralisée totale M^* :

$$M^* = \frac{M_{dalle}}{4} + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{\frac{M_{poutre}}{2} \sin^2 \left(\frac{m \pi x_k}{L_x} \right)}_{\in [0;1]} \quad (4.34)$$

Plus le mode se localise, plus la déformée w va diminuer sur une partie du plancher, ce qui va diminuer la valeur de la masse généralisée.

4.3 Le nombre de formes à prendre en compte

Lors du passage de la théorie à l'application numérique avec Matlab, il est nécessaire de limiter le nombre de formes pris en compte. Les sommes infinies selon m et n imposées par les formes à l'équation (4.27) doivent être réduites respectivement de 1 à m_{max} et de 1 à n_{max} . De même, la somme selon i permettant le couplage est restreinte de 1 à m_{max} .

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \Rightarrow \sum_{m=1}^{m_{max}} \sum_{n=1}^{n_{max}} \sum_{i=1}^{m_{max}}$$

La troncature des sommes ne doit pas influencer la valeur des résultats (forme des modes propres, fréquences propres, masses généralisées, ...) ni l'ordre des modes propres. Pour cela, un nombre suffisant de formes doit être pris en compte. Vu que le couplage des formes se fait entre formes ayant le même nombre de demi-ondes selon y , c'est-à-dire ayant le même indice n , la détermination de m_{max} et n_{max} peut se réaliser séparément.

Pour déterminer le nombre de formes à prendre en compte, la valeur de la masse généralisée va servir de critère de précision. Pour un plancher donné, le calcul de la masse généralisée est effectué en augmentant progressivement le nombre de formes de base. Lorsque la masse généralisée se stabilise, cela signifie que le nombre de formes pris en compte est suffisant pour représenter correctement la forme des modes propres. La précision est supposée suffisante lorsqu'elle devient inférieure à 10^{-3} .

Le nombre de formes à prendre en compte pour le calcul des modes propres est influencé par la forme des modes propres. Or, ceux-ci sont inconnus avant de faire les calculs. Pour les déterminer, nous allons tester différents planchers avec différentes propriétés influençant directement la forme des modes propres, c'est-à-dire :

- le rapport de raideur entre les différents éléments : lié aux paramètres h et I ,
- les dimensions de la dalle : L_x , L_y et p .

Cela revient à tester des planchers dont les propriétés sont les suivantes :

- Les poutres sont beaucoup plus raides que la dalle ou inversement. Le rapport de raideur entre les poutres et la dalle se calcule comme suit :

$$\frac{E_a I_a / L_y}{D} \quad (4.35)$$

Si les poutres sont plus raides que la dalle, prenons $E_a = 210\,000$ MPa, un IPE 600, $L_y = 5$ m et $h = 0,07$ m. Dans ce cas, le rapport de raideur vaut 41.

Si la dalle est plus raide que les poutres, prenons un IPE 270, $L_y = 5$ m et $h = 0,15$ m. Le rapport vaut 0,25.

- La longueur L_x du plancher est faible ou importante : pour les tests, un plancher comprenant 2 ou 4 portées de 5 m est choisi.
- La longueur L_y des poutres est faible ou plus importante : une longueur L_y égale à 5 ou 10 m est choisie.

Cela donne 8 combinaisons de planchers possibles :

1. Poutres raides - 2 portées de 5m - $L_y = 5\text{m}$
2. Dalle raide - 2 portées de 5m - $L_y = 5\text{m}$
3. Poutres raides - 4 portées de 5m - $L_y = 5\text{m}$
4. Dalle raide - 4 portées de 5m - $L_y = 5\text{m}$
5. Poutres raides - 2 portées de 5m - $L_y = 10\text{m}$
6. Dalle raide - 2 portées de 5m - $L_y = 10\text{m}$
7. Poutres raides - 4 portées de 5m - $L_y = 10\text{m}$
8. Dalle raide - 4 portées de 5m - $L_y = 10\text{m}$

Ces 8 planchers seront testés afin d'étudier l'évolution de chacun de ces paramètres sur les valeurs de m_{max} et n_{max} à prendre en compte. Lorsque le nombre de portées est supérieur à 2, le nombre de poutres intermédiaires entre les deux appuis est supérieur à 1. Dans ce cas, la poutre à décaler doit être choisie. Pour plus de facilité, seule la poutre située au milieu est décalée.

4.3.1 Détermination de m_{max} et n_{max}

Dans un premier temps, la valeur de n est fixée à 1 et la valeur de m_{max} augmente progressivement. L'erreur relative (4.36) entre les masses généralisées calculées en tenant compte de m_{max} et m_{max+1} formes de modes est ensuite mesurée. Lorsque l'erreur se stabilise autour de zéro, cela signifie qu'il n'est plus nécessaire d'augmenter la valeur de m_{max} pour avoir de meilleurs résultats.

$$\frac{M^*(m_{max}) - M^*(m_{max} + 1)}{M^*(m_{max} + 1)} \quad (4.36)$$

4.3.1.1 Cas 1 : poutres raides - 2 portées de 5m - $L_y = 5\text{m}$

Pour que les poutres soient très raides, il faut que leurs inerties soient importantes et que leurs longueurs soient faibles. Par contre, la dalle doit avoir une faible épaisseur pour que sa raideur soit faible par rapport à celle des poutres. Voici les caractéristiques du plancher étudié au cas 1 :

Dimensions		Propriétés de la dalle		Propriétés des poutres	
L_x	10 m	ρ_b	2500 kg/m ³	ρ_a	7850 kg/m ³
L_y	5 m	E_b	31 000 MPa	E_a	210 000 MPa
p	2	ν_b	0,2	ν_a	0,3
-	-	h	7 cm	IPE	600

TABLEAU 4.2 – Propriétés du plancher calculé - cas 1

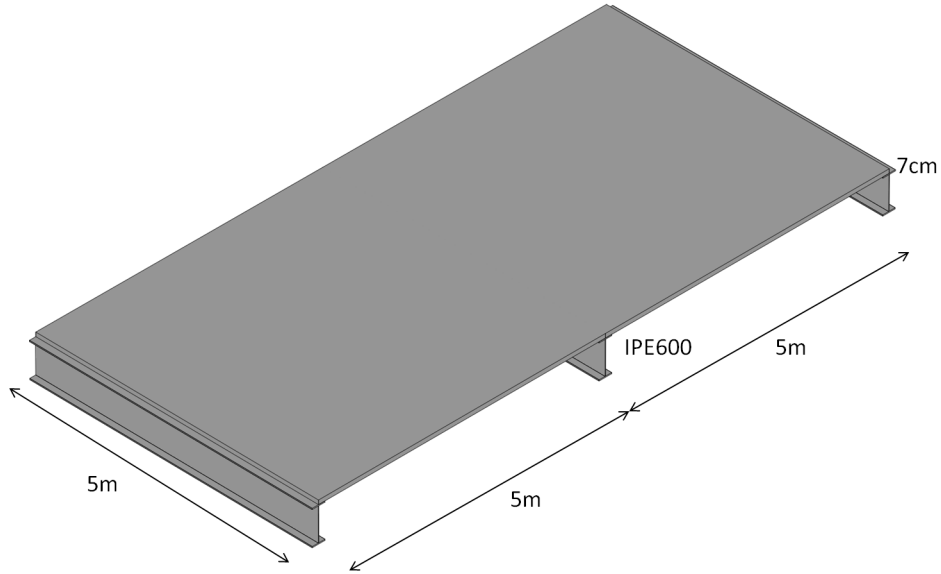
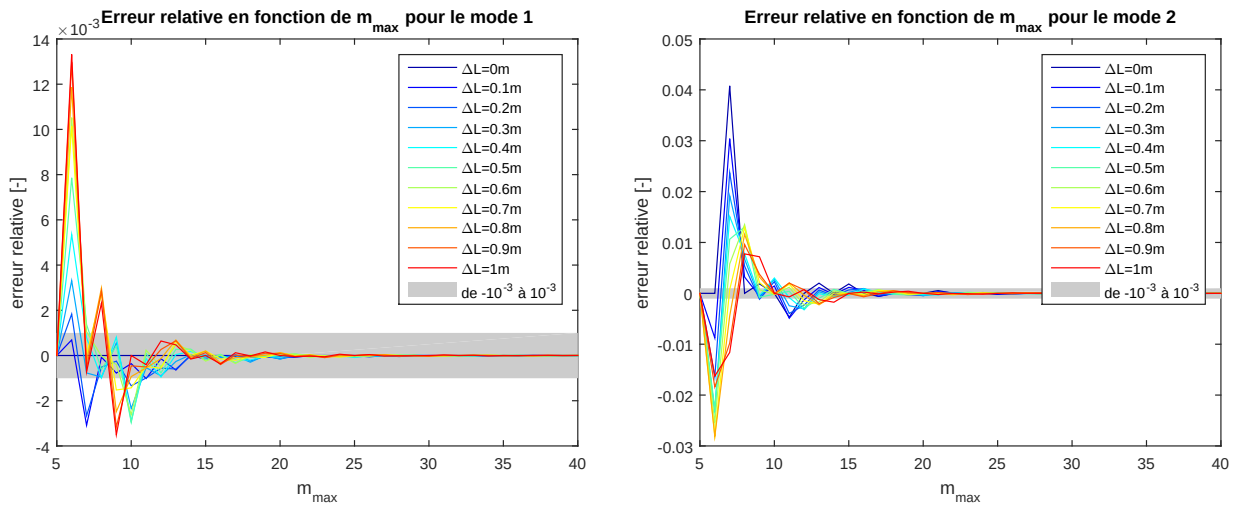


FIGURE 4.7 – Plancher cas 1

Les FIGURES suivantes montrent l'évolution de l'erreur relative en fonction de la variation de m_{max} pour les 5 premiers modes propres. Chaque courbe représente l'évolution de l'erreur relative en fonction du nombre de formes pris en compte calculée pour différents décalages ΔL de la poutre à mi-portée. La zone grisée représente la zone d'erreur acceptable. Elle est comprise entre -10^{-3} et 10^{-3} .


FIGURE 4.8 – Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{max} = 1$ - cas 1

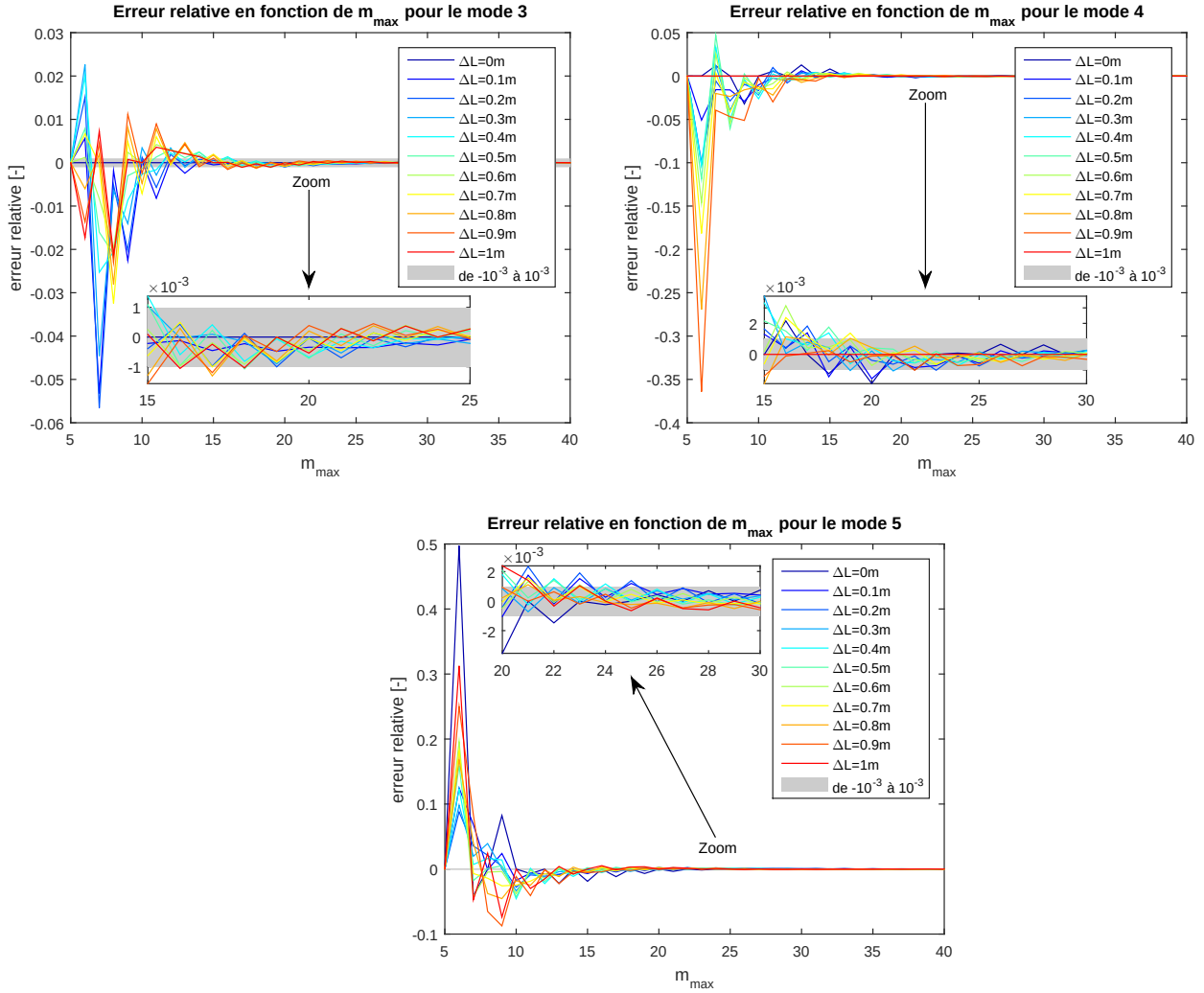


FIGURE 4.9 – Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{\max} = 1$ - cas 1 (suite)

Il est constaté que l'erreur relative augmente plus le mode est élevé. Cependant, elle se stabilise relativement rapidement. Pour que l'erreur relative soit comprise entre -10^{-3} et 10^{-3} , 26 formes doivent être prises en compte au minimum pour caractériser les 5 premiers modes propres. De plus, plus le décalage est important, plus la stabilisation est rapide, même si pour certains modes l'erreur est initialement plus grande pour de grands décalages. Cependant, cette différence est assez faible. Cela s'explique par le fait que lorsque le décalage est nul ou faible, le mode est moins susceptible de se localiser. Il y a donc moins de formes à combiner pour représenter la forme des modes propres.

4.3.1.2 Cas 2 : dalle raide - 2 portées de 5m - $L_y = 5\text{m}$

Inversement au cas précédent, les poutres doivent avoir une inertie faible alors que la dalle doit avoir une épaisseur importante. Les caractéristiques choisies sont les suivantes :

Dimensions		Propriétés de la dalle		Propriétés des poutres	
L_x	10 m	ρ_b	2500 kg/m^3	ρ_a	7850 kg/m^3
L_y	5 m	E_b	31 000 MPa	E_a	210 000 MPa
p	2	ν_b	0,2	ν_a	0,3
-	-	h	15 cm	IPE	270

TABLEAU 4.3 – Propriétés du plancher calculé - cas 2

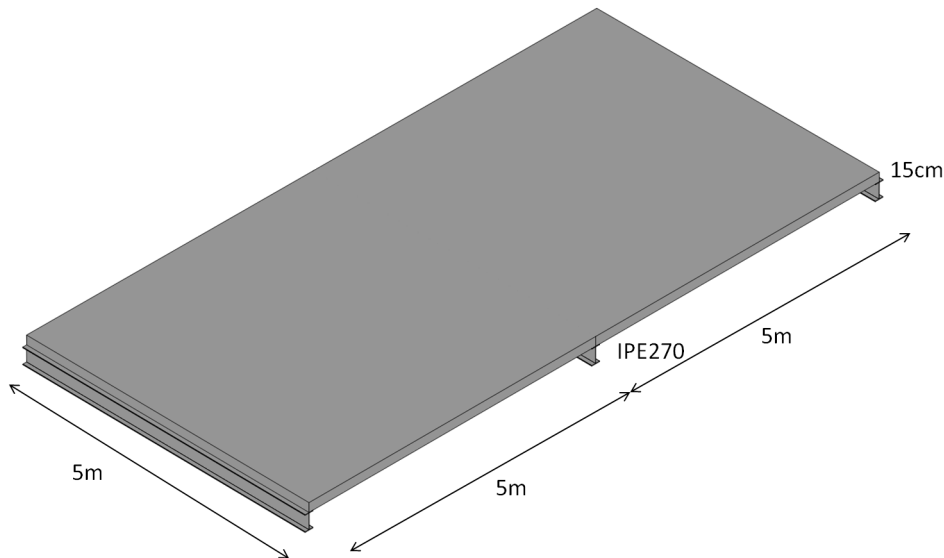


FIGURE 4.10 – Plancher cas 2

La FIGURE 4.11 représente l'évolution de l'erreur relative de la masse généralisée en fonction de l'augmentation de m_{max} pour les 5 premiers modes propres. Les conclusions sont :

- L'erreur devient inférieure à 10^{-3} lorsque $m_{max} = 11$.
- L'erreur se stabilise généralement plus vite lorsque le décalage est important.

Il est intéressant de constater que le cas 2 demande moins de formes pour caractériser ces modes propres que le cas 1. En effet, il sera démontré plus loin que les cas dont les poutres sont raides se localisent davantage. Le nombre de formes à combiner pour décrire un mode propre localisé est plus important que pour un mode propre dont la localisation est moindre.

4.3. LE NOMBRE DE FORMES À PRENDRE EN COMPTE

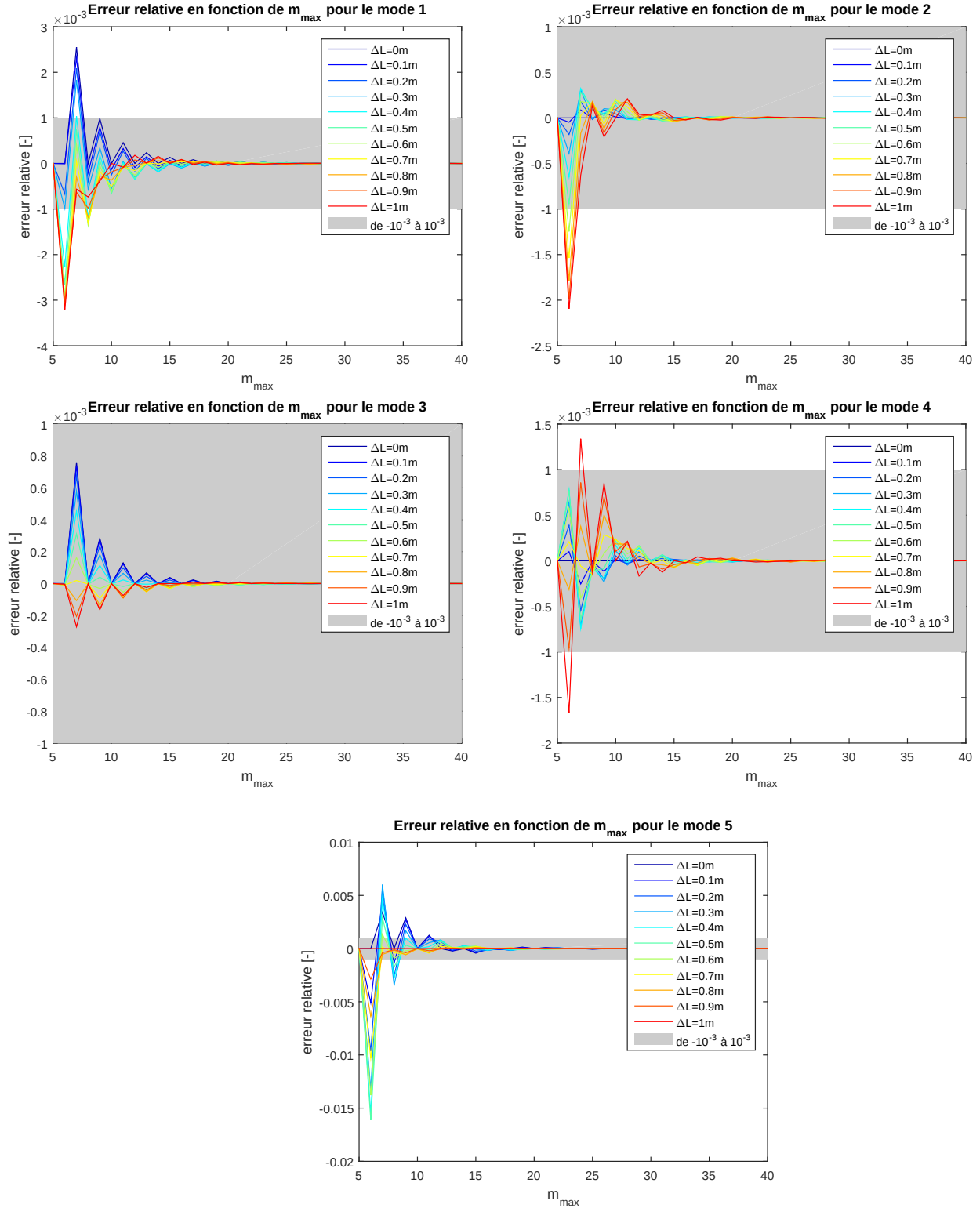


FIGURE 4.11 – Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{\max} = 1$ - cas 2

4.3.1.3 Autres cas

Le TABLEAU ci-dessous regroupe les valeurs de m_{max} pour chacun des cas. Il est constaté que :

- pour des planchers de mêmes dimensions, le nombre de formes à prendre en compte est plus élevé lorsque les poutres sont raides,
- le nombre de formes à prendre en compte est le plus important dans les cas où les poutres sont raides et le nombre de portées est élevé (cas 3 et 7).

La valeur maximale étant 38 formes, pour plus de sécurité, m_{max} est fixé à 40. Dans ces conditions, la valeur de n_{max} est déterminée pour chacun des cas de sorte qu'une augmentation de celle-ci n'engendre plus de variation de l'ordre des 5 premiers modes propres. Il est constaté que pour n_{max} , les écarts sont plus importants mais plafonne à $n_{max} = 35$. Comme m_{max} , n_{max} est fixé à 40.

	m_{max}		n_{max}
cas 1	26	$\longrightarrow$ $m_{max} = 40$	25
cas 2	11		35
cas 3	37		35
cas 4	19		29
cas 5	15		30
cas 6	12		34
cas 7	38		32
cas 8	10		28

TABLEAU 4.4 – Valeurs de m_{max} et de n_{max}

4.3.2 Vérification

Il faut maintenant vérifier que l'erreur n'augmente pas lorsque n_{max} passe de 1 à 40. Le TABLEAU ci-dessous montre l'erreur relative maximale en valeur absolue (4.37) obtenue pour chacun des cas testés en ne considérant les formes dont m et n varient de 1 à 40.

$$\left| \frac{M^*(m_{max}) - M^*(m_{max} + 1)}{M^*(m_{max} + 1)} \right| \quad (4.37)$$

	erreur maximale
cas 1	$5,3 \cdot 10^{-5}$
cas 2	$6,8 \cdot 10^{-6}$
cas 3	$6,5 \cdot 10^{-4}$
cas 4	$2,2 \cdot 10^{-5}$
cas 5	$2,4 \cdot 10^{-5}$
cas 6	$2,6 \cdot 10^{-6}$
cas 7	$1,1 \cdot 10^{-4}$
cas 8	$2,3 \cdot 10^{-5}$

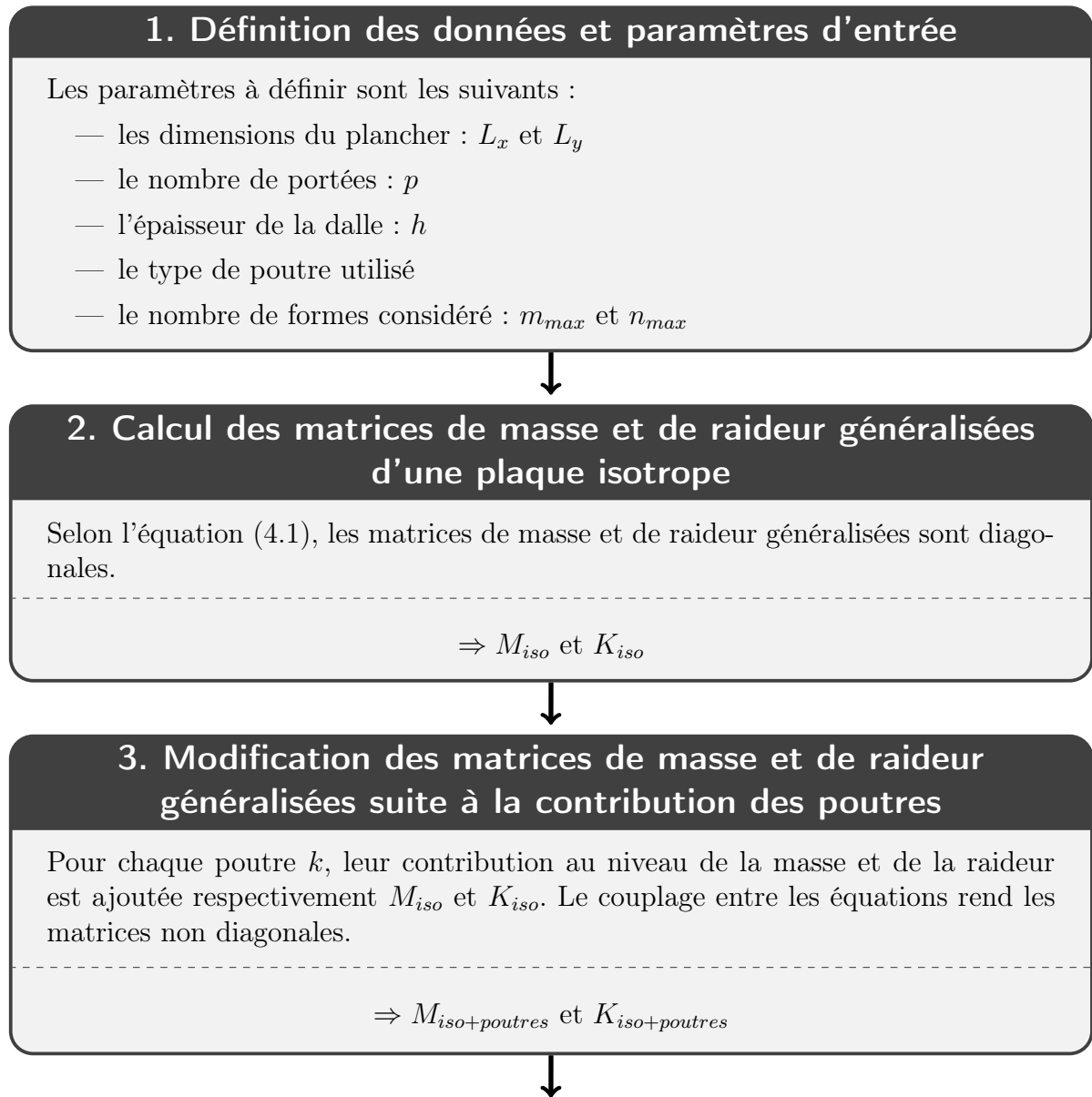
TABLEAU 4.5 – Erreur maximale lorsque $m_{max} = 40$ et $n_{max} = 40$

Dans tous les cas, l'erreur relative sur les masses généralisées des 5 premiers modes reste faible lorsque $m_{max} = 40$ et $n_{max} = 40$.

4.3.3 Conclusions

Il a été démontré que pour que les 5 premiers modes soient bien représentés et que les fréquences propres et masses généralisées correspondantes soient suffisamment précises, les valeurs des indices m et i doivent être comprises entre 1 et 38 et l'indice n entre 1 et 35. Pour plus de sécurité, m_{max} et n_{max} sont fixés à 40 et la vérification a démontré que dans ces conditions, l'erreur reste faible dans les 8 cas testés. Ces valeurs sont donc gardées à 40 dans la suite des calculs.

4.4 Architecture du code Matlab



4. Calcul des fréquences et modes propres

La fonction Matlab `eig(Kiso+poutres, Miso+poutres)` renvoie les modes et fréquences propres. Il faut ensuite les trier de sorte que les fréquences propres soient croissantes et que chaque mode propre corresponde à la bonne fréquence propre.

$$\Rightarrow \phi \text{ et } f$$



5. Forme des modes propres

La forme des modes se calcule comme montré à la section 4.2.4, sans oublier leur normalisation.

$$\Rightarrow w(x, y)$$



6. Calcul des matrices de masse et de raideur généralisées

Les matrices de masse et de raideur généralisées se calculent comme suit :

$$M^* = \phi^T M_{iso+poutres} \phi$$

$$K^* = \phi^T K_{iso+poutres} \phi$$

Suite à la normalisation des modes par Matlab, elles doivent également être normalisées en divisant par w_{max}^2 comme montré aux équations (4.21) et (4.22).

$$\Rightarrow M^* \text{ et } K^*$$



7. Critère de localisation

Le ratio $\frac{M^*}{M_{tot}}$ est utilisé comme critère de localisation (voir section 4.2.5).

4.5 Validation du code Matlab

Le modèle analytique développé a maintenant besoin d'être validé. Nous allons comparer les résultats analytiques obtenus via la code Matlab créé avec les résultats calculés par le logiciel Finelg. Il s'agit d'un logiciel de calcul par éléments finis développé par l'Université de Liège dans le département ArGEnCo en collaboration avec le Bureau d'études Greisch. La validation du code Matlab est effectuée pour les 8 types de planchers définis à la section 4.3.

Lors des développements mathématiques, seules la section et l'inertie flexionnelle selon l'axe fort ont été pris en compte. La modélisation des poutres dans Finelg ne tient

donc pas non plus compte de l'inertie en torsion des poutres. Dans un plancher mixte, le type de poutres utilisé est généralement de type IPE ou HE. Ces éléments ont une raideur en torsion faible comparé à des éléments de type caisson par exemple. C'est essentiellement la dalle qui stabilise les poutres vis-à-vis de la torsion. L'inertie en torsion des poutres influence donc peu la forme des modes propres.

En plus des caractéristiques géométriques du plancher, d'autres paramètres doivent être définis pour réaliser une simulation numérique avec le logiciel Finelg.

- Conditions d'appui : Lors de l'étude analytique, les conditions d'appui de la plaque ont été définies comme "simplement appuyée" sur tout son pourtour. Cela se traduit par le blocage des déplacements selon les 3 directions aux bords de la dalle.
- Comportement des différents matériaux : Vu le type de calcul effectué, pour rappel le calcul des modes propres, le comportement des différents matériaux est élastique linéaire.
- Amortissement : Le modèle analytique résout l'équation (4.38). L'amortissement de la structure est donc supposé nul, c'est-à-dire la matrice $\mathbf{C}$ est nulle peu importe le mode étudié.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0 \quad (4.38)$$

Afin de pouvoir comparer les résultats fournis par le code Matlab et le logiciel Finelg, il faut qu'ils représentent le même modèle. Pour le calcul de l'inertie des poutres, le logiciel Finelg tient compte des termes de transport. Or, dans le code Matlab, ils n'ont pas été introduits. Il faut donc que le modèle simulé par le logiciel Finelg soit simplifié comme à la FIGURE 4.12.

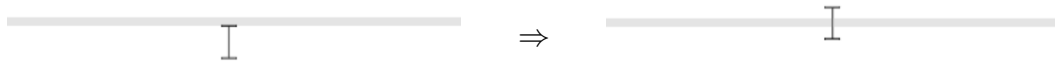


FIGURE 4.12 – Modélisation de la position des poutres dans le logiciel Finelg

4.5.1 Cas 1 : poutres raides - 2 portées de 5m - $L_y = 5m$

La comparaison se base sur :

- la fréquence propre,
- la masse généralisée,
- la forme des modes.

Le TABLEAU 4.6 reprend les valeurs des fréquences propres ainsi que les masses généralisées pour les 5 premiers modes propres en fonction du décalage de la poutre intermédiaire.

ΔL [m]	Mode	Matlab		Finelg	
		f [Hz]	M [kg]	f [Hz]	M [kg]
0	1	9,1	2187,5	9,3	2143,1
	2	10,7	2010,8	10,8	1976,1
	3	22,8	2187,5	23,4	2078,2
	4	22,8	2187,5	23,4	2097,8
	5	23,9	2009,5	24,4	1922,7
0,2	1	9	1529,9	9,2	1483,7
	2	10,8	1357,1	11	1316,8
	3	22,2	1288,9	22,7	1224
	4	22,7	1380,8	23,2	1283,2
	5	24	1227,5	24,6	1143,5
0,4	1	8,8	1342,4	9	1307,2
	2	11,2	1130,1	11,3	1098,2
	3	21,2	1210,3	21,6	1163,9
	4	22,4	1254,5	22,9	1182
	5	24,4	1051,5	25	986,2

TABLEAU 4.6 – Fréquences propres et masses généralisées - cas 1

Il est constaté que les valeurs sont relativement proches. L'erreur relative maximale sur les fréquences vaut :

$$\left| \frac{f_{matlab} - f_{finelg}}{f_{finelg}} \right| = 2,4\% \quad (4.39)$$

L'erreur relative sur les masses généralisées est plus élevée que celle sur les fréquences.

$$\left| \frac{M_{matlab}^* - M_{finelg}^*}{M_{finelg}^*} \right| = 7,6\% \quad (4.40)$$

Comparons maintenant la forme des deux premiers modes propres ainsi que l'influence du décalage de la poutre grâce aux FIGURES 4.13 et 4.14¹. Vu le faible écart entre les fréquences et masses généralisées calculées par le code Matlab et le logiciel Finelg, il est attendu d'obtenir la même forme des modes propres.

1. La nomination "Plancher parfait" signifie qu'il n'y a pas de décalage de la poutre.

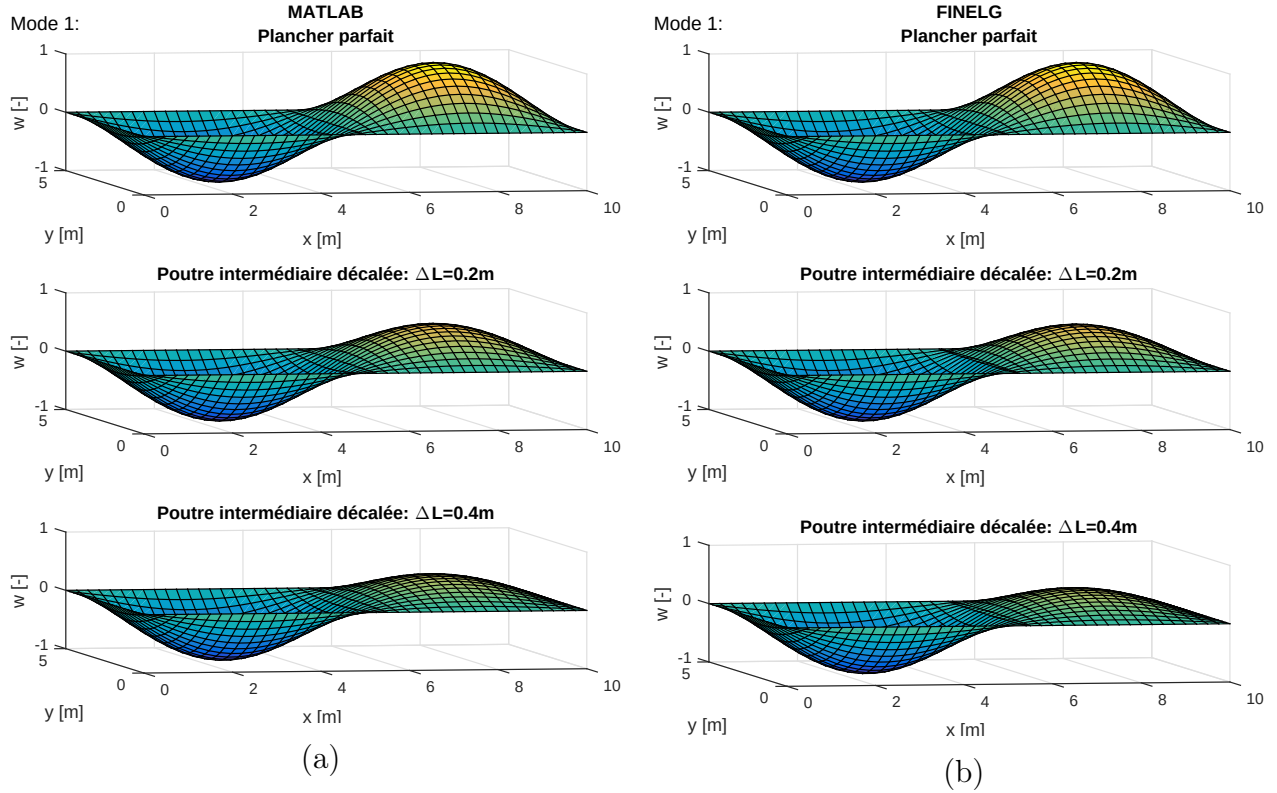


FIGURE 4.13 – Évolution de la forme du 1^{er} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg

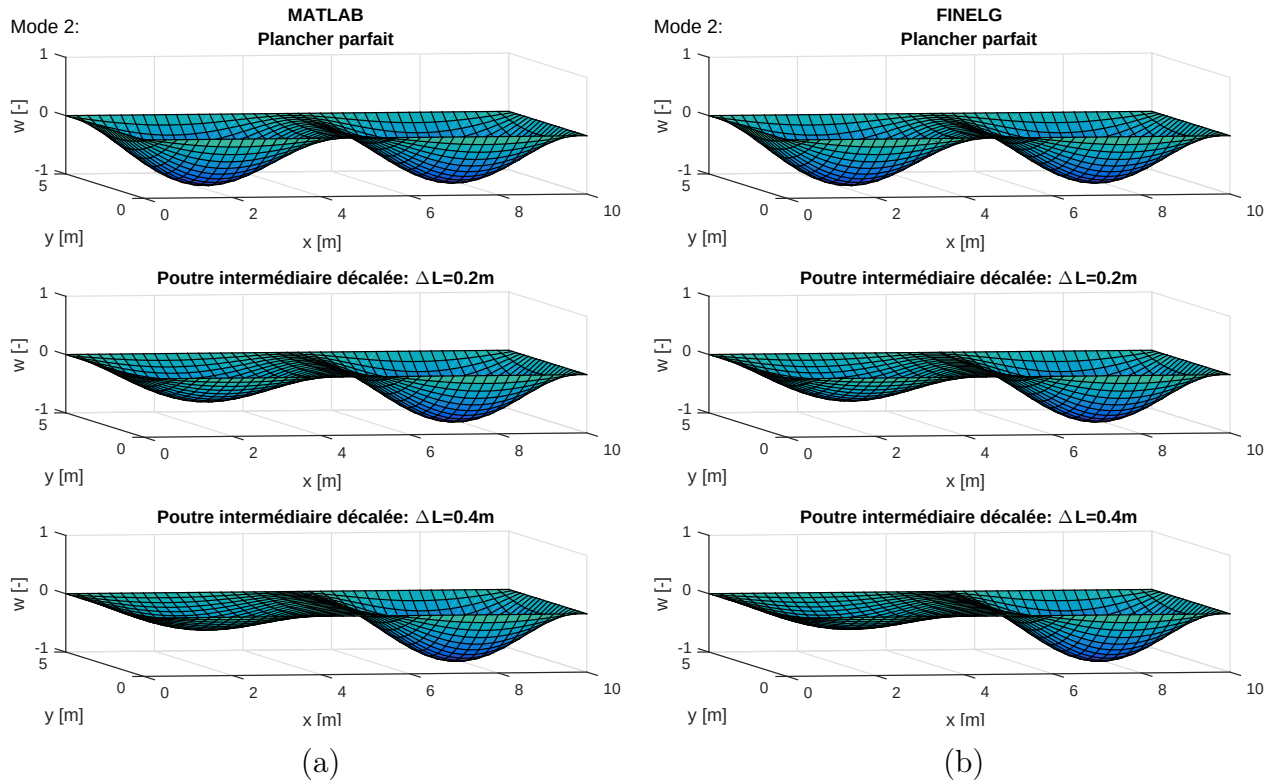


FIGURE 4.14 – Évolution de la forme du 2^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg

Sans grande surprise, il est constaté que plus le décalage est important, plus le mode se localise sur une des portées. Le fait de décaler la poutre intermédiaire fait intervenir deux phénomènes :

- La portée s’allongeant devient plus souple et inversement, la portée se raccourcissant devient plus raide.
- La portée se raccourcissant augmente l’effet d’encastrement de la portée plus longue.

Ces deux phénomènes sont opposés. En fonction de la forme du mode, c’est l’un ou l’autre qui dicte l’évolution du mode propre en fonction du décalage de la poutre.

Nous remarquons que pour le premier mode propre, l’amplitude de la portée la plus faible diminue. En effet, devenant plus raide, cette portée demande un niveau d’énergie plus élevé pour se déformer. Pour le deuxième mode, c’est l’inverse. L’amplitude de la portée la plus courte se réduit. En effet, par définition, les modes propres sont orthogonaux via les matrices de masse et de raideur. Cela signifie notamment que $\phi_1^T \mathbf{M} \phi_2 = 0$. Si sur une des portées, l’amplitude du 1^{er} mode diminue, alors pour conserver l’orthogonalité, l’amplitude de l’autre portée diminue pour le 2^{ème} mode.

4.5.2 Cas 2 : Dalle raide - 2 portées de 5m - $L_y=5\text{m}$

Le TABLEAU 4.7 reprend les valeurs des fréquences propres ainsi que les masses généralisées pour les 5 premiers modes propres en fonction du décalage de la poutre intermédiaire.

ΔL [m]	Mode	Matlab		Finelg	
		f [Hz]	M [kg]	f [Hz]	M [kg]
0	1	13,1	5101	13,1	5055,5
	2	19,5	4687,5	19,7	4617,66
	3	31,9	4732,7	32,2	4626,1
	4	44,8	5963,8	45,5	5777,7
	5	48,9	4687,5	49,7	4514,9
0,2	1	13,1	5067,3	13,1	5024,8
	2	19,6	4595,4	19,7	4528,5
	3	31,9	4728,7	32,2	4890,8
	4	44,8	4970,6	45,5	4824,1
	5	48,9	4652,2	49,6	4474,7
0,4	1	13,1	5005,7	13,1	4961,7
	2	19,6	4514,2	19,7	4448,2
	3	31,9	4718,2	32,2	4606
	4	44,7	4373,3	45,4	4246,5
	5	48,8	4636,6	49,6	4472,9

TABLEAU 4.7 – Fréquences propres et masses généralisées - cas 2

Il est constaté que les fréquences sont plus élevées qu’au cas 1. En effet, la différence entre le cas 1 et le cas 2 est que dans le second, la raideur est répartie et pas locale au ni-

veau des poutres. Cela demande un plus haut niveau d'énergie pour déformer le plancher.

Hormis cette différence, les conclusions sont similaires à celles présentées pour le cas 1. Les erreurs relatives maximales obtenues sont de 1,5% pour les fréquences et de 4% pour les masses généralisées, ce qui reste relativement faible.

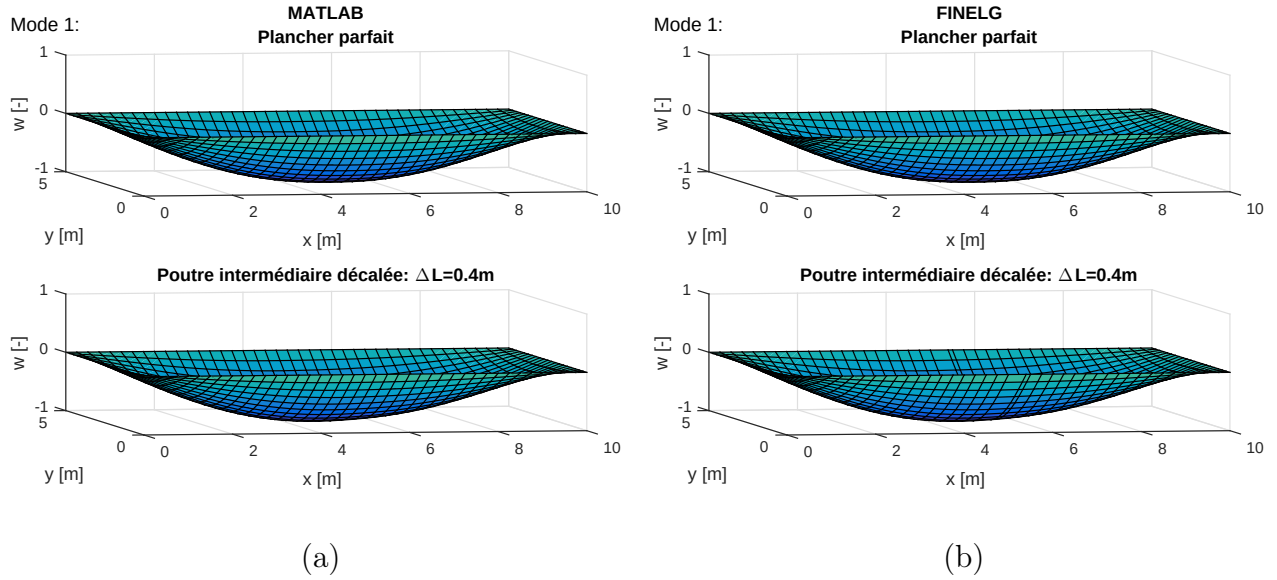


FIGURE 4.15 – Évolution de la forme du 2^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg

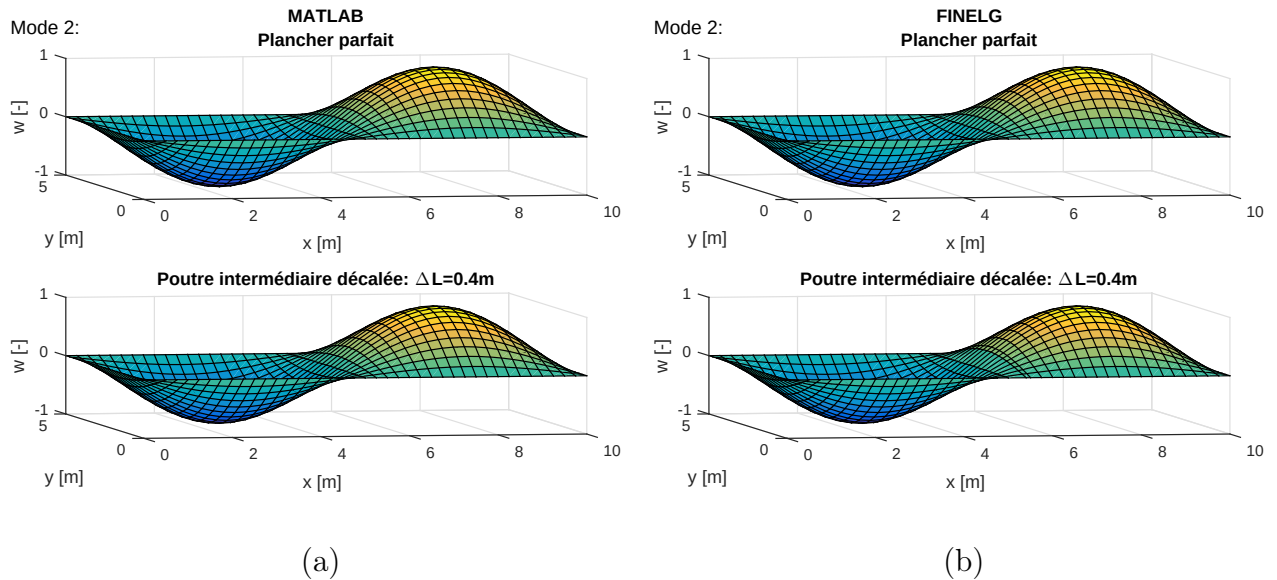


FIGURE 4.16 – Évolution de la forme du 2^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg

Il est également constaté que le décalage de la poutre n'engendre pas la localisation des deux premiers modes.

4.5.3 Autres cas

La comparaison entre la forme des modes et la valeur des masses généralisées et fréquences pour les 6 autres cas est réalisée à l'Annexe B.3 pour le cas 3, C.3 pour le cas 4, D.3 pour le cas 5, E.3 pour le cas 6, F.3 pour le cas 7 et G.3 pour le cas 8.

Voici un tableau récapitulatif des erreurs relatives observées sur les fréquences et masses généralisées pour les 8 cas étudiés.

	erreur sur les fréquences	erreur sur les masses généralisées
cas 1	2,4 %	7,6 %
cas 2	1,5 %	4 %
cas 3	5 %	8 %
cas 4	2,6 %	5,2 %
cas 5	4,4 %	9,2 %
cas 6	4,7 %	8,7 %
cas 7	2,5 %	10,7 %
cas 8	1,7 %	4,2 %

TABLEAU 4.8 – Récapitulatif des erreurs relatives entre les résultats du code Matlab et ceux du logiciel Finelg

4.5.4 Conclusions

Les valeurs des fréquences propres et des masses généralisées sont relativement proches, de l'ordre de 5% pour les fréquences et de l'ordre de 10%.

De plus, il peut être déduit différentes conclusions en fonction de la variation des paramètres.

- Avoir une dalle plus raide augmente les fréquences propres.
Hormis pour quelques modes (mode 1 pour les cas 5-6 et mode 1 et 2 pour les cas 7-8), une dalle raide engendre une augmentation des fréquences propres. Comme déjà expliqué, lorsque la dalle est raide par rapport aux poutres, la raideur est répartie alors qu'à l'inverse, lorsque les poutres sont plus raides que la dalle, l'augmentation de raideur est locale au niveau des poutres. Dans ce dernier cas, la dalle entre les poutres demande donc un niveau plus faible en énergie pour se déformer.
- Augmenter le nombre de portées p dont leur longueur est constante :
 - influence peu les fréquences lorsque les poutres sont très raides,
 - engendre une diminution des fréquences lorsque la dalle est raide.

Lorsque la dalle est raide par rapport aux poutres, c'est essentiellement les paramètres de la dalle qui influencent la forme des modes. Le passage de 2 portées de 5m à 4 portées de 5m augmente la longueur L_x , ce qui diminue la raideur de la dalle et par conséquent, les fréquences diminuent.

Par contre, lorsque les poutres sont raides, le nombre de portées de même longueur influence peu la raideur du plancher.

- Augmenter la longueur L_y diminue les fréquences.
Contrairement au cas précédent, la longueur L_y intervient dans la raideur de la

dalle mais aussi des poutres. Par conséquent, si L_y augmente, la raideur de la dalle et des poutres diminue, ce qui engendre une diminution des fréquences propres.

- Augmenter le décalage influence peu la valeur des fréquences propres.
En effet, comme mentionné plus haut, décaler une des poutres engendre deux phénomènes opposés. La diminution de raideur d'une des portées a tendance à diminuer les fréquences propres alors que l'effet d'encastrement a tendance à l'augmenter.

Au niveau de la forme des modes, l'étude paramétrique réalisée à la section 4.7 décrit l'influence de chaque paramètre.

4.6 Comparaison avec les résultats de l'article des auteurs Christophe Pierre, De Man Tang et Earl H. Dowell

L'article [11] étudiant une poutre continue sur 3 appuis, nous allons analyser le pendant en 2D, c'est-à-dire un plancher continu supporté par 3 poutres. Ces poutres doivent être très raides pour être considérées comme des appuis pour la dalle. Il s'agit donc du plancher "cas 1" déjà étudié à la différence près que les conditions d'appui sont différentes. Les conditions de bords de plaque affectent la forme des modes. Pour pouvoir comparer les formes des modes, il faut que les modes soient cylindriques, c'est-à-dire de la forme suivante :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \quad (4.41)$$

Les formes ne dépendent plus de la coordonnée y . Pour ne pas modifier tous les raisonnements mathématiques réalisés précédemment, nous allons garder les formes initialement choisies mais pour éviter les conditions de bords en $y = 0$ et $y = L_y$, la longueur L_y doit être infiniment longue, tout gardant une raideur importante des poutres. Afin que les deux premiers modes n'aient qu'une demi-onde selon la direction y , nous allons fixer n à 1.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{m1} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \quad (4.42)$$

En analysant la forme des deux premiers modes à mi-portée des poutres (FIGURE 4.18), nous remarquons que leurs formes sont semblables à celles présentées dans l'article [11] à la FIGURE 4.17. Cependant, lorsque le décalage ΔL devient trop important, la localisation du mode 2 est moins importante et le mode passe de 2 demi-ondes à 3. En effet, la portée étant plus grande, elle devient également plus souple. Nous voyons donc à la FIGURE 4.19 qu'au niveau de l'appui (représenté en rouge), la pente de la déformée augmente. Pour éviter ce phénomène, la raideur en torsion de la poutre doit être augmentée. Or, dans les développements mathématiques détaillés à la section 4.2, l'inertie en torsion de la poutre n'est pas prise en compte. La raideur en torsion de la poutre est amenée par la dalle. Cependant, pour augmenter la raideur en torsion, l'épaisseur de la dalle doit être augmentée, ce qui augmente également sa raideur en flexion. Il est donc impossible de combiner une grande raideur en flexion et une grande raideur en torsion des poutres.

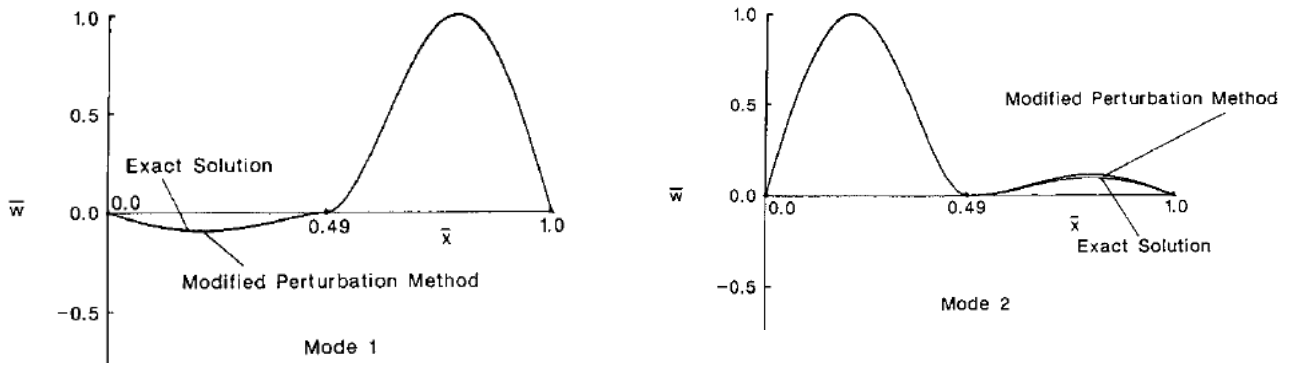


FIGURE 4.17 – Deux premiers modes fournis par l'article [11] pour $\overline{\Delta l} = 0.01$ et $\bar{c} = 1000$

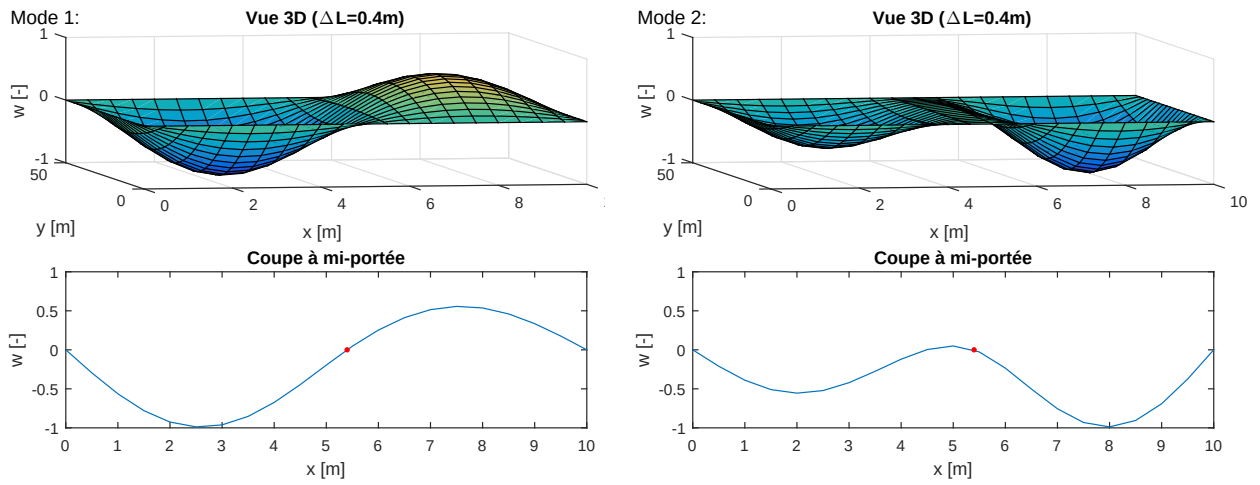


FIGURE 4.18 – Deux premiers modes dans la configuration choisie avec un décalage de la poutre intermédiaire de 0,4m

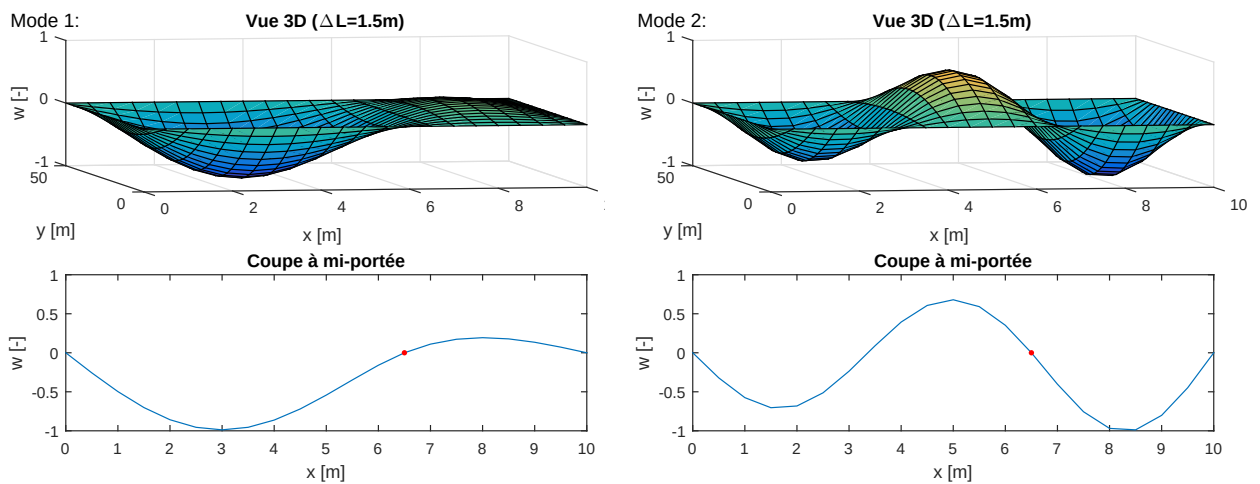


FIGURE 4.19 – Deux premiers modes dans la configuration choisie avec un décalage de la poutre intermédiaire de 1,5m

Un graphique comme celui représenté à la FIGURE 4.3 permettant d'analyser la localisation des modes en fonction du décalage et de la raideur en torsion de l'appui intermédiaire ne peut être fourni dans notre cas. Cependant, bien d'autres paramètres peuvent varier et influencer les modes propres. Nous allons donc étudier dans la suite la variation de chaque paramètre et son influence sur la masse généralisée puisque celle-ci a permis de définir le critère de localisation des modes.

4.7 Variation des paramètres

Après avoir démontré que certains modes se localisaient pour les différents planchers mixtes étudiés, il est important de le prouver également pour un plus grand nombre de planchers du même type, en faisant varier :

- les dimensions du plancher : L_x et L_y ,
- le nombre de portées : p ,
- la raideur relative entre les poutres et la dalle : $\frac{EI}{L_y}$ et D ,
- la valeur du décalage de la poutre : ΔL .

En partant du plancher de type "cas 1", un grand nombre de planchers est testé en faisant varier simultanément le décalage ΔL et un des paramètres mentionnés plus haut. Cela permet de définir quels paramètres doivent être combinés pour optimiser la localisation des modes propres.

4.7.1 Variations du décalage ΔL et du nombre de portée p de 5m

La FIGURE 4.20 représente l'évolution du rapport entre la masse généralisée et la masse totale pour les 5 premiers modes propres lorsque le décalage de la poutre est augmenté et le nombre de portées de 5m chacune est augmenté. De manière générale, la localisation des 5 premiers modes propres requiert un décalage minimum et un nombre de portées de 5m minimum. Plus ΔL et p sont importants, plus la localisation est importante également. En effet, plus il y a de portées, plus il y a de possibilités de localisation. Cependant, il y a certaines zones où ce n'est pas le cas. Elles sont détaillées plus loin.

4.7. VARIATION DES PARAMÈTRES

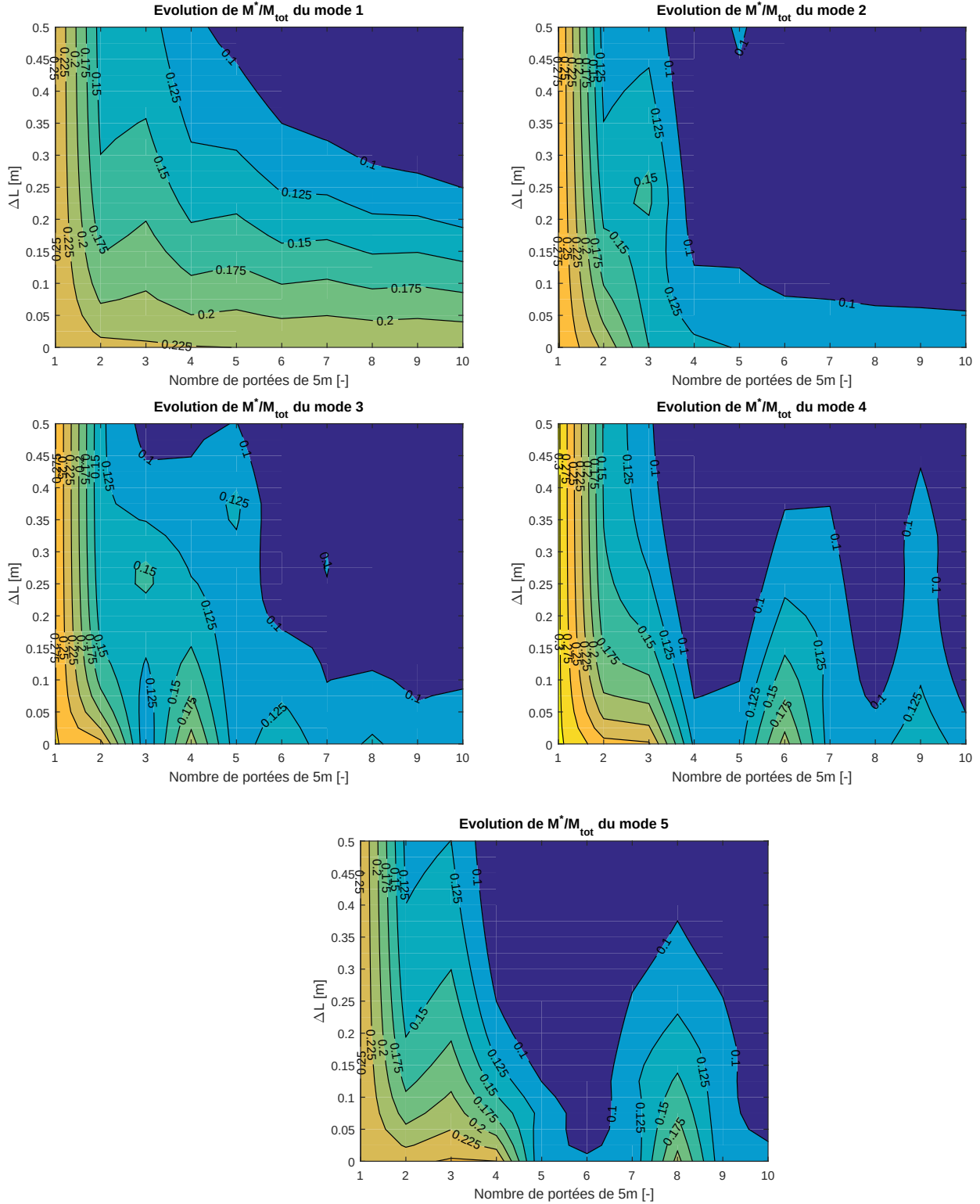


FIGURE 4.20 – Rapport M^*/M en fonction du décalage et du nombre de portées p de 5m

Afin de mieux comprendre l'influence du décalage, il serait intéressant d'étudier l'évolution du rapport de la masse généralisée sur la masse totale pour un nombre de portées fixé. Pour cela, une coupe verticale au travers des graphiques à la FIGURE 4.20 est réalisée. Prenons deux cas explicites : lorsque le nombre de portées est égal à 5 pour le mode 1 et lorsque le nombre de portées est égal à 6 pour le mode 4. Les résultats sont à la FIGURE suivante.

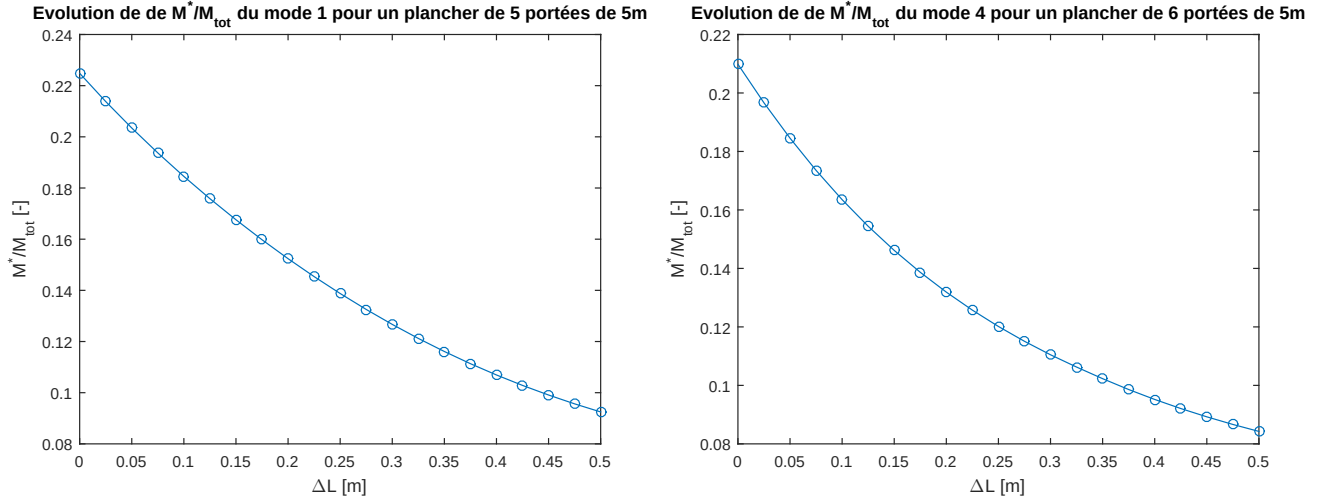


FIGURE 4.21 – Évolution du rapport de la masse généralisée sur la masse totale pour un nombre de portées fixé

Les deux courbes ci-dessus ont la même allure. Initialement, lorsque le décalage est faible, la diminution du rapport de la masse généralisée sur la masse totale est importante. Ensuite, cette diminution se réduit jusqu'à ce que le rapport atteigne une valeur entre 0,08 et 0,1, c'est-à-dire la masse généralisée diminue jusqu'à 8 à 10 % de la masse totale du plancher. Dans le cas où le nombre de portées est important, ce rapport diminue de manière importante. Cependant, lorsque le nombre de portées est faible, le rapport reste élevé et la diminution est faible. La FIGURE 4.22 montre l'évolution du rapport $\frac{M^*}{M_{tot}}$ en fonction du nombre de portées pour les modes 1 et 4. Pour le mode 1, plus le nombre de portées est important, plus la localisation du mode est importante. Cependant, pour le mode 4, il est plus difficile d'en tirer des conclusions. Même si la tendance générale est identique, certaines courbes sont croissantes avant de diminuer. En effet, en analysant la FIGURE 4.20, il est remarqué qu'autour de $p = 6$ et 7 ainsi qu'autour de $p = 9$, le rapport augmente alors que le décalage augmente. La FIGURE 4.23 montre de manière plus précise les valeurs du rapport $\frac{M^*}{M_{tot}}$ pour un décalage de 0,25m.

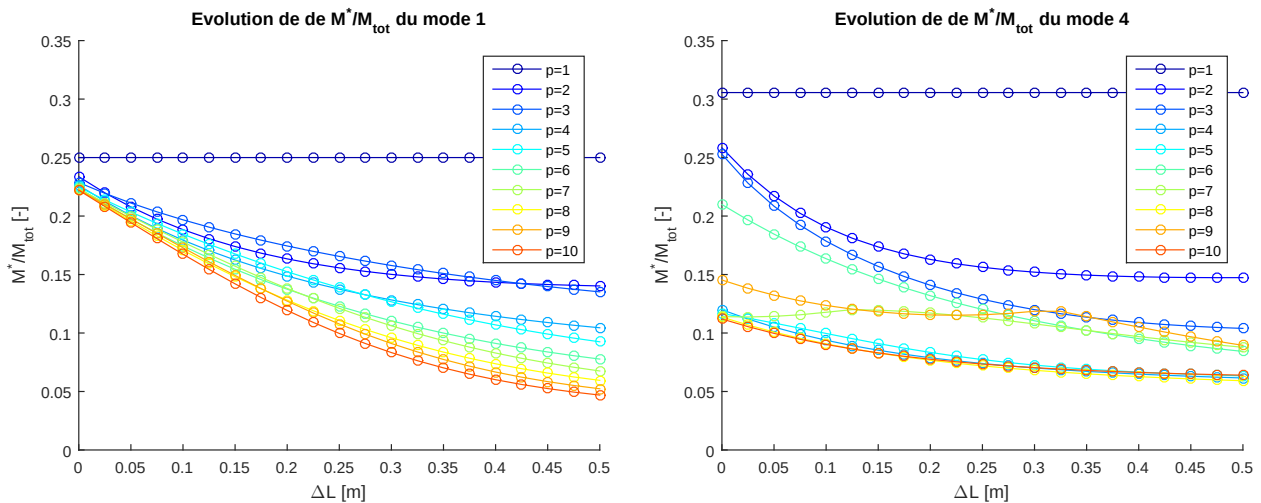


FIGURE 4.22 – Évolution du rapport de la masse généralisée sur la masse totale

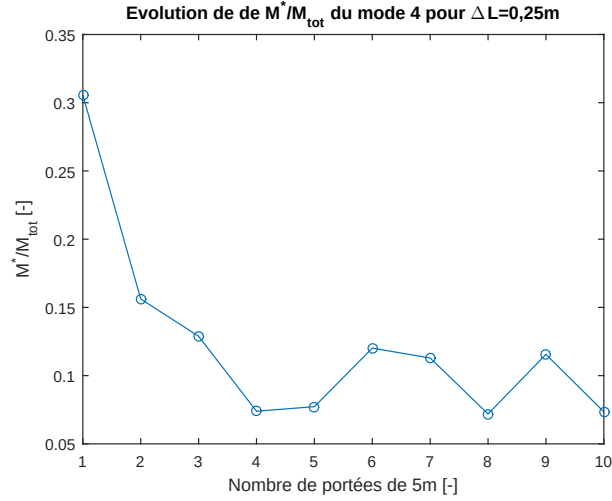


FIGURE 4.23 – Évolution du rapport de la masse généralisée sur la masse totale du mode 4 pour $\Delta L = 0,25m$

La forme des modes à la FIGURE suivante prouve bel et bien qu'autour d'un nombre de portées $p = 6 - 7$ et $p = 9$, la localisation du mode 4 est moins importante.

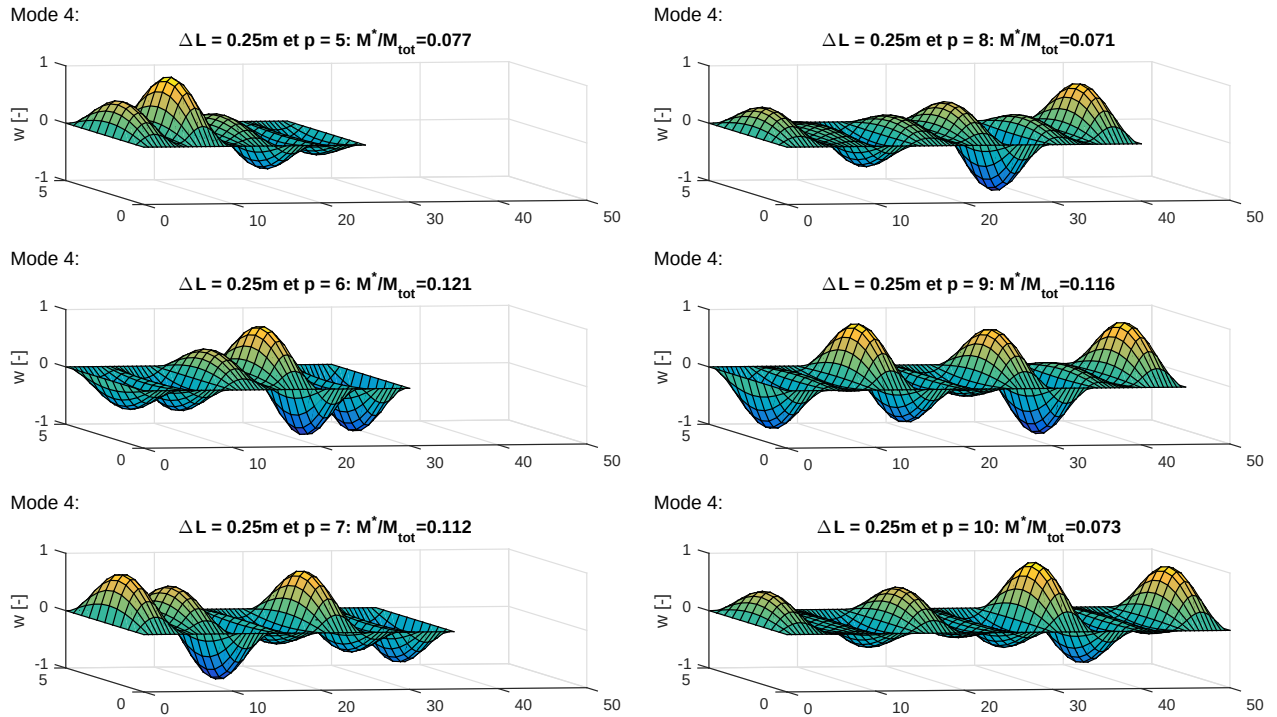


FIGURE 4.24 – Évolution de la forme du mode 4 en fonction de l'augmentation du nombre de portées

Le même phénomène est également présent au mode 3 autour de $p = 4$, $p = 6$ et $p = 8$ mais aussi au mode 7 autour de $p = 3$ et $p = 7$.

4.7. VARIATION DES PARAMÈTRES

Pour le mode 3, la FIGURE 4.25 montre son évolution lorsque le nombre de portées varie de 3 à 9. Même sans décaler les poutres, les planchers dont le nombre de portées est impair ont un 3^{ème} mode plus localisé que les autres. La symétrie des portées semble donc un frein à la localisation du 3^{ème} mode.

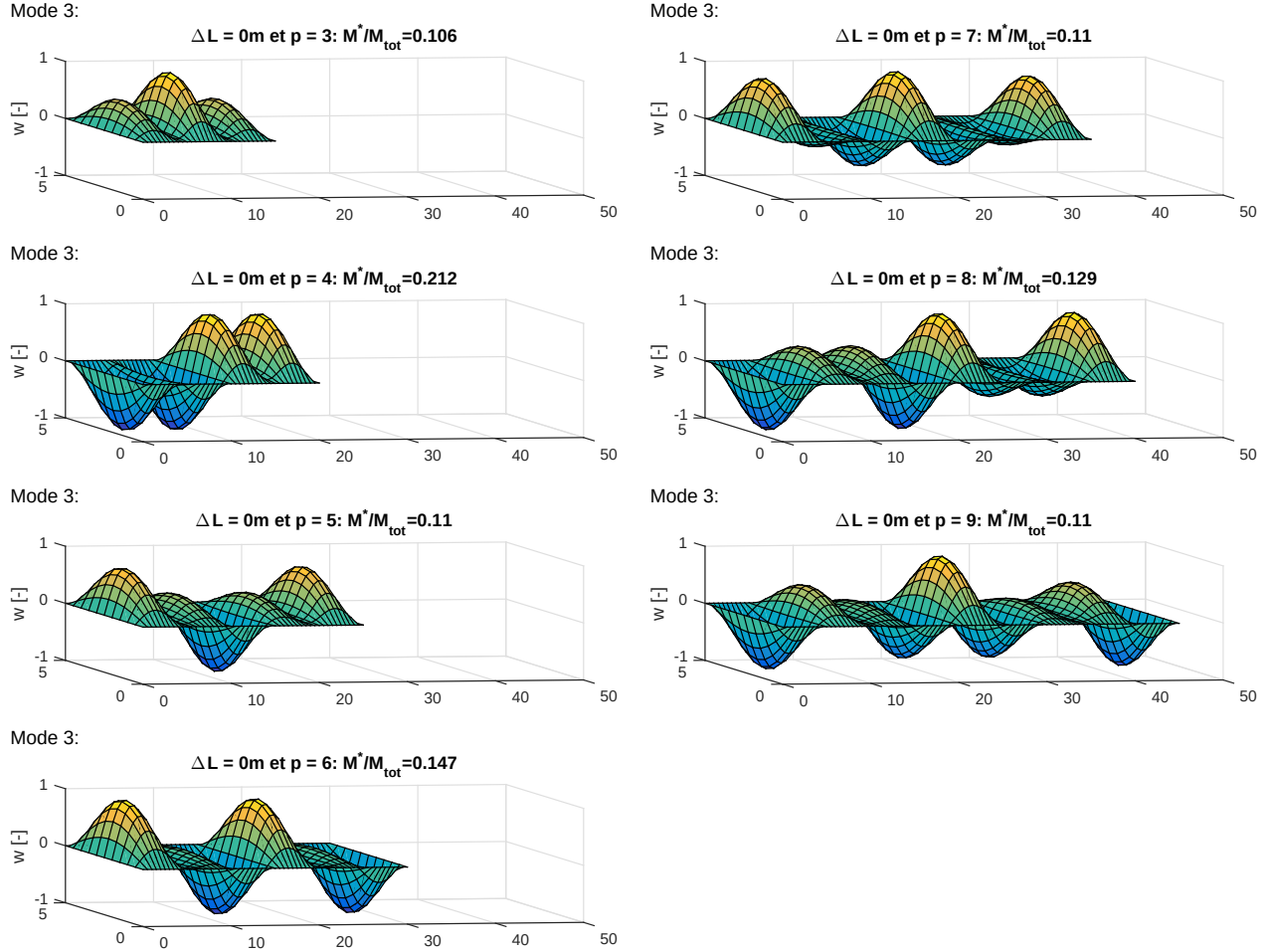


FIGURE 4.25 – Évolution de la forme du mode 3 en fonction de l'augmentation du nombre de portées

Pour le mode 5, la masse généralisée réaugmente lorsque le nombre de portées est égal à 3 et 8. La FIGURE 4.26 montre que dans ces conditions, la localisation est moins importante que dans les autres cas.

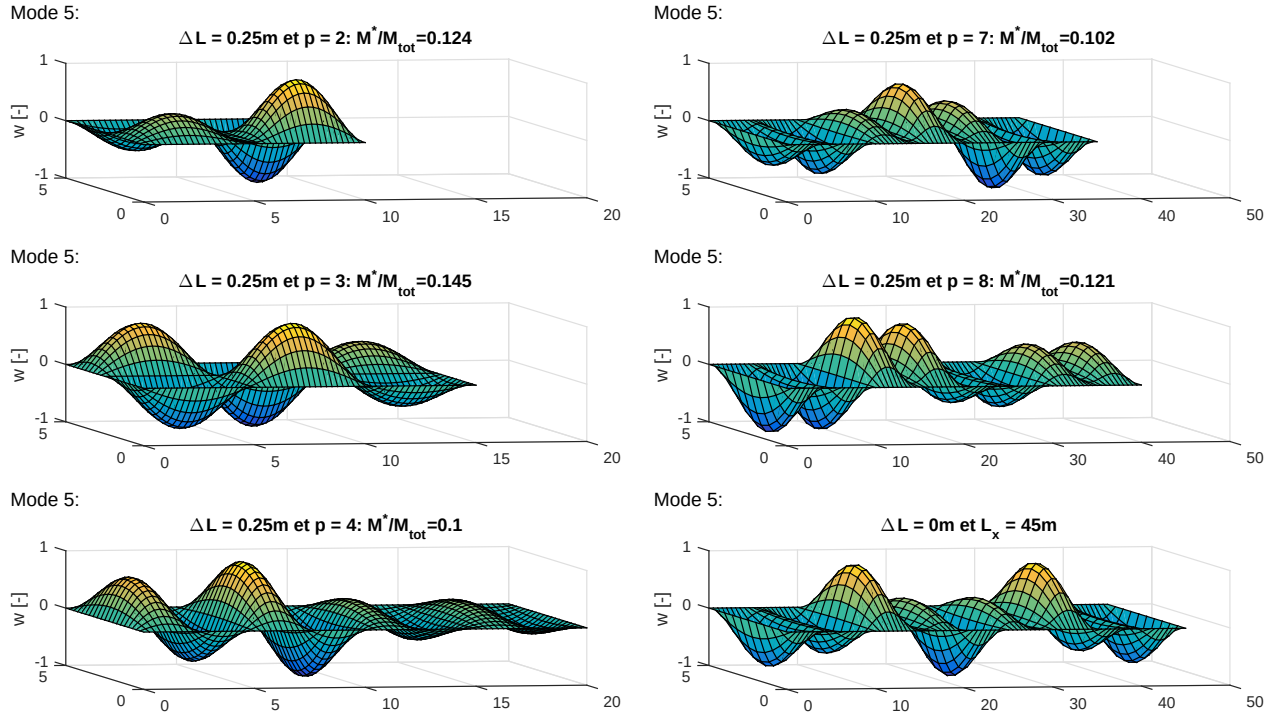


FIGURE 4.26 – Évolution de la forme du mode 5 en fonction de l'augmentation du nombre de portées

4.7.2 Variations du décalage ΔL et la portée entre les poutres

La FIGURE 4.20 représente l'évolution du rapport entre la masse généralisée et la masse totale pour les 5 premiers modes propres en fonction du décalage de la poutre et de la distance entre les poutres. De manière générale, nous remarquons que le fait d'augmenter les portées diminue la raideur de la dalle et la rend plus facilement déformable, ce qui augmente la masse généralisée.

4.7. VARIATION DES PARAMÈTRES

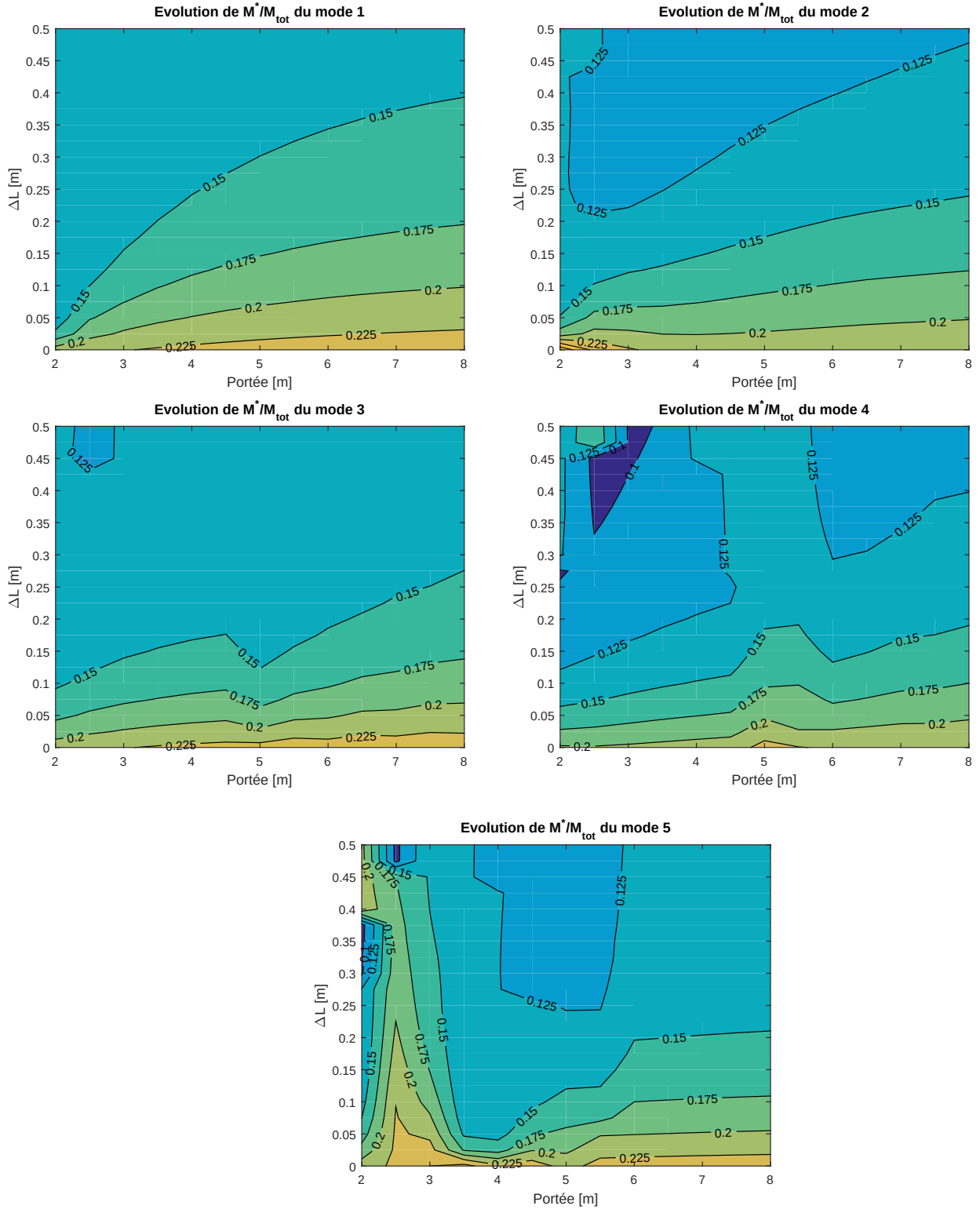


FIGURE 4.27 – Rapport M^*/M en fonction du décalage et de l'augmentation de la portée L_x/p où p est fixé à 2

Cette augmentation est générale sauf pour le mode 3 où nous apercevons une légère diminution de la masse généralisée lorsque la portée vaut 5m et inversement pour le mode 4. Les images à la FIGURE 4.28 montrent que la masse généralisée du mode 3 diminue lorsque la portée entre les poutres est de 5m alors que l'inverse est observé pour le mode 4. En effet, pour le mode 3, un changement de la forme du mode apparaît lorsque les portées valent 5m. Pour un même mode, augmenter la portée diminue sa localisation puisque cela revient à allonger la longueur d'une de ses demi-ondes. Ensuite, lorsque le nombre de demi-ondes passe de 2 à 4 dans la direction x , le mode devient plus localisé car la longueur des demi-ondes diminue. C'est également ce qui est observé au mode 4.

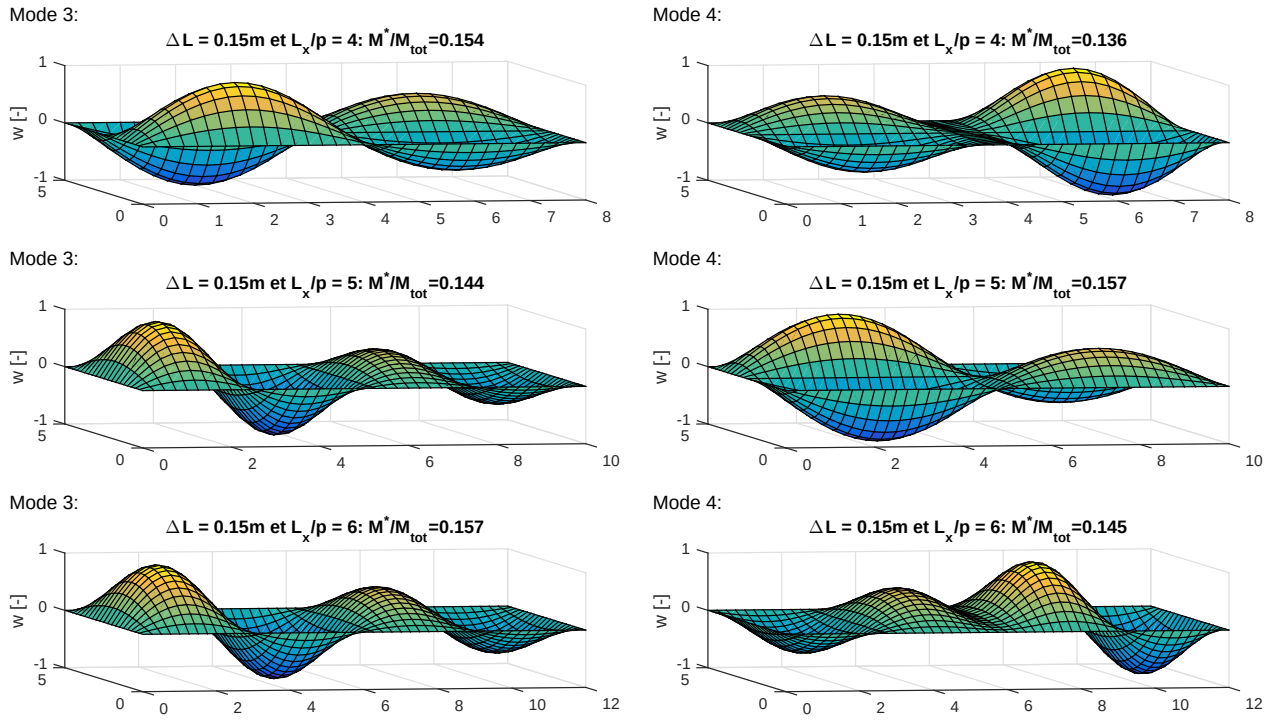


FIGURE 4.28 – Évolution de la forme des modes 3 et 4 en fonction de l'augmentation des portées

L'évolution du rapport $\frac{M^*}{M_{tot}}$ pour le 5^{ème} mode est moins constante. Lorsque les portées sont faibles, la masse généralisée est dans certains cas faible (zones en bleu foncé et bleu clair) alors qu'elle peut être plus élevée dans d'autres (zones plus jaunâtres). L'évolution du rapport de la masse généralisée et de la masse totale en fonction de l'entre-distance entre les poutres est représenté à la FIGURE 4.29 pour un ΔL fixé à 0,15m et 0,3m. Les deux courbes ont la même allure. La masse généralisée est faible et augmente pour atteindre un maximum lorsque les portées valent 2m. Elle rediminue ensuite pour atteindre un minimum lorsque les portées valent entre 3 et 4m avant de réaugmenter progressivement.

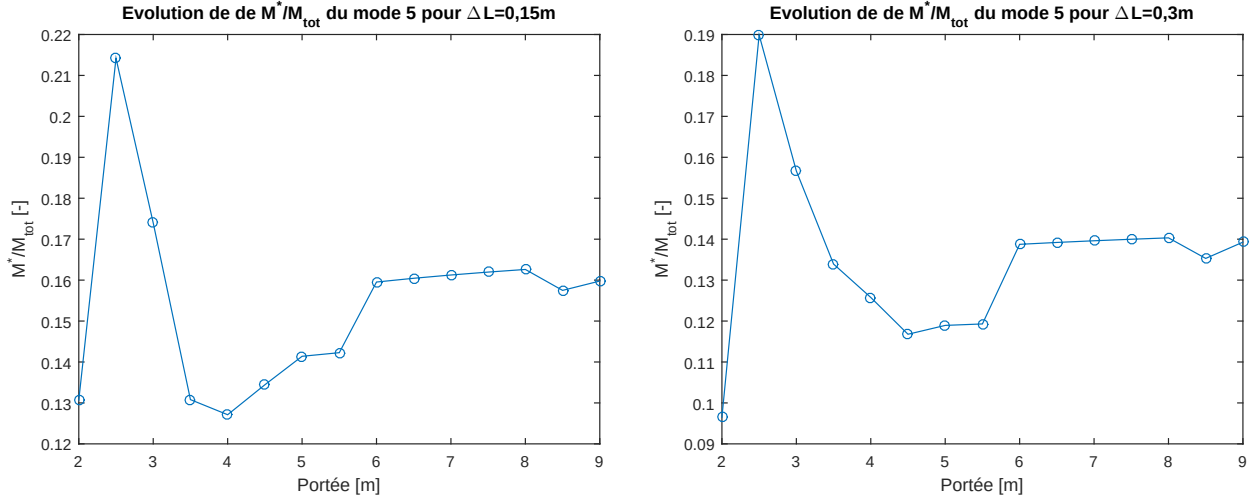


FIGURE 4.29 – Évolution du rapport de la masse généralisée sur la masse totale du mode 5 pour $\Delta L = 0,15\text{m}$ et $0,3\text{m}$

4.7.3 Variations du décalage ΔL et de l'inertie des poutres I

La FIGURE 4.31 montre l'évolution du rapport de la masse généralisée sur la masse totale en fonction du décalage de la poutre et de l'inertie des poutres. Nous constatons que plus le décalage est important et plus l'inertie des poutres est élevée, plus le mode se localise. En effet, lorsque l'inertie des poutres est faible, elles apportent peu de raideur à la dalle et suivent donc la déformation de la dalle. Les modes sont proches de ceux d'une plaque isotrope. Vu ce qui a été démontré au chapitre 3, les modes propres d'une plaque orthotrope sont globaux sur l'ensemble de la dalle. Par conséquent, il en est de même pour un plaque isotrope comme celle utilisée dans notre cas pour étudier la dalle de béton puisqu'il s'agit d'un cas particulier de la plaque orthotrope. Lorsque l'inertie des poutres devient plus importante, la déformation de celles-ci demande un niveau d'énergie plus important. Les premiers modes propres deviennent donc des modes où les poutres se déforment peu. La FIGURE 4.30 montre le changement entre le premier mode propre d'une plaque isotrope et celui où l'inertie de la poutre à mi-portée est très grande.

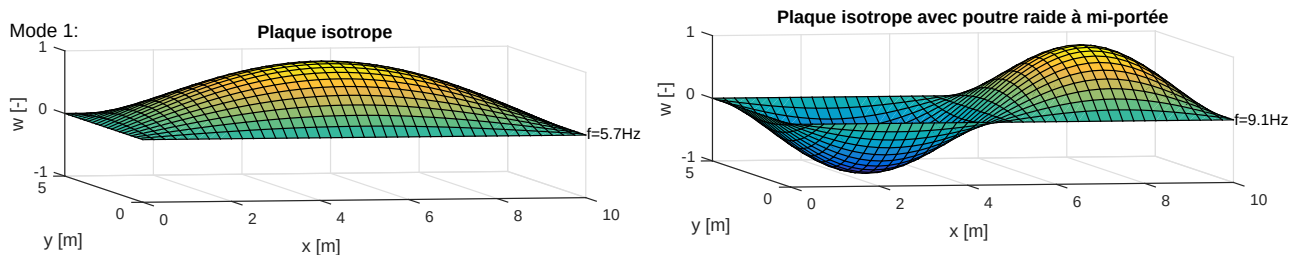


FIGURE 4.30 – Changement des modes propres suite à l'ajout d'une poutre très raide à mi-portée d'une plaque isotrope

4.7. VARIATION DES PARAMÈTRES

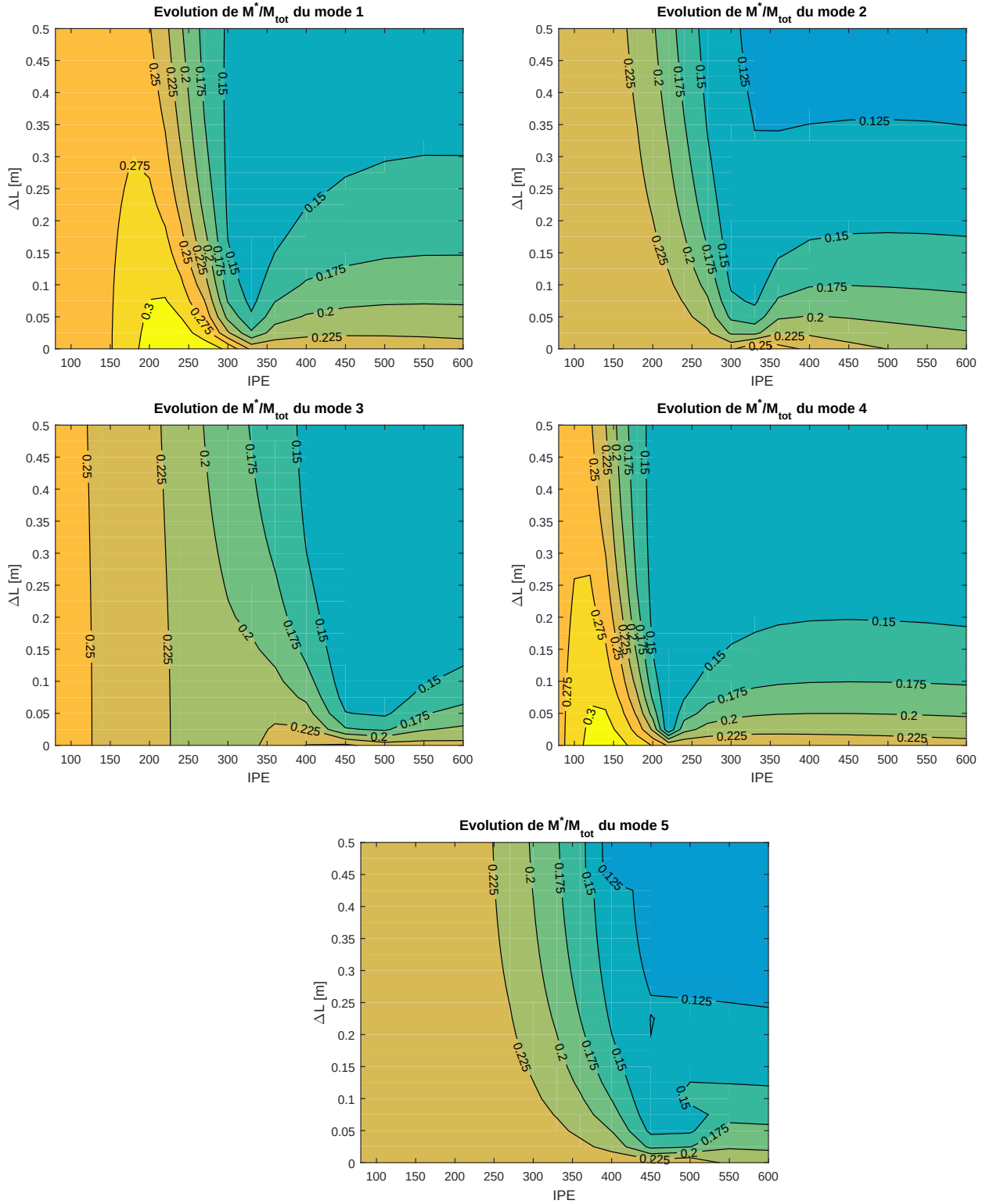


FIGURE 4.31 – Rapport M^*/M en fonction du décalage et de l'inertie des poutres

Cependant, pour certains modes, la masse généralisée diminue fortement pour un type de poutre particulier. L'étude de la forme des modes permet d'expliquer ce phénomène. Commençons par les deux premiers modes. Les modes 1 et 2 se localisent davantage lorsque la poutre est un IPE 330 car c'est le moment où les modes changent de formes. Le mode 1 passe d'une forme à une à deux demi-ondes selon x . Lorsque l'inertie de la poutre augmente, l'amplitude d'une des portées se réduit dans un premier temps et un mode local se forme. Ensuite, la forme du mode tend vers un mode à deux demi-ondes selon x . Le mode est de nouveau réparti sur l'entièreté du plancher. De même pour le mode 2, le changement de formes de modes entraîne d'abord une localisation du mode mais qui se réduit par la suite.

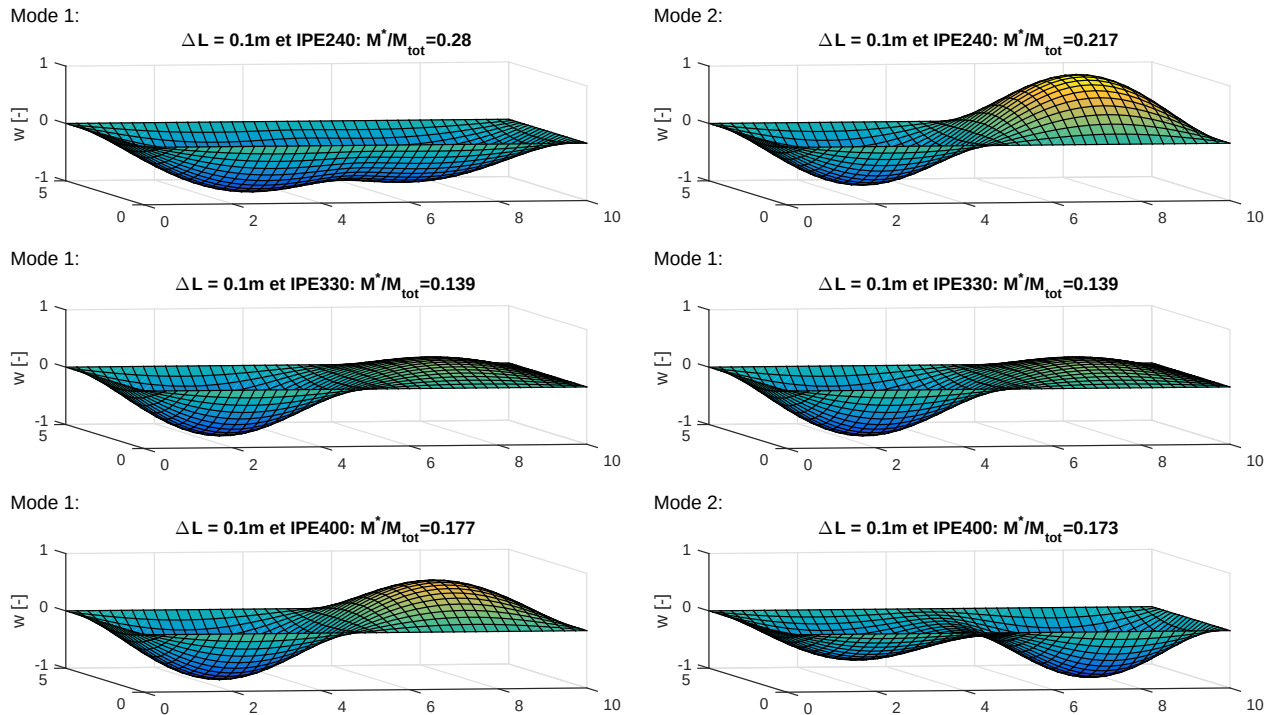


FIGURE 4.32 – Évolution de la forme des modes 1 et 2 en fonction de l'inertie de la poutre

Le même phénomène de réduction soudaine de la masse généralisée pour une valeur d'inertie apparaît également pour les 3 autres modes. Le changement d'inertie de la poutre engendre un changement au niveau de la forme des modes. Le passage de l'un à l'autre engendre une forme modale intermédiaire localisée.

4.7. VARIATION DES PARAMÈTRES

— Les modes 3 et 5 se localisent davantage lorsque la poutre est un IPE 450.

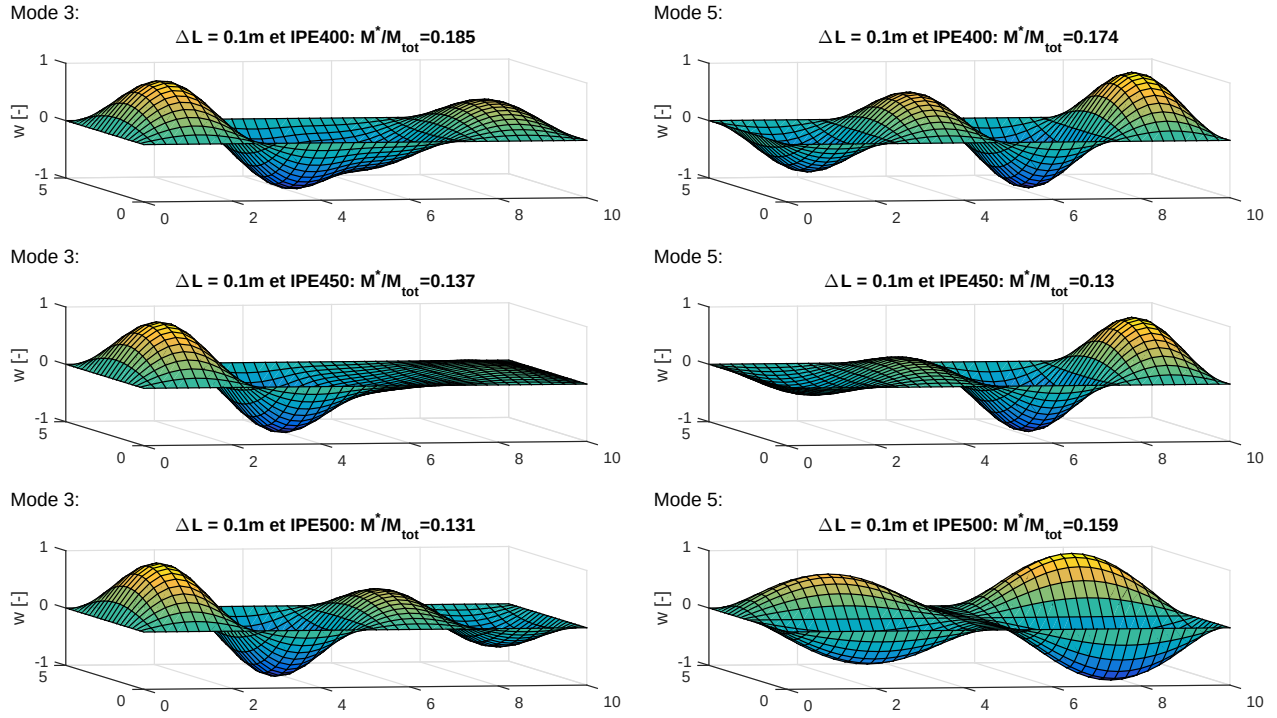


FIGURE 4.33 – Évolution de la forme des modes 3 et 5 en fonction de l'inertie de la poutre

— Le mode 4 se localise davantage lorsque la poutre est un IPE 220.

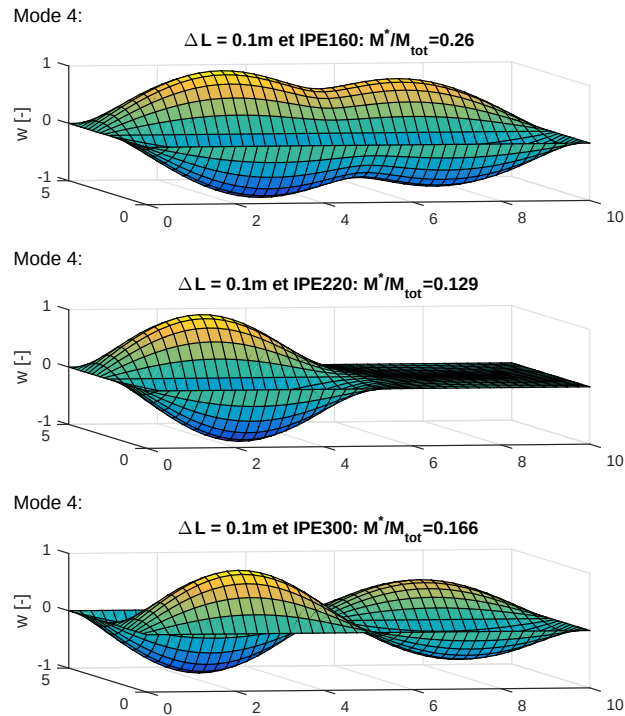
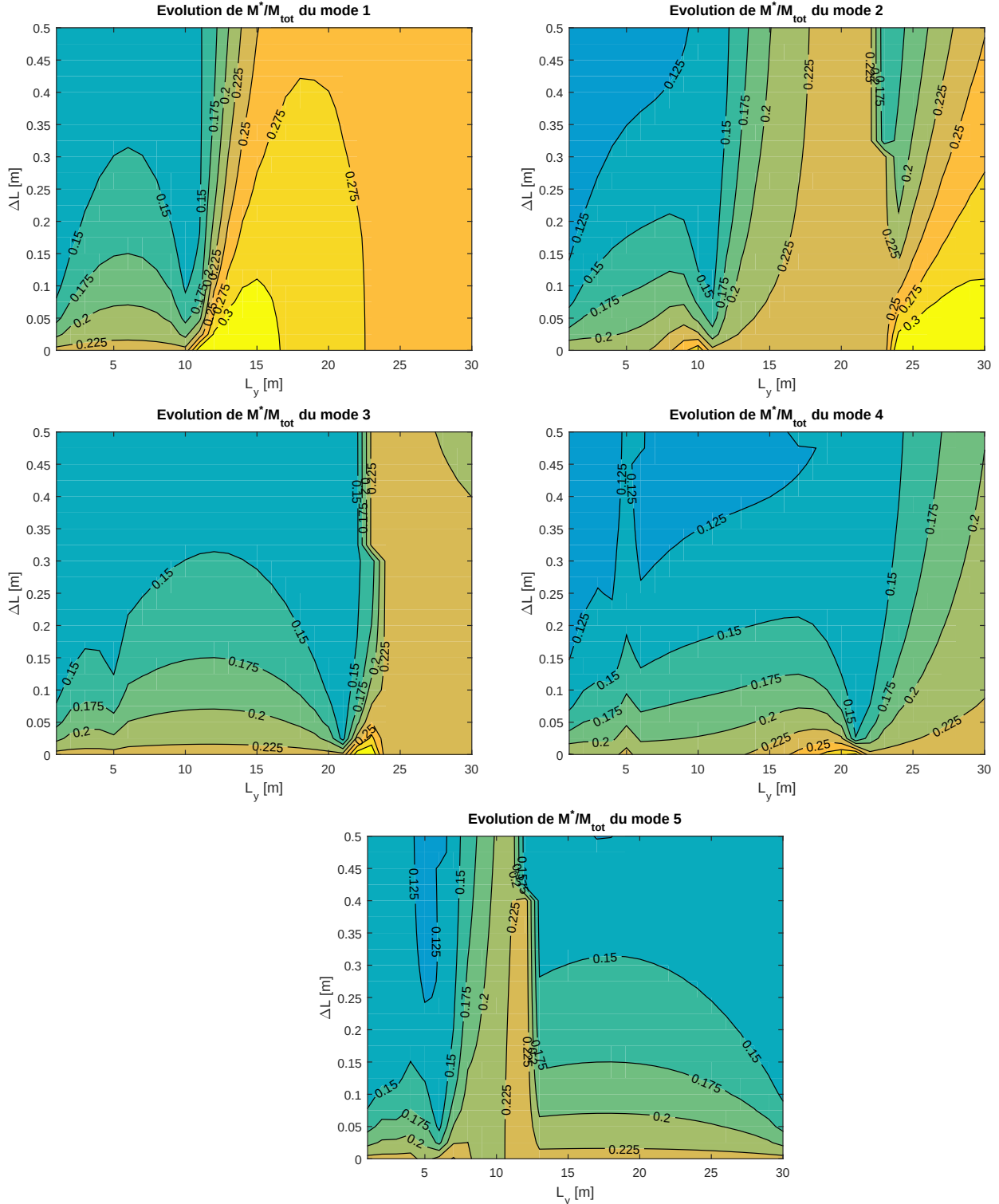


FIGURE 4.34 – Évolution de la forme du mode 4 en fonction de l'inertie de la poutre

4.7.4 Variations du décalage ΔL et de la longueur L_y

La FIGURE 4.35 montre l'évolution du rapport de la masse généralisée sur la masse totale en fonction du décalage de la poutre et de leur longueur. Nous constatons que le fait d'augmenter la longueur des poutres ou d'augmenter l'inertie des poutres engendre des effets opposés sur l'évolution de $\frac{M^*}{M_{tot}}$. En effet, la raideur d'une poutre est proportionnelle à son inertie mais inversement proportionnelle à sa longueur.

FIGURE 4.35 – Rapport M^*/M en fonction du décalage et de la longueur L_y des poutres

4.7. VARIATION DES PARAMÈTRES

Pour les 4 premiers modes, le rapport de la masse généralisée sur la masse totale est faible lorsque L_y est faible. Il augmente ensuite jusqu'à atteindre un maximum avant de rechuter à un minimum et pour au final réaugmenter. Par contre, l'allure du mode 5 est différente. Pour des planchers dont la longueur L_y est importante, le rapport $\frac{M^*}{M_{tot}}$ diminue. Les images à la FIGURE suivante résume cette différence.

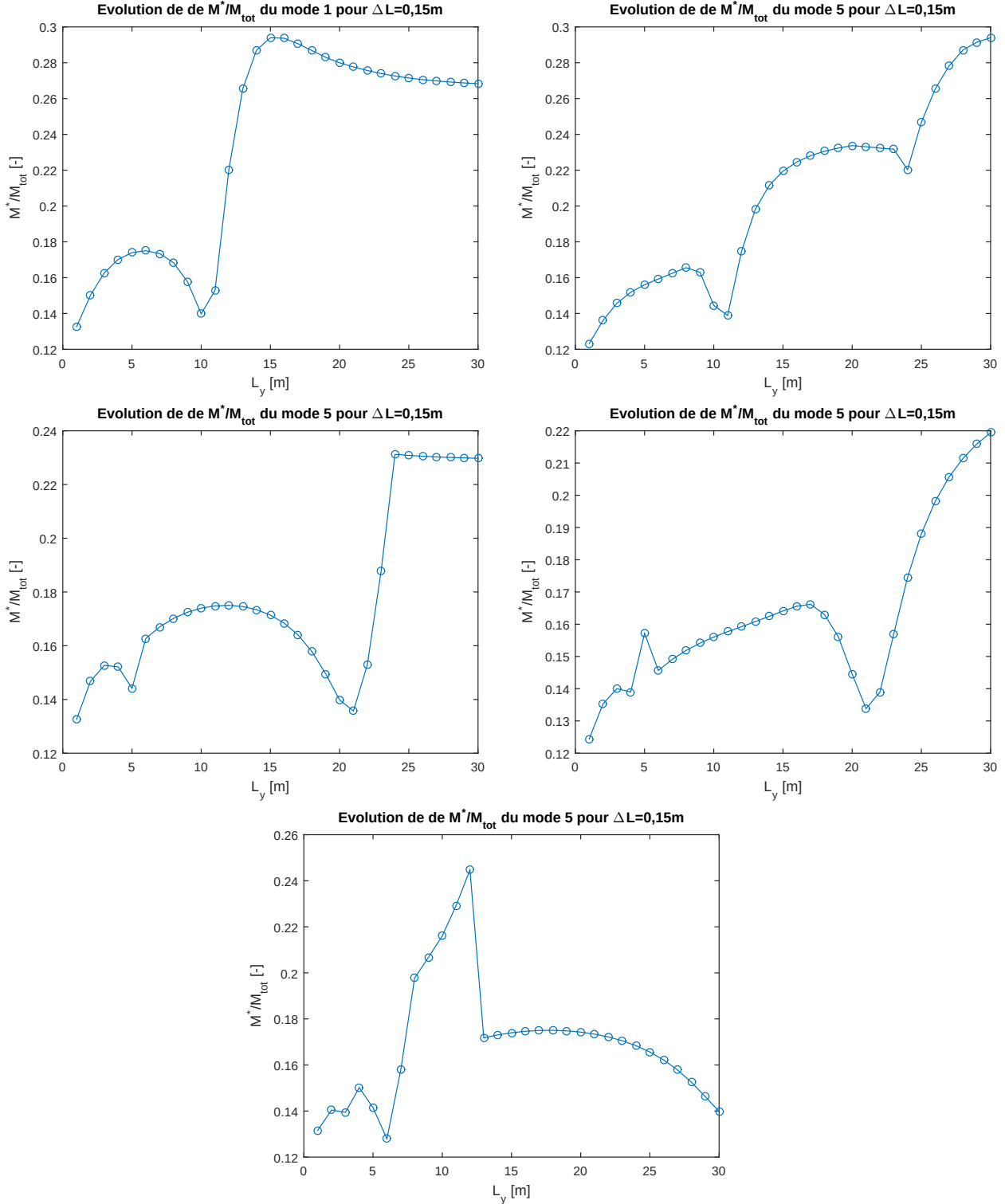


FIGURE 4.36 – Évolution du rapport de la masse généralisée sur la masse totale pour les 5 premiers modes pour $\Delta L = 0,15m$

Étudions plus en détails la forme des modes. Pour les deux premiers modes, la masse généralisée diminue fortement lorsque L_y vaut 10m. En comparant la forme des modes à la FIGURE 4.37 ci-dessous avec la FIGURE 4.32 représentant l'évolution de la forme des modes en fonction la variation de l'inertie des poutres, il est constaté que les formes sont similaires sauf que l'ordre des modes est inversé. En effet, lorsque L_y vaut 5m, les poutres sont raides et imposent des modes propres où celles-ci se déforment peu. Plus leurs longueurs augmentent, plus le rapport de raideur entre les poutres et la dalle diminue. La forme des modes change et se rapproche de ceux d'une plaque sans la contribution des poutres.

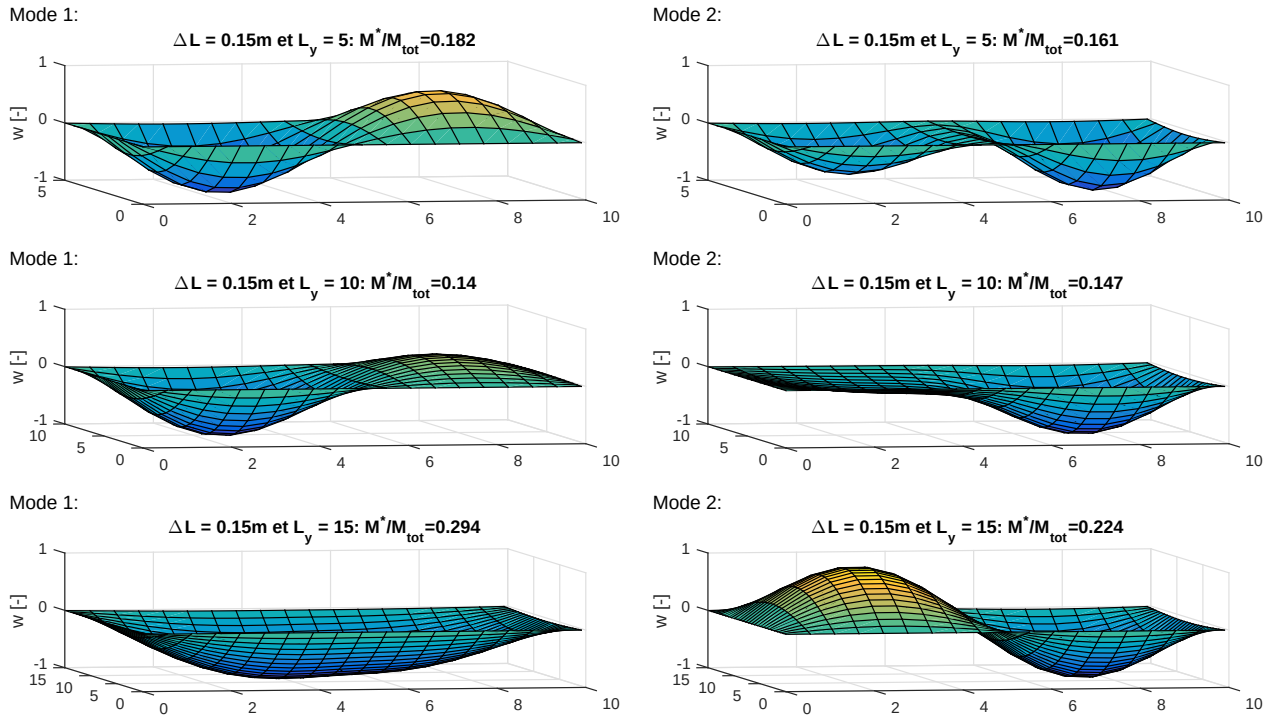


FIGURE 4.37 – Évolution de la forme des modes 1 et 2 en fonction de la longueur de la poutre

Les modes 3 et 4 montrent également le même phénomène (FIGURE 4.38). Autour de $L_y = 20\text{m}$, ces deux modes se localisent suite à un changement de la forme du mode. Pour le mode 5 (FIGURE 4.39), c'est l'inverse. La masse généralisée augmente lors du changement de forme. En effet, ce mode fait intervenir d'avantage la contribution de la poutre dans la masse généralisée. Sa déformée est proche de celle d'une demi-onde. La moitié de la masse de la poutre contribue donc à augmenter la masse généralisée.

4.7. VARIATION DES PARAMÈTRES

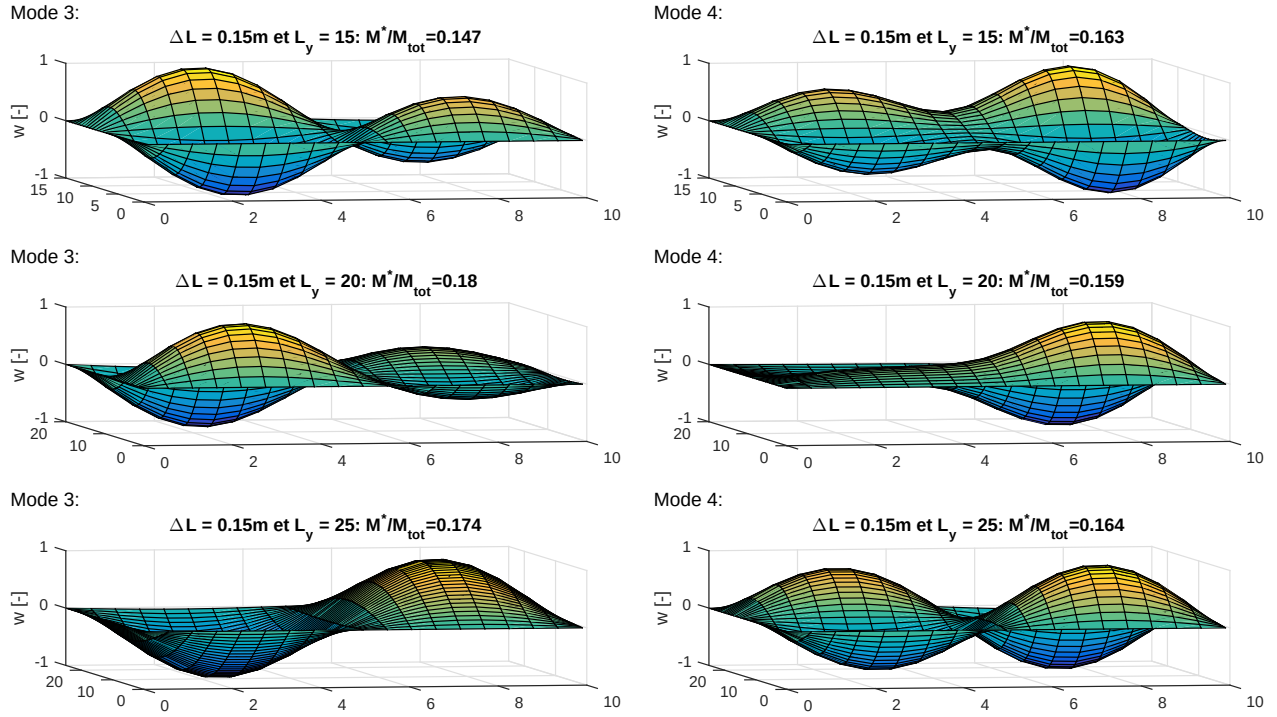


FIGURE 4.38 – Évolution de la forme des modes 3 et 4 en fonction de la longueur de la poutre

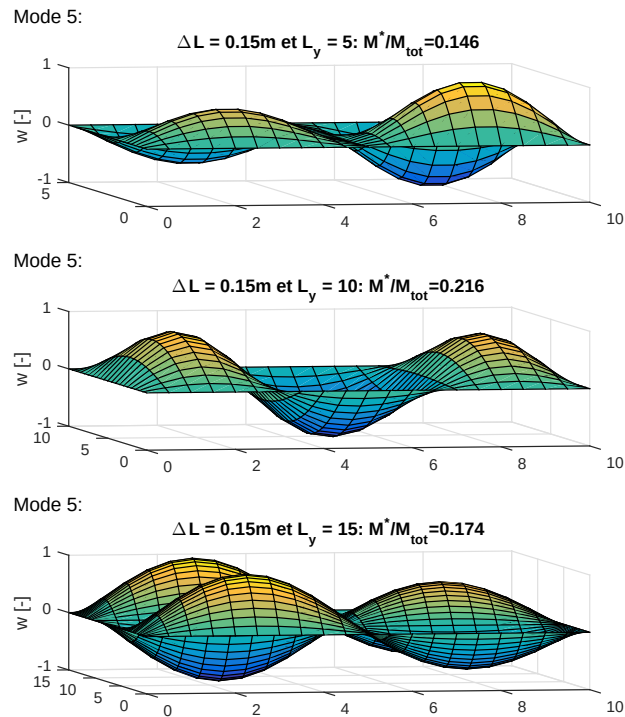


FIGURE 4.39 – Évolution de la forme du mode 5 en fonction de l'inertie de la poutre

4.8 Conclusions

4.8.1 Combinaison optimale pour éviter la localisation de modes

Ces analyses paramétriques permettent de tirer des tendances pour chacune des variations de paramètres. Hormis les irrégularités mentionnées plus haut, il peut être conclu de manière générale que pour éviter la localisation des modes propres, les conditions optimales sont :

- un faible nombre de portées avec une grande entre-distance entre les poutres,
- des poutres de faibles inerties,
- des poutres de grandes longueurs,
- des portées constantes.

Ce dernier paramètre pose problème lors de la mise en œuvre car il demande que les poutres soient placées exactement à la bonne distance par rapport à ce que prévoient les plans. Un décalage pourrait engendrer une localisation d'un ou plusieurs modes, ce qui diminuerait la masse généralisée et par conséquent, augmenterait les accélérations.

4.8.2 Intervalle de fréquences des piétons

La FIGURE 4.40 représente pour chacun des planchers testés la fréquence f et le rapport $\frac{M^*}{M_{tot}}$ correspondant. Dans la zone de fréquence entre 0 et 10 Hz, il est possible qu'un piéton engendre des vibrations trop importantes qui pourraient nuire au confort des occupants du plancher. Plus la masse généralisée diminue, plus ce problème s'accroît. Or, la FIGURE 4.40 montre que la masse généralisée est réduite dans de nombreux cas lorsque la fréquence propre est comprise entre 0 et 10 Hz..

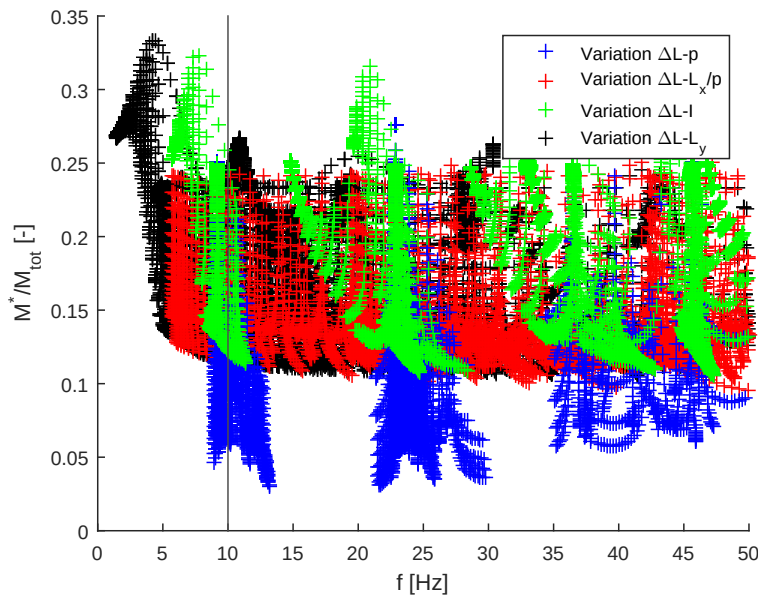


FIGURE 4.40 – Fréquence et masse généralisée de tous les planchers testés

Il est constaté que l'augmentation du nombre de portées (points en bleu) donne une diminution du rapport de la masse généralisée sur la masse totale la plus importante. C'est donc le paramètre le plus critique. Plus le nombre de portées est important, plus la localisation a de chance de se produire, pour autant que la combinaison avec les autres paramètres soient favorables à la localisation.

Chapitre 5

Influence de la fissuration sur les modes propres

5.1 Introduction

La forme des modes propres est directement liée à la masse et à la raideur généralisées développées par le plancher pour chacun des modes. Cependant, la fissuration influence ces deux paramètres. La fissuration réduit par définition la raideur du plancher mais peut également empêcher la transmission du mode d'une portée à l'autre. Dans ce cas, la masse généralisée diminue également. En fonction de la variation de chacun de ses paramètres, la fréquence propre du mode correspondant augmente ou diminue.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} \quad (5.1)$$

Pour étudier la fissuration, la loi constitutive du béton doit tenir compte de sa différence de comportement en traction et en compression.

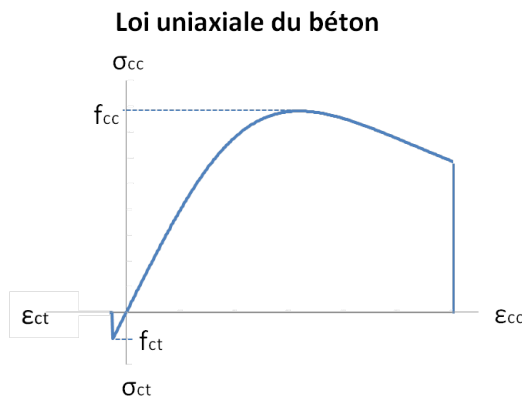


FIGURE 5.1 – Loi uniaxiale du béton

La résistance en traction f_{ct} est fixée comme étant nulle. La fissuration apparaît donc dès que le béton est tendu. Une fois fissuré, ce sont les armatures qui reprennent l'effort en traction dans la dalle.

Le code Matlab ne tient pas compte l'état non linéaire de la structure. Le logiciel Finelg permet cependant de calculer les modes propres d'une structure à partir d'un état non linéaire. C'est donc le logiciel Finelg qui est utilisé pour l'étude de l'influence de la fissuration sur la forme de modes.

5.2 Simulations

5.2.1 Modèle

Le modèle du plancher étudié est le suivant.

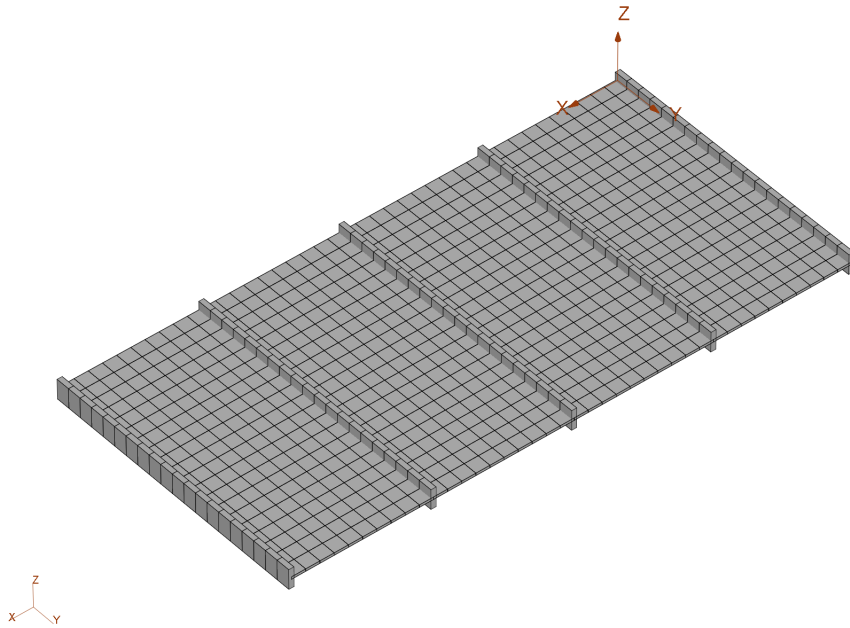


FIGURE 5.2 – Modèle du plancher étudié

Il s'agit du cas n°7 défini précédemment afin qu'il y ait un nombre suffisant de portées pour voir apparaître la localisation si elle a lieu, à la condition près que l'épaisseur de la dalle est plus importante. Pour étudier le comportement non linéaire du béton et notamment sa fissuration, un treillis d'armatures est défini afin de reprendre la traction dans le béton. L'armaturage est identique pour les faces supérieure et inférieure car les vibrations peuvent modifier la répartition des contraintes et une zone initialement comprimée peut devenir tendue et se fissurer. Les armatures dans chacune des directions x et y sont des $\phi 12$ et elles sont espacées de 10cm. Pour que les armatures aient un enrobage suffisant et un espacement entre elles suffisant l'épaisseur de la dalle est augmentée à 9cm.

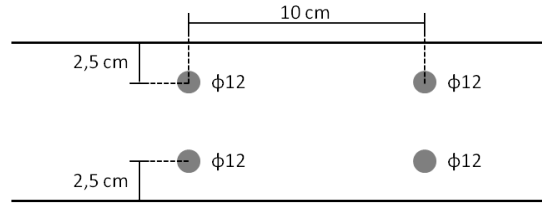


FIGURE 5.3 – Schéma des armatures

Dimensions		Propriétés de la dalle		Propriétés des poutres	
L_x	20 m	ρ_b	2500 kg/m ³	ρ_a	7850 kg/m ³
L_y	10 m	E_b	31 000 MPa	E_a	210 000 MPa
p	4	ν_b	0,2	ν_a	0,3
-	-	h	9cm	IPE	600
-	-	Béton	C25/30	Acier	S235

TABLEAU 5.1 – Propriétés du plancher

Pour garder les hypothèses de calcul du code Matlab , les poutres ont leur centre de gravité à la même hauteur que la dalle afin de ne pas tenir compte des termes de transport. De plus, l'inertie en torsion est considérée comme très faible. La FIGURE 5.2 montre des poutres de formes rectangulaire avec l'inertie et la section d'un IPE 600. Pour finir, les appuis sont considérés comme simplement appuyés.

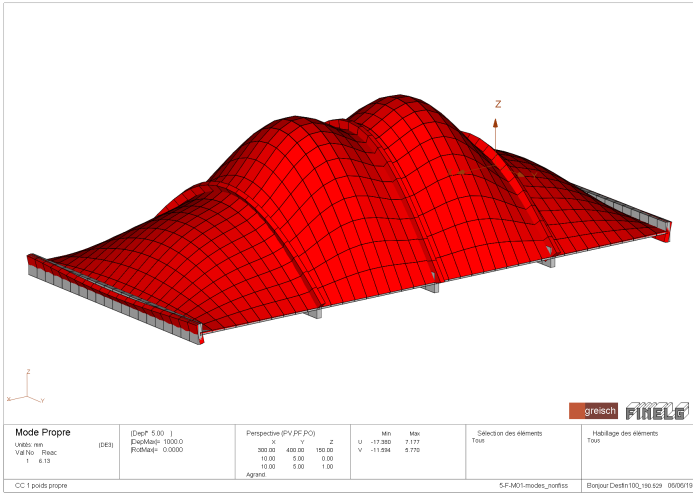
5.2.2 Analyse dynamique linéaire

Dans un premier temps, une analyse dynamique linéaire est réalisée. Elle permettra de comparer les résultats des modes propres avec ceux obtenus après un calcul non linéaire. Le calcul dynamique linéaire résout l'équation (5.2). Il s'agit de la même équation utilisée précédemment mais la matrice de raideur $\mathbf{K}$ est redéfinie en tant que $\mathbf{K}_0$, la matrice de raideur linéaire indépendante du déplacement de la structure, afin de pouvoir distinguer les analyses dynamiques linéaire et non linéaire.

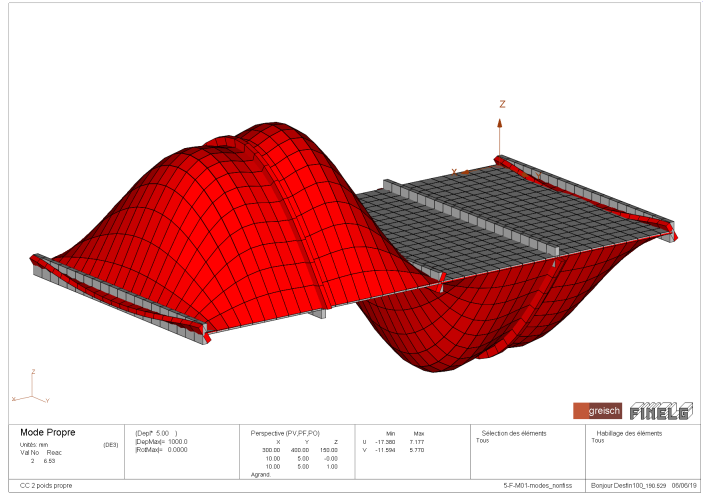
$$\left(\mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}\right) \phi = 0 \quad (5.2)$$

Les modes propres obtenus sont représentés aux FIGURES 5.4 et 5.5. La dalle étant plus épaisse que dans le cas 7, sa raideur l'est également. Le plancher étudié se rapproche donc du cas 8. La forme des modes est à un état intermédiaire entre ceux du cas 7 et du cas 8. Pour chacun des modes, la masse et la raideur généralisées ainsi que la fréquence propre sont reprises au TABLEAU 5.2.

5.2. SIMULATIONS

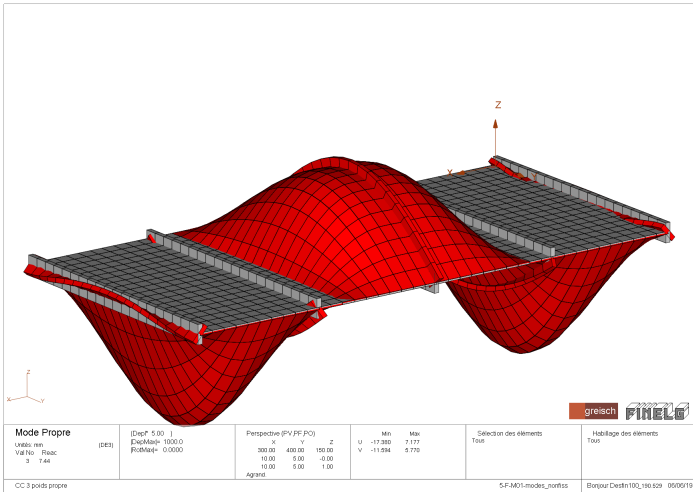


Mode 1

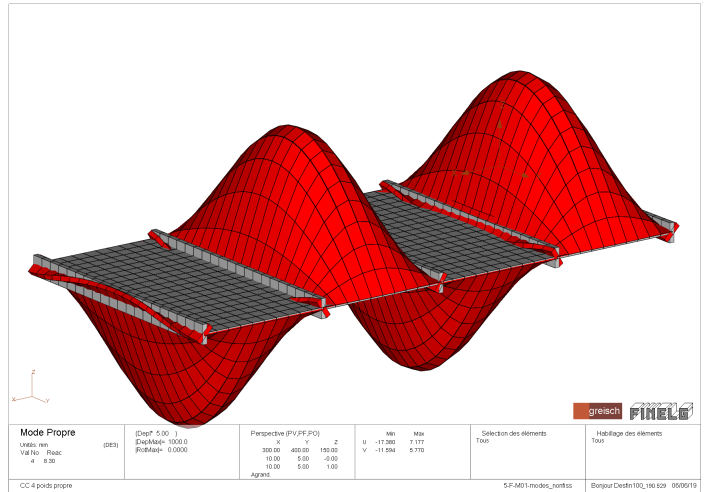


Mode 2

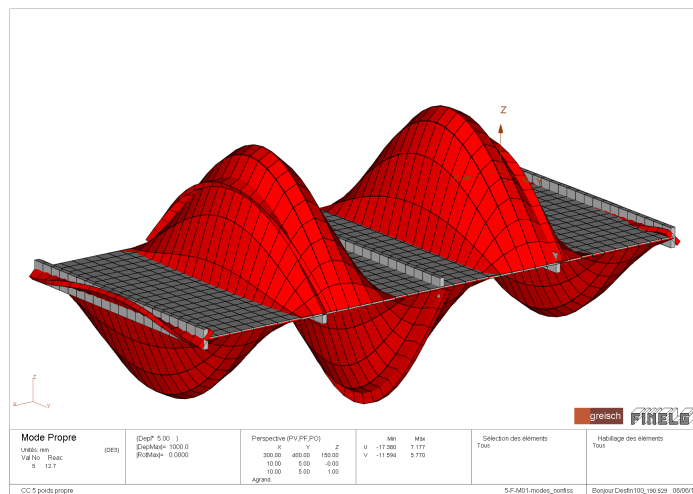
FIGURE 5.4 – Modes propres après un calcul dynamique linéaire (modes 1 et 2)



Mode 3



Mode 4



Mode 5

FIGURE 5.5 – Modes propres après un calcul dynamique linéaire (modes 3 à 5)

	f [Hz]	M^* [kg]	K^* [Nm]
mode 1	6,12	11 023	16 343 752
mode 2	6,52	14 298,5	24 106 328
mode 3	7,44	8 594,6	18 779 142
mode 4	8,3	10 465,3	28 494 743
mode 5	12,73	9 331	59 730 050

TABLEAU 5.2 – Fréquences propres, masse généralisée et raideur généralisée pour le 5 premiers modes suite à un calcul dynamique linéaire

5.2.3 Analyse dynamique non linéaire sous poids propre

La non linéarité provient de deux sources [12] :

- non linéarité matérielle : le comportement non linéaire du béton en compression et la prise en compte de la fissuration en traction (FIGURE 5.1),
- non linéarité géométrique : les grands déplacements. Les équilibres, exprimés dans la configuration déformée, dépendent des déplacements de la structure. Par exemple, la FIGURE 5.6 représente une poutre encastrée-libre. Son moment de flexion au niveau de l'encastrement vaut :

- En linéaire : $M = H \cdot L$
- En non linéaire : $M = H \cdot (L - h) + P \cdot v$

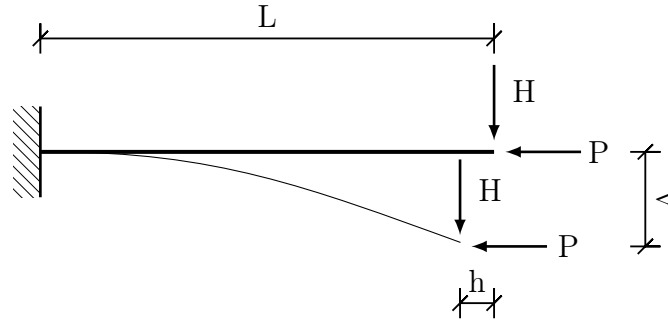


FIGURE 5.6 – Effet de la non linéarité géométrique

Pour le calcul dynamique non linéaire, les déplacements, l'état de contrainte ainsi que la charge appliquée dans la configuration déformée influencent les modes propres. L'équation à résoudre est la suivante :

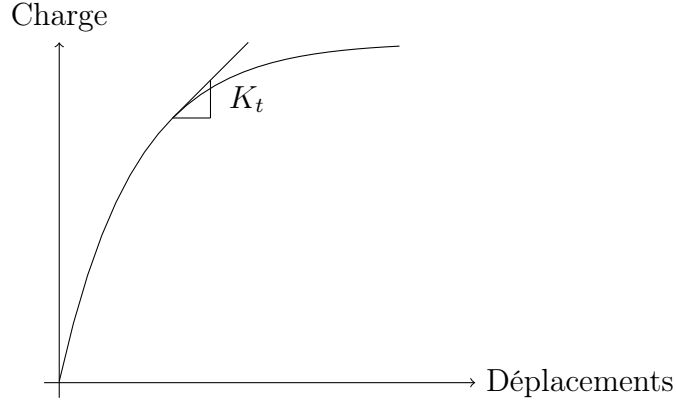
$$(\mathbf{K}_t - \omega^2 \mathbf{M}) \phi = 0 \quad (5.3)$$

où K_t est la matrice de raideur tangente. Si la courbe charge-déplacement de la structure à la forme suivante, $\mathbf{K}_t$ représente la pente de la courbe pour une combinaison charge-déplacement. Elle vaut :

$$K_t = K_0 + K_U + K_{U^2} + K_\sigma + K_P \quad (5.4)$$

- K_0 est la matrice de raideur linéaire,

- K_U est la matrice de raideur dépendante des déplacements,
- K_{U^2} est la matrice de raideur dépendante des déplacements au carré,
- K_σ est la matrice de raideur dépendante des contraintes de la structure déformée,
- K_P est la matrice de raideur dépendante de la charge appliquée dans la structure déformée.



Le calcul dynamique non linéaire procède de la manière suivante :

1. Le calcul non linéaire est effectué,
2. Au dernier pas de temps, la matrice K_t est calculée pour le calcul dynamique.

Le calcul non linéaire exige un calcul itératif puisque les charges engendrent des déplacements et ceux-ci influencent les efforts internes jusqu'à leur stabilisation. La méthode utilisée est la méthode de Newton-Raphson. Elle consiste à calculer pour chaque incrément dp la tangente à la courbe afin d'en tirer K_t . La tangente permet d'approximer de manière linéaire la courbe, ce qui engendre une erreur. Cette erreur, aussi appelée les forces hors équilibre et notée R , permet de revenir sur la courbe non linéaire et de recalculer en ce point la nouvelle matrice de raideur tangente. La procédure itérative est décrite à l'équation (5.5) et à la FIGURE 5.7.

$$K_{t1} \cdot dp_1 = dP \rightarrow K_{t2} \cdot dp_2 = R_1 \rightarrow K_{t3} \cdot dp_3 = R_2 \rightarrow \dots \quad (5.5)$$

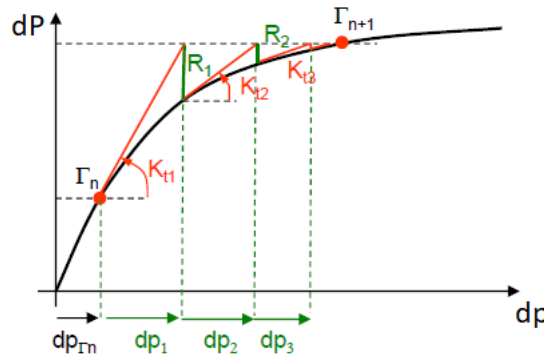


FIGURE 5.7 – Méthode itérative de Newton-Raphson [12]

L'arrêt du calcul itératif a lieu lorsque :

$$\frac{R_{max,i}}{R_{max,1}} \leq 10^{-PSP} \quad (5.6)$$

Dans le cas du calcul avec fissuration, PSP vaut généralement 3.

À la fin du calcul non linéaire, les déformées observées sous poids propre sont les suivantes. Les déformées maximales sont au niveau des portées aux extrémités vu les conditions aux limites fixées. La FIGURE 5.9 montre la courbe charge-déplacement du point de déformée maximale. La courbe est linéaire car dès le premier pas, le béton fissure puisqu'il n'a aucune résistance en traction. Ensuite, la charge de poids propre n'est pas suffisante pour plastifier le béton.

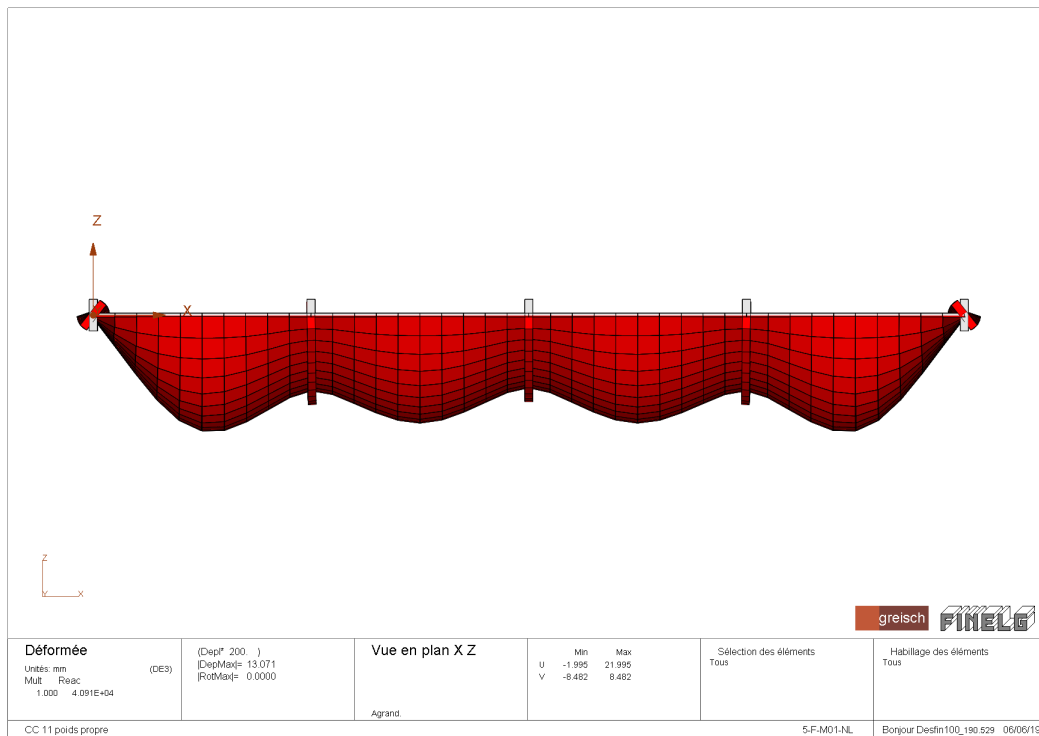


FIGURE 5.8 – Déformée sous poids propre

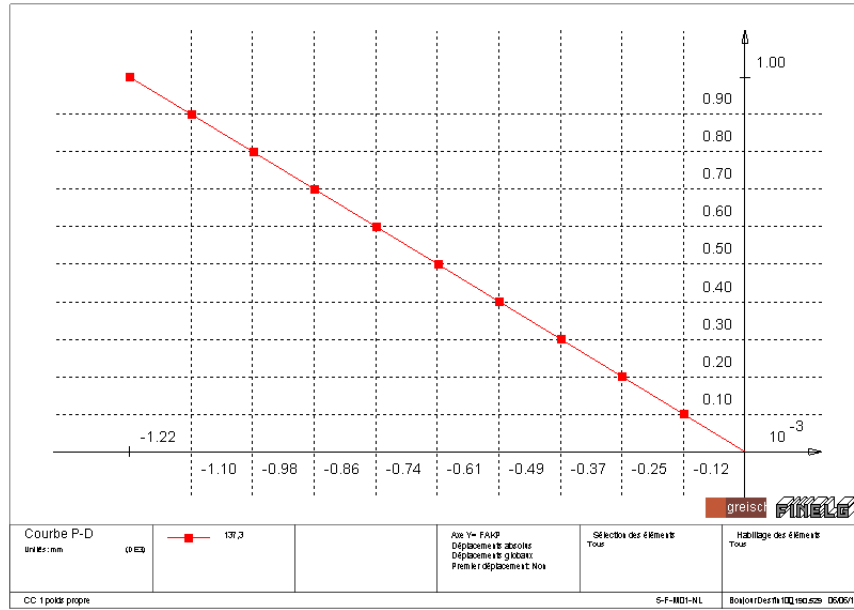


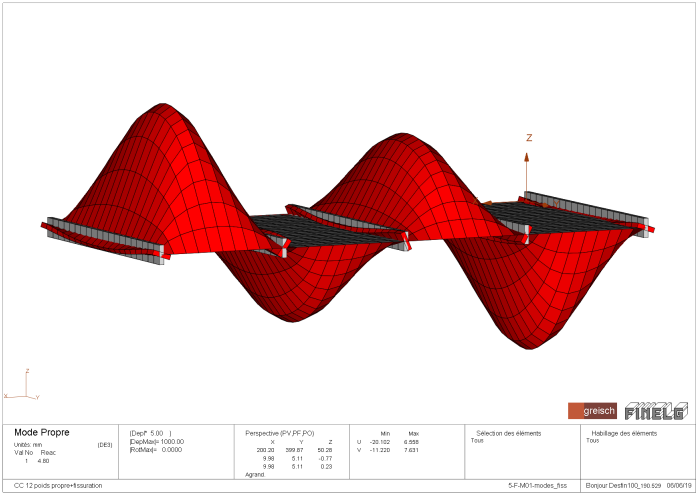
FIGURE 5.9 – Courbe chargement-déplacement sous poids propre

Ensuite, sur base des résultats obtenus par le calcul non linéaire, les modes propres sont calculés. Les 5 premiers sont représentés aux FIGURES 5.10 et 5.11. En les comparant aux modes obtenus par le calcul dynamique linéaire, il peut être remarqué que :

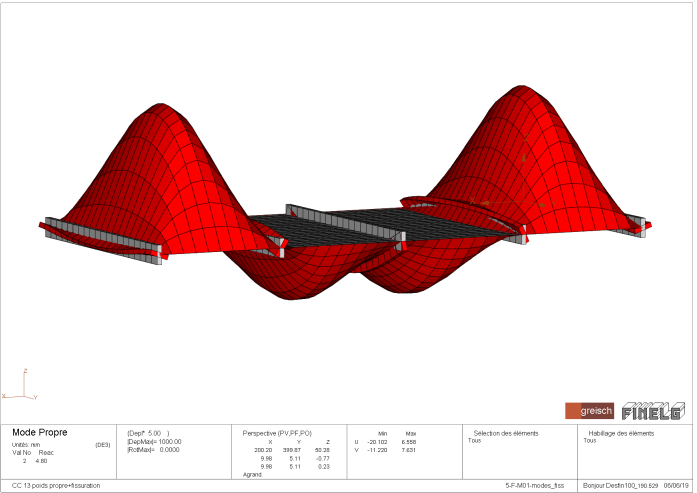
- la raideur généralisée diminue. En effet, la fissuration réduit la raideur de la dalle.
- la masse généralisée diminue dans la plupart des cas. La diminution au niveau de la raideur étant plus importante, les fréquences propres diminuent également.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} \quad (5.7)$$

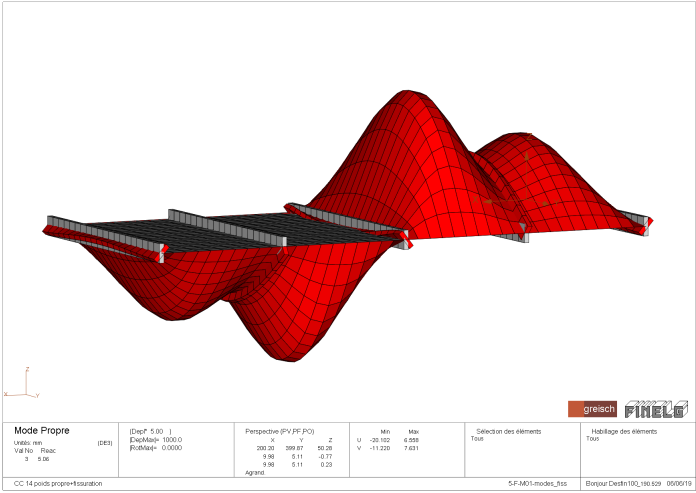
- l'amplitude sur certaines des portées est réduite. Certains modes commencent à se localiser mais la localisation n'est pas évidente sous charge de poids propre.



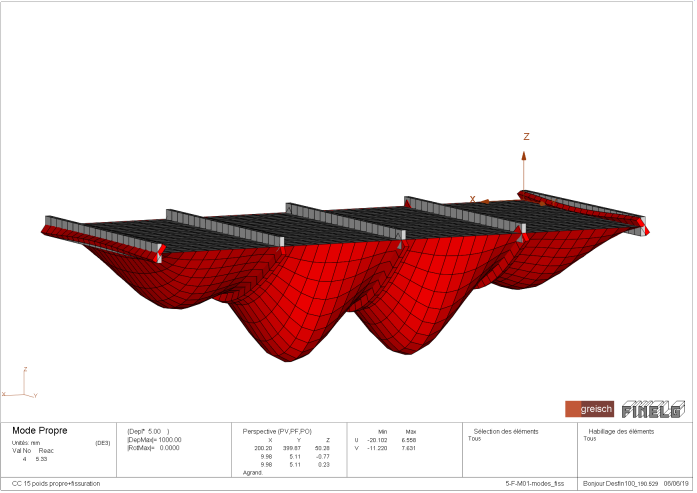
Mode 1



Mode 2

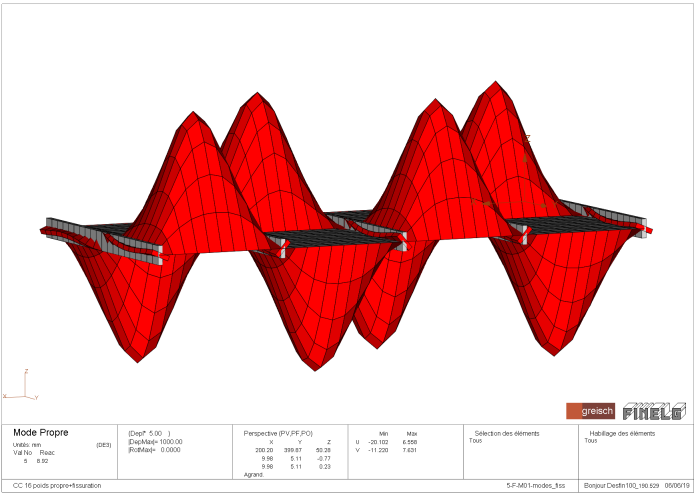


Mode 3



Mode 4

FIGURE 5.10 – Modes propres après un calcul dynamique non linéaire (modes 1 à 4)



Mode 5

FIGURE 5.11 – Modes propres après un calcul dynamique non linéaire (mode5)

	f [Hz]	M^* [kg]	K^* [Nm]
mode 1	4,79	7 835,2	7 116 513
mode 2	4,80	7 114,3	6 481 590
mode 3	5,06	8 898	8 996 510
mode 4	5,33	9 543,4	10 709 058
mode 5	8,92	8 680,5	27 254 949

TABLEAU 5.3 – Fréquences propres, masse généralisée et raideur généralisée pour le 5 premiers modes suite à un calcul dynamique non linéaire

5.2.4 Analyse dynamique non linéaire sous poids propre et sous les surcharges d'exploitation

Pour des bureaux, la norme NBN EN 1991-1-1 [13] prévoit une charge d'exploitation de 3000 N/m^2 . Sous ce chargement supplémentaire, le comportement non linéaire est plus marqué. La FIGURE 5.13 représente la courbe de chargement-déplacement pour deux nœuds de la dalle : le premier à mi-portée de la première portée (similaire au cas non linéaire sous charge permanente) et le deuxième à mi-portée de la portée adjacente (voir FIGURE 5.12). Le nœud ayant un plus grand déplacement à une courbe non linéaire alors que le second nœud a toujours une courbe linéaire même en ajoutant la surcharge.

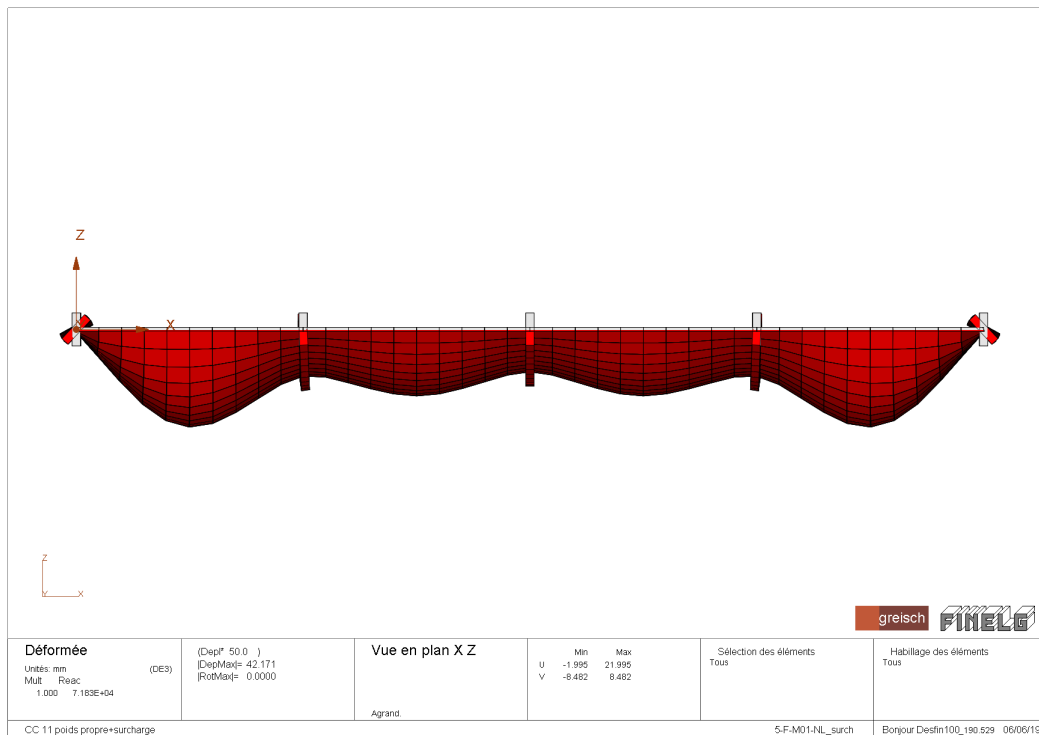


FIGURE 5.12 – Déformée sous poids propre

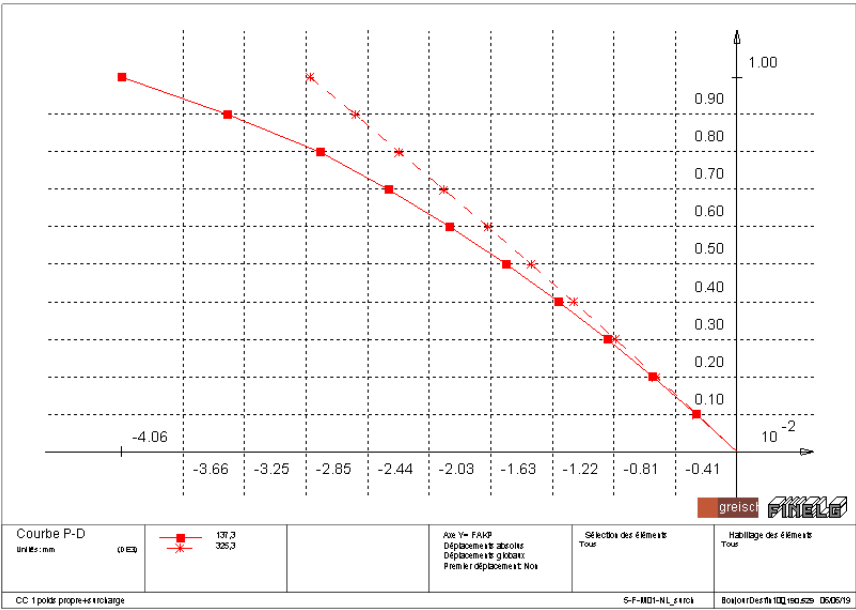
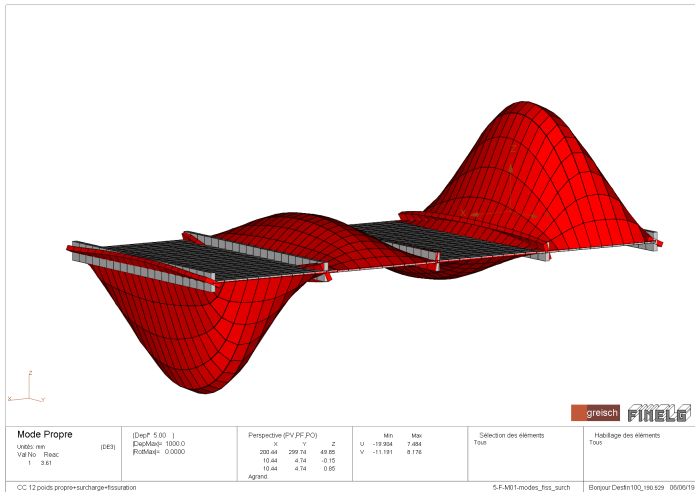


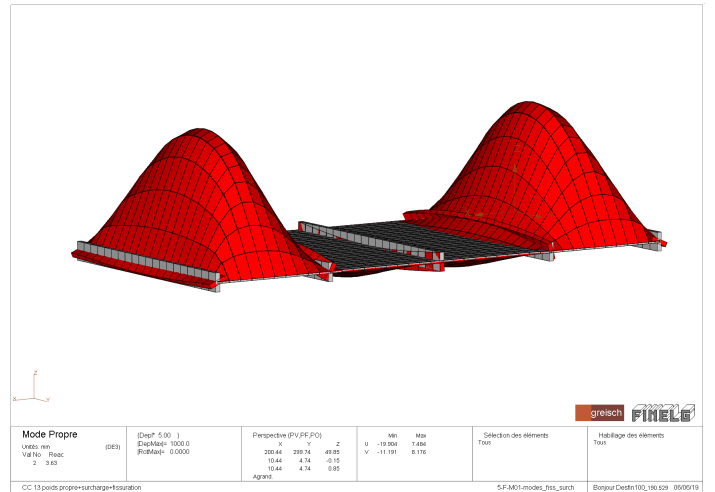
FIGURE 5.13 – Courbe chargement-déplacement

En ce qui concerne la forme des modes, la FIGURE 5.14 montre les 5 premiers modes dont la localisation est plus marquée. La localisation des modes s'accroît lorsque la charge augmente.

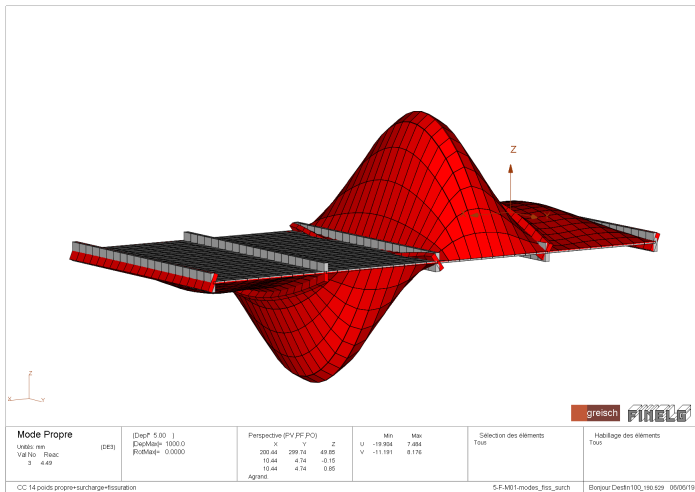
5.2. SIMULATIONS



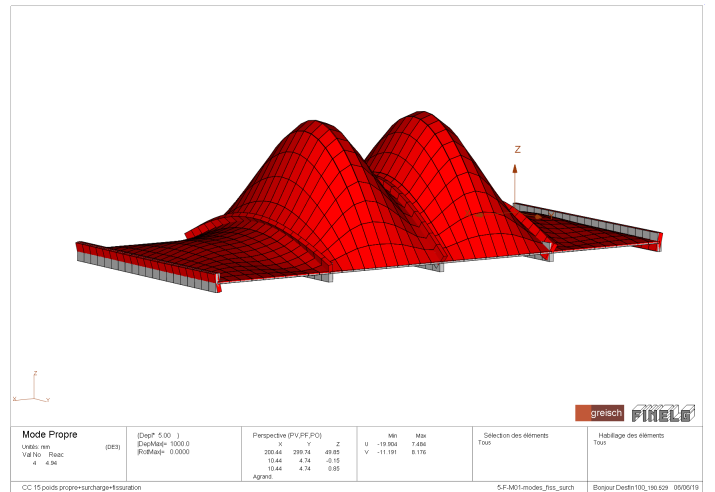
Mode 1



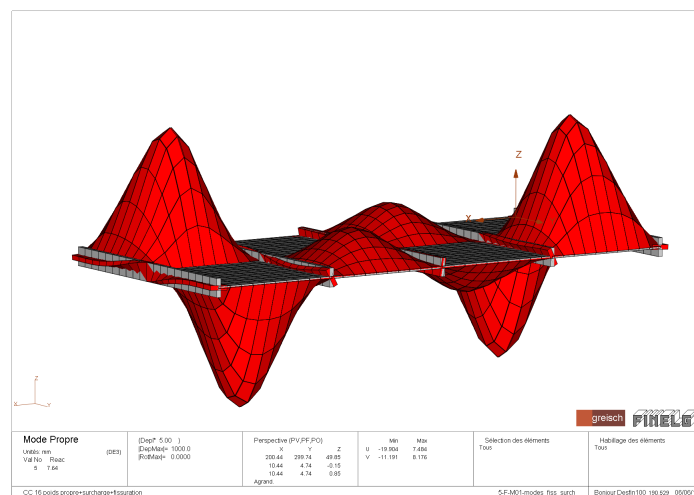
Mode 2



Mode 3



Mode 4



Mode 5

FIGURE 5.14 – Modes propres après un calcul dynamique non linéaire sous poids propre et surcharge d'exploitation (modes 1 à 5)

	f [Hz]	M^* [kg]	K^* [Nm]
mode 1	3,60	6 136,2	3 150 837
mode 2	3,63	5 936,9	3 090 830
mode 3	4,49	5 992,2	4 776 385
mode 4	4,94	6 749,6	6 496 000
mode 5	7,64	4 635,3	10 692 346

TABLEAU 5.4 – Fréquences propres, masse généralisée et raideur généralisée pour le 5 premiers modes suite à un calcul dynamique non linéaire sous poids propre et surcharge d'exploitation

5.3 Conclusions

La fissuration influence la forme des modes en réduisant leurs transmissions d'une portée à l'autre. Plus la charge appliquée est importante, plus la fissuration l'est également et plus la localisation apparaît. Si cela se produit, la masse modale en sort réduite. Les accélérations sont donc augmentées. Le calcul dynamique non linéaire permet de déterminer les propriétés modales dans la configuration fissurée et de prendre des dispositions afin de limiter la fissuration si nécessaire.

Chapitre 6

Exemple concret

6.1 Introduction

Les nouveaux bâtiments du CNIS (Centre national d'incendie et de secours) sont en cours de construction au Luxembourg. Ils regroupent aussi bien la caserne des pompiers que des salles de classe et de formation et des bureaux. Des tests vibratoires ont été réalisés sur deux planchers mixtes : une salle de gym et une salle de formation. Le rapport réalisé par M. Denoël [14] détaille la démarche et les résultats. Pour l'application, le plancher de la salle de gym est étudié.

6.2 Géométrie

Le plancher a des conditions d'appui complexes. Pour simplifier le problème, la géométrie du modèle étudié est à la FIGURE 6.1 et les propriétés sont au TABLEAU 6.1.

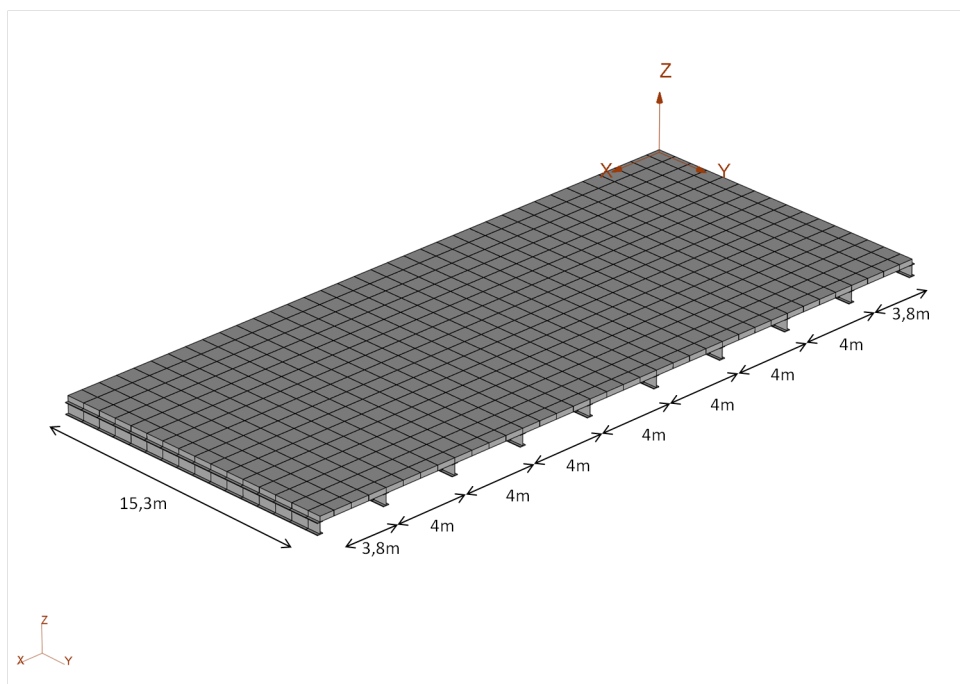


FIGURE 6.1 – Plancher mixte du CNIS

Dimensions		Propriétés de la dalle		Propriétés des poutres	
L_x	35,6 m	ρ_b	2500 kg/m ³	ρ_a	7850 kg/m ³
L_y	15,3 m	E_b	31 000 MPa	E_a	210 000 MPa
p	9	ν_b	0,2	ν_a	0,3
-	-	h	16 cm	HEA	600
-	-	Béton	C30/37	Acier	S235

TABLEAU 6.1 – Propriétés du plancher du CNIS

6.3 Tests

L'appareil de vibrations ("shaker") est composé d'une masse de 230 kg réalisant des mouvements harmoniques aux fréquences demandées et dont l'amplitude maximale est de 1mm. Les tests ont été réalisés de la manière suivante :

1. Première approximation des fréquences propres en sautant à différentes positions sur le planchers.
2. Confirmation de l'approximation suite aux tests avec le shaker.
3. Pour chaque mode, les paramètres sont calculés :
 - amplitudes modales
 - l'accélération a_{RMS}
 - la masse généralisée, l'amortissement et fréquence propre

Voici les résultats obtenus nous intéressant. Vu la simplification effectuée au niveau du modèle, il est compliqué de comparer directement ces valeurs avec les résultats de Finelg ou de Matlab.

Mode	f [Hz]	M^* [kg]
1	5,56	43 330
2	6,27	64 780
3	6,93	44 710
4	8,69	35 350
5	10,71	83 470
6	11,19	61 840

TABLEAU 6.2 – Fréquences propres et masse généralisée du plancher du CNIS

6.4 Résultats de Finelg et du code Matlab

Les fréquences et masses généralisées calculées via les deux méthodes sont au TABLEAU 6.3 et la forme des modes à la FIGURE 6.2. La forme des modes est similaire dans les deux cas.

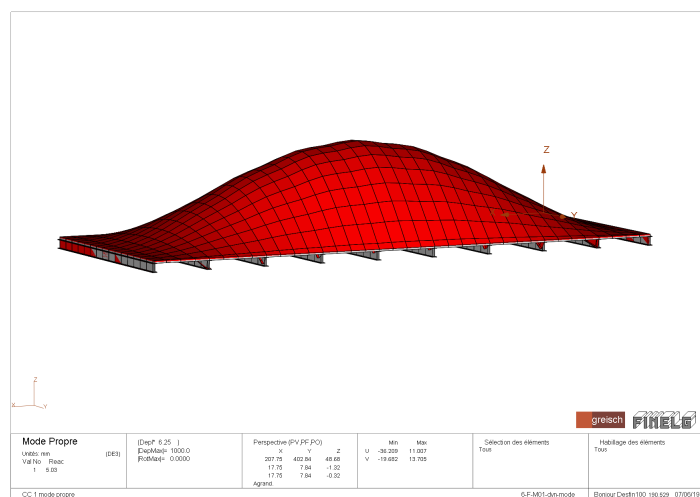
Le rapport de raideur vaut pour ce plancher $\frac{E_a I_a / L_y}{D} = 1,75$. Afin que les résultats se rapprochent du plancher réel, les termes de transport sont ajoutés à l'inertie pour tenir compte du décalage entre le centre de gravité de la dalle et des poutres. Dans ce cas, le rapport s'élève à 8. Cependant, ce n'est pas assez élevé pour que le comportement des poutres impose une forme de modes où celles-ci se déforment peu, comme montré au cas 1 du chapitre 4. Les modes propres ont donc l'allure de celle d'une plaque, c'est-à-dire une demi-onde dans la direction x pour le mode 1, deux demi-ondes pour le mode 2, etc.

Dans ces conditions, il a été démontré au chapitre 4 que le décalage d'une des poutre influence peu la forme des modes et par conséquent, la localisation des modes n'a pas ou peu lieu. La section suivante étudie le décalage de la poutre à mi-portée de la dalle.

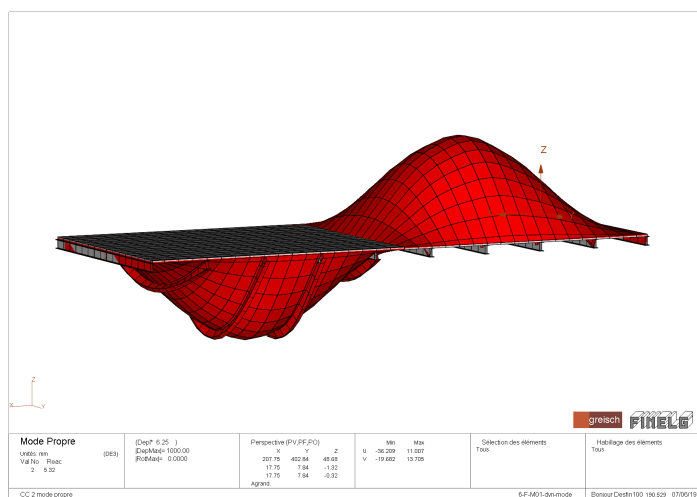
Mode	Matlab		Finelg	
	f [Hz]	M^* [kg]	f [Hz]	M^* [kg]
1	6	58 305	5,02	49 804
2	6,1	59 181	5,3	51 877
3	6,5	58 146	5,96	53 383
4	7,2	58 468	7,08	50 906
5	8,3	57 816	8,76	51 356
6	10	59 375	11	51 111

TABLEAU 6.3 – Fréquences propres et masses généralisées - CNIS

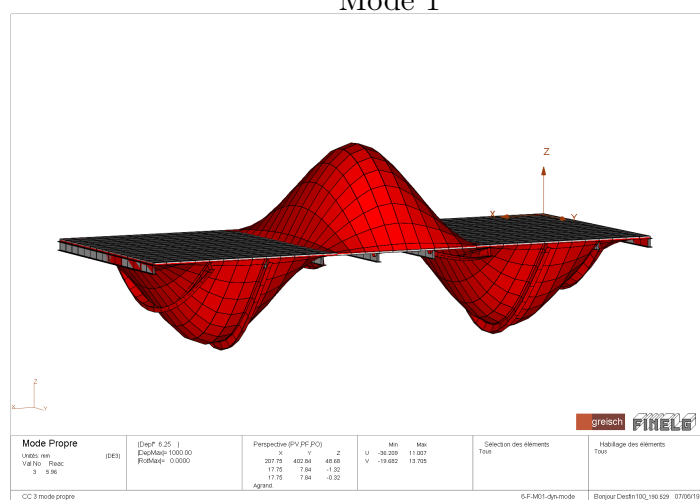
6.4. RÉSULTATS DE FINELG ET DU CODE MATLAB



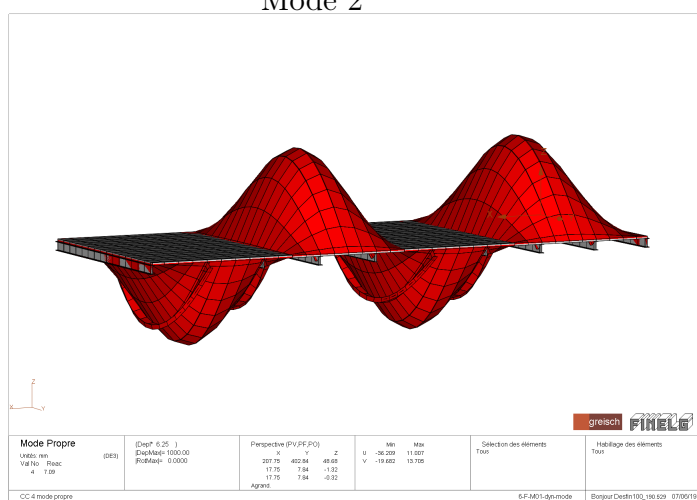
Mode 1



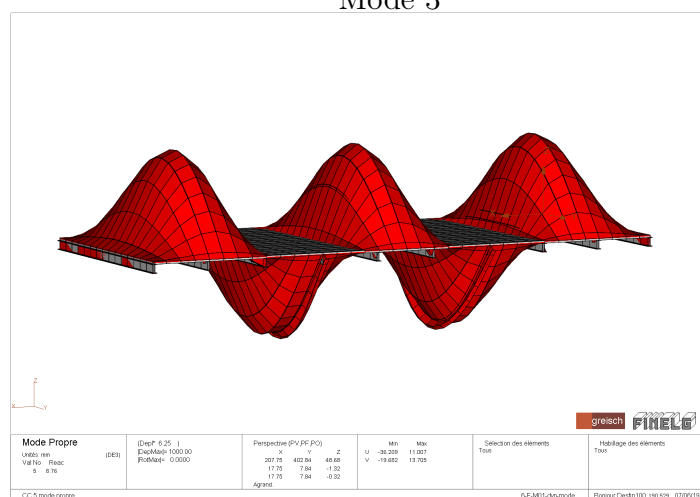
Mode 2



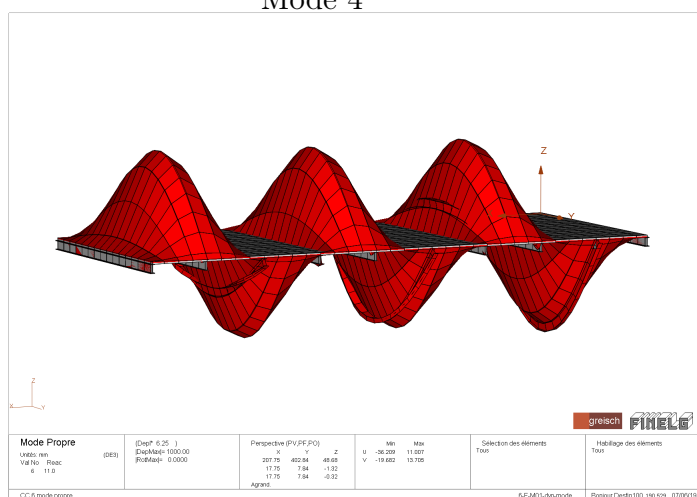
Mode 3



Mode 4



Mode 5



Mode 6

FIGURE 6.2 – Formes des 6 premiers modes propres

6.5 Décalage de la poutre à mi-portée

La poutre décalée est celle encadrée en rouge à la FIGURE suivante. C'est celle qui engendre la plus grande localisation des deux premiers modes.

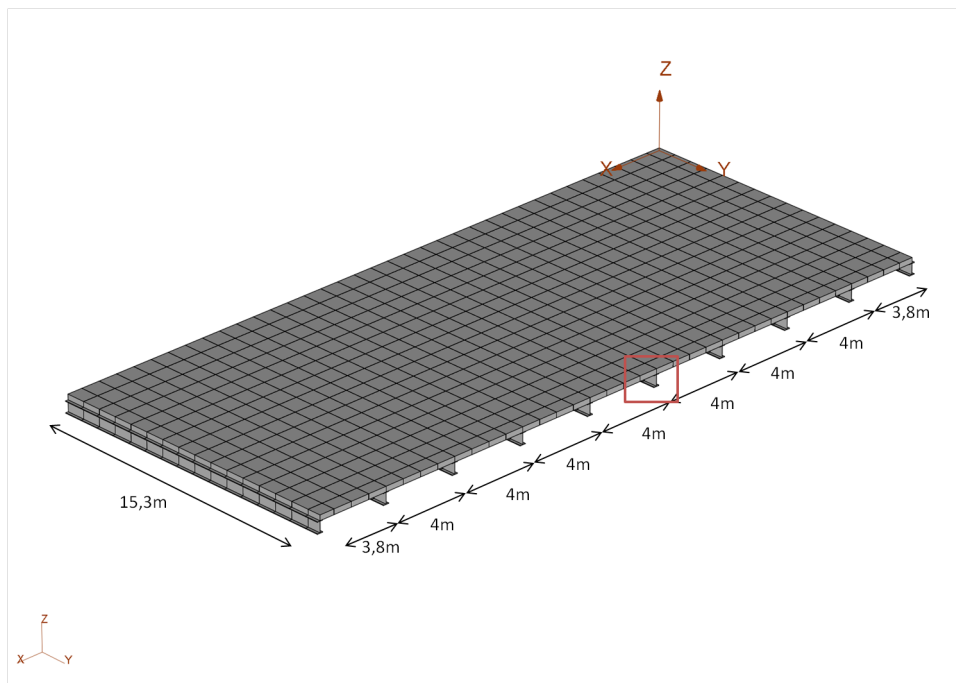


FIGURE 6.3 – Sélection de la poutre décalée

Le décalage est fixé à 0,4m et les modes propres correspondants sont ceux à la FIGURE 6.5¹. Vu le cas intermédiaire au niveau du rapport de raideur entre les poutres et la dalle par rapport au différents cas étudiés, la localisation a lieu mais de manière assez faible. Elle est plus importante pour les deux premiers modes et décroît ensuite lorsque le mode augmente.

Mode	f [Hz]	M^* [kg]
1	5,93	42 229
2	6,08	39 740
3	6,51	47 308
4	7,11	51 984
5	8,38	54 914
6	9,91	56 484

TABLEAU 6.4 – Fréquences propres et masse généralisée du plancher du CNIS où une des poutres est décalée de 0,4m

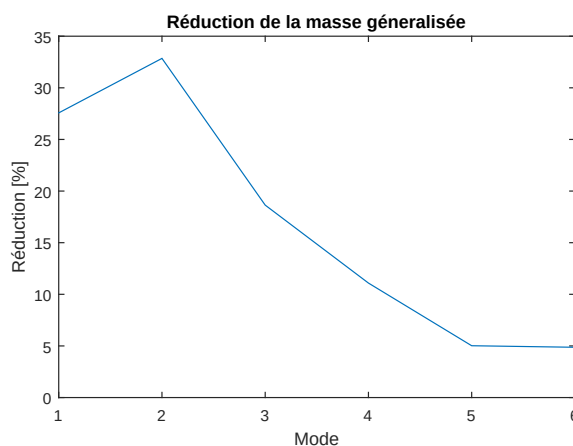


FIGURE 6.4 – Réduction de la masses généralisées

1. La nomination "plancher parfait" signifie le cas où aucune des poutres n'est décalée.

6.5. DÉCALAGE DE LA POUTRE À MI-PORTÉE

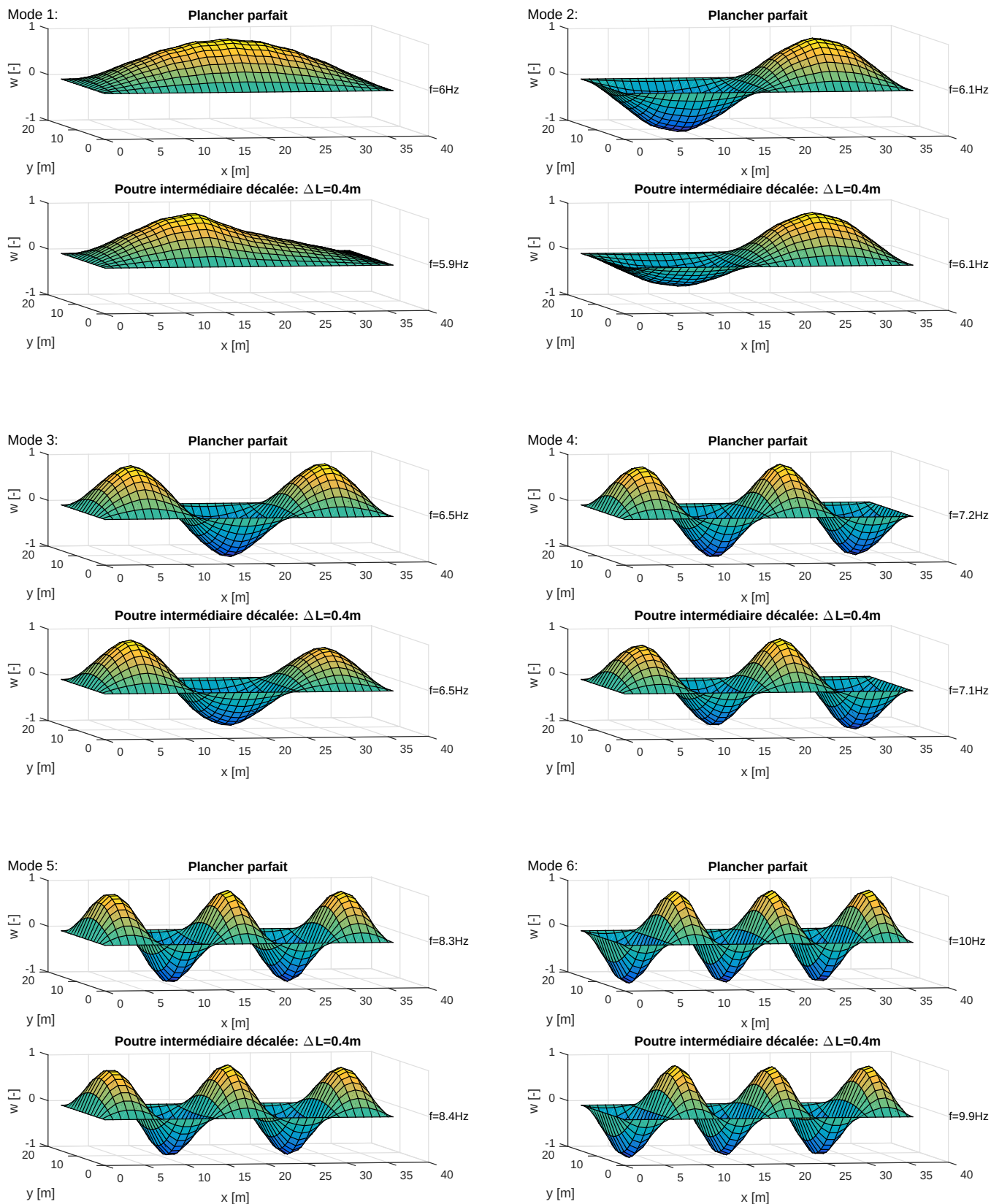


FIGURE 6.5 – Évolution de la forme des modes si une des poutre est décalée de 0,4m

6.6 Prise en compte de la fissuration

Après un calcul non linéaire sous charge de poids propre, le calcul des modes propres donne les caractéristiques au TABLEAU suivant. Les raideurs généralisées diminuent, ainsi que les masses généralisées. La réduction de la raideur étant plus importante que celle de la masse, les fréquences propres diminuent également.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} \quad (6.1)$$

Malgré la réduction de la masse modale, celle-ci reste élevée. La forme des modes évolue donc peu et aucune localisation des modes n'est observée.

Mode	Linéaire			Non linéaire		
	f [Hz]	M^* [kg]	K^* [Nm]	f [Hz]	M^* [kg]	K^* [Nm]
1	5,02	49 804	49 665 896	4,93	46 244,8	44 434 797
2	5,3	51 877	57 951 276	5,04	50 943,7	51 136 228
3	5,96	53 383	74 947 105	5,33	47 817,7	53 676 572
4	7,08	50 906	100 923 160	5,89	43 526,8	59 624 396
5	8,76	51 356	155 552 030	6,85	48 537,2	90 014 902
6	11	51 111	244 189 140	8,39	42 405,7	117 810 320

TABLEAU 6.5 – Comparaison des résultats du calcul dynamique linéaire et non linéaire

Cependant, lors des tests, la chape n'était pas encore en place, rajoutant un poids supplémentaire de 2,75 kN/m². Ensuite, pour une salle de sport, la charge d'exploitation est de 5 kN/m². Dans ces conditions, le mode 3 commence à se localiser. L'amplitude de la portée du milieu est légèrement réduite. Cependant, vu l'épaisseur importante de la dalle, la localisation est assez faible.

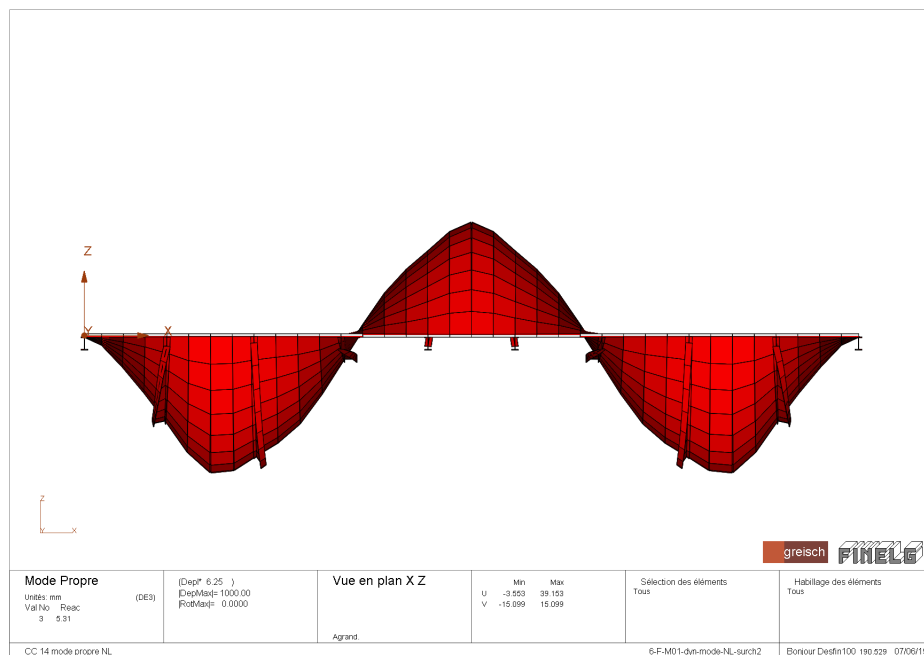


FIGURE 6.6 – Forme du mode 3 sous poids propre et charge d'exploitation

Chapitre 7

Conclusion générale

Le but de ce travail était d'analyser le comportement dynamique des planchers mixtes et d'étudier les paramètres influençant le confort des occupants. Pour ce faire, deux phénomènes en particulier ont été testés :

- le décalage d'une des poutres menant à une irrégularité des portées,
- la fissuration du béton.

Ces deux phénomènes pouvant mener à la localisation des modes propres engendrent par la même occasion la diminution de la masse généralisée de ceux-ci. Cela a pour conséquence d'augmenter les accélérations transversales des vibrations du planchers car l'accélération est inversement proportionnelle à la masse généralisée. Par conséquent, lors du calcul des modes propres de manière linéaire et sans imposer de décalage possible pouvant apparaître sur chantier, les accélérations obtenues sont inférieures à celles présentes en réalité.

L'étude de l'influence du décalage d'une des poutres servant d'appui à la dalle a permis d'obtenir les conditions les plus adaptées pour empêcher que les modes propres d'un plancher se localisent. Les conditions optimales sont les suivantes :

- un faible nombre de portées avec une grande entre-distance entre les poutres,
- des poutres de faibles inerties,
- des poutres de grandes longueurs,
- des portées constantes.

La prise en compte du comportement non linéaire du béton nous apprend que la fissuration réduit de manière considérable la raideur de la dalle mais également la masse généralisée. En fonction des charges appliquées sur la dalle, la fissuration est plus ou moins important et la forme des modes propres est plus ou moins localisée. De plus, la diminution de raideur étant plus importante que celle de la masse, les valeurs des fréquences propres diminuent, ce qui les rapproche de la fréquence de sollicitations de piétons.

Le décalage d'une poutre ainsi que la fissuration du béton sont donc deux phénomènes à ne pas oublier lors du calcul des modes propres d'une structure car ils peuvent fortement influencer les valeurs de la masse généralisée. Les accélérations calculées seront donc plus faibles que celles réellement présentes et des problèmes de confort suite aux vibrations pourront apparaître.

Annexe A

Résolution de l'équation du mouvement

L'équation différentielle à résoudre est la suivante :

$$\ddot{q}(t) + 2\omega_1\xi\dot{q}(t) + \omega_1^2q(t) = \frac{\bar{p}}{m} \sin(\bar{\omega}t) \quad (\text{A.1})$$

$$\text{où } \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ est la pulsation propre du système,} \\ \xi = \frac{c}{2m\omega_1} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \text{ est le coefficient d'amortissement,} \\ \frac{\bar{p}}{m} \sin(\bar{\omega}t) \text{ est la force dynamique appliquée d'amplitude } \frac{\bar{p}}{m} \text{ et de pulsation } \bar{\omega}. \end{cases}$$

La solution de cette équation différentielle se décompose en une solution homogène q_h représentant la réponse transitoire et une solution particulière q_p équivalente à la réponse stationnaire.

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t) \quad (\text{A.2})$$

La solution homogène q_h à l'équation (A.3) représentant la réponse transitoire va s'effacer après un certain laps de temps égal au temps de mémoire du système. Nous allons donc nous focaliser sur la solution particulière q_p à l'équation (A.4).

$$q_h(t) = \left[A \cos\left(\omega_1 \sqrt{1 - \xi^2} t\right) + B \sin\left(\omega_1 \sqrt{1 - \xi^2} t\right) \right] e^{-\omega_1 \xi t} \quad (\text{A.3})$$

$$q_p(t) = C \cos(\bar{\omega}t) + D \sin(\bar{\omega}t) \quad (\text{A.4})$$

où A , B , C et D sont des constantes d'intégration.

Les constantes C et D sont déterminées en introduisant (A.4) dans (1.2).

$$\begin{aligned} \left(-C\bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega}t) - D\bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega}t) \right) + 2\omega_1\xi \left(-C\bar{\omega} \sin(\bar{\omega}t) + D\bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t) \right) \\ + \omega_1^2 \left(C \cos(\bar{\omega}t) + D \sin(\bar{\omega}t) \right) = \frac{\bar{p}}{m} \sin(\bar{\omega}t) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Puisque l'équation est valable en tout instant t , elle l'est aussi valable lorsque $\sin(\bar{\omega}t) = 0$ et lorsque $\cos(\bar{\omega}t) = 0$, ce qui donne les 2 relations suivantes :

$$\begin{aligned} -C\bar{\omega}^2 + 2\omega_1\xi D\bar{\omega} + C\omega_1^2 &= 0 \\ -D\bar{\omega}^2 + 2\omega_1\xi C\bar{\omega} + D\omega_1^2 &= \frac{\bar{p}}{m} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Ces 2 équations permettent de définir les 2 constantes d'intégration C et D .

$$\begin{aligned} C &= \frac{\bar{p}}{k} \frac{-2\xi \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}}{\left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2} \\ D &= \frac{\bar{p}}{k} \frac{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

La solution stationnaire s'écrit donc

$$q_p = \frac{\bar{p}}{k} \frac{\left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right) \sin(\bar{\omega}t) - 2\xi \frac{\bar{\omega}}{\omega_1} \cos(\bar{\omega}t)}{\left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2} \quad (\text{A.8})$$

En réécrivant cette solution sous la forme suivante, nous faisons apparaître l'amplitude r et la phase ϕ .

$$q_p = r \sin(\bar{\omega}t - \phi) \quad (\text{A.9})$$

En développant cette relation, nous obtenons :

$$r = \frac{\frac{\bar{p}}{k}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2}} \quad (\text{A.10})$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{2\xi \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right)^2} \right) \quad (\text{A.11})$$

Le coefficient r nous permet de remarquer que l'amplitude de la réponse dépend du produit de la réponse statique et d'un facteur d'amplification qui est fonction de $\frac{\bar{\omega}}{\omega_1}$ et de l'amortissement ξ . La réponse évolue comme représenté à la FIGURE 1.2 en fonction de ces paramètres.

Annexe B

Cas 3 - Poutres raides - 4 portées de 5m - $L_y = 5\text{m}$

B.1 Caractéristiques du plancher

Les caractéristiques du plancher de type "cas 3" sont les suivantes.

Dimensions		Propriétés de la dalle		Propriétés des poutres	
L_x	20 m	ρ_b	2500 kg/m ³	ρ_a	7850 kg/m ³
L_y	5 m	E_b	31 000 MPa	E_a	210 000 MPa
p	4	ν_b	0,2	ν_a	0,3
-	-	h	7 cm	IPE	600

TABLEAU B.1 – Propriétés du plancher calculé - cas 3

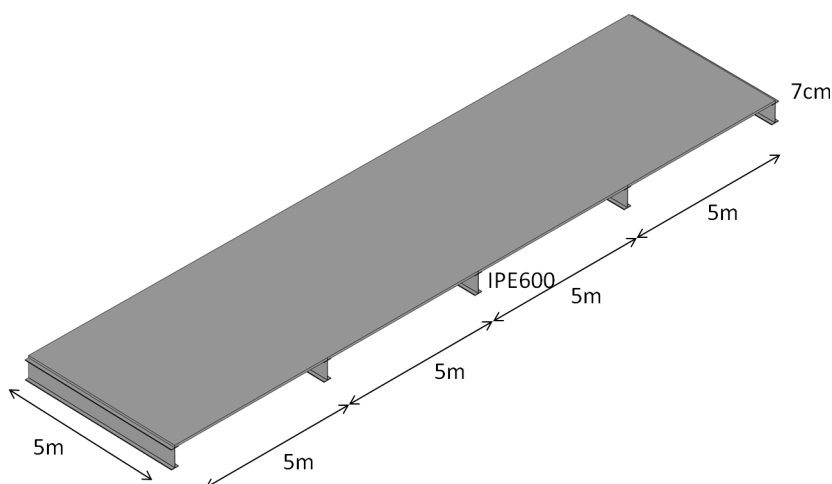


FIGURE B.1 – Plancher cas 3

B.2 Détermination de m_{max} ($n_{max} = 1$)

L'évolution de l'erreur relative en fonction du nombre de modes pris en compte se trouve à la FIGURE suivante.

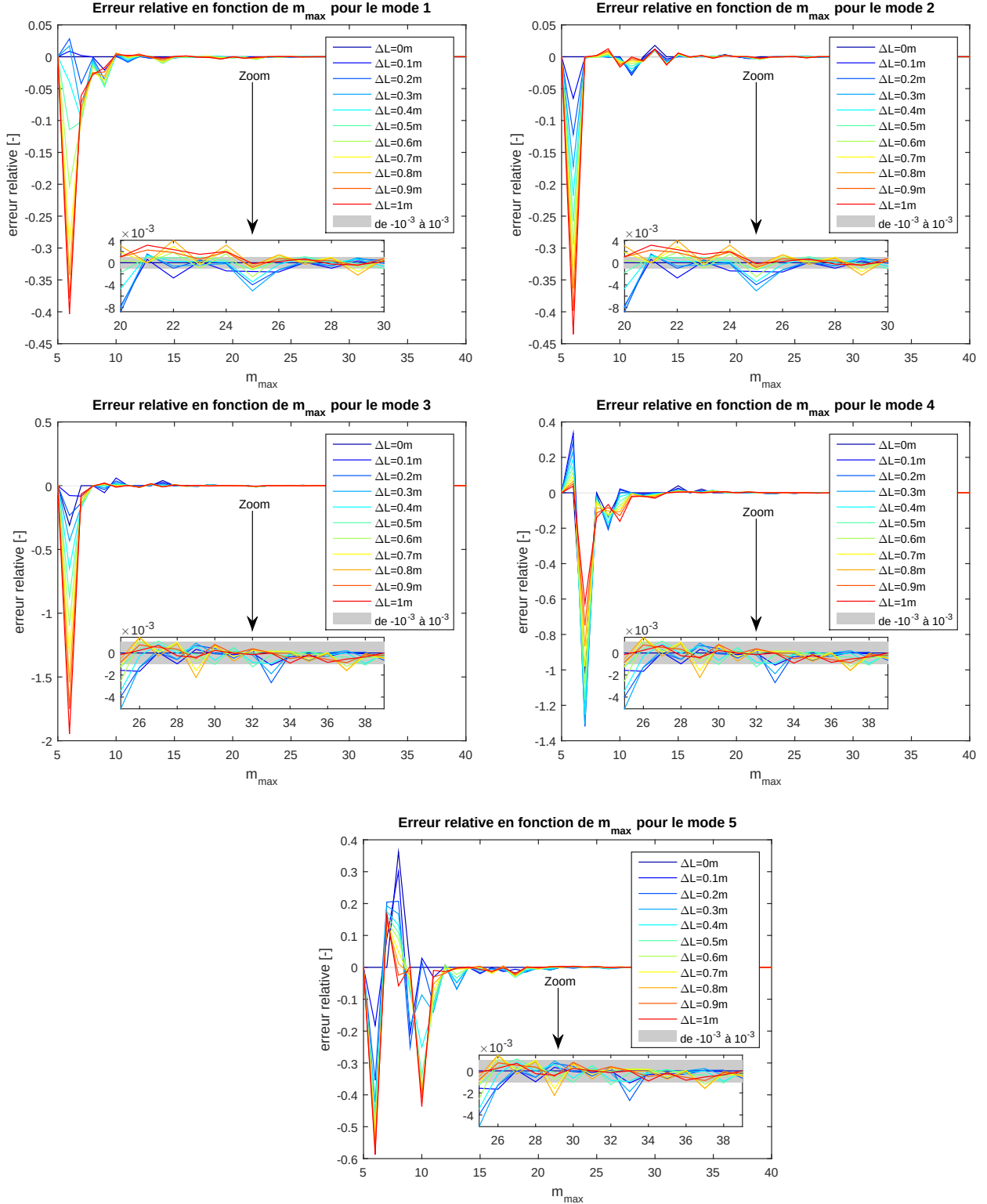


FIGURE B.2 – Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{max} = 1$ - cas 3

B.3 Comparaison des résultats avec ceux de Finelg

B.3.1 Erreur relative sur les valeurs des masses généralisées et des fréquences

Le TABLEAU B.2 reprend les valeurs des fréquences propres ainsi que les masses généralisées pour les 5 premiers modes propres en fonction du décalage de la poutre située à mi-portée.

ΔL [m]	Mode	Matlab		Finelg	
		f [Hz]	M [kg]	f [Hz]	M [kg]
0	1	9,1	4375	9,3	4199,7
	2	9,6	2545	9,7	2436,3
	3	10,7	4092,7	10,9	3951,1
	4	12,1	2326,6	12,2	2233,6
	5	22,8	4836,9	23,4	4099
0,2	1	9,1	2888,5	9,2	2725,8
	2	9,6	1742,5	9,7	1642,5
	3	10,7	2672	10,8	2453,8
	4	12,2	1536,4	12,3	1444,1
	5	22,5	2199,6	23,3	2182,4
0,4	1	9	2223,2	9,1	2114
	2	9,6	1441,3	9,7	1422,4
	3	10,5	2043	10,6	1927,4
	4	12,5	1260,7	12,4	1246,7
	5	21,8	1605,5	22,9	1474,6

TABLEAU B.2 – Fréquences propres et masses généralisées - cas 3

B.3.2 Comparaison de la forme des modes

La FIGURE suivante compare les résultats donnés par le code Matlab et le logiciel Finelg.

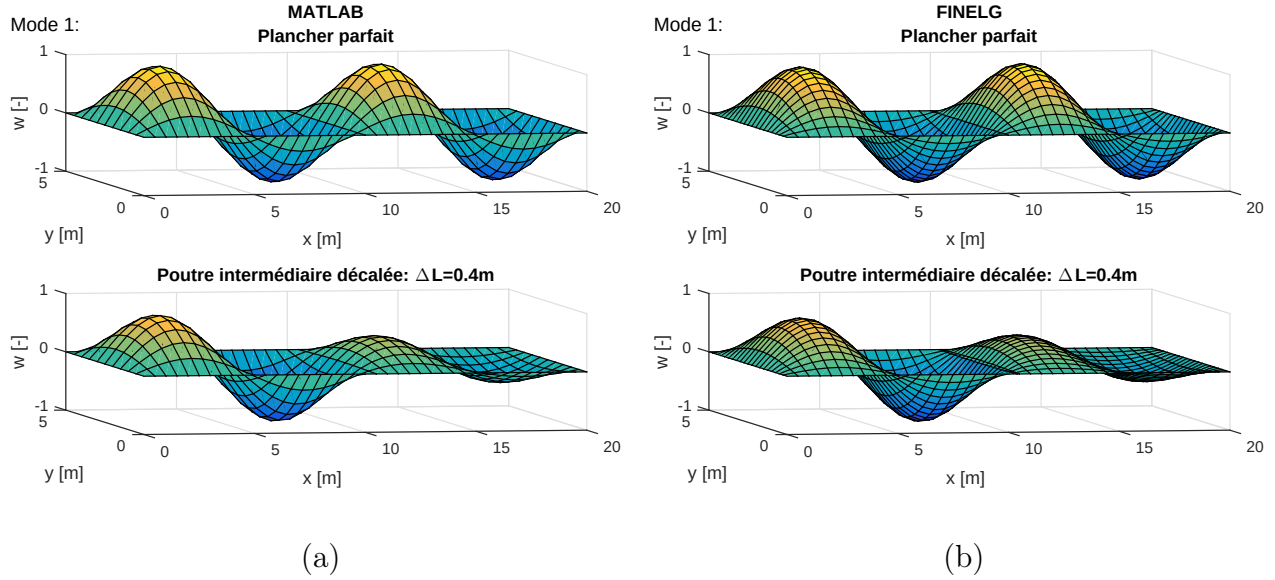


FIGURE B.3 – Évolution de la forme du 1^{er} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 3

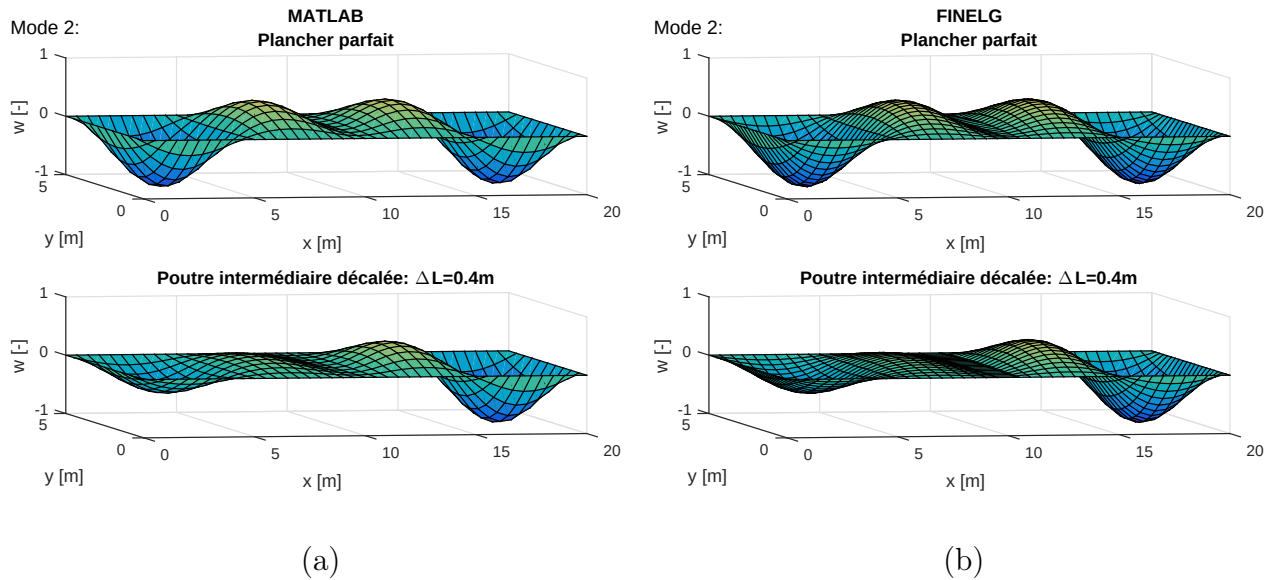


FIGURE B.4 – Évolution de la forme du 2^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 3

Annexe C

Cas 4 - Dalle raide - 4 portées de 5m - $L_y = 5\text{m}$

C.1 Caractéristiques du plancher

Les caractéristiques du plancher de type "cas 4" sont les suivantes.

Dimensions		Propriétés de la dalle		Propriétés des poutres	
L_x	20 m	ρ_b	2500 kg/m ³	ρ_a	7850 kg/m ³
L_y	5 m	E_b	31 000 MPa	E_a	210 000 MPa
p	4	ν_b	0,2	ν_a	0,3
-	-	h	15 cm	IPE	270

TABLEAU C.1 – Propriétés du plancher calculé - cas 4

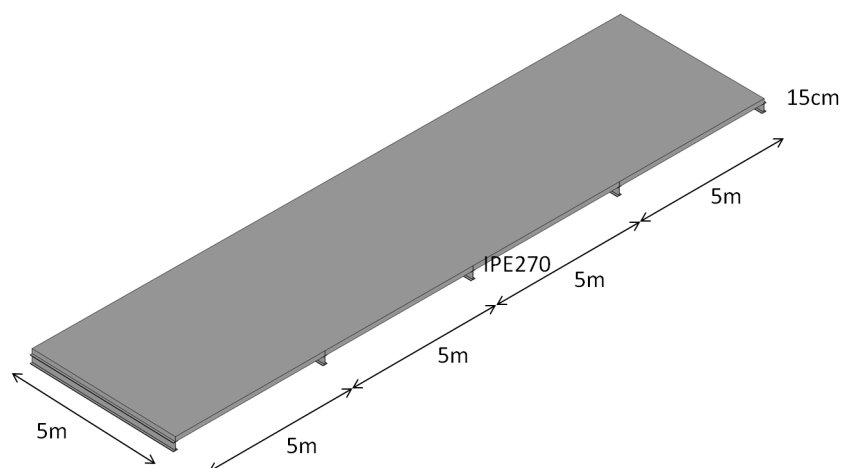


FIGURE C.1 – Plancher cas 4

C.2 Détermination de m_{max} ($n_{max} = 1$)

L'évolution de l'erreur relative en fonction du nombre de modes pris en compte se trouve à la FIGURE suivante.

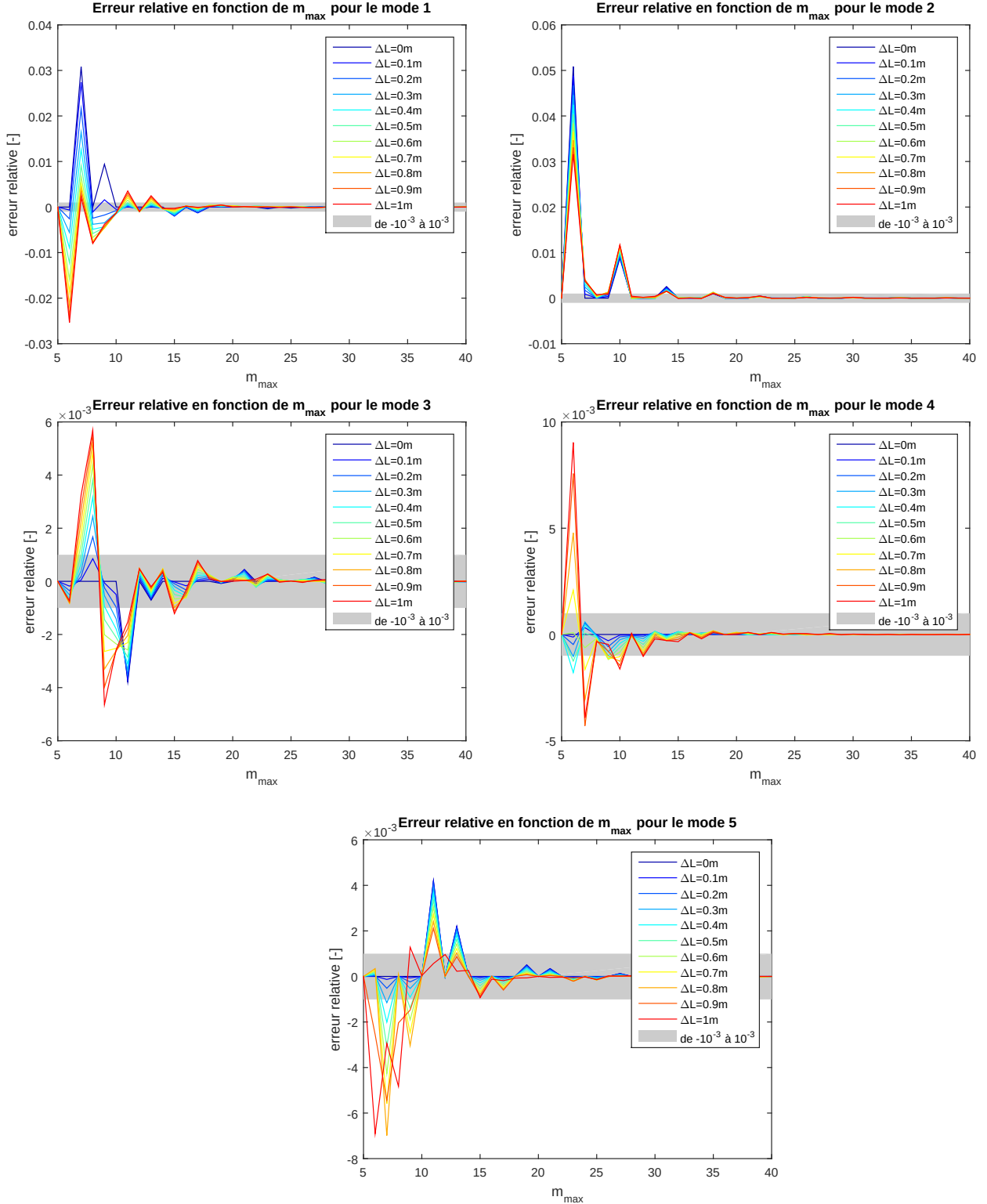


FIGURE C.2 – Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{max} = 1$ - cas 4

C.3 Comparaison des résultats avec ceux de Finelg

C.3.1 Erreur relative sur les valeurs des masses généralisées et des fréquences

Le TABLEAU C.2 reprend les valeurs des fréquences propres ainsi que les masses généralisées pour les 5 premiers modes propres en fonction du décalage de la poutre située à mi-portée.

ΔL [m]	Mode	Matlab		Finelg	
		f [Hz]	M [kg]	f [Hz]	M [kg]
0	1	11,4	9924,9	11,4	9829,1
	2	13,1	10192	13,1	10049,2
	3	15,9	9069,2	16	8853,5
	4	19,5	9375	19,8	9009,7
	5	25,3	9027,5	25,9	8580,4
0,2	1	11,4	9637,3	11,5	9558,3
	2	13,1	9817,5	13,1	9687,5
	3	15,9	8822,8	16	8616
	4	19,6	9188,4	19,9	8851,5
	5	25,3	9022,2	25,9	8772,5
0,4	1	11,4	9321,8	11,4	9250,4
	2	13,1	9473,9	13,2	9354,6
	3	15,9	5898,8	16	8379
	4	19,6	9017,7	19,9	8692,5
	5	25,3	9008,2	26	8646,4

TABLEAU C.2 – Fréquences propres et masses généralisées - cas 4

C.3.2 Comparaison de la forme des modes

La FIGURE suivante compare les résultats donnés par le code Matlab et le logiciel Finelg.

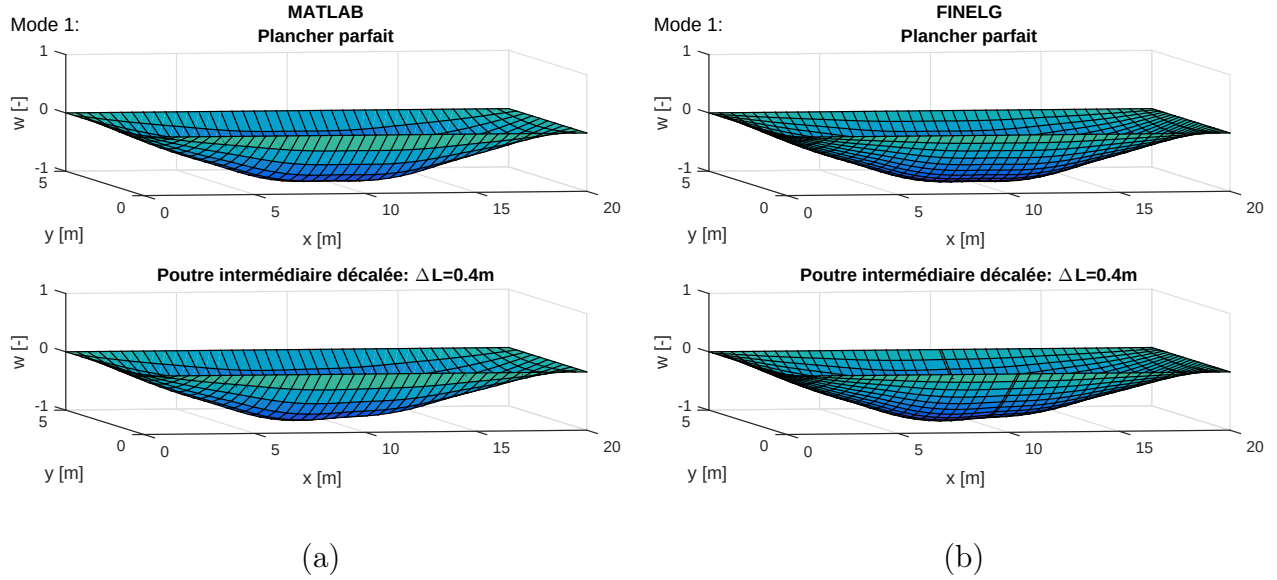


FIGURE C.3 – Évolution de la forme du 1^{er} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 4

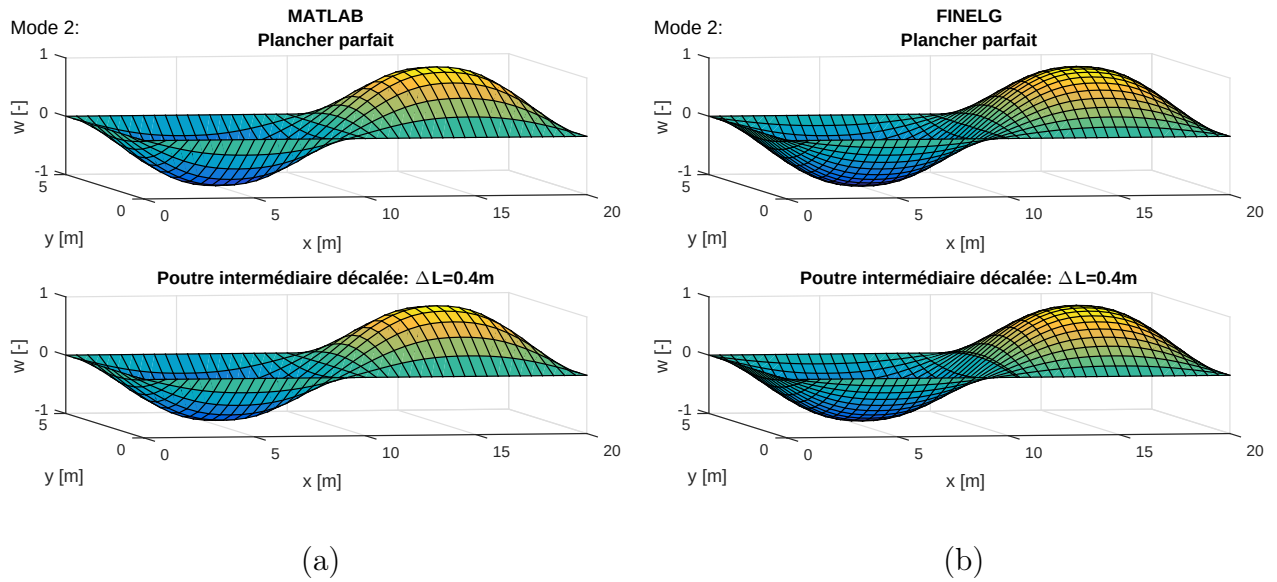


FIGURE C.4 – Évolution de la forme du 2^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 4

Annexe D

Cas 5 - Poutres raides - 2 portées de 5m - $L_y = 10\text{m}$

D.1 Caractéristiques du plancher

Les caractéristiques du plancher de type "cas 5" sont les suivantes.

Dimensions		Propriétés de la dalle		Propriétés des poutres	
L_x	10 m	ρ_b	2500 kg/m ³	ρ_a	7850 kg/m ³
L_y	10 m	E_b	31 000 MPa	E_a	210 000 MPa
p	2	ν_b	0,2	ν_a	0,3
-	-	h	7cm cm	IPE	600

TABLEAU D.1 – Propriétés du plancher calculé - cas 5

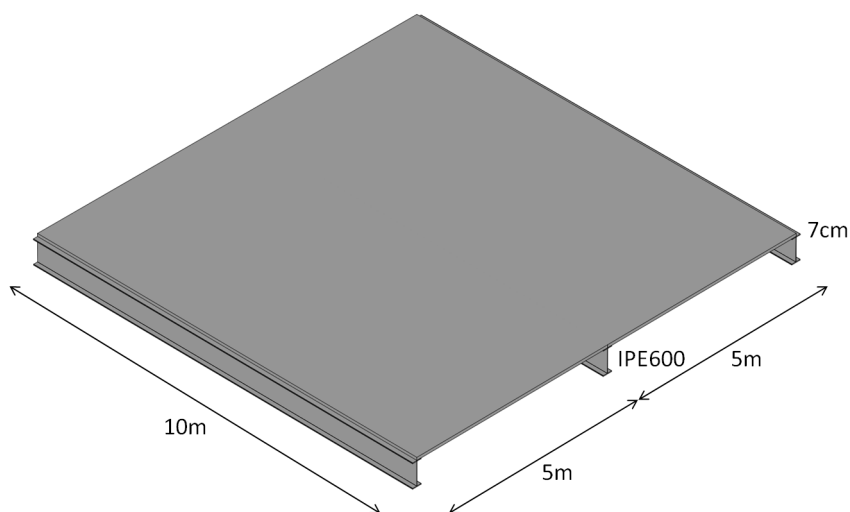


FIGURE D.1 – Plancher cas 5

D.2 Détermination de m_{max} ($n_{max} = 1$)

L'évolution de l'erreur relative en fonction du nombre de modes pris en compte se trouve à la FIGURE suivante.

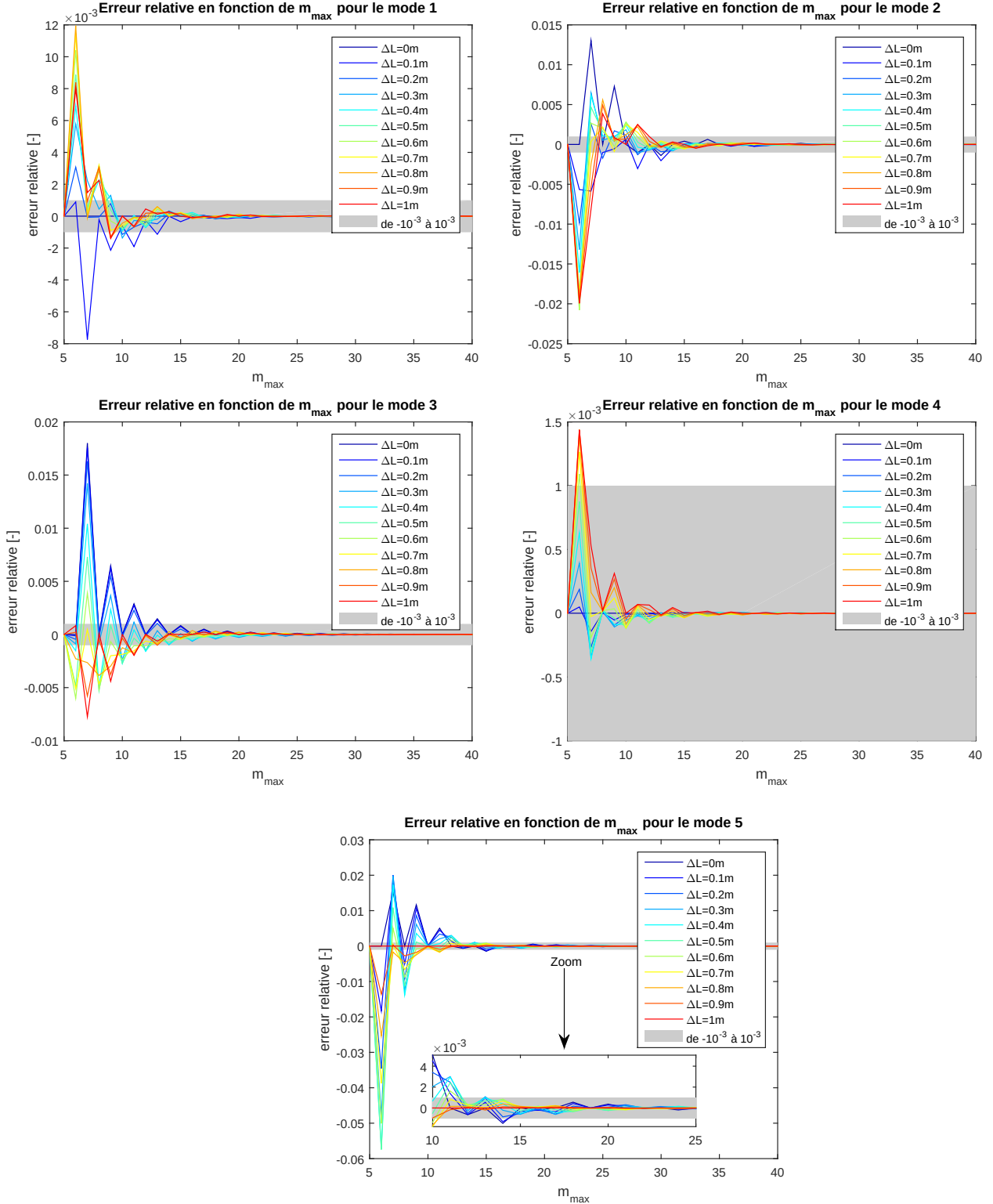


FIGURE D.2 – Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{max} = 1$ - cas 5

D.3 Comparaison des résultats avec ceux de Finelg

D.3.1 Erreur relative sur les valeurs des masses généralisées et des fréquences

Le TABLEAU D.2 reprend les valeurs des fréquences propres ainsi que les masses généralisées pour les 5 premiers modes propres en fonction du décalage de la poutre située à mi-portée.

ΔL [m]	Mode	Matlab		Finelg	
		f [Hz]	M [kg]	f [Hz]	M [kg]
0	1	5,7	4375	5,84	4185,1
	2	6	5566,1	6,1	5480,4
	3	9,1	4375	9,5	4078,2
	4	10,7	4101,5	11	3858,7
	5	12,9	4073,3	13,3	3890,6
0,2	1	5,5	2574,2	5,64	2460,3
	2	6,2	2587,4	6,3	2447,1
	3	9	3059,9	9,4	2807
	4	10,8	2751,4	11,2	2528,2
	5	12,8	4024,2	13,3	4009,3
0,4	1	5,3	2596,3	5,4	2519,7
	2	6,5	2424,4	6,6	2335,1
	3	8,4	2684,9	9,1	2476,3
	4	11,2	2260,3	11,5	2068,5
	5	12,7	3900,4	13,3	4075,1

TABLEAU D.2 – Fréquences propres et masses généralisées - cas 5

D.3.2 Comparaison de la forme des modes

La FIGURE suivante compare les résultats donnés par le code Matlab et le logiciel Finelg.

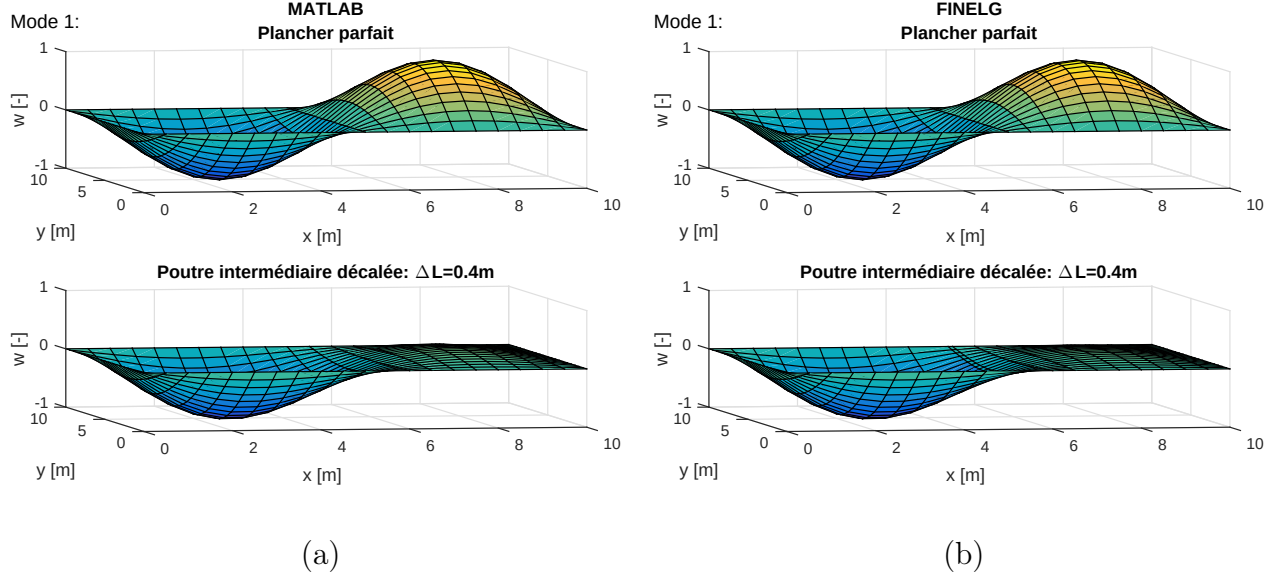


FIGURE D.3 – Évolution de la forme du 1^{er} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 5

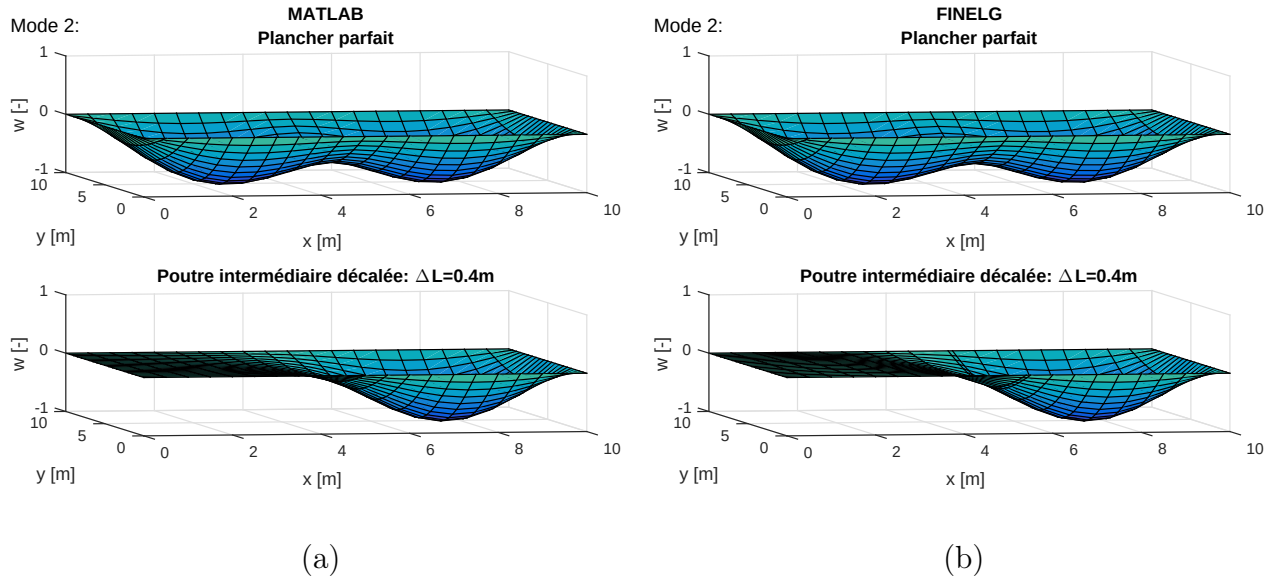


FIGURE D.4 – Évolution de la forme du 2^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 5

Annexe E

Cas 6 - Dalle raide - 2 portées de 5m - $L_y = 10\text{m}$

E.1 Caractéristiques du plancher

Les caractéristiques du plancher de type "cas 6" sont les suivantes.

Dimensions		Propriétés de la dalle		Propriétés des poutres	
L_x	10 m	ρ_b	2500 kg/m ³	ρ_a	7850 kg/m ³
L_y	10 m	E_b	31 000 MPa	E_a	210 000 MPa
p	2	ν_b	0,2	ν_a	0,3
-	-	h	15cm	IPE	270

TABLEAU E.1 – Propriétés du plancher calculé - cas 6

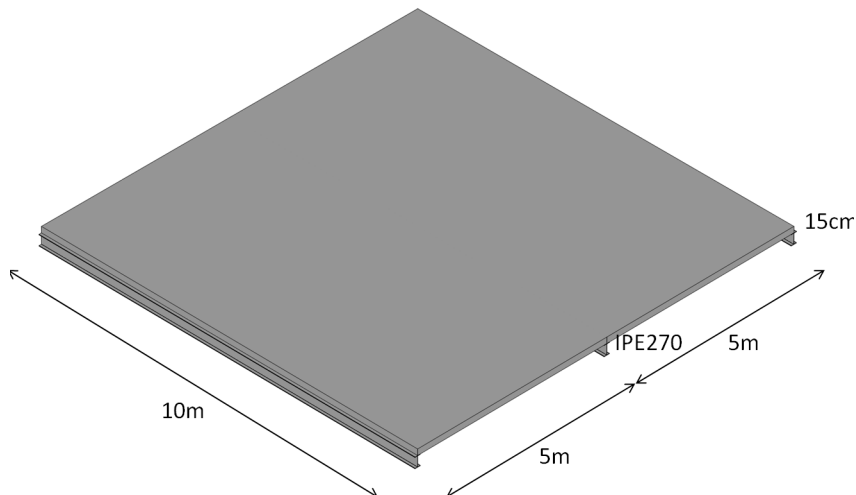


FIGURE E.1 – Plancher cas 6

E.2 Détermination de m_{max} ($n_{max} = 1$)

L'évolution de l'erreur relative en fonction du nombre de modes pris en compte se trouve à la FIGURE suivante.

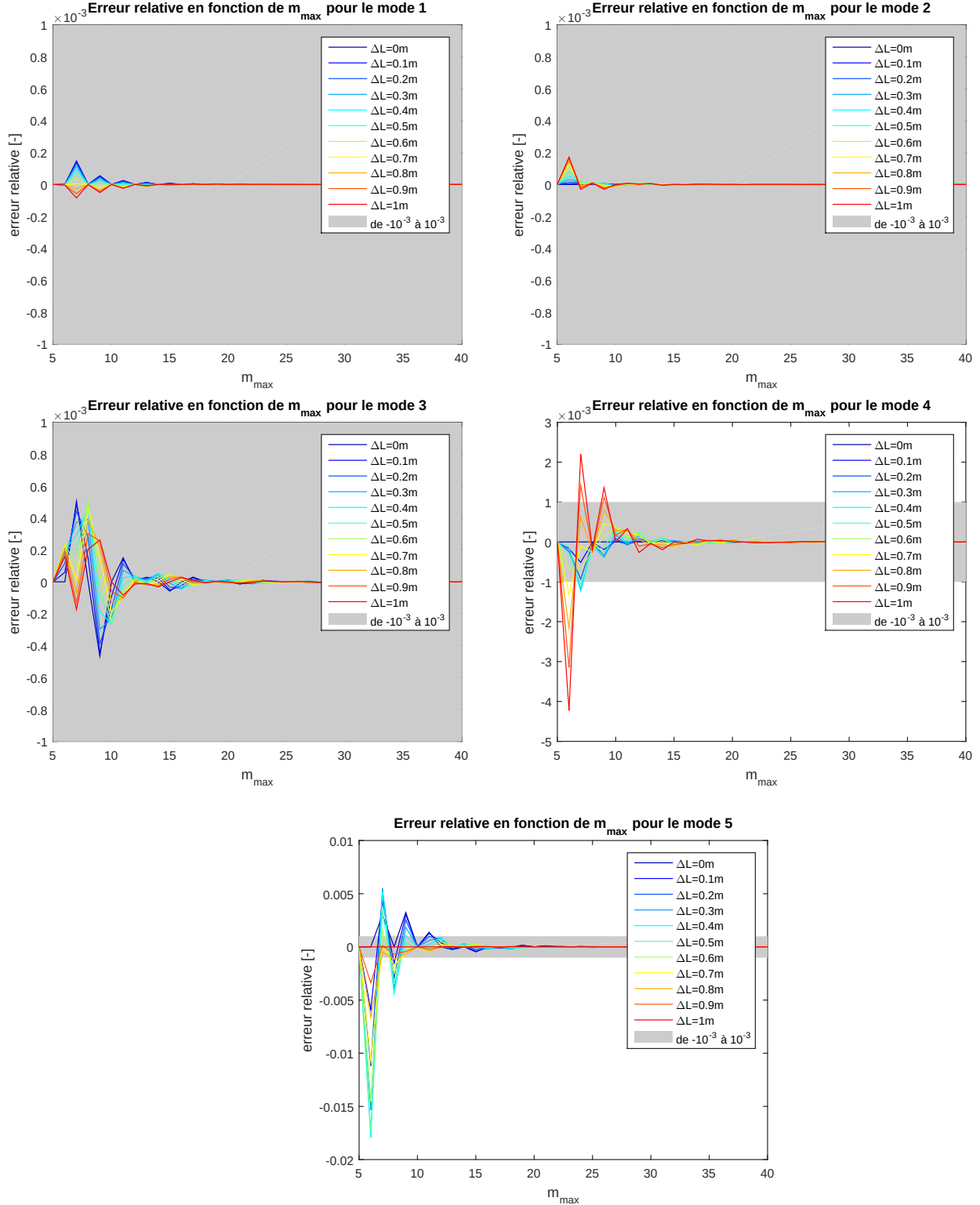


FIGURE E.2 – Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{max} = 1$ - cas 6

E.3 Comparaison des résultats avec ceux de Finelg

E.3.1 Erreur relative sur les valeurs des masses généralisées et des fréquences

Le TABLEAU E.2 reprend les valeurs des fréquences propres ainsi que les masses généralisées pour les 5 premiers modes propres en fonction du décalage de la poutre située à mi-portée.

ΔL [m]	Mode	Matlab		Finelg	
		f [Hz]	M [kg]	f [Hz]	M [kg]
0	1	5	9599,6	5	9449,3
	2	12,2	9412,1	12,4	9004,9
	3	13,1	10242	13,3	9811,8
	4	19,5	9449,4	20	8789,1
	5	24,2	9468,1	25,1	8942,8
0,2	1	5	9597,4	5	9483,5
	2	12,2	9393,1	12,4	8975,5
	3	13,1	10177	13,3	9804,3
	4	19,6	9263,5	20,1	8637,4
	5	24,2	9388,1	25,2	8765,6
0,4	1	5	9591,3	5	9587,1
	2	12,2	9380,8	12,4	8965,6
	3	13,1	10039	13,3	9665,3
	4	19,6	9099,4	20,1	8490,3
	5	24,3	9309,9	25,5	8557,8

TABLEAU E.2 – Fréquences propres et masses généralisées - cas 6

E.3.2 Comparaison de la forme des modes

La FIGURE suivante compare les résultats donnés par le code Matlab et le logiciel Finelg.

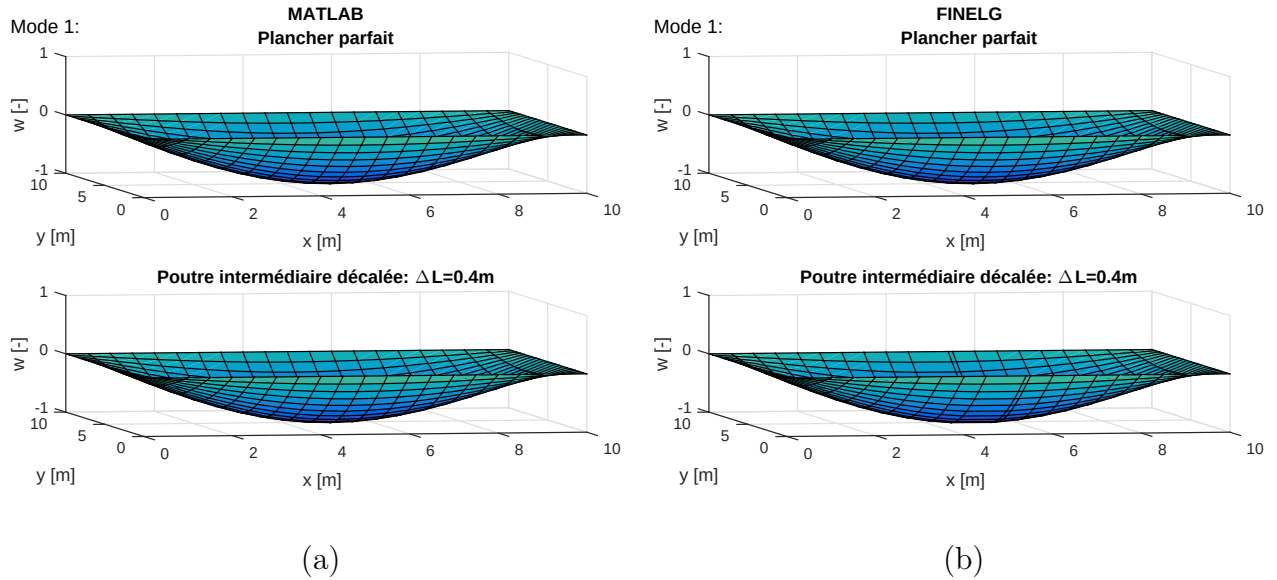


FIGURE E.3 – Évolution de la forme du 1^{er} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 6

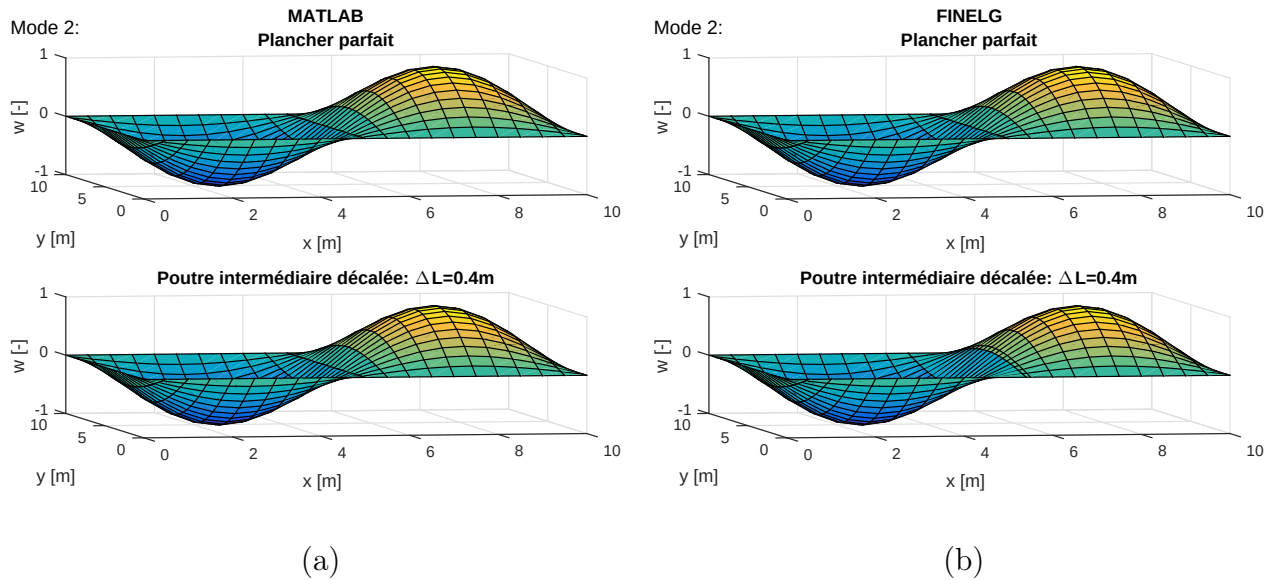


FIGURE E.4 – Évolution de la forme du 2^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 6

Annexe F

Cas 7 - Poutres raides - 4 portées de 5m - $L_y = 10\text{m}$

F.1 Caractéristiques du plancher

Les caractéristiques du plancher de type "cas 7" sont les suivantes.

Dimensions		Propriétés de la dalle		Propriétés des poutres	
L_x	20 m	ρ_b	2500 kg/m ³	ρ_a	7850 kg/m ³
L_y	10 m	E_b	31 000 MPa	E_a	210 000 MPa
p	4	ν_b	0,2	ν_a	0,3
-	-	h	7cm cm	IPE	600

TABLEAU F.1 – Propriétés du plancher calculé - cas 7

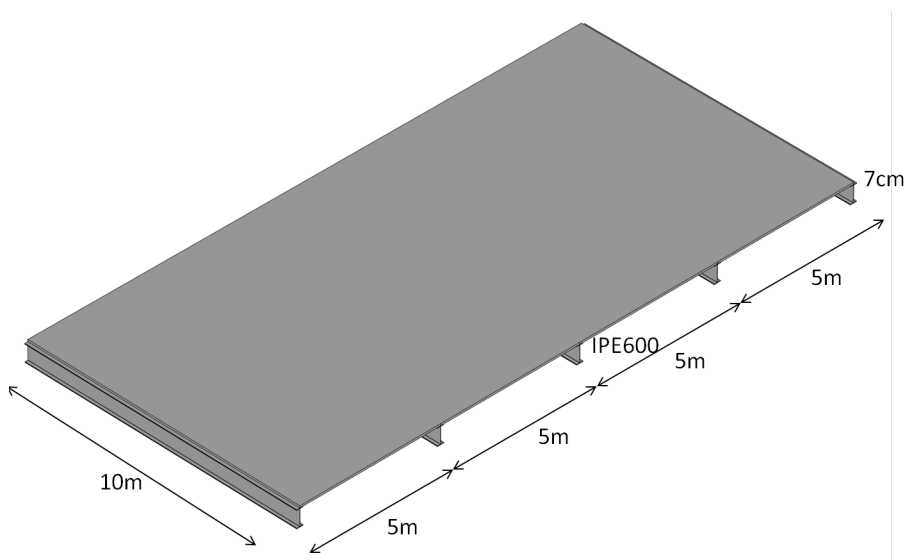


FIGURE F.1 – Plancher cas 7

F.2 Détermination de m_{max}

L'évolution de l'erreur relative en fonction du nombre de modes pris en compte se trouve à la FIGURE suivante.

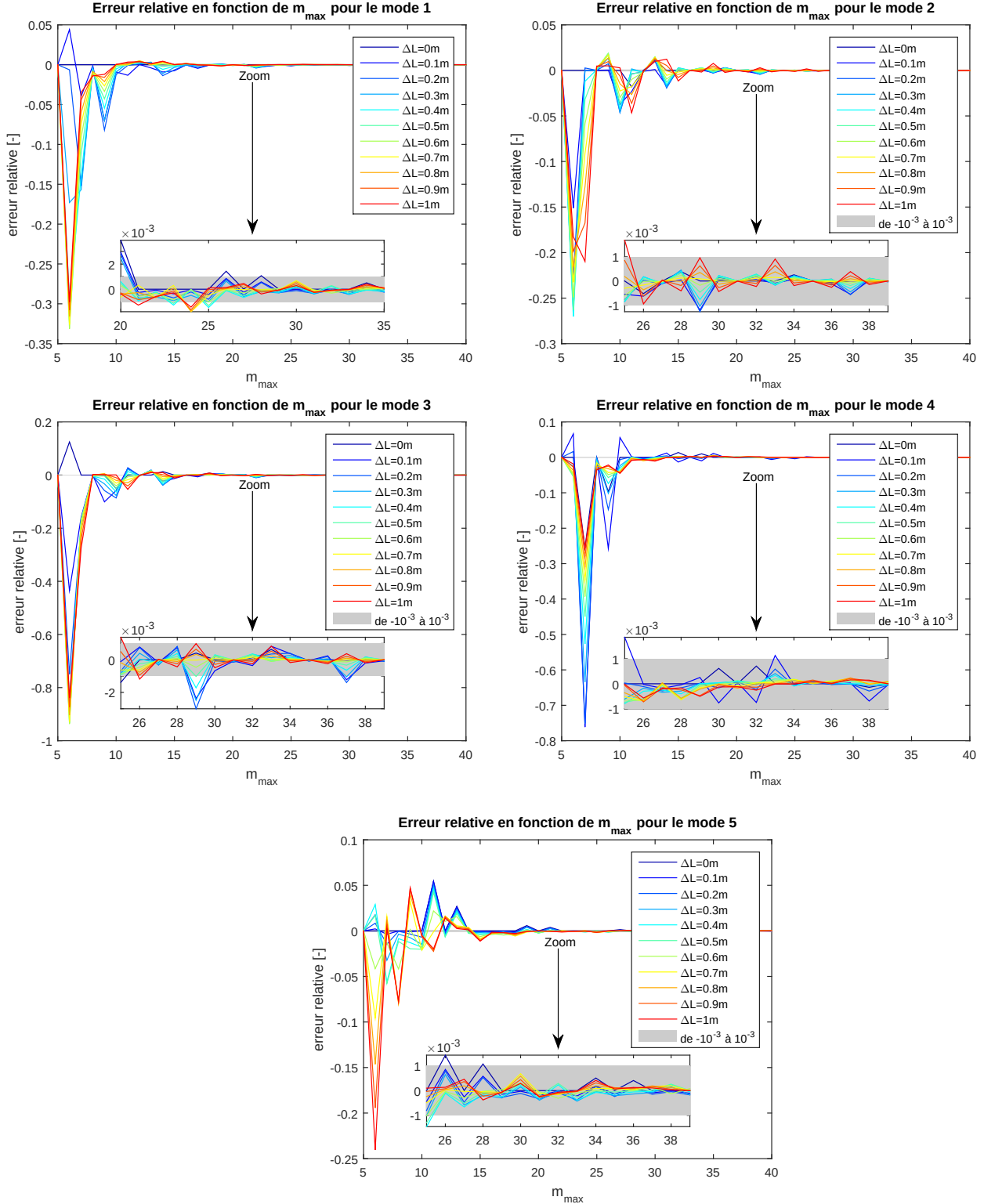


FIGURE F.2 – Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres $n_{max} = 1$ - cas 7

F.3 Comparaison des résultats avec ceux de Finelg

F.3.1 Erreur relative sur les valeurs des masses généralisées et des fréquences

Le TABLEAU F.2 reprend les valeurs des fréquences propres ainsi que les masses généralisées pour les 5 premiers modes propres en fonction du décalage de la poutre située à mi-portée.

ΔL [m]	Mode	Matlab		Finelg	
		f [Hz]	M [kg]	f [Hz]	M [kg]
0	1	5,7	8750	5,8	8398,4
	2	5,8	5553 ,6	5,9	5373,7
	3	6	11152	6	10940
	4	6,2	7423,8	6,2	7332,9
	5	9,1	8750	9,2	8193,5
0,2	1	5,6	3720,2	5,7	3372
	2	5,8	2660,1	5,9	2496,1
	3	6	3885,3	6	3461,8
	4	6,3	3190,5	6,3	3003,9
	5	9	5776,9	9,3	5315,1
0,4	1	5,4	3149,8	5,5	2971,2
	2	5,8	2474,7	5,9	2377,5
	3	5,9	3008,2	6	2794,3
	4	6,6	2858,3	6,6	2749,6
	5	9	4446,3	9,8	4062,5

TABLEAU F.2 – Fréquences propres et masses généralisées - cas 7

F.3.2 Comparaison de la forme des modes

La FIGURE suivante compare les résultats donnés par le code Matlab et le logiciel Finelg.

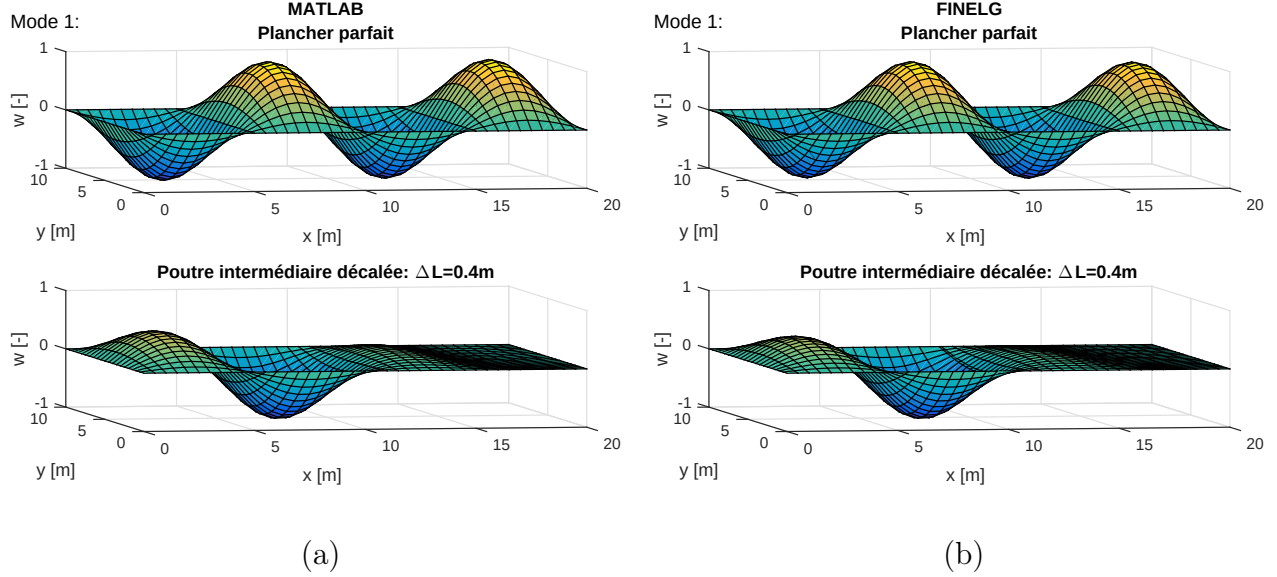


FIGURE F.3 – Évolution de la forme du 1^{er} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 7

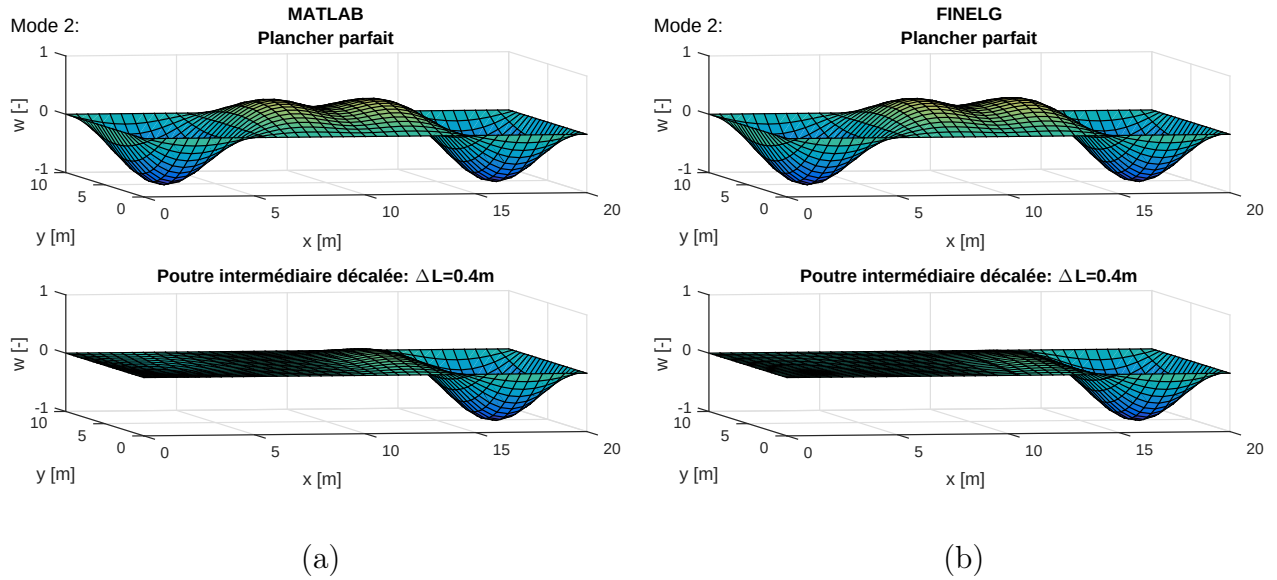


FIGURE F.4 – Évolution de la forme du 2^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 7

Annexe G

Cas 8 - Dalle raide - 4 portées de 5m - $L_y = 10\text{m}$

G.1 Caractéristiques du plancher

Les caractéristiques du plancher de type "cas 8" sont les suivantes.

Dimensions		Propriétés de la dalle		Propriétés des poutres	
L_x	20 m	ρ_b	2500 kg/m ³	ρ_a	7850 kg/m ³
L_y	10 m	E_b	31 000 MPa	E_a	210 000 MPa
p	4	ν_b	0,2	ν_a	0,3
-	-	h	15cm cm	IPE	270

TABLEAU G.1 – Propriétés du plancher calculé - cas 8

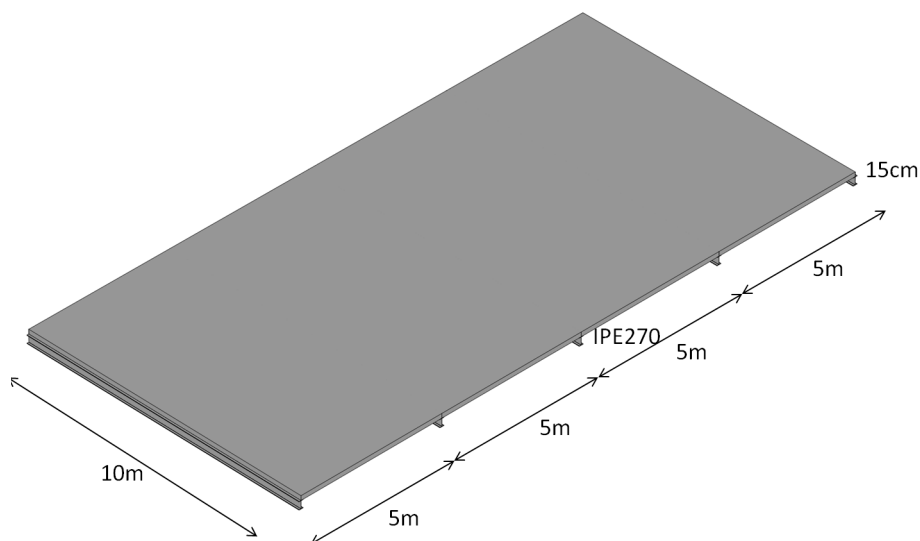


FIGURE G.1 – Plancher cas 8

G.2 Détermination de m_{max} ($n_{max} = 1$)

L'évolution de l'erreur relative en fonction du nombre de modes pris en compte se trouve à la FIGURE suivante.

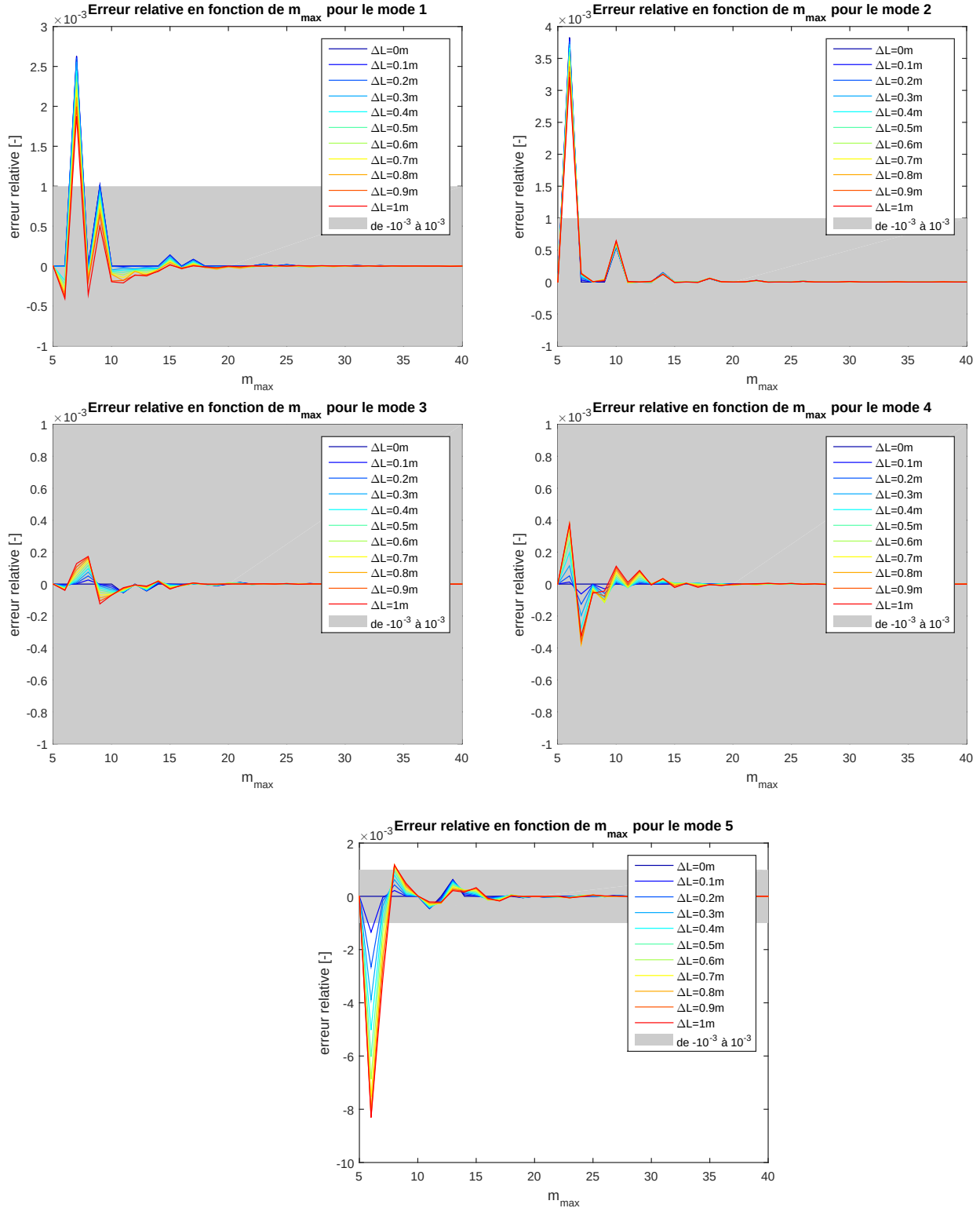


FIGURE G.2 – Évolution de l'erreur relative suite à l'augmentation du nombre de formes de modes pris en compte pour le calcul des modes propres avec $n_{max} = 1$ - cas 8

G.3 Comparaison des résultats avec ceux de Finelg

G.3.1 Erreur relative sur les valeurs des masses généralisées et des fréquences

Le TABLEAU G.2 reprend les valeurs des fréquences propres ainsi que les masses généralisées pour les 5 premiers modes propres en fonction du décalage de la poutre située à mi-portée.

ΔL [m]	Mode	Matlab		Finelg	
		f [Hz]	M [kg]	f [Hz]	M [kg]
0	1	3,3	19185	3,3	18998,3
	2	5	19198	5	18898,7
	3	8	19171	8	18681,5
	4	11,4	19850	11,6	19188,4
	5	12,2	18750	12,4	18009,7
0,2	1	3,3	19179	3,3	19026,5
	2	5	19107	5	18812,1
	3	8	19169	8	18697,8
	4	11,4	19275	11,6	18653,8
	5	12,2	18710	12,4	17947,9
0,4	1	3,3	19162	3,3	19020,4
	2	5	19019	5	18726,1
	3	8	19160	8	18641,4
	4	11,4	18644	12,4	18050,5
	5	12,2	18679	13,3	17919,7

TABLEAU G.2 – Fréquences propres et masses généralisées - cas 8

G.3.2 Comparaison de la forme des modes

La FIGURE suivante compare les résultats donnés par le code Matlab et le logiciel Finelg.

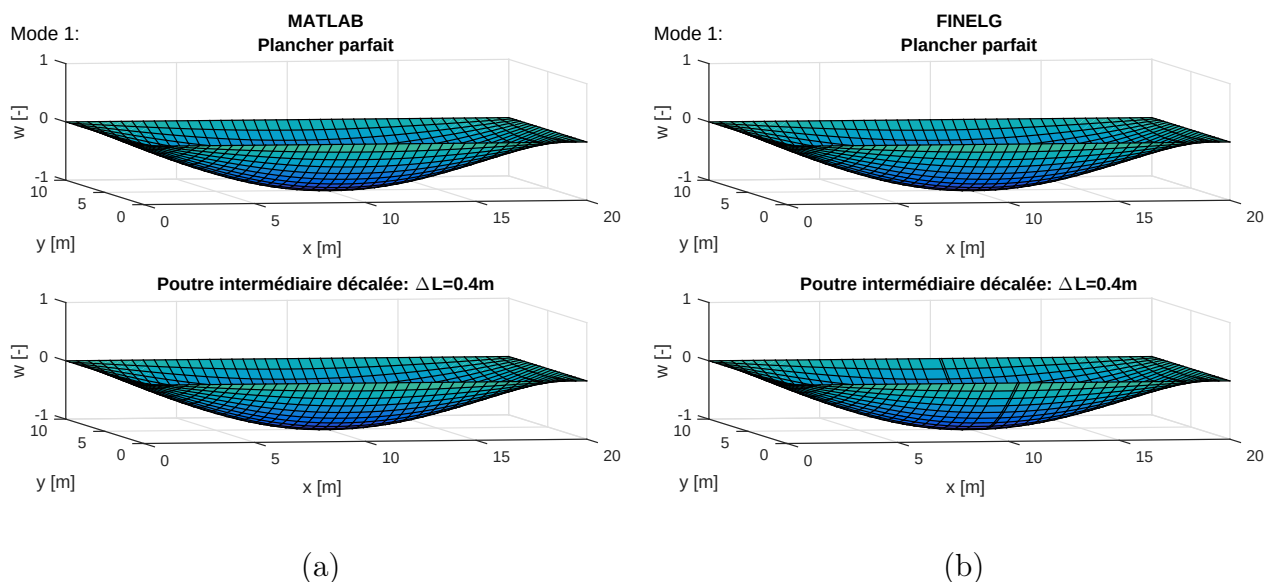


FIGURE G.3 – Évolution de la forme du 1^{er} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 8

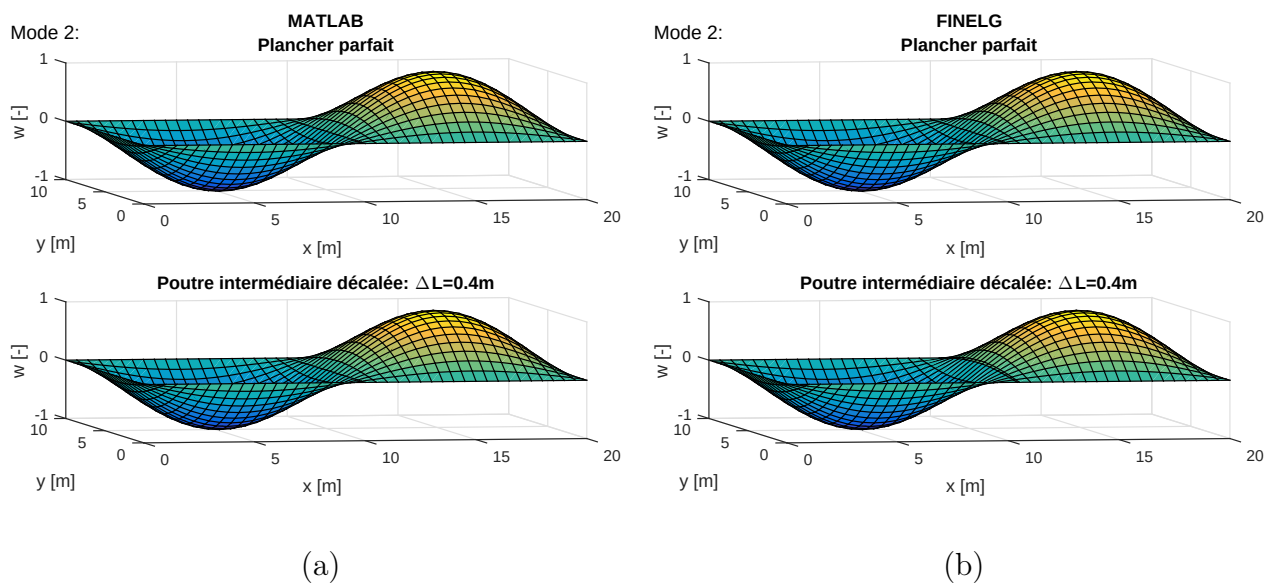


FIGURE G.4 – Évolution de la forme du 2^{ème} mode en fonction de ΔL calculée via (a) le code Matlab et (b) le logiciel Finelg - cas 8

Annexe H

Fonctions Matlab

H.1 Plaque isotrope

```
1 function [M_mod, K_mod, M] = Plaque_iso(Lx, Ly, m_max, n_max, h_b,  
    rho_b, D)  
2  
3 % initialisation  
4 K_mod = zeros(m_max, n_max);  
5 M_mod = zeros(m_max, n_max);  
6  
7 % raideurs et masses generalisees  
8 for n = 1:n_max  
9     for m = 1:m_max  
10         K_mod(m,n) = pi^4*Lx*Ly/4*D*(m^2/Lx^2 + n^2/Ly^2)^2;  
11         M_mod(m,n) = rho_b*h_b*Lx*Ly/4;  
12     end  
13 end  
14  
15 % masse totale  
16 M = rho_b*h_b*Lx*Ly;  
17  
18 end
```

H.2 Contribution des poutres

```
1 function [M_mod, K_mod, M, i_mat, m_mat, n_mat] =  
    Contribution_poutres_iso(Lx, Ly, m_max, n_max, p, p_DL, xk, h_b,  
        rho_b, D, rho_a, E_a, I_a, A_a)  
2  
3 %% modification vecteurs m et n en matrices  
4 vec = ones(1,n_max);  
5 for m = 1:m_max  
6     mat(m,:) = vec*m;  
7 end  
8  
9 m_vec = reshape(mat,[],1);  
10 n_vec = sort(repmat([1:n_max],1,m_max));  
11  
12 nb_modes = m_max*n_max;  
13 m_mat = repmat(m_vec,1,length(m_vec));  
14 n_mat = repmat(n_vec',1,m_max*n_max);  
15  
16 %% matrice i => couplage  
17 i = repmat([1:m_max],length([1:m_max]),1);  
18 i_mat = zeros(nb_modes, nb_modes);  
19 i_mat(1:1+m_max-1, 1:1+m_max-1) = i;  
20 for ind = 1:m_max:m_max*(n_max-1)+1  
21     i_mat(ind:ind+m_max-1, ind:ind+m_max-1) = i;  
22 end  
23  
24 %% Plaque isotrope  
25 [M_iso, K_iso, M] = Plaque_iso(Lx, Ly, m_max, n_max, h_b, rho_b, D);  
26 M_mod_res = reshape(M_iso,[],1);  
27 M_diag = diag(M_mod_res);  
28 K_mod_res = reshape(K_iso,[],1);  
29 K_diag = diag(K_mod_res);  
30  
31 %% initialisation  
32 K_mod = K_diag;  
33 M_mod = M_diag;  
34  
35 %% remplissage des matrices de raideur et de masse  
36 for ind_modes1 = 1:nb_modes  
37     for ind_modes2 = 1:nb_modes  
38  
39         % remise a zeros  
40         Kp = zeros(p-1,m_max);  
41         Mp = zeros(p-1,m_max);  
42  
43         % couplage  
44         if i_mat(ind_modes2,ind_modes1) ~= 0  
45  
46             % indices de chaque somme  
47             ind_i = i_mat(ind_modes2,ind_modes1);
```

```

48         ind_m = m_mat(ind_modes2, ind_modes1);
49         ind_n = n_mat(ind_modes2, ind_modes1);
50
51         % contribution poutres
52         if p > 1
53             for k = 1:p-1
54                 Kp(k, ind_i) = E_a*I_a/2*Ly/2*sin(ind_m*pi/Lx*xk
55                     (k))*sin(ind_i*pi/Lx*xk(k))*(ind_n*pi/Ly)^4;
56                 Mp(k, ind_i) = rho_a*A_a/2*Ly/2*sin(ind_m*pi/Lx*
57                     xk(k))*sin(ind_i*pi/Lx*xk(k));
58             end
59         end
60
61         % matrices de raideur et de masse generalisees
62         K_mod(ind_modes2, ind_modes1) = K_mod(ind_modes2,
63             ind_modes1) + sum(sum(Kp))*2;
64         M_mod(ind_modes2, ind_modes1) = M_mod(ind_modes2,
65             ind_modes1) + sum(sum(Mp))*2;
66     end
67 end
68 %% masse totale
69 M = M + rho_a*A_a*Ly*(p-1);
70
71 end

```


H.3 Main

```
1 %% Dimensions
2 Lx = 10;
3 Ly = 5;
4 h_b = 0.07; %[m]
5
6 %% Decalage
7 DL = 0.4; %m
8 p_DL = 4; % numero poutre decalee
9
10 %% position des poutres
11 xk_init = [3.8 3.8+4 3.8+8 3.8+12 3.8+16 3.8+20 3.8+24 3.8+28];
12 xk = xk_init;
13 xk(p_DL) = xk_init(p_DL) + DL;
14 p = length(xk)+1; % nbre de portees => nbre de poutres = p-1
15
16 %% Donnees dalle
17 % masse volumique
18 rho_b = 2500; %[kg/m^3]
19
20 % module de young
21 E_b = 3.1*10^10; %N/m^2 beton
22
23 % coef de poisson
24 nu_b = 0.2;
25
26 % raideur
27 E_ = E_b/(1-nu_b^2);
28 D = E_*h_b^3/12;
29
30 %% Donnees poutres
31 % masse volumique
32 rho_a = 7850; %[kg/m^3]
33
34 % module de young
35 E_a = 21*10^10; %N/m^2 acier
36
37 % profile choisi
38 choix = 18;
39 IPE = [80 100 120 140 160 180 200 220 240 270 300 330 360 400 450
        500 550 600].*10^(-3);
40 I_IPE = [80.1 171 318 541 869 1317 1943 2772 3892 5790 8356 11770
        16270 23130 33740 48200 67120 92080].*10^(-8);
41 A_IPE = [7.64 10.3 13.2 16.4 20.1 23.9 28.5 33.4 39.1 45.9 53.8 62.6
        72.7 84.5 98.8 116 134 156].*10^(-4);
42
43 IPE_a = IPE(choix);
44 A_a = A_IPE(choix);
45 I_a = I_IPE(choix);
46
```

```
47 %% m et n
48 m_max = 40;
49 n_max = 40;
50
51
52 %% Dx et Dy mesh
53 Dx = 0.25;
54 Dy = 0.25;
55
56
57 %% Calcul des matrices de masse et de raideur generalisees
58 % calcul des matrices couplees
59 [M_mod, K_mod, M, i_mat, m_mat, n_mat] = Contribution_poutres(Lx, Ly
    , m_max, n_max, p, 0, p_DL, h_b, rho_b, D, rho_a, E_a, I_a, A_a);
60
61 % calcul des valeurs et vecteurs propres
62 [phi, omega2] = eig(K_mod, M_mod);
63 omega = sqrt(omega2);
64
65 % tri des valeurs et vecteurs propres par ordre croissant
66 lambda = diag(omega);
67 [lambda, ordre] = sort(lambda);
68 omega = diag(omega);
69 f = diag(omega./(2*pi));
70 phi = phi(:, ordre);
71
72 % calcul des masses generalisees et des raideurs generalisees
73 K_mod_diag = round(phi'*K_mod*phi, 5);
74 M_mod_diag = round(phi'*M_mod*phi, 5);
75
76
77 %% forme des modes
78 % meshgrid
79 [x, y] = meshgrid(0:Dx:Lx, 0:Dy:Ly);
80 [ly, lx] = size(x);
81 w = zeros(ly, lx, m_max*n_max);
82
83 % matrice n et m: tri
84 n_mat_nd = n_mat(:, ordre);
85 m_mat_nd = m_mat(:, ordre);
86
87 for ind_modes1 = 1:length(phi)
88     for ind_modes2 = 1:length(phi)
89
90         % indices n et i
91         ind_n = n_mat_nd(ind_modes2, ind_modes1);
92         ind_i = m_mat_nd(ind_modes2, ind_modes1);
93
94         % calcul de la deformee w
95         if phi(ind_modes2, ind_modes1) ~= 0
96             w(:, :, ind_modes1) = w(:, :, ind_modes1) + ...
```

```
97         phi(ind_modes2,ind_modes1) .* sin(ind_i*pi.*x./Lx)
          .* sin(ind_n*pi.*y./Ly);
98     end
99 end
100
101 % normalisation des modes
102 w_max(ind_modes1) = max(max(abs(w(:,: ,ind_modes1)))));
103 w(:,: ,ind_modes1) = w(:,: ,ind_modes1)./w_max(ind_modes1);
104
105 if ind_modes1 <= 10
106     % plot formes des modes
107     figure
108     h = suptitle(['Mode ',num2str(ind_modes1),':']);
109     set(h,'FontSize',12,'FontWeight','normal','Position',[0.1
        -0.05 1.00011])
110     subplot(2,1,1);
111     surf(x,y,-w(:,: ,ind_modes1))
112     zlim([-1 1])
113     xlabel('x [m]')
114     ylabel('y [m]')
115     zlabel('w [-]')
116     title(['Poutre intermediaire decalee: \Delta L=', num2str(DL)
        , 'm'])
117     annotation('textbox',[.895 .575 .1 .2],'String',['f= ',
        num2str(round(f(ind_modes1),1)),'Hz'],'EdgeColor','none')
118     view([-10 12]);
119     caxis([-1 1])
120
121 end
122
123 end
124
125
126 %% recalcul de la masse et raideur generalisee suite a la nouvelle
    normalisation de la deformee (coherent avec Finelg)
127
128 M_mod_diag = diag(diag(M_mod_diag)'./w_max.^2);
129 rapport_masse = diag(M_mod_diag)./M;
130 K_mod_diag = diag(diag(K_mod_diag)'./w_max.^2);
```

Bibliographie

- [1] Jean-Pierre Jaspart, René Maquoi, Jean-François Demonceau. *Éléments de construction mixte*, 2012.
- [2] Vincent Denoël. *Analyse des Structures II*, 2017.
- [3] HIVOSS. *Contrôle vibratoire des planchers - Guide*, 2007.
- [4] HIVOSS. *Contrôle vibratoire des planchers - Document de référence*, 2007.
- [5] ISO 10137 :2012(E). *Bases for design of structures - Serviceability of buildings and walkways against vibrations*, 2012.
- [6] A. L. Smith, S. J. Hicks, P. J. Devine. *Design of floors for vibration : A new approach*, The Steel Construction Institute, 2009.
- [7] . Hugo Bachmann, Walter Ammann. *Vibrations in structures - Induced by man and machines*, International Association for Bridge and Structural Engineering, Zürich, 1987.
- [8] ISO 2631-1 :1997. *Mechanical vibration and shock - Evaluation of human exposure to whole-body vibration - Part 1 : General requirements*, 1997.
- [9] S. Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger. *Theory of plates and shells* (First edition), McGraw-Hill Book Company, inc, New York et Londres, 1940.
- [10] S. Timoshenko. *Théorie des vibrations à l'usage des ingénieurs* (traduit de l'anglais d'après la 2ème édition par A. de Riva-Berni), Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris, 1947.
- [11] Christophe Pierre, De Man Tang, Earl H. Dowell. *Localized vibrations of disordered multi-span beams - Theory and experiment*. AIAA Journal, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1987, 25 (9), pp.1249-1257. <10.2514/3.9774>. <hal-01573586>.
- [12] V. De Ville De Goyet. *Problèmes non linéaires en génie civil* (Cours donné à l'Université de Liège), 2014.
- [13] NBN EN 1991-1-1. *Eurocode 1 - Actions sur les structures - Partie 1-1 : Actions générales - Poids volumiques, poids propres, charges d'exploitation bâtiments (+ AC :2009)*, 1991.
- [14] Vincent Denoël. *Measurement report at CNIS - Centre National d'Incendie et de Secours*, Université de Liège, Février 2019.
- [15] ArcelorMittal Europe Long products. *Profilés et aciers marchands - Programme de vente*.