

## Graphes représentables par mot

**Auteur** : Leloup, Emeline

**Promoteur(s)** : Rigo, Michel

**Faculté** : Faculté des Sciences

**Diplôme** : Master en sciences mathématiques, à finalité didactique

**Année académique** : 2018-2019

**URI/URL** : <http://hdl.handle.net/2268.2/6988>

---

### *Avertissement à l'attention des usagers :*

*Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.*

*Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.*

---



FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

---

# GRAPHES REPRÉSENTABLES PAR MOT

---

*Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du grade de Master  
en Sciences Mathématiques à finalité didactique*

Année académique 2018–2019

*Réalisé par : Emeline LELOUP  
Promoteur : Pr. Michel RIGO*







FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

---

# GRAPHES REPRÉSENTABLES PAR MOT

---

*Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du grade de Master  
en Sciences Mathématiques à finalité didactique*

Année académique 2018–2019

*Réalisé par : Emeline LELOUP  
Promoteur : Pr. Michel RIGO*









# Remerciements

Avant toutes choses, j'aimerais remercier les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce mémoire.

Pour commencer, je tiens à remercier mon promoteur, le Professeur Michel RIGO, qui m'a communiqué, grâce à son enthousiasme et sa pédagogie, le goût des mathématiques discrètes. Je le remercie également pour sa disponibilité et son aide tout au long de ce mémoire ainsi que pour ses précieux conseils qui ont grandement contribué à l'amélioration de ce travail.

Ensuite, j'adresse mes remerciements à ma famille qui a toujours été présente et m'a apporté un soutien indéfectible. Elle m'a guidée et encouragée, me poussant à me dépasser.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance aux professeurs et assistants du B37 pour leur présence et leur implication. Ils m'ont permis d'acquérir un esprit de réflexion et d'adaptation. Grâce à eux, je sors grandie de ces cinq années d'étude.

Je remercie également mes amis et proches qui ont montré leur intérêt pour ce travail et m'ont soutenue.

Enfin, je souhaiterais remercier toutes les personnes qui prendront le temps de lire ce mémoire.







# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Définitions et notions de base</b>	<b>5</b>
1.1 Notions de combinatoire des mots . . . . .	5
1.2 Notions de théorie des graphes . . . . .	6
1.3 Quelques graphes particuliers . . . . .	8
<b>2 Graphes représentables par mot</b>	<b>13</b>
2.1 A propos du représentant . . . . .	15
2.2 Le nombre de représentation d'un graphe . . . . .	15
2.2.1 Choix du premier symbole du représentant uniforme . . . . .	18
2.2.2 Nombre de représentation : 1 . . . . .	18
2.2.3 Nombre de représentation : 2 . . . . .	19
2.2.4 Nombre de représentation : 3 . . . . .	21
2.3 Lien avec les graphes de comparabilité . . . . .	25
2.4 Graphes non-représentables . . . . .	29
2.5 Synthèse . . . . .	35
2.6 Complexité . . . . .	36
2.7 Trouver un représentant $k$ -uniforme grâce au SMT . . . . .	38
2.8 Résolution du problème de la clique maximale . . . . .	39
2.9 Retour au nombre de représentation . . . . .	40
<b>3 Graphes <math>\tau</math>-représentables</b>	<b>43</b>
<b>4 Graphes <math>\mu</math>-représentables, où <math>\mu \in S_3</math></b>	<b>47</b>
4.1 Lien avec les graphes circulaires . . . . .	48
4.2 Composantes connexes . . . . .	52
4.3 Exemples . . . . .	53
4.3.1 Graphes complets . . . . .	54
4.3.2 Graphes bipartis complets . . . . .	59
4.3.3 Couronnes . . . . .	68
4.3.4 Chemins simples . . . . .	70
4.3.5 Cycles . . . . .	70

4.3.6	Echelles . . . . .	71
4.3.7	Arbres . . . . .	72
4.3.8	Complémentaire d'un graphe . . . . .	74
4.3.9	Graphes circulaires . . . . .	74
4.3.10	Graphes non- $\mu$ -représentables . . . . .	76
4.4	Synthèse . . . . .	77





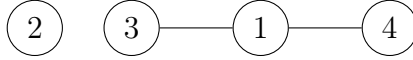


# Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Il s'agit d'une discipline à la jonction entre mathématique et informatique. Un *graphe* est la donnée d'un ensemble de sommets et d'une relation binaire sur cet ensemble. Les éléments de cette relation sont appelés *arêtes*. Les graphes considérés dans ce travail sont *simples*, c'est-à-dire qu'une même arête ne peut apparaître qu'une fois et que la relation est irreflexive. Une des premières traces de cette théorie est le problème des sept ponts de Königsberg, problème résolu par Leonhard Euler en 1736. La théorie des graphes permet d'étudier de nouveaux problèmes tels que la marche du cavalier sur l'échiquier, le problème du coloriage de cartes ou celui du trajet le plus court entre deux lieux. Cependant, il faut attendre le milieu du XX<sup>e</sup> siècle pour qu'émergent les premiers résultats importants. Aujourd'hui, cette théorie possède de nombreuses applications dans plusieurs disciplines puisque les graphes permettent une modélisation de nombreux problèmes en les ramenant à l'étude de sommets et d'arêtes. Citons notamment les isomères en chimie, les réseaux de transports et de communication en sciences sociales, les interactions entre espèces animales en biologie ou encore la topologie des réseaux, la complexité algorithmique et les protocoles de transferts en informatique. Actuellement, elle est prisée puisqu'elle permet de modéliser les réseaux sociaux.

Pour traiter efficacement un problème modélisé par un graphe, il est nécessaire d'utiliser une structure de données adaptée, c'est-à-dire une façon d'organiser les données afin de les traiter plus facilement. Un graphe n'étant qu'une relation entre sommets, une première méthode est de coder cette relation par une matrice, appelée *matrice d'adjacence*. Lorsque le graphe considéré est simple, celle-ci est composée de 0 et de 1 représentant respectivement l'absence et la présence d'une arête. La matrice d'adjacence n'est pas la seule représentation possible.

Dans ce travail, nous allons considérer une représentation alternative de l'information, connue sous le concept de graphe représentable. Un graphe est *représentable par mot* s'il existe un *mot*, c'est-à-dire une suite à valeurs dans un ensemble fini dont les éléments sont appelés *lettres* ou *symboles*, tel que deux lettres s'alternent dans le mot si et seulement si les deux sommets correspondants du graphe sont joints par une arête. Tout mot de la sorte est appelé *représentant du graphe*. On dit que *deux lettres  $x$  et  $y$  s'alternent dans un mot* si, lorsqu'on a supprimé de ce mot les lettres distinctes de  $x$  et de  $y$ , il n'apparaît aucun facteur  $xx$  ni  $yy$ . Ainsi, le graphe



possède notamment les représentants 432213, 431322, 134143122, 312234, 2341431 mais il n'est pas représentable par les mots 43213, 221341342, 2213142. Deux notions de mathématiques discrètes se trouvent ainsi liées : la théorie des graphes et la combinatoire des mots puisque des chaînes de symboles et leurs propriétés sont traitées.

La théorie des graphes représentables trouve ses origines dans l'étude du *semi-groupe de Perkins*  $\mathbf{B}_2^1$ . Celui-ci est le semi-groupe multiplicatif engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le *problème du mot* consiste à déterminer si deux mots sont équivalents sur  $\mathbf{B}_2^1$ , autrement dit si deux produits de matrices de  $\mathbf{B}_2^1$  sont égaux. Comme démontré dans l'article [14], une solution pour résoudre ce problème est de recourir aux graphes. On traduit alors la question en un problème d'isomorphisme de graphes, problème particulièrement important en théorie de la complexité, notamment pour le problème P=NP. En effet, le problème de l'isomorphisme de graphes est l'un des problèmes de NP, pour lequel on ne connaît ni d'algorithme en temps polynomial ni de preuve de NP-complétude. Cependant le problème peut être résolu en temps polynomial pour certaines classes de graphes tels que les graphes planaires et en temps quasi-polynomial pour le cas général.

Une autre utilité des graphes représentables à souligner est qu'un graphe est représentable si et seulement si il admet une orientation semi-transitive. Or, ces orientations sont une généralisation des orientations transitives, et donc une généralisation des ordres partiels, une structure très importante dans de nombreux contextes.

En outre, les graphes représentables ont une utilité en théorie des graphes puisqu'ils généralisent des classes de graphes comme les graphes circulaires, les graphes 3-colorables et les *graphes de comparabilité*, c'est-à-dire ceux admettant une orientation transitive. Effectivement, les graphes circulaires sont les graphes possédant un représentant *2-uniforme*, autrement dit, chaque lettre composant le mot possède exactement deux occurrences, tous les graphes 3-colorables sont représentables et les graphes de comparabilité sont ceux qui possèdent un représentant de la forme  $p^1 \dots p^k$  où  $p^i$  est une permutation pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Les graphes possédant de tels représentants sont dit *représentables par permutation*.

De plus, restreint aux graphes représentables par mot, le problème de la clique maximale connu comme NP-complet est résolu en un temps polynomial. Ce problème peut se formuler de la façon suivante dans le contexte réel : « Dans un réseau social, on représente les personnes par des sommets et une arête lie deux sommets si les personnes se connaissent. La recherche de la clique maximale consiste à chercher le plus grand sous-ensemble de personnes qui se connaissent toutes. ». Il est intéressant de pouvoir résoudre ce problème en temps polynomial puisqu'il s'agit d'un problème d'optimisation possédant un grand

nombre d'applications pratiques dans plusieurs domaines, y compris la recherche d'information, l'analyse de la transmission du signal, la théorie de la classification, l'économie, la planification et l'ingénierie biomédicale. En outre, d'autres problèmes d'optimisation lui sont étroitement liés, comme la coloration de graphe.

Cependant, si le problème de la clique maximale est résoluble en temps polynomial en se restreignant aux graphes représentables par mot, nombreux sont ceux ne possédant pas de représentant. Parmi ceux qui le sont, certains possèdent un représentant évitant un motif prédéfini. En combinatoire des mots, on étudie généralement l'évitabilité de motifs et, en particulier, l'évitabilité de puissances comme des carrés ou des cubes. Ainsi, le mot de Thue-Morse

$$t = \lim_{n \rightarrow +\infty} u^n(0) \quad \text{avec } u : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\} : \begin{cases} 0 \rightarrow 01 \\ 1 \rightarrow 10 \end{cases}$$

contient des carrés mais pas de cube. Dans ce travail, l'évitabilité est considérée dans un sens plus large. On dit qu'un mot évite un motif de longueur au moins 3 s'il n'existe pas de sous-mot de cette longueur préservant l'ordre apparaissant dans le motif. Ainsi, un mot  $w = w^1 \dots w^n$  ne contient pas le motif 123 s'il n'existe pas d'indices  $i_1, i_2, i_3$  tels que  $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n$  et  $w^{i_1} < w^{i_2} < w^{i_3}$ . Ce mémoire a notamment pour but l'étude des graphes dont un représentant au moins évite les motifs de longueur 3 formant les permutations de  $S_3$ .

Sergey Kitaev est un chercheur qui a grandement contribué à l'étude des graphes représentables. Il est l'auteur de la majorité des articles référencés dans ce travail. L'essentiel de ce mémoire est basé sur les informations résumées dans l'article [10]. Gao et Mandelshtam apportent également une contribution à ce travail à travers leur article, respectivement [3] et [15], en fournissant plusieurs exemples de graphes  $\mu$ -représentables présentés dans ce mémoire. Certaines démonstrations sont issues de mes réflexions personnelles.

Ce travail se décompose de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous introduisons les notions de base de la combinatoire des mots et de la théorie des graphes. Nous présentons également quelques graphes particuliers servant d'illustrations dans la suite.

Le deuxième chapitre a pour but d'étudier les graphes représentables par mot. A la section 2.2, nous montrons qu'un graphe est représentable par mot si et seulement si il existe un naturel  $k$  tel qu'un mot  $k$ -uniforme représente ce graphe. Pour chacun de ces graphes, le plus petit naturel satisfaisant cette propriété est appelé *le nombre de représentation du graphe*. De plus, nous établissons que ce représentant est 1-uniforme si et seulement si le graphe considéré est complet et qu'il est 2-uniforme si et seulement si le graphe considéré est un graphe circulaire. Ensuite, nous trouvons une condition nécessaire et suffisante sur

les graphes possédant un sommet adjacent à tous les autres afin qu'ils soient représentables par mot, à savoir que le graphe induit par l'ensemble des sommets du graphe de départ excepté le sommet adjacent à tous les autres est représentable par permutation. Nous prouvons également que les graphes représentables par permutation sont les graphes de comparabilité. Cette caractéristique permet d'obtenir des graphes non-représentables. Dans la section 2.4, nous construisons des graphes non-représentables à partir d'autres graphes. Après une brève synthèse des résultats et des graphes représentables ou non, nous nous intéressons à la complexité du problème visant à déterminer si un graphe donné est représentable. Nous constatons que le problème dépend du nombre de représentation. Si celui-ci est supérieur à deux, nous prouvons que le problème est NP-complet. Cependant, des serveurs permettant de décider de la satisfaisabilité de formules logiques peuvent être utilisés afin de trouver le nombre de représentation d'un graphe. Ensuite, nous prouvons que, lorsqu'il est restreint aux graphes représentables, le problème de la clique maximale, connu pour être NP-complet, est résoluble en un temps polynomial. Enfin, nous fournissons un exemple de graphe avec un nombre de représentation égal à la partie entière de la moitié du nombre de sommets qui le composent.

Dans le troisième chapitre, nous introduisons la notion de  $\tau$ -représentabilité d'un graphe, où  $\tau$  est un motif de longueur au moins 3. Un graphe est dit  $\tau$ -représentable s'il possède un représentant évitant le motif  $\tau$ . Ensuite, avant de démontrer des résultats généraux sur le nombre d'occurrences des lettres dans le  $\tau$ -représentant, nous montrons que le label des sommets est important lorsque nous travaillons la  $\tau$ -représentabilité ainsi que le caractère héréditaire de celle-ci.

Enfin, le quatrième et dernier chapitre s'attarde sur les graphes  $\mu$ -représentables, où  $\mu$  est une permutation de  $S_3$ . Nous établissons que de tels graphes sont nécessairement des graphes circulaires, ce qui permet de restreindre l'étude de ces graphes aux graphes ayant un nombre de représentation inférieur ou égal à 2. Ensuite, nous proposons une construction de graphes  $\mu$ -représentables grâce à l'étude de ses composantes connexes. En guise d'illustrations, nous fournissons des exemples de graphes  $\mu$ -représentables ou non. Enfin, nous démontrons qu'il existe des graphes circulaires qui ne sont pas  $\mu$ -représentables. Ainsi, nous prouvons qu'être un graphe circulaire n'implique pas de posséder un représentant évitant un motif de  $S_3$ . Nous clôturons par une brève synthèse de ces résultats.

# Chapitre 1

## Définitions et notions de base

Ce premier chapitre a pour but de définir des notions de base et de fixer des notations utiles à la compréhension de ce mémoire. Les graphes représentables allient deux domaines des mathématiques discrètes : la combinatoire des mots et la théorie des graphes. C'est pourquoi, dans un premier temps, nous exposons les éléments les plus importants concernant les mots et nous illustrons les notions établies. Dans un second temps, les définitions relatives aux graphes sont introduites et agrémentées d'exemples. Enfin, nous présentons des graphes connus servant d'illustrations dans les différents résultats démontrés dans la suite de ce mémoire. Le lecteur trouvera les définitions présentées dans [17, 18].

### 1.1 Notions de combinatoire des mots

Afin de comprendre les notions utilisées dans ce travail, nous fournissons des définitions de base issues de la combinatoire des mots.

**DÉFINITION 1.1.1.** Un *alphabet*  $A$  est un ensemble fini d'éléments. Ces éléments sont appelés *lettres* ou *symboles*. Par exemple,  $A = \{b, e, h, i, m, n, o, p, t\}$  est un alphabet.

Un *mot fini* est une suite finie de lettres. Le mot ne contenant aucun symbole, appelé *mot vide*, se note  $\varepsilon$ . Nous notons  $Var(w)$  l'ensemble des lettres constituant le mot  $w$ . Ainsi, les symboles formant le mot  $w = \textit{petitbonhomme}$  correspondent à l'alphabet entier :  $Var(w) = A$ .

La *longueur* d'un mot fini  $w$  est égale au nombre de lettres qui composent ce mot et se note  $|w|$ . Dans notre cas,  $|w| = 13$ . De plus, le mot vide est le seul mot de longueur nulle :  $|\varepsilon| = 0$ .

Un *sous-mot* d'un mot est une sous-suite de la suite de lettres. Ainsi, le mot *pomme* est un sous-mot de  $w$ .

Un *facteur*  $f$  du mot  $w$  est un mot apparaissant dans  $w$ . Pour toute lettre  $x$  d'un mot  $w$ , on notera  $x_i$  la  $i^{\text{ème}}$  instance de  $x$  dans  $w$ . Le facteur  $pet_1it_2$  contient deux instances de la lettre  $t$  et une seule des lettres  $p, e$  et  $i$ .

**REMARQUE 1.1.2.** Tout facteur d'un mot en est un sous-mot mais tout sous-mot n'est pas un facteur. Ainsi, les mots *petit* et *pomme* sont des sous-mots de  $w$  mais seul le mot *petit* en est un facteur.

Le *mot miroir* du mot  $w$  est le mot  $w^R$  obtenu en lisant  $w$  de droite à gauche. Si  $w = w^1 \dots w^n$ , alors  $w^R = w^n \dots w^1$ . Dans notre exemple, le mot miroir de  $w$  est  $w^R = emmohnobtitep$ .

Enfin, un mot est dit *k-uniforme* si chaque lettre de l'alphabet apparait exactement  $k$  fois dans ce mot. Ainsi, les mots *papa*, *bonbon* et *elle* sont 2-uniformes sur les alphabets respectifs  $\{a, p\}$ ,  $\{b, n, o\}$  et  $\{e, l\}$ .

**REMARQUE 1.1.3.** L'ordre  $<$  est, sauf mention du contraire, l'ordre naturel si l'alphabet contient des nombres. Dans les autres cas, il est précisé.

## 1.2 Notions de théorie des graphes

Les graphes représentables combinant des notions de combinatoire des mots et de théorie des graphes, nous définissons et fournissons quelques informations nécessaires sur les graphes.

**DÉFINITION 1.2.1.** Soit  $V$  un ensemble et soit  $E$  une partie de  $V \times V$  (i.e. une relation sur  $V$ ). Le *graphe*  $G = (V, E)$  est la donnée du couple  $(V, E)$ . Les éléments de  $V$  sont appelés *sommets* ou *noeuds* de  $G$ . Les éléments de  $E$  sont appelés *arêtes* de  $G$ .

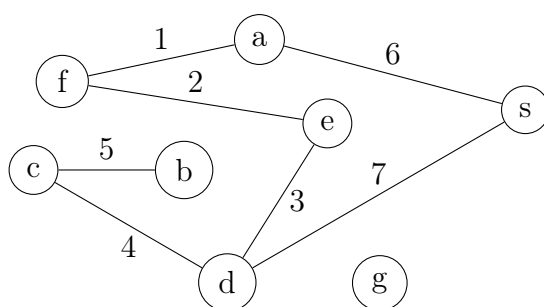


FIGURE 1.1 – Exemple d'un graphe  $G = (V, E)$

**NOTATION 1.2.2.** Si l'arête liant le sommet  $x$  au sommet  $y$  existe, alors on note  $xy \in E$ .

**REMARQUE 1.2.3.** Les graphes considérés sont, sauf mention du contraire, *non-orientés*, c'est-à-dire que si  $xy \in E$  alors  $yx \in E$ . Dans l'exemple illustré par la FIGURE 1.1,  $fa \in E$ , par contre,  $ce \notin E$ .

En outre, les graphes étudiés sont *simples*, c'est-à-dire qu'une même arête ne peut apparaître qu'une fois et que la relation  $E$  est irréflexive, autrement dit, pour tout sommet  $x \in V$ , l'arête  $xx$  n'existe pas.

Un *sous-graphe* d'un graphe  $G = (V, E)$  est un graphe  $H = (V', E')$  tel que  $V' \subseteq V$  et  $E' \subseteq E$ . Le *sous-graphe induit* par  $V'$  est tel que  $E' = E \cap (V' \times V')$ .

Le *complémentaire* d'un graphe  $G = (V, E)$  est le graphe simple  $compl(G) = (V', E')$  tel que  $V' = V$  et tel que deux sommets distincts sont adjacents dans  $G'$  si et seulement si ils ne le sont pas dans  $G$ . Le graphe ci-dessous illustre le complémentaire du graphe de la FIGURE 1.1.

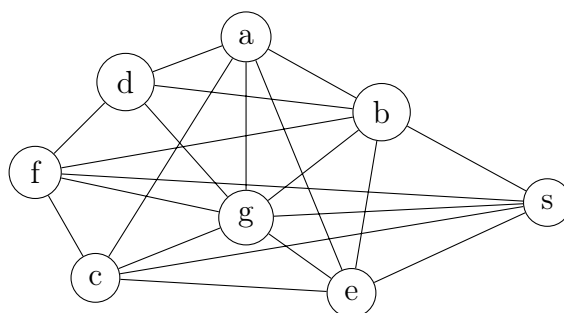


FIGURE 1.2 – Le complémentaire du graphe  $G = (V, E)$

Le *graphe linéaire* du graphe  $G = (V, E)$  est le graphe avec l'ensemble de sommets  $E$  et tel que deux sommets sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes dans  $G$  ont un sommet en commun. Il est noté  $L(G)$ .

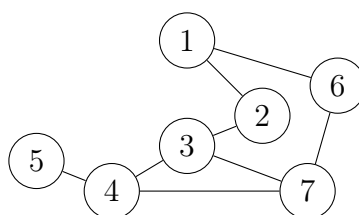


FIGURE 1.3 – Le graphe linéaire de  $G = (V, E)$

Un graphe est *connexe* si pour tous sommets  $x, y \in V$ , il existe des sommets  $z_1, \dots, z_k$  tels que  $xz_1, z_1z_2, \dots, z_{k-1}z_k, z_ky \in E$  ou  $xy \in E$ . Le graphe  $G = (V, E)$  illustré par la FIGURE 1.1 n'est pas connexe mais son complémentaire et son graphe linéaire le sont.



Une *composante connexe* du graphe  $G$  est un sous-graphe connexe maximal, i.e. que le sous-graphe contient le plus de sommets possibles tout en restant connexe. Ainsi, le sous-graphe  $(\{a, f, e, d, b, c, s\}, E)$  est une composante connexe du graphe  $G$ .

Le *degré* d'un sommet  $x$  d'un graphe est le nombre d'arêtes menant à ce sommet. Il est noté  $d(x)$ . Dans notre exemple, nous avons  $d(b) = 1$  et  $d(a) = 2$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}_0$ . Un graphe est dit  *$k$ -régulier* si le degré de chaque sommet est  $k$ , i.e.  $\forall x \in V, d(x) = k$ .

Un *sommet adjacent* au sommet  $x$  est un sommet  $y$  tel qu'il existe une arête liant  $y$  et  $x$ . Par conséquent, le sommet  $b$  possède un unique sommet adjacent  $c$  tandis que  $a$  a deux sommets adjacents :  $f$  et  $s$ .

Un *sommet isolé*  $y$  est un sommet du graphe de degré nul, i.e. pour tout  $v \in V \setminus \{y\}, yv \notin E$ . Le sommet  $g$  est un sommet isolé.

Deux graphes  $G_i = (V_i, E_i), i = 1, 2$ , sont *isomorphes* s'il existe une bijection  $f : V_1 \rightarrow V_2$  telle que

$$xy \in E_1 \Leftrightarrow f(x)f(y) \in E_2.$$

### 1.3 Quelques graphes particuliers

Les notions de base de la théorie des graphes étant introduites, nous présentons des graphes connus. Ceux-ci serviront d'illustrations dans la suite de ce travail. Afin d'éclaircir les définitions, un dessin aidant à visualiser est fourni pour chacun d'eux.

Un *graphe complet* est un graphe tel que tout couple de sommets distincts est relié par une arête. Le graphe complet à  $n$  sommets est noté  $K_n$ .

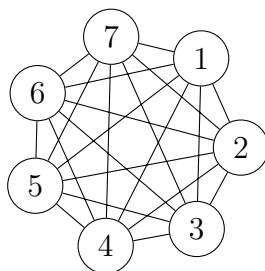


FIGURE 1.4 – Le graphe complet  $K_7$

**REMARQUE 1.3.1.** Si  $n \geq 2$ , le graphe complet  $K_n$  est  $(n - 1)$ -régulier.

Un graphe  $G = (V, E)$  est *biparti complet* si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux ensembles  $V_1$  et  $V_2$  de façon telle que  $E = V_1 \times V_2$ . Il est noté  $K_{\#V_1, \#V_2}$ .

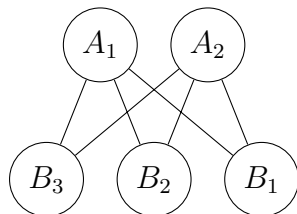


FIGURE 1.5 – Le graphe biparti complet  $K_{2,3}$

L'*étoile*  $E_j$  est le graphe biparti complet  $K_{1,j}$ .

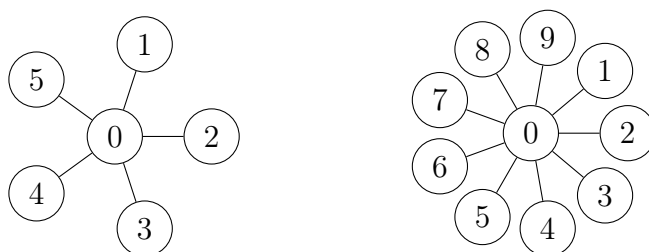


FIGURE 1.6 – Les étoiles  $E_5$  et  $E_9$

**REMARQUE 1.3.2.** Dans l'étoile  $E_j$ , le sommet labélisé ici 0 est de degré  $j$  tandis que les autres noeuds sont de degré 1.

La *couronne* à  $2n$  sommets est le graphe obtenu à partir du graphe biparti complet  $K_{n,n}$ , dont les sommets sont partitionnés en  $V_1 = \{A_1, \dots, A_n\}$  et  $V_2 = \{B_1, \dots, B_n\}$ , et dont les correspondances parfaites ont été supprimées, i.e.  $A_i B_j$  est une arête de la couronne si et seulement si  $i \neq j$ . Elle est notée  $H_{n,n}$ .

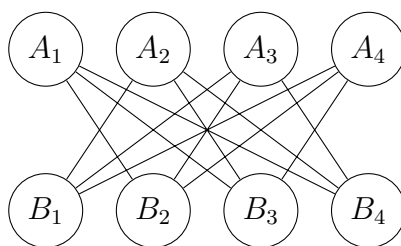


FIGURE 1.7 – La couronne  $H_{4,4}$

**REMARQUE 1.3.3.** La couronne  $H_{1,1}$  est un graphe composé de deux sommets isolés. Si  $n \geq 2$ , la couronne  $H_{n,n}$  est un graphe  $(n - 1)$ -régulier.

Un *chemin* de longueur  $k \geq 1$  est une suite ordonnée  $(e_1, \dots, e_k)$  de  $k$  arêtes adjacentes  $e_i = (e_{i,1}, e_{i,2})$  joignant les sommets  $e_{1,1}$  et  $e_{k,2}$ , avec  $e_{i,2} = e_{i+1,1}$  quel que soit  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ .

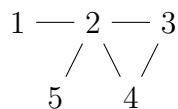


FIGURE 1.8 – Un chemin de longueur 5

Lorsque les sommets sont tous distincts, excepté peut-être les extrémités  $e_{1,1}$  et  $e_{k,2}$  qui peuvent être égales, on parle de *chemin simple*.



FIGURE 1.9 – Le chemin simple de longueur 11

L'*échelle*  $L_n$ ,  $n \geq 2$ , à  $2n$  sommets et  $3n - 2$  arêtes est le graphe constitué de deux chemins simples  $x^1x^2\dots x^n$  et  $y^1y^2\dots y^n$ , connectés par les arêtes  $x^iy^i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Si  $n = 1$ , l'échelle  $L_1$  est le chemin simple de longueur 1.

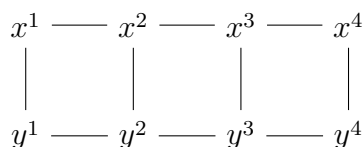


FIGURE 1.10 – L'échelle  $L_4$

Le *cycle* à  $k$  sommets,  $k \geq 2$ , est le chemin simple de longueur  $k$  dont les extrémités  $e_{1,1}$  et  $e_{k,2}$  sont égales.

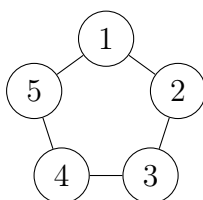


FIGURE 1.11 – Le cycle à 5 sommets

**REMARQUE 1.3.4.** Si le cycle ne comporte que deux sommets, le graphe n'est pas simple.

Le *graphe roue*  $W_j$ , avec  $j \geq 3$  est le cycle à  $j$  sommets auxquels un noeud ( $j + 1$ ) connecté aux  $j$  autres sommets est ajouté.

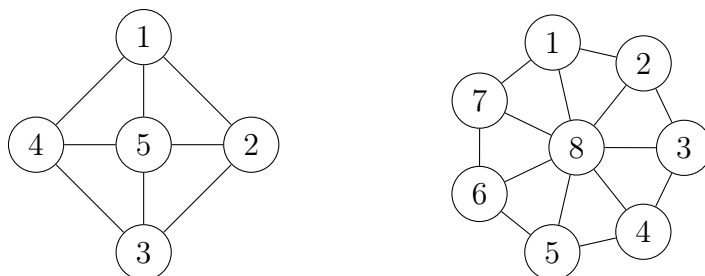


FIGURE 1.12 – Les graphes roues  $W_4$  et  $W_7$

Le *prisme*  $Pr_n$  est le graphe constitué de deux cycles  $x^1x^2\dots x^n$  et  $y^1y^2\dots y^n$ , avec  $n \geq 2$ , connectés par les arêtes  $x^iy^i$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

**NOTATION 1.3.5.** Dans la suite, les sommets du prismes sont notés  $x^i = i$  et  $y^i = i'$ .

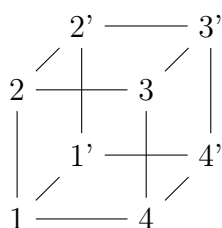


FIGURE 1.13 – Le prisme  $Pr_4$

Un *arbre* est un graphe simple, non orienté, connexe. De plus, s'il possède plus de deux sommets, le graphe ne doit pas contenir de cycle de plus de deux sommets. Ainsi, le graphe  $(\{a, b\}, \{ab\})$  est un arbre.

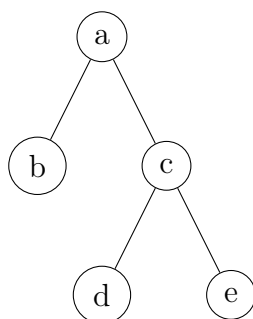


FIGURE 1.14 – Exemple d'un arbre  $A$

**REMARQUE 1.3.6.** Lorsqu'un sommet particulier est privilégié dans un arbre, comme le sommet  $a$  dans la figure ci-dessus, ce sommet est appelé la *racine* de l'arbre. Les sommets adjacents (ici,  $b$  et  $c$ ) sont les *enfants* de la racine. Les enfants des enfants sont les petits-enfants et ainsi de suite. Autrement dit, la distance à la racine ordonne les sommets, où il est entendu, par distance, le nombre de sommet(s) par le(s)quel(s) il faut obligatoirement passer pour rejoindre la racine.

Un *sous-arbre* d'un arbre  $A = (V, E)$  est un arbre  $A' = (V', E')$  tel que  $V' \subseteq V$  et  $E' = E \cap (V' \times V')$ .

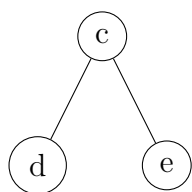


FIGURE 1.15 – Un sous-arbre de l'arbre  $A$

Un *graphe circulaire*  $G = (V, E)$  est un graphe dont les sommets peuvent être associés aux cordes d'un cercle de manière telle que deux cordes  $a$  et  $b$  s'intersectent si et seulement si  $ab \in E$ .

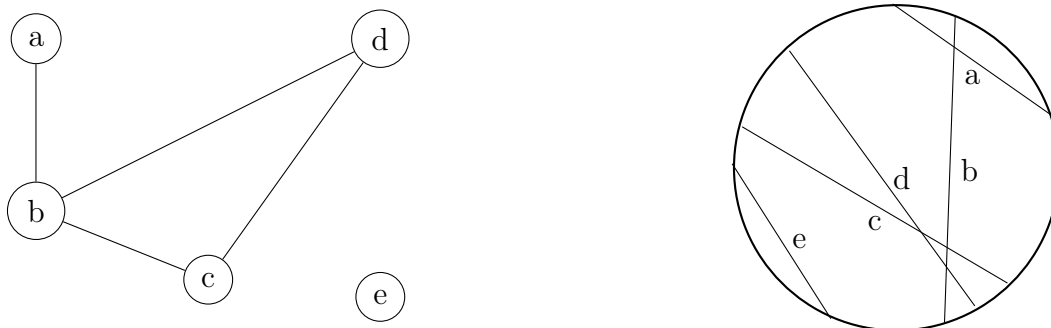


FIGURE 1.16 – Exemple d'un graphe circulaire et d'un cercle avec cordes associées

## Chapitre 2

# Graphes représentables par mot

Dans ce chapitre, nous nous attardons sur la notion de graphe représentable par mot, l'illustrons et montrons l'hérédité du caractère représentable. Ensuite, nous établissons deux constats servant dans la suite de ce mémoire et concernant des représentants de graphes. Après cela, nous présentons la notion de nombre de représentation d'un graphe et nous fournissons des exemples. Nous poursuivons avec un critère liant les graphes représentables par mot et les graphes de comparabilité permettant de prouver qu'il existe des graphes qui ne sont pas représentables par mot. Puis, nous présentons plusieurs graphes non-représentables par mot. Après une brève synthèse, nous abordons la complexité temporelle pour déterminer la représentabilité d'un graphe et nous proposons une méthode basée sur des serveurs permettant de décider de la satisfaisabilité de formules logiques afin de trouver le nombre de représentation. Avant un retour sur le nombre de représentation où nous présentons un graphe avec un nombre de représentation égal à la partie entière de la moitié du nombre de sommets qui le composent, nous montrons que la restriction aux graphes représentables permet de résoudre le problème de la clique maximale en un temps polynomial.

**DÉFINITION 2.0.1.** Soient  $w$  un mot et deux de ses lettres  $x$  et  $y$ . Les lettres  $x$  et  $y$  s'alternent dans  $w$  si, lorsqu'on a supprimé de  $w$  les lettres distinctes de  $x$  et de  $y$ , il n'apparaît aucun facteur  $xx$  ni  $yy$ .

**REMARQUE 2.0.2.** Il est équivalent de dire que les lettres  $x$  et  $y$  s'alternent dans le mot  $w$  si un des cas suivants se présente :

- \* les deux lettres  $x$  et  $y$  n'apparaissent respectivement qu'une fois dans  $w$  ;
- \* une des deux lettres apparaît une fois, l'autre apparaît exactement deux fois et le sous-mot de  $w$  formé des occurrences de  $x$  et  $y$  est de la forme  $xyx$  ou  $yxy$  ;
- \* les deux lettres apparaissent au moins deux fois et pour tout couple  $(y_i, y_{i+1})$  (resp.  $(x_i, x_{i+1})$ ), il existe une unique instance de  $x$  (resp.  $y$ ) entre ces deux instances successives de  $y$  (resp.  $x$ ).

**DÉFINITION 2.0.3.** Un graphe  $G = (V, E)$  est *représentable par mot* s'il existe un mot  $w$  sur l'alphabet  $V$  tel que  $x$  et  $y$  s'alternent dans  $w$  si et seulement si  $xy \in E$ . Tout mot  $w$  de la sorte est appelé *représentant* du graphe  $G$ .

**REMARQUE 2.0.4.** Si deux lettres  $x$  et  $y$  apparaissent une unique fois dans un représentant, alors l'arête  $xy$  existe au vu de la remarque 2.0.2.

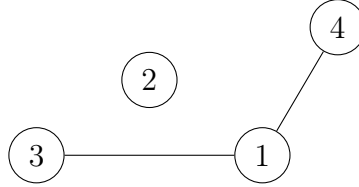


FIGURE 2.1 – Exemple d'un graphe représentable par mot

Voici plusieurs mots représentant le graphe ci-dessus :

$$w = 432213, \quad w' = 22134142, \quad w'' = 431322, \quad w''' = 134143122.$$

En effet, la présence consécutive de deux symboles 2 empêche une alternance avec la lettre 2. De plus, entre chaque paire de 1 apparaissant dans le mot doit se trouver une unique occurrence des lettres 3 et 4 au vu du graphe. L'arête 34 n'existant pas, le sous-mot composé des symboles 3 et 4 contient plusieurs 3 consécutifs ou plusieurs 4 consécutifs. Ainsi, les mots

$$43213, \quad 221341342, \quad 2213142$$

ne représentent par le graphe ci-dessus au vu des différentes remarques effectuées. Effectivement, dans le premier mot, les symboles 2 et 1 s'alternent donc conduisent à la présence de l'arête 12, dans le deuxième, ce sont les lettres 3 et 4 qui impliquent l'existence de l'arête 34 et dans le troisième, seul le symbole 3 se situe entre les deux occurrences de 1 donc l'arête 14 n'existe pas.

**THÉORÈME 2.0.5.** *La représentabilité est héréditaire. Autrement dit, si un graphe est représentable par mot alors tous ses sous-graphes induits le sont.*

*Démonstration.* Notons  $G = (V, E)$  un graphe représentable par mot et  $w$  son représentant. Notons  $H = (V', E')$  un de ses sous-graphes induits, c'est-à-dire tel que  $E' = E \cap (V' \times V')$ . En supprimant dans  $w$  les lettres de  $V \setminus V'$ , nous obtenons un représentant de  $H$ , appelons-le  $w'$ . Effectivement, le sous-graphe étant induit, nous avons  $E' = E \cap (V' \times V')$  donc  $w'$  conserve bien les différentes arêtes.  $\square$

A ce stade, il n'est possible pas d'établir la véracité ou non de la réciproque. Cependant, grâce à divers résultats, nous verrons à la remarque 2.4.3 que la réciproque est fausse. Ainsi, savoir que tous les sous-graphes induits d'un graphe sont représentables n'apporte pas d'information sur le caractère représentable du graphe lui-même.

## 2.1 A propos du représentant

Dans cette section, nous donnons deux précisions sur les représentants de graphes. Ces constats sont intéressants à connaître et relativement évidents.

**PROPOSITION 2.1.1.** *Le mot miroir d'un représentant d'un graphe est un représentant de ce même graphe.*

*Démonstration.* Le résultat est évident étant donné que lire le mot de droite à gauche ne modifie aucune alternance ni n'en crée de nouvelles.  $\square$

**LEMME 2.1.2.** *Soit  $x$  un sommet d'un graphe  $G = (V, E)$  tel que  $xa, xb \in E$ , où  $a, b \in V$ . Soit  $w$  un représentant du graphe  $G$  contenant au plus deux copies de chaque lettre. Si  $ab \notin E$  et  $a$  et  $b$  apparaissent des deux côtés de  $x$  dans  $w$ , alors  $a$  et  $b$  apparaissent dans des ordres opposés de chaque côté de  $x$ .*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons que  $a$  et  $b$  apparaissent dans le même ordre de chaque côté de  $x$ . Alors  $a$  et  $b$  s'alternent, ce qui est impossible puisque  $ab \notin E$  et que  $w$  représente  $G$ . Donc  $a$  et  $b$  doivent apparaître dans des ordres opposés de chaque côté de  $x$ .  $\square$

## 2.2 Le nombre de représentation d'un graphe

Dans cette section, nous introduisons la notion de nombre de représentation d'un graphe. Ensuite, nous prouvons l'hérédité du caractère représentable par un mot  $k$ -uniforme et nous montrons que le choix du premier symbole du représentant  $k$ -uniforme est arbitraire. Tous les résultats présentés sont tirés de [12]. Enfin, nous détaillons et/ou illustrons les graphes avec un nombre de représentation égal à 1, 2 et 3.

Afin de définir le nombre de représentation d'un graphe, nous devons nous assurer de son sens. Pour cela, il faut constater que chaque graphe représentable en possède un et déterminer son unicité.

**THÉORÈME 2.2.1.** *Un graphe est représentable par mot si et seulement si il existe un  $k \in \mathbb{N}_0$  tel que le graphe est représentable par un mot  $k$ -uniforme.*

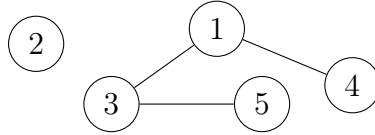
*Démonstration.*

La condition suffisante est directe. En effet, si un graphe est représentable par un mot  $k$ -uniforme alors il est en particulier représentable, le mot  $k$ -uniforme convenant.

Prouvons maintenant la condition nécessaire. Supposons que le graphe soit représentable par un mot noté  $w$ . S'il existe un  $k \in \mathbb{N}_0$  tel que le mot est  $k$ -uniforme, alors le résultat est prouvé. Supposons donc que, pour tout  $k \in \mathbb{N}_0$ , le mot n'est pas  $k$ -uniforme. Alors, il suffit d'appliquer le processus décrit ci-après jusqu'à l'obtention d'un mot  $k$ -uniforme. Afin de comprendre le processus, nous fournissons son application sur un exemple parallèlement



à sa description. Pour ce faire, considérons le mot  $w = 4531523252$  représentant le graphe  $G$  à cinq sommets représenté ci-après.



Description du processus.

Dans ce mot  $w$ , une lettre au moins apparaît un nombre maximum de fois, notons ce nombre  $k$ .

Regardons le sous-mot  $w'$  formé à partir des lettres de  $w$  apparaissant moins de  $k$  fois.

Notons  $p(w)$  le sous-mot de  $w'$  contenant la première occurrence de chaque lettre et appelons-le *la permutation initiale*.

Le mot  $p(w)w$  contient plus d'occurrences des lettres n'apparaissant pas  $k$  fois dans le mot  $w$ . De plus, le mot  $p(w)w$  représente le graphe  $G$  puisque la concaténation de  $p(w)$  ne retire ni n'ajoute d'alternance et donc d'arête. Supposons avoir une perte ou un ajout de l'arête  $xy$ . Une des lettres est obligatoirement présente dans  $p(w)$ , supposons  $x$ . Le symbole  $y$  n'est, quant à lui, pas dans  $p(w)$  puisque l'ordre de  $x$  et  $y$  dans  $p(w)$  est, par construction, le même que l'ordre dans  $w$  la première fois que nous croisons ces symboles. Par conséquent, si  $y$  se trouve également dans  $p(w)$ , l'arête  $xy$  n'est ni ajoutée ni retirée. Dès lors, le symbole  $y$  apparaît  $k$  fois dans  $w$  et  $x$  moins de  $k$  fois. Si  $x$  et  $y$  s'alternent dans  $w$ , alors  $x$  apparaît nécessairement  $k - 1$  fois, entre chaque couple de  $y$  consécutifs. En ajoutant  $p(w)$ , le sous-mot formé par  $x$  et  $y$  devient  $xy_1xy_2 \dots xy_k$ , ce qui conserve l'alternance. Supposons désormais que  $x$  et  $y$  ne s'alternent pas dans  $w$ , l'ajout d'un  $x$  devant  $w$  ne peut créer une alternance. Par conséquent, le mot  $p(w)w$  représente bien le graphe  $G$ .

Illustration sur l'exemple.

Les lettres avec le plus grand nombre d'instances sont 2 et 5 et elles apparaissent trois fois, ainsi  $k = 3$ .

Donc  $w' = 4313$ .

Ainsi  $p(w) = 431$ .

Le mot  $p(w)w = 4314531523252$  représente effectivement le graphe  $G$  et contient plus d'occurrences des lettres n'apparaissant pas trois fois dans  $w$ .

Le processus est répété jusqu'à ce que chaque lettre apparaisse le même nombre de fois, i.e.  $k$  fois. Dans l'exemple, une seconde répétition du processus permet d'obtenir le mot  $w' = 414314531523252$  qui est un représentant 3-uniforme du graphe  $G$ .  $\square$

Nous venons de montrer qu'un graphe représentable possède un représentant uniforme. Le résultat suivant stipule qu'un graphe possédant un représentant uniforme possède alors un représentant uniforme contenant une occurrence supplémentaire de chaque symbole.

**THÉORÈME 2.2.2.** *Un graphe représentable par un mot  $k$ -uniforme,  $k \in \mathbb{N}_0$ , est aussi représentable par un mot  $(k + 1)$ -uniforme. En particulier, pour tout  $\ell \geq k$ , un graphe représentable par un mot  $k$ -uniforme est représentable par un mot  $\ell$ -uniforme.*

*Démonstration.* Pour passer d'un mot  $k$ -uniforme à un mot  $(k+1)$ -uniforme et représentant le même graphe, il suffit de concaténer le mot  $k$ -uniforme avec la permutation initiale formée par les lettres du mot.  $\square$

Reprenons l'exemple pour illustrer la démonstration. Nous avons établi que le mot  $w' = 414314531523252$  représente le graphe  $G$  et est 3-uniforme. Il est aisé de vérifier que le mot  $w'' = 41352414314531523252$  en est un représentant 4-uniforme.

Puisqu'un représentant uniforme existe si un graphe est représentable par mot, la définition du nombre de représentation d'un graphe peut être énoncée. Elle doit tenir compte des multiples représentants uniformes possibles.

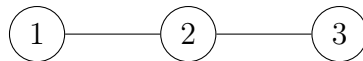
**DÉFINITION 2.2.3.** *Le nombre de représentation d'un graphe est le plus petit naturel  $k$  tel que le graphe soit représentable par un mot  $k$ -uniforme. Pour les graphes non-représentables par mot, posons  $k = \infty$ . L'ensemble des graphes ayant un nombre de représentation égal à  $k$  est noté  $\mathcal{R}_k$ .*

Nous avons prouvé l'hérédité du caractère représentable. En est-il de même pour la représentabilité par un mot  $k$ -uniforme? Le théorème suivant répond à cette interrogation.

**THÉORÈME 2.2.4.** *La représentabilité par un mot  $k$ -uniforme est héréditaire.*

*Démonstration.* Soit  $w$  un représentant  $k$ -uniforme d'un graphe  $G$  et soit  $H$  un de ses sous-graphes induits. Le mot  $w'$  construit dans la démonstration du théorème 2.0.5 convient comme représentant  $k$ -uniforme du graphe  $H$ . En effet, la construction conserve le nombre d'apparition des symboles dont les sommets correspondants appartiennent au sous-graphe induit.  $\square$

**REMARQUE 2.2.5.** On en tire que le nombre de représentation des sous-graphes induits est au plus égal au nombre de représentation du graphe. Le théorème précédent n'implique pas que les sous-graphes induits d'un graphe représentable ont le même nombre de représentation. Un simple contre-exemple permet de prouver ce constat. Le graphe



possède le représentant 2-uniforme 231213 mais ne peut être représenté par un mot 1-uniforme puisque l'arête 13 n'existe pas. Par conséquent, il appartient à  $\mathcal{R}_2$ . Le sous-graphe induit par  $\{1, 3\}$  appartient à  $\mathcal{R}_2$  puisque l'arête 13 n'existe pas et que le mot 3113 le représente. Par contre, le sous-graphe induit par  $\{1, 2\}$  admet le représentant 1-uniforme 12 et appartient par conséquent à  $\mathcal{R}_1$ .

### 2.2.1 Choix du premier symbole du représentant uniforme

Kitaev et Pyatkin ont établi, dans [12], que le choix du premier symbole d'un représentant  $k$ -uniforme d'un graphe est arbitraire. Ce résultat simplifiera les démonstrations puisque la première lettre des représentants uniformes pourra être supposée connue.

**PROPOSITION 2.2.6.** *Soit  $w = uv$  un mot  $k$ -uniforme représentant un graphe  $G$ , où les mots  $u$  et  $v$  peuvent éventuellement être vides. Alors le mot  $w' = vu$  est aussi un représentant de  $G$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $w$  contient au moins un symbole  $x$ . Si ce n'est pas le cas,  $w$  est le mot vide et, par conséquent,  $w'$  aussi. Ils représentent donc le même graphe. Le mot  $w$  s'écrit  $w^1x_1w^2x_2\cdots w^kx_kw^{k+1}$  où les mots  $w^i$  peuvent éventuellement être vides. Nous avons  $u = w^1x_1\cdots x_{j-1}w^{j_1}$  et  $v = w^{j_2}x_jw^{j+1}\cdots w^kx_kw^{k+1}$  où les mots  $w^{j_1}$  et  $w^{j_2}$  peuvent éventuellement être vides et sont tels que  $w^{j_1}w^{j_2} = w^j$  pour un  $j \in \{1, \dots, k+1\}$ . Remarquons que si  $j = k+1$ , alors nous avons  $v = w^{(k+1)_2}$ . Ainsi nous obtenons

$$w' = vu = w^{j_2}x_jw^{j+1}\cdots w^kx_kw^{k+1}w^1x_1w^1\cdots x_{j-1}w^{j_1}.$$

Soit  $y$  un symbole distinct de  $x$ . Si un tel  $y$  n'existe pas, alors le résultat est prouvé puisque  $w = x_1\cdots x_k$  et  $w' = x_1\cdots x_k$ . Montrons que si les symboles  $x$  et  $y$  sont (resp. ne sont pas) adjacents dans  $G$  alors, ils s'alternent (resp. ne s'alternent pas) dans  $w'$ .

- Soit  $y$  est tel que  $x$  et  $y$  sont adjacents dans  $G$ . Les lettres  $x$  et  $y$  s'alternent dans  $w$  puisque  $w$  est un représentant du graphe. Autrement dit,  $y$  apparaît une unique fois dans chaque  $w^i$  pour  $i \in \{2, \dots, k\}$ . Comme  $w$  est  $k$ -uniforme, la dernière occurrence de  $y$  est soit dans  $w^1$ , soit dans  $w^{k+1}$ .
- Soit  $y$  est tel que  $x$  et  $y$  ne sont pas adjacents dans  $G$ . Alors les lettres  $x$  et  $y$  ne s'alternent pas dans  $w'$ . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'elles s'alternent dans  $w'$ . Comme  $w'$  est  $k$ -uniforme, le raisonnement précédent peut être appliqué. Par conséquent, les lettres  $x$  et  $y$  s'alternent dans  $w$ , d'où nous obtenons une contradiction. □

### 2.2.2 Nombre de représentation : 1

La notion de nombre de représentation d'un graphe représentable introduite, nous étudions les graphes admettant un tel nombre égal à 1. Un seul type de graphe entre dans cette catégorie.

$\mathcal{R}_1$  ou l'ensemble des graphes complets

Si le nombre de représentation vaut un, cela signifie qu'il existe un mot représentant le graphe et contenant une seule copie de chaque lettre. Par conséquent, tous les sommets du graphe sont forcément connectés entre eux au vu de la remarque 2.0.4. Les seuls graphes ayant un nombre de représentation valant un sont donc les graphes complets.

2.2.3 Nombre de représentation : 2

Nous avons établi que seuls les graphes complets admettent un nombre de représentation égal à 1. Dans cette sous-section, un résultat provenant de [9] montre que le nombre de représentation des échelles vaut 2 et un exemple issu de [12] prouve qu'il existe des graphes ayant un nombre de représentation plus grand que deux. Pour finir, nous démontrons que l'ensemble  $\mathcal{R}_2$  correspond à l'ensemble des graphes circulaires exceptés les graphes complets.

**THÉORÈME 2.2.7.** *Les échelles  $L_n$ ,  $n \geq 2$ , ont un nombre de représentation égal à 2.*

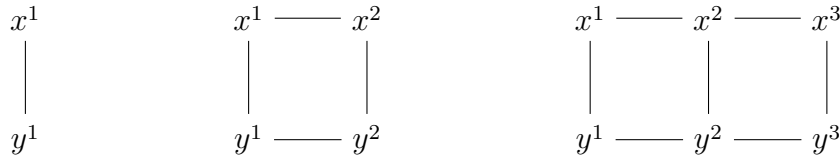


FIGURE 2.2 – Les échelles  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$

**REMARQUE 2.2.8.** L'échelle  $L_1$  n'est pas reprise dans le théorème 2.2.7 puisqu'elle correspond au graphe complet  $K_2$ . Par conséquent, son nombre de représentation vaut 1.

*Démonstration.* Le résultat est prouvé par récurrence sur  $n \geq 2$ . Pour le cas de base où  $n = 2$ , l'échelle  $L_1$  possède le représentant 2-uniforme  $w^1 = x^1y^1x^1y^1$ . Ce mot contient le facteur  $y^1x^1$ . Ce facteur est substitué dans  $w^1$  par  $y^2y^1x^2y^2x^1x^2$  et nous considérons le miroir du mot ainsi formé. Le mot obtenu est  $w^2 = y^1x^2x^1y^2x^2y^1y^2x^1$ . Il représente l'échelle  $L_2$  au vu des alternances des nouveaux symboles  $x^2$  et  $y^2$ . De plus, remarquons que  $w^2$  contient le facteur  $y^2x^2$ .

De manière générale, étant donné une représentation 2-uniforme  $w^i$  du graphe  $L_i$  et contenant le facteur  $y^ix^i$ , ce facteur est substitué dans  $w^i$  par  $y^{i+1}y^ix^{i+1}y^{i+1}x^ix^{i+1}$  et nous considérons le miroir du mot ainsi formé  $w^{i+1}$ . Ce mot contient le facteur  $y^{i+1}x^{i+1}$  et représente l'échelle  $L_{i+1}$  puisque les seules choses à vérifier sont les propriétés d'alternance des lettres ajoutées  $x^{i+1}$  et  $y^{i+1}$ . □

Le théorème 2.2.9 prouve qu'il existe des graphes possédant un nombre de représentation supérieur à deux. Ainsi, tous les graphes n'appartiennent pas à  $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ .

**THÉORÈME 2.2.9.** *Le graphe  $G$  de la FIGURE 2.3 n'est pas représentable par un mot 2-uniforme.*

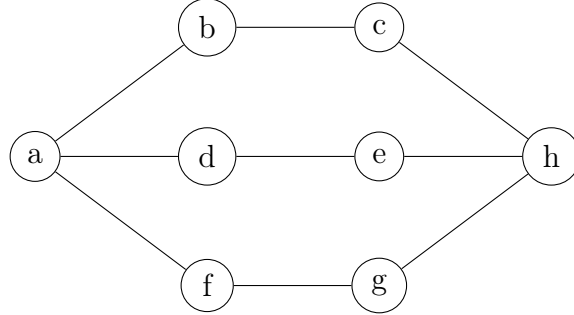


FIGURE 2.3 – Graphe non-représentable par un mot 2-uniforme

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons que  $G$  possède un représentant 2-uniforme  $w$ . Par la proposition 2.2.6, on peut supposer que le mot  $w$  commence par le symbole  $a$ . Nécessairement, les sous-mots  $abab$ ,  $adad$ ,  $afaf$  apparaissent dans  $w$  au vu du graphe. De plus, comme les sommets  $b, d$  et  $f$  ne sont pas adjacents, on en tire qu'ils apparaissent dans des ordres opposés de chaque côté du second  $a$ . Nous pouvons donc supposer voir le sous-mot  $abdfafdb$  dans  $w$ , quitte à renommer les sommets. Considérons maintenant deux cas.

Supposons que la lettre  $h$  apparait entre les deux instances de  $d$ . Comme l'arête  $dh$  n'existe pas, les deux occurrences de  $h$  sont forcément entre les deux occurrences de  $d$ . Puisque le sommet  $c$  est adjacent au sommet  $h$ , une copie de  $c$  doit se trouver entre les deux occurrences de  $h$ . Par conséquent, cette copie est aussi entre les deux occurrences de  $d$ . Etant donné que l'arête  $cd$  n'existe pas, la seconde occurrence de  $c$  doit également se trouver entre les deux symboles  $d$ . Mais, dans ce cas, les lettres  $c$  et  $b$  ne s'alternent pas, d'où nous obtenons une contradiction.

Ainsi, la lettre  $h$  n'apparait pas entre les deux occurrences de  $d$ . De plus, comme les sommets  $h$  et  $a$  ne sont pas adjacents, les deux copies de la lettre  $h$  sont nécessairement soit avant le premier  $d$ , soit après le second  $d$ . Au vu du graphe, nous savons que le symbole  $g$  doit alterner avec les lettres  $h$  et  $f$  donc une copie se trouve entre les deux  $f$  et l'autre entre les deux  $h$ . Dans ce cas, les symboles  $g$  et  $d$  s'alternent, d'où nous obtenons une contradiction.  $\square$

## $\mathcal{R}_2$ ou l'ensemble des graphes circulaires non complets

Maintenant que nous avons montré qu'il existe des graphes qui n'appartiennent pas à  $\mathcal{R}_2$ , essayons de caractériser cet ensemble. Un théorème issu de [10] stipule que  $\mathcal{R}_2$  correspond à l'ensemble des graphes circulaires non complets.

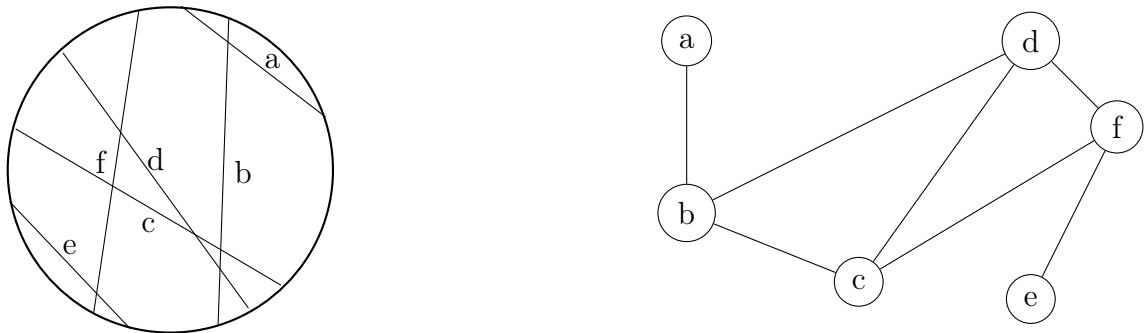
**THÉORÈME 2.2.10.** *Un graphe  $G$  est représentable par mot et possède un représentant avec au plus deux copies de chaque lettre si et seulement si  $G$  est un graphe circulaire.*

*Démonstration.*

Supposons que le graphe  $G$  soit circulaire. Par définition, ses sommets peuvent être associés aux cordes d'un cercle  $C$  de manière telle que deux cordes  $a$  et  $b$  s'intersectent si et seulement si l'arête  $ab$  existe. Afin de trouver un représentant du graphe  $G$ , il suffit de se placer à un endroit sur le cercle  $C$  et de tourner le long du cercle. A chaque fois qu'une corde est rencontrée, la lettre de celle-ci est écrite. Comme une corde a deux extrémités, chaque lettre apparaît deux fois et le mot obtenu représente effectivement le graphe  $G$  par définition d'un graphe circulaire.

Supposons désormais avoir un graphe  $G$  représentable par mot et possédant un représentant avec au plus deux copies de chaque lettre. Au vu du processus décrit dans la preuve du théorème 2.2.1, ce représentant peut être supposé 2-uniforme et est noté  $w$ . Considérons un cercle et notons sur son pourtour le mot  $w$ . Entre deux lettres identiques, une corde est tracée et nommée comme ses extrémités. A partir de ce cercle, un graphe circulaire est obtenu dont  $w$  est un représentant par définition.  $\square$

Voici un exemple illustrant ce résultat.



Un mot représentant le graphe ci-dessus est donné par

$$w = abacdbefcdf.$$

**REMARQUE 2.2.11.** Ce théorème implique que tous les exemples de graphes possédant un nombre de représentation égal à deux sont des graphes circulaires non complets. En outre, démontrer qu'un graphe est circulaire permet de conclure qu'il est représentable par un mot 2-uniforme.

### 2.2.4 Nombre de représentation : 3

Comme le théorème 2.2.9 le prouve, il existe des graphes qui ne sont pas représentables par un mot 2-uniforme. C'est notamment le cas du graphe de Petersen et des prismes qui ne sont pas représentables par un mot 2-uniforme mais le sont par un mot 3-uniforme. Par conséquent, ils appartiennent à  $\mathcal{R}_3$ . Les preuves sont tirées de [9, 10, 12].

**THÉORÈME 2.2.12.** *Le nombre de représentation du graphe de Petersen vaut 3.*

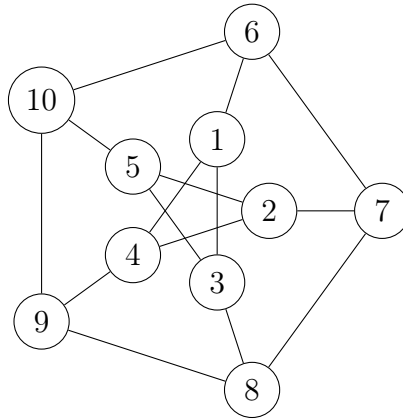


FIGURE 2.4 – Le graphe de Petersen

*Démonstration.*

Commençons par montrer que le graphe de Petersen n'est pas représentable par un mot 2-uniforme. Pour ce faire, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il possède un représentant 2-uniforme  $w$ . Soit  $x$  une lettre de  $w$  telle que le nombre de lettres entre deux occurrences de  $x$  est minimal. Puisque le graphe de Petersen est 3-régulier, il doit y avoir exactement trois lettres différentes entre les  $x$ . Sinon, une lettre  $z$  se situe deux fois entre les deux occurrences de  $x$  puisque  $d(x) = 3$ , ce qui contredit la minimalité du nombre de lettres entre deux occurrences de  $x$ . En effet, il y a moins de lettres entre les deux  $z$ .

Par symétrie, nous pouvons supposer que  $x = 1$ . Au vu de la proposition 2.2.6, nous pouvons supposer que  $w$  commence par 1. Donc, les lettres 3, 4 et 6 sont entre les deux occurrences de 1. Comme les sommets 3, 4 et 6 ne sont pas adjacents, nous obtenons  $w = 13461w^16w^24w^33w^4$ , où les mots  $w^i$  peuvent éventuellement être vides, pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Comme le sommet 7 est adjacent au sommet 6 mais pas au sommet 4, la lettre 7 doit apparaître dans  $w^1$  et  $w^2$ . Similairement, comme le noeud 8 est adjacent au noeud 3 mais pas au noeud 4, le symbole 8 doit apparaître dans  $w^3$  et  $w^4$ . Par conséquent, les lettres 7 et 8 ne s'alternent pas puisque le sous-mot 7788 apparaît dans  $w$ . Or, les sommets 7 et 8 sont adjacents, d'où nous obtenons une contradiction.

Le graphe de Petersen est représentable par un mot 3-uniforme. Par exemple, on vérifie aisément que le mot

$$683274152948(10)967385213(10)5649(10)17$$

convient. □

Tout comme le graphe de Petersen, les prismes, définis à la page 11, appartiennent à  $\mathcal{R}_3$ .

**THÉORÈME 2.2.13.** *Le nombre de représentation des prismes  $Pr_n$ ,  $n \geq 3$ , vaut 3.*

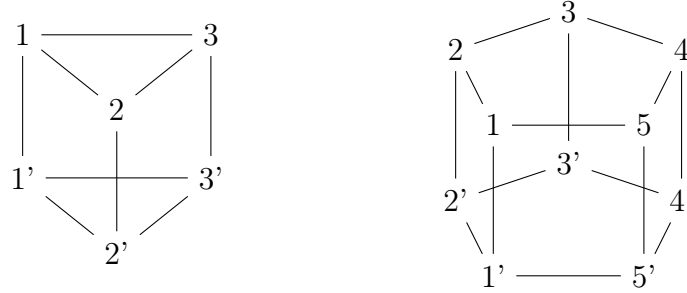


FIGURE 2.5 – Les prismes  $Pr_3$  et  $Pr_5$

*Démonstration.*

Soit  $n \geq 3$ . Commençons par prouver que les prismes  $Pr_n$  ne sont pas représentables par un mot 2-uniforme. Raisonnons par l'absurde et supposons que  $Pr_n$  possède un représentant 2-uniforme  $w$ . Il existe une lettre  $x$  telle qu'aucune autre lettre n'apparaît deux fois entre les deux occurrences de  $x$ . Alors, il y a exactement trois lettres entre les deux instances de  $x$  puisque le degré de chaque sommet est trois. Par symétrie, nous pouvons supposer que  $x = 1$ . Au vu des propositions 2.1.1 et 2.2.6, il n'y a que deux cas à considérer.

- Soit  $n \geq 4$  et soit  $w$  de la forme  $11'2n1 \dots n \dots 2 \dots 1' \dots$ . Puisque les arêtes  $nn'$  et  $1'n'$  existent dans  $Pr_n$ , nous savons que  $w$  est de la forme  $11'2n1 \dots n' \dots n \dots 2 \dots 1' \dots n' \dots$ . Dans ce cas, l'arête  $2n'$  existe dans  $Pr_n$  au vu du sous mot  $11'2n1n'n21'n'$ , ce qui n'est pas le cas lorsque  $n \geq 4$ . Si  $n = 3$ , alors  $w = 11'231 \dots 2 \dots 3 \dots 1' \dots$  puisque l'arête  $23$  existe. De plus, puisque les arêtes  $33'$  et  $1'3'$  existent mais pas l'arête  $23'$ , nous savons que  $w = 11'231 \dots 2 \dots 3' \dots 3 \dots 1' \dots 3' \dots$ . Il reste donc  $2'$  à placer deux fois pour que  $w$  soit un représentant 2-uniforme du prisme  $Pr_3$ . Or, nous savons que  $2'$  doit s'alterner uniquement avec les lettres  $1', 3'$  et  $2$ . Ainsi, nous obtenons  $w = 11'2312'23'31'2'3'$  mais ce n'est pas un représentant du prisme  $Pr_3$  puisque les lettres  $2'$  et  $3$  s'alternent.
- Soit  $n \geq 4$  et soit  $w$  de la forme  $121'n1 \dots n \dots 1' \dots 2 \dots$ . Puisque les arêtes  $nn'$  et  $1'n'$  existent dans  $Pr_n$  et que l'arête  $2n'$  n'existe pas dans  $Pr_n$ , nous savons que  $w$  est de la forme  $121'n1 \dots n' \dots n \dots 1' \dots n' \dots 2 \dots$ . De plus, les arêtes  $22'$  et  $1'2'$  existent dans  $Pr_n$  tandis que l'arête  $2'n$  n'existe pas dans  $Pr_n$ . Par conséquent, nous savons que  $w$  est de la forme  $121'n1 \dots n' \dots n \dots 2' \dots 1' \dots n' \dots 2 \dots 2' \dots$ . Nous constatons cependant que l'arête  $2'n'$  existe dans  $Pr_n$  au vu du sous mot  $n'2'n'2'$ , ce qui n'est pas le cas lorsque  $n \geq 4$ . Lorsque  $n = 3$ , un tel représentant n'existe pas puisque les lettres  $2$  et  $3$  doivent s'alterner mais pas les lettres  $3$  et  $1'$ , ni les lettres  $2$  et  $1'$ .

En conclusion, pour tout  $n \geq 3$ , le prisme  $Pr_n$  n'est pas représentable par un mot 2-uniforme. Nous en tirons que les prismes  $Pr_n$ ,  $n \geq 3$ , ne peuvent pas être représentés par un mot utilisant au plus deux copies de chaque lettre. En effet, le processus décrit au théorème 2.2.1 nous donnerait un mot 2-uniforme représentant le graphe sinon.



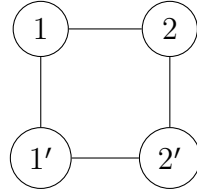
Il reste à montrer que les prismes possèdent un représentant 3-uniforme. Commençons par établir un résultat utile : Soit  $G$  un graphe représentable par un mot 3-uniforme  $w$ . Considérons deux symboles  $x$  et  $y$  s'alternant dans  $w$  de manière telle que la première occurrence de  $x$  survient avant la première occurrence de  $y$ . Le but est de trouver un mot représentant le graphe  $G$  auquel nous avons ajouté deux sommets  $u$  et  $v$  et trois arêtes  $xu, uv$  et  $vy$ , autrement dit, nous avons ajouté le chemin simple  $xvuy$ . Pour ce faire, il suffit de substituer, dans  $w$ ,  $x_1$  par  $u_1v_1x_1u_2$  et  $y_2$  par  $v_2y_2u_3v_3$ . Nous obtenons un nouveau mot, notons-le  $w'$ . Ce mot convient. En effet, si nous supprimons les symboles  $u$  et  $v$  de  $w'$ , nous obtenons  $w$ . Il nous reste donc à vérifier les sommets adjacents à  $u$  et  $v$ . Les substitutions effectuées impliquent que  $u$  ne pourrait être adjacent qu'à  $x$  et  $v$  et le sommet  $v$  qu'à  $y$  et  $u$ , ce qui est le cas étant donné le sous-mot contenant ces symboles :

$$uvxuyxvuyvxy.$$

Constatons, en outre, que le nouveau mot est toujours 3-uniforme. Considérons le mot 3-uniforme

$$w^2 = 121'12'21'2'11'22'$$

représentant le cycle de longueur quatre qui est un prisme particulier  $Pr_2$  :



Remarquons que  $w^2$  contient les facteurs  $1_12_1$  et  $1'_22'_2$ . Ajoutons le chemin simple  $233'2'$  en utilisant le résultat établi. Les conditions sont bien vérifiées pour  $x = 2$  et  $y = 2'$ . Nous obtenons le mot 3-uniforme

$$w^3 = 133'231'12'21'3'2'33'11'22'$$

satisfaisant les propriétés suivantes pour  $i = 3$  :

1.  $w^i$  contient les facteurs  $1_1i_1$  et  $1'_2i'_2$  ;
2. Le sous-mot induit par 1 et  $i$  est  $1ii1i1$  ;
3. Le sous-mot induit par  $1'$  et  $i'$  est  $i'1'1'i'i'1'$ .

Itérons l'opération en ajoutant le chemin simple  $i(i+1)(i+1)'i'$  pour  $i = 3, \dots, n-1$ . Les conditions pour appliquer le résultat sont, à chaque fois, bien vérifiées pour  $x = i$  et  $y = i'$ . Les propriétés ci-dessus restent vérifiées pour tout  $i$ . Le mot  $w^n$  obtenu représente le prisme  $Pr_n$  sans les arêtes  $1n$  et  $1'n'$ . Pour obtenir le prisme  $Pr_n$ , il suffit désormais de

substituer les facteurs  $1_1n_1$  et  $1'_2n'_2$  dans  $w^n$  par  $n_11_1$  et  $n'_21'_2$ , respectivement. En effet, au vu des propriétés 2 et 3, les arêtes manquantes  $1n$  et  $1'n'$  apparaissent et rien d'autre n'est modifié puisque la propriété 1 informe que les symboles étaient directement à la suite l'un de l'autre dans  $w^n$ .  $\square$

Le prisme  $Pr_3$  peut également être représenté par le mot

$$13'231'12'23'1'2'33'11'22'3.$$

En trouvant le nombre de représentation de ces graphes, il est établi qu'ils sont représentables par mot. De plus, tout graphe possédant un prisme  $Pr_n$ ,  $n \geq 3$ , ou le graphe de Petersen comme sous-graphe induit a un nombre de représentation plus grand ou égal à trois au vu de la remarque 2.2.5.

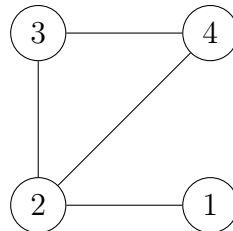
### 2.3 Lien avec les graphes de comparabilité

Nous avons démontré qu'un graphe représentable a un nombre de représentation. Des exemples de graphes représentables ont été fournis en trouvant ce nombre. Cependant, certains graphes peuvent avoir un nombre de représentation élevé. Dans leur article [7], Halldórsson et al. prouvent que chaque graphe représentable à  $n$  sommets,  $n \geq 3$ , possède un représentant  $2(n - 2)$ -uniforme. Dans cette circonstance, il est évident que tous les cas possibles de mots ne peuvent pas être testés afin d'en trouver un représentant. C'est pourquoi il est intéressant de déterminer des graphes représentables grâce à de nouveaux critères. Dans le cas des graphes possédant un sommet adjacent à tous les autres, nous démontrons une condition nécessaire et suffisante issue de [12]. Afin de le prouver, quelques notions supplémentaires sont nécessaires. De plus, nous proposons une alternative à ce résultat et nous fournissons des exemples de graphes ayant cette caractéristique et étant représentables par mot.

**DÉFINITION 2.3.1.** Un graphe est *représentable par permutation* s'il peut être représenté par un mot de la forme  $p^1 \dots p^k$  où  $p^i$  est une permutation pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Pour rappel, une *permutation* de l'ensemble  $X$  est une bijection de  $X$  dans lui-même. Ici,  $X$  est un ensemble fini puisque  $X = \{1, \dots, \#V\}$ .

Le graphe



peut être représenté par le mot 21342341 donc il est représentable par permutation.

**THÉORÈME 2.3.2.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe avec  $\#V = n$  et soit  $x \in V$  un sommet de degré  $n - 1$ . Posons le graphe  $H = G \setminus \{x\}$ . Alors, le graphe  $G$  est représentable par mot si et seulement si le graphe  $H$  est représentable par permutation.*

*Démonstration.*

Supposons que le graphe  $H$  est représentable par permutation. Soit  $w = p^1 p^2 \dots p^k$  un de ses représentants, où pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $p^i$  est une permutation. Alors, le mot  $x_1 p^1 x_2 p^2 \dots x_k p^k$  représente le graphe  $G$  étant donné que  $d(x) = n - 1$ .

Supposons que le graphe  $G$  est représentable par un mot. Alors, le théorème 2.2.1 stipule qu'il existe un  $k \in \mathbb{N}$  tel que ce mot est  $k$ -uniforme. Par le théorème 2.2.2, nous pouvons supposer que  $k \geq 2$ . La proposition 2.2.6 permet d'écrire le mot  $w$

$$w = x_1 p^{1'} x_2 p^{2'} \dots x_{k-1} p^{(k-1)'} x_k p^{k'}$$

où les  $p^{i'}$  peuvent éventuellement être vides. Le mot  $w' = p^{1'} p^{2'} \dots p^{(k-1)'} p^{k'}$  convient comme représentant du graphe  $H$  au vu de la construction de  $H$ . Étant donné que  $x$  est adjacent à tous les sommets, les  $p^{i'}$  sont des permutations pour tout  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ . Pour la même raison,  $p^{k'}$  contiennent chaque lettre au plus une fois. Posons  $p^{k''} = p^{k-1'} \setminus \text{Var}(p^{k'})$ , c'est-à-dire que  $p^{k''}$  est le mot  $p^{k-1'}$  dont on enlève les symboles apparaissant dans  $p^{k'}$ . Alors,  $p^k = p^{k'} p^{k''}$  est une permutation et le mot  $w' p^{k''} = p^{1'} p^{2'} \dots p^{(k-1)'} p^k$  représente aussi le graphe  $H$ . En effet, si deux symboles ne s'alternent pas dans  $w'$ , alors ils ne peuvent pas s'alterner dans  $w' p^{k''}$ . Supposons que deux symboles  $y$  et  $z$  s'alternent dans  $w'$ , ce qui implique qu'ils sont adjacents dans le graphe  $H$ . Dans ce cas, nous pouvons imaginer avoir  $y$  avant  $z$  dans chaque  $p^{i'}$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ . En outre, puisque les sommets  $y$  et  $z$  sont adjacents dans  $H$ , deux cas se présentent :

- Soit le sous-mot  $yz$  apparaît dans  $p^{k'}$  et l'ajout de  $p^{k''}$  ne modifie pas leur alternance puisqu'il ne contient pas  $\text{Var}(p^{k'})$ .
- Soit le sous-mot  $yz$  n'apparaît pas dans  $p^{k'}$ . Si ni  $y$  ni  $z$  n'appartiennent à  $\text{Var}(p^{k'})$  alors l'ajout de  $p^{k''}$  ne modifie pas leur alternance puisqu'il conserve l'ordre de  $p^{k-1'}$ . Si  $y$  ou  $z$  appartient à  $\text{Var}(p^{k'})$ , alors nécessairement c'est  $y$  qui est un facteur de  $p^{k'}$  puisque les symboles  $y$  et  $z$  s'alternent dans  $w'$  et que  $y$  apparaît avant  $z$ . Par construction,  $p^{k''}$  ne contient pas  $\text{Var}(p^{k'})$  donc il contient la lettre  $z$  mais pas la lettre  $y$ . Par conséquent, l'ordre  $y$  avant  $z$  est toujours respecté.

D'où, le mot  $w' p^{k''} = p^{1'} p^{2'} \dots p^{(k-1)'} p^k$  représente bien le graphe  $H$ . Donc  $H$  est représentable par permutation.  $\square$

Ainsi, nous savons que le graphe roue  $W_4$ , illustré à la FIGURE 1.12, est représentable par mot puisque le cycle à 4 sommets admet le représentant 13243142.

De plus, la démonstration fournit gratuitement le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 2.3.3.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe avec  $\#V = n$  et soit  $x \in V$  un sommet de degré  $n - 1$ . Posons le graphe  $H = G \setminus \{x\}$ . Soit  $k \in \mathbb{N}_0$ . Alors, le graphe  $G$  est représentable par un mot  $k$ -uniforme si et seulement si le graphe  $H$  est représentable par un mot constitué de  $k$  permutations.

Nous venons de fournir une condition nécessaire et suffisante pour que certains types de graphes soient représentables par mot. Cependant, prouver la représentabilité par permutation n'est pas aisé. En effet, remarquons que posséder un représentant  $k$ -uniforme n'implique pas que ce représentant soit composé de  $k$  permutations bien que la réciproque soit vraie. Ainsi, si nous connaissons le nombre de représentation d'un graphe, celui-ci peut soit être représenté par  $k$  permutations où  $k$  est plus grand ou égal au nombre de représentation du graphe, soit ne pas être représentable par permutation. Dans ces circonstances, il est fastidieux de tester tous les cas possibles. C'est pourquoi nous donnons une alternative à la représentabilité par permutation grâce à la notion de graphe de comparabilité.

**DÉFINITION 2.3.4.** Une orientation d'un graphe (orienté) est *transitive* si la relation  $E$  définissant les arêtes est transitive, i.e. si la présence des arêtes  $u \rightarrow v$  et  $v \rightarrow z$  implique la présence de l'arête  $u \rightarrow z$ .

Un graphe non-orienté est *un graphe de comparabilité* s'il admet une orientation transitive.

**THÉORÈME 2.3.5.** Un graphe est représentable par permutation si et seulement si c'est un graphe de comparabilité.

Dans la démonstration, nous aurons besoin de la notion de tri topologique. Les informations sont tirées de [17].

**DÉFINITION 2.3.6.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple orienté. Un *tri topologique* de  $G$  est une énumération  $v_1, \dots, v_n$  des sommets de  $G$  tel que si  $v_i \rightarrow v_j$  dans  $G$ , alors  $i < j$ .

**THÉORÈME 2.3.7.** Un graphe simple orienté admet un tri topologique si et seulement si il est sans cycle.

La preuve de ce théorème est consultable dans [17, p. 46-49].

**REMARQUE 2.3.8.** Il n'y a pas unicité du tri topologique.

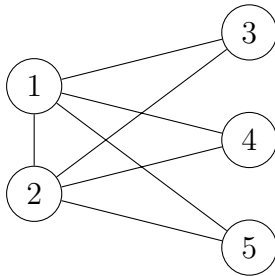
A un tri topologique donné correspond une énumération des sommets donc un *ordre linéaire*, c'est-à-dire total.

Ci-dessous, nous démontrons le théorème 2.3.5.

*Démonstration.*

Soit  $G$  un graphe de comparabilité. Par définition, il admet une orientation transitive. Nous appellerons  $GO$  le graphe orienté obtenu. Afin de comprendre la preuve, les étapes sont illustrées simultanément sur le graphe suivant dont une orientation transitive est donnée.

Graphe.



Description du processus.

Le graphe orienté  $GO$  ne contient pas de cycle puisque l'orientation est transitive. Par conséquent, le théorème 2.3.7 affirme que le graphe  $GO$  admet un tri topologique. Chaque tri topologique du graphe fournit une énumération des sommets donc un ordre linéaire qui correspond à une permutation  $p^i$ .

Le mot  $p^1 \dots p^k$  convient comme représentant du graphe  $G$ . En effet, deux lettres s'alternent si et seulement si elles ont le même ordre dans chaque permutation. Ceci est le cas si et seulement si elles sont comparables dans les ordres linéaires, c'est-à-dire, si et seulement si les sommets correspondants sont adjacents au vu de l'orientation transitive qu'admet le graphe.

Supposons désormais avoir un graphe avec  $p^1 \dots p^k$  comme représentant, où  $p^i$  est une permutation pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Chaque permutation correspond à une énumération des sommets, c'est-à-dire à un tri topologique des sommets du graphe, donc à un ordre linéaire. Considérons l'intersection de ces ordres  $\bigcap_{i=1}^k \{(a, b) | a <_i b\}$ . L'ordre  $1 < 2$  est compatible à chaque  $p^i$ , contrairement à l'ordre  $3 < 5$  qui n'est pas respecté dans  $p^4$ ,  $p^5$  ni  $p^6$ .

L'intersection de ces ordres donne une orientation du graphe qui est transitive par construction.

Orientation transitive.

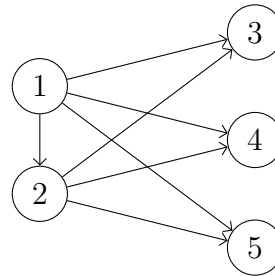


Illustration sur l'exemple.

$$\begin{aligned} p^1 &= 12354 \\ p^2 &= 12345 \\ p^3 &= 12435 \\ p^4 &= 12453 \\ p^5 &= 12543 \\ p^6 &= 12534 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^1 p^2 p^3 p^4 p^5 p^6 &= \\ 12354 | 12345 | 12435 \\ 12453 | 12543 | 12534. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 < 2, 1 < 3, 1 < 4, 1 < 5 \text{ donc} \\ 1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 1 \rightarrow 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 < 3, 2 < 4, 2 < 5 \text{ donc} \\ 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 5 \end{aligned}$$

□

Le corollaire suivant est une conséquence directe du résultat qui vient d'être établi.

**COROLLAIRE 2.3.9.** *Tous les graphes bipartis et les couronnes sont représentables par permutation.*

*Démonstration.* Pour démontrer ce résultat, il suffit d'utiliser le théorème précédent et de trouver une orientation transitive des graphes bipartis et des couronnes. Or, par définition, l'ensemble des sommets de tels graphes peut être partitionné en deux ensembles, notons-les  $V_1$  et  $V_2$ , de telle façon que  $E = V_1 \times V_2$ , où  $E$  est l'ensemble des arêtes. En orientant toutes les arêtes des sommets de l'ensemble  $V_1$  vers ceux de l'ensemble  $V_2$ , nous obtenons une orientation transitive aussi bien des graphes bipartis que des couronnes. On obtient donc la conclusion.  $\square$

En combinant ce résultat au théorème 2.3.2, une série de graphes représentables par mot est obtenue. En effet, il suffit d'ajouter un sommet adjacent à tous les autres sommets.

## 2.4 Graphes non-représentables

Nous avons établi une condition nécessaire et suffisante afin d'identifier un graphe représentable possédant la caractéristique qu'un de ses sommets au moins est lié à tous les autres. Cela permet de prouver, à l'aide du graphe roue  $W_5$ , qu'il existe des graphes qui ne sont pas représentables par mot. Ce résultat s'étend aux graphes roues  $W_{2n+1}$  pour  $n \geq 2$  et est issu de [11]. Ensuite, nous construisons, sur base de l'article [13], de nouveaux graphes non-représentables par mot.

**THÉORÈME 2.4.1.** *Le graphe roue  $W_5$  n'est pas représentable par mot.*

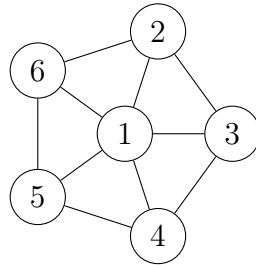


FIGURE 2.6 – Le graphe roue  $W_5$

*Démonstration.* S'il est établi que le cycle à 5 sommets n'est pas représentable par permutation alors le théorème 2.3.2 permet de conclure que le graphe roue n'est pas représentable par mot. Or, le théorème 2.3.5 affirme que le cycle à 5 sommets n'est pas représentable par permutation si ce n'est pas un graphe de comparabilité. Pour le prouver, tentons de donner une orientation aux arêtes. Celle-ci doit être transitive pour avoir un graphe de comparabilité. Sans perte de généralité, supposons que l'arête 65 soit orientée  $6 \rightarrow 5$ . Pour être une orientation transitive, l'arête 54 doit être orientée  $4 \rightarrow 5$  puisque que les sommets

6 et 4 ne sont pas adjacents. Puisque l'arête 53 n'existe pas, nous avons  $4 \rightarrow 3$ . De plus, comme les sommets 2 et 4 ne sont pas adjacents, nécessairement l'orientation de l'arête liant les noeuds 2 et 3 est  $2 \rightarrow 3$  afin d'avoir une orientation transitive. Cependant, il n'y a aucun moyen d'orienter l'arête 26 dans ce but. En effet, si nous avons  $2 \rightarrow 6$ , il faudrait que l'arête 25 existe, ce qui n'est pas le cas. Donc nous avons  $6 \rightarrow 2$ , mais les sommets 6 et 3 ne sont pas adjacents. Ainsi, le cycle à 5 sommets n'est pas un graphe de comparabilité donc n'est pas représentable par permutation. Il suffit de conclure grâce au théorème 2.3.2.  $\square$

**THÉORÈME 2.4.2.** *Pour  $n \geq 2$ , le graphe roue  $W_{2n+1}$  n'est pas représentable par mot.*

*Démonstration.* Soit  $n \geq 2$ . Prouvons que le cycle à  $2n + 1$  sommets n'est pas un graphe de comparabilité. En itérant le processus de la preuve précédente, nous arrivons à une contradiction puisque le cycle est de longueur impaire. Ainsi, le théorème 2.3.5 affirme que le cycle à  $2n + 1$  sommets n'est pas représentable par permutation. On en tire que le graphe roue  $W_{2n+1}$  n'est pas représentable par mot grâce au théorème 2.3.2.  $\square$

Connaissant désormais des graphes non-représentables par mot, nous pouvons établir que la réciproque du théorème 2.0.5 et, par conséquent, celle du théorème 2.2.4 sont fausses.

**REMARQUE 2.4.3.** Le fait que tous les sous-graphes induits d'un graphe  $G$  soient représentables n'implique pas que le graphe  $G$  est représentable. Il suffit, pour le prouver, de trouver un exemple. Nous venons de voir que le graphe roue  $W_5$  n'est pas représentable. Or, tous ses sous-graphes induits le sont. En effet, commençons par retirer un sommet. Si ce sommet est le sommet central 1, le cycle à 5 sommets est obtenu, or il est représentable par le mot 56453423. Si ce sommet est un autre, supposons 6 sans perte de généralité, le mot 54153421 convient comme représentant. Si plus d'un sommet est retiré au graphe roue  $W_5$ , nécessairement un sous-graphe induit d'un des deux sous-graphes induits dont nous venons de parler est obtenu. Or, le théorème 2.0.5 stipule qu'ils sont représentables. Il est évident qu'il en va de même pour la représentabilité par un mot  $k$ -uniforme. En effet, grâce aux théorèmes 2.2.1 et 2.2.2, nous savons qu'il existe un naturel  $k$  tel que des représentants  $k$ -uniformes des sous-graphes induits du graphe roue  $W_5$  existent. Or, nous venons d'établir que le graphe roue n'est pas représentable par mot donc il ne peut pas être représentable par un mot  $k$ -uniforme.

Sachant désormais qu'il existe des graphes qui ne sont pas représentables par mot, nous allons créer, à partir d'un graphe quelconque, un graphe non-représentable. Cela est possible pour certains graphes, comme stipulé par le théorème 2.4.7 provenant de l'article [13], en itérant quatre fois l'application de graphe linéaire  $L^4(G) = L(L(L(L(G))))$  où  $L(G)$  est défini à la page 7. Cependant, pour certains graphes, moins de quatre itérations sont suffisantes. Par exemple, en ce qui concernent les graphes complets  $K_n$ , avec  $n \geq 5$ , et les graphes roues  $W_n$ , avec  $n \geq 4$ , une seule application du graphe linéaire suffit à obtenir un graphe non-représentable. Commençons par établir ces deux derniers résultats.

**THÉORÈME 2.4.4.** *Soit  $n \geq 5$ . Pour le graphe complet  $K_n$ , le graphe linéaire  $L(K_n)$  est non-représentable par mot.*

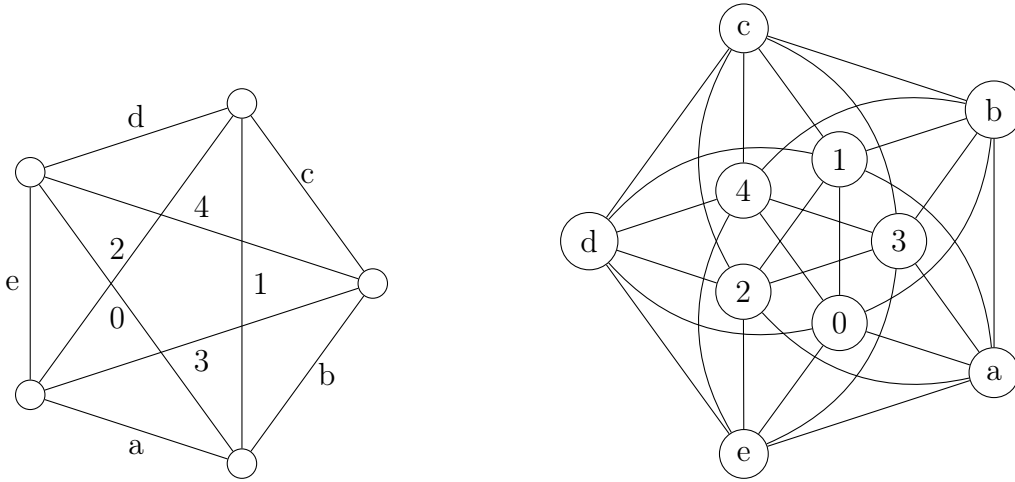


FIGURE 2.7 – Le graphe complet  $K_5$  et son graphe linéaire  $L(K_5)$

*Démonstration.* Etant donné que  $K_5$  est un sous-graphe de  $K_n$  pour tout  $n \geq 5$ ,  $L(K_n)$  contient le sous-graphe  $L(K_5)$ . Il suffit donc de prouver le résultat pour  $n = 5$ .

Raisonnons par l'absurde et supposons avoir  $w$  un représentant de  $L(K_5)$  dont les sommets sont nommés comme à la FIGURE 2.7. Les sommets  $0, 1, a$  et  $b$  forment le graphe complet  $K_4$ . Par conséquent, entre deux occurrences de  $a$ , les symboles  $0, 1$  et  $b$  apparaissent et l'ordre d'apparition des lettres est toujours le même. Nous obtenons trois possibilités de placement de la lettre  $b$ .

- Soit la lettre  $b$  est située entre les symboles  $0$  et  $1$ . Le sous-mot formé de ces lettres est alors une répétition de  $a0b1a$  ou de  $a1b0a$ . Le second étant le miroir du premier, le traitement d'un cas est suffisant. Comme le sommet  $3$  est adjacent au sommet  $a$  mais pas aux sommets  $0$  et  $1$ , les sous-mots  $a30b1a$  et  $a0b13a$  sont dans  $w$ . Dans ce cas, nous avons les sous-mots  $a3b$  et  $ab3$ , d'où nous obtenons une contradiction puisque  $b$  et  $3$  sont adjacents.
- Soit la lettre  $b$  est située avant les symboles  $0$  et  $1$ . Deux sous-mots sont obtenus.
  - ★ Le sous-mot formé des symboles  $a, b, 0$  et  $1$  est une répétition du mot  $ab01a$ . Le sommet  $e$  étant adjacent au sommet  $a$  mais pas aux sommets  $b$  et  $1$ , les sous-mots  $aeb01a$  et  $ab01ea$  apparaissent mais alors  $0$  et  $e$  ne s'alternent pas. On obtient donc une contradiction.
  - ★ Le sous-mot formé des symboles  $a, b, 0$  et  $1$  est une répétition du mot  $ab10a$ . Le sommet  $2$  étant adjacent au sommet  $a$  mais pas aux sommets  $b$  et  $0$ , les sous-mots  $a2b10a$  et  $ab102a$  apparaissent mais alors  $1$  et  $2$  ne s'alternent pas. On obtient donc une contradiction.
- Soit la lettre  $b$  est située après les symboles  $0$  et  $1$ . Les deux sous-mots possibles sont  $a01ba$  et  $a10ba$ . Ce sont les miroirs des mots précédents. Par conséquent, le même raisonnement conduit à la même contradiction.

En conclusion, il est impossible de trouver un mot  $w$  représentant le graphe linéaire  $L(K_5)$ .  $\square$



Afin de pouvoir établir qu'une unique application du graphe linéaire sur les graphes roues à  $n + 1$  sommets,  $n \geq 4$ , est suffisante pour obtenir un graphe non-représentable, nous avons besoin d'un résultat intermédiaire.

**LEMME 2.4.5.** *Soit  $n \geq 4$  et soit le cycle à  $n$  sommets labélisés consécutivement de 0 à  $n - 1$ . Quel que soit le représentant uniforme de ce cycle, il ne contient pas le sous-mot  $0_i 1_i \dots (n - 1)_i$  pour tout  $i$ .*

*Démonstration.* Soit  $n \geq 4$  et soit le cycle à  $n$  sommets labélisés consécutivement de 0 à  $n - 1$ . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un représentant uniforme  $w$  de ce cycle et un naturel  $i$  tel que  $w$  contient le sous-mot  $v = 0_i 1_i \dots (n - 1)_i$ . Par la proposition 2.2.6, nous pouvons supposer que ce  $i$  vaut 0.

Les sommets 0 et 2 ne sont pas adjacents dans le cycle à  $n$  sommets puisque  $n \geq 4$ . Par conséquent, ils ne s'alternent pas dans  $w$ . Autrement dit, il existe  $k \geq 1$  tel que  $2_k$  apparaît avant  $0_k$  ou après  $0_{k+1}$ .

Supposons que  $2_k$  apparaît avant  $0_k$ . Puisque 1, 2 et 0, 1 sont adjacents, nous avons  $1_j$  avant  $2_j$  et  $0_j$  avant  $1_j$  pour tout  $j$  donc en particulier pour  $k$ . On obtient donc une contradiction puisque nous devrions avoir le sous-mot

$$0_k 1_k 2_k 0_k.$$

Supposons que  $2_k$  apparaît après  $0_{k+1}$ . Puisque chaque paire  $\ell, \ell + 1$  et la paire  $n - 1, 0$  sont adjacentes, nous avons  $\ell_j$  avant  $(\ell + 1)_j$  pour tout  $\ell < n - 1$  et  $(n - 1)_j$  avant  $0_j$  pour tout  $j \geq 1$ . On obtient donc une contradiction puisque nous devrions avoir le sous-mot

$$2_k 3_k \dots (n - 1)_k 0_{k+1} 2_k.$$

□

**THÉORÈME 2.4.6.** *Soit  $n \geq 4$ . Pour tout graphe roue  $W_n$ , le graphe linéaire  $L(W_n)$  est non-représentable par mot.*

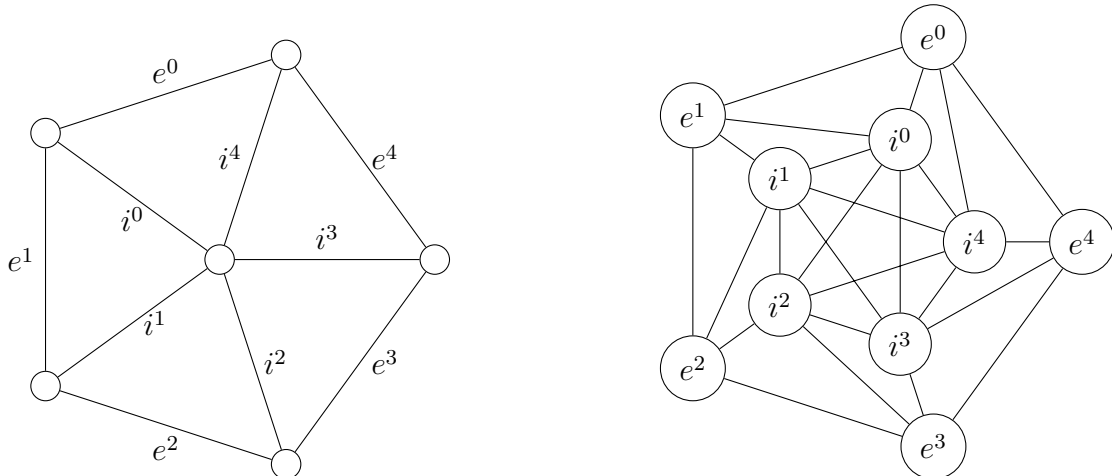


FIGURE 2.8 – Le graphe roue  $W_5$  et son graphe linéaire  $L(W_5)$

*Démonstration.* Soit  $n \geq 4$ . Premièrement, une description des graphes  $W_n$  et  $L(W_n)$  est nécessaire. Comme illustré par la FIGURE 2.8, annotons les arêtes du cycle du graphe roue  $W_n$  par  $e^0, e^1, \dots, e^{n-1}$  consécutivement et les arêtes menant au sommet central connecté à tous les autres par  $i^0, i^1, \dots, i^{n-1}$  de manière telle que l'arête  $i^j$  soit adjacente aux arêtes  $e^j$  et  $e^{j+1}$  pour  $0 \leq j \leq n-2$  et  $i^{n-1}$  soit adjacente aux arêtes  $e^{n-1}$  et  $e^0$ . Ainsi, dans le graphe linéaire  $L(W_n)$ , les sommets  $e^0, e^1, \dots, e^{n-1}$  forment le cycle à  $n$  sommets et les sommets  $i^0, i^1, \dots, i^{n-1}$  forment le graphe complet  $K_n$ . De plus, le sommet  $i^j$  est adjacente aux sommets  $e^j$  et  $e^{j+1}$  pour  $0 \leq j \leq n-2$  et  $i^{n-1}$  est connecté aux sommets  $e^{n-1}$  et  $e^0$ .

Cette description étant établie, raisonnons par l'absurde et supposons que le graphe linéaire  $L(W_n)$  est représentable. Le théorème 2.2.1 affirme qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que son représentant soit  $k$ -uniforme. Une absurdité due au lemme précédent permettra de conclure.

Considérons les alphabets  $E = \{e^j : 0 \leq j \leq n-1\}$ ,  $I = \{i^j : 0 \leq j \leq n-1\}$  et  $w$  un représentant  $k$ -uniforme de  $L(W_n)$  sur  $E \cup I$ . Par la proposition 2.2.6, nous pouvons supposer que  $w$  commence par le symbole  $i^0$ . Comme les sommets  $i^0, i^1, \dots, i^{n-1}$  forment le graphe complet  $K_n$ , le sous-mot de  $w$  induit par ces symboles est de la forme  $v^m$  où  $v$  est un mot 1-uniforme sur  $I$  dont la première lettre est  $i^0$ . Prouvons que  $v = i^0 i^1 \dots i^{n-1}$  ou  $v = i^0 i^{n-1} i^{n-2} \dots i^1$ .

Supposons qu'il existe deux indices  $\ell, k \in \{2, \dots, n-1\}$  tels que  $i^0 i^\ell i^1 i^k$  soit un sous-mot de  $v$ . Notons que  $\ell \neq k$  puisque  $v$  est 1-uniforme. Dans ce cas, ces symboles apparaissent toujours dans cet ordre dans  $w$  pour avoir le graphe  $K_n$ . Par construction, le sommet  $e^1$  n'est adjacent ni à  $i^\ell$  ni à  $i^k$ , ce qui implique que le sous-mot de  $w$  composé des symboles  $i^0, i^1, i^\ell, i^k$  et  $e^1$  possède les facteurs  $i^0 e^1 i^\ell i^1 i^k i^0$  et  $i^0 i^\ell i^1 i^k e^1 i^0$ . On obtient donc une contradiction puisque  $i^1$  et  $e^1$  ne s'alternent pas. Par conséquent,  $v = i^0 i^1 \dots$  ou  $v = i^0 \dots i^1$ .

En copiant le raisonnement pour  $i^j, i^{j+1}, e^{j+1}$  par récurrence sur  $j \geq 1$  et en ajoutant le fait que  $e^{j+1}$  alterne avec  $i^j$  et  $i^{j+1}$  mais pas avec  $i^{j+2}$  et  $i^{j-1}$ , on a  $v = i^0 i^1 \dots i^{n-1}$  pour le premier cas ou  $v = i^0 i^{n-1} i^{n-2} \dots i^1$  pour le second. Etant donné que le miroir d'un mot préserve les relations d'alternance, supposons  $v = i^0 i^1 \dots i^{n-1}$ . Alors le sous-mot formé des symboles  $i^0, e^0$  et  $e^1$  est une répétition du mot  $i^0 e^0 e^1 i^0$ .

En effet, étant donné que  $i^2$  est adjacent à  $i^0$  mais pas à  $e^1$ , nous savons que le sous-mot formé des symboles correspondants contient les facteurs  $i^0 e^1 i^2 i^0$  et  $i^0 i^2 e^1 i^0$ . De plus, comme les sommets  $i^0, i^1$  et  $e^1$  sont adjacents, le sous-mot composé de ces symboles est une répétition de  $i^0 i^1 e^1 i^0$  ou de  $i^0 e^1 i^1 i^0$ . Le second cas contredit l'apparition de  $i^0 i^2 e^1 i^0$  puisque  $i^2$  apparaît nécessairement après  $i^1$  au vu de  $v$ . Donc le sous-mot composé des symboles  $i^0, i^1$  et  $e^1$  est une répétition de  $i^0 i^1 e^1 i^0$ . En outre,  $e^0$  et  $i^1$  n'étant pas adjacents, le sous-mot formé des lettres  $i^0, e^0$  et  $i^1$  contient le facteur  $i^0 e^0 i^1 i^0$ . Or,  $e^0$  et  $e^1$  sont adjacents par construction donc entre deux  $i^0$  consécutifs dans  $w$ , le symbole  $e^0$  apparaît toujours avant  $e^1$ .

En raisonnant de même, nous prouvons qu'entre deux  $i^{n-1}$  consécutifs dans  $w$ , le symbole  $e^{n-1}$  apparaît toujours avant  $e^0$  et qu'entre deux  $i^j$  consécutifs dans  $w$ , le symbole  $e^j$  apparaît toujours avant  $e^{j+1}$  pour tout  $j < n-1$ . Notons ces résultats par (\*).

Le sommet  $e^0$  n'est pas adjacent au sommet  $i^{n-2}$  mais les deux sont adjacents à  $i^0$ , d'où les facteurs  $i^{n-2} e^0 i^0$  et  $e^0 i^{n-2} i^0$  apparaissent dans le sous-mot composé des symboles cor-

respondants. Connaissant ces deux sous-mots, étant donné que les noeuds  $e^0$  et  $i^{n-1}$  sont adjacents et au vu de la forme de  $v$ , le symbole  $e^0$  se situe toujours avant  $i^{n-1}$ . D'où, la structure

$$i^0 - i^1 - \dots - i^{n-2} - e^0 - i^{n-1} - i^0 - i^1 - \dots - e^{n-1}$$

apparaît dans  $w$ , où les éléments de  $I$  n'apparaissent pas dans les trous "-". De plus, au vu des résultats (\*), la structure

$$i^{n-2} - e^0 - e^1 - \dots - e^{n-2} - e^{n-1} - i^{n-2}$$

se trouve dans  $w$ , où le symbole  $i^{n-2}$  n'apparaît pas dans les trous. Par conséquent, le mot  $e^0 e^1 \dots e^{n-1}$  est un facteur du sous-mot de  $w$  composé des éléments de  $E$ .

Supposons que la lettre  $e^0$  apparaît dans les trous entre  $e^0$  et  $e^{n-1}$ . Comme ces sommets sont adjacents, cela signifie qu'entre les deux  $e^0$  apparaît un autre  $e^{n-1}$ . Ceci contredit l'alternance entre  $e^{n-1}$  et  $i^{n-2}$ . De plus, la présence de deux symboles identiques  $e^j$  de  $E$  dans les trous entre  $e^0$  et  $e^{n-1}$  est impossible puisqu'elle conduit inévitablement à la présence d'un second  $e^{n-1}$ . Autrement dit, le mot  $e^0 e^1 \dots e^{n-1}$  est un facteur du sous-mot de  $w$  composé des éléments de  $E$ .

Ce facteur appartient au sous-mot représentant le cycle, ce qui est impossible au vu du lemme 2.4.5. □

**THÉORÈME 2.4.7.** *Si un graphe connexe  $G$  n'est pas un chemin simple, un cycle ou le graphe biparti complet  $K_{1,3}$ , alors le graphe linéaire  $L^n(G)$  est non-représentable par mot pour  $n \geq 4$ .*

La raison pour laquelle les chemins simples, les cycles et le graphe biparti complet  $K_{1,3}$  ne sont pas des graphes tels que l'application au moins quatre fois du graphe linéaire donne un graphe non-représentable provient du résultat de l'application de graphe linéaire sur ces graphes. En effet, les chemins simples deviennent des chemins simples plus courts avant d'être réduits à un seul sommet, les cycles restent des cycles de même longueur et le graphe  $K_{1,3}$  devient, après une itération, un triangle, i.e. un cycle de longueur 3. Par conséquent, ils sont représentables par mot.

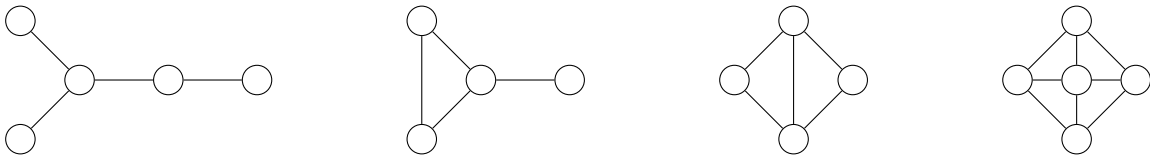


FIGURE 2.9 – Itération de l'application de graphe linéaire sur un graphe  $G$

*Démonstration.* Remarquons que si le graphe  $H$  est un sous-graphe de  $G$  (pas nécessairement induit), alors, pour tout  $n \geq 1$ ,  $L^n(H)$  est isomorphe à un sous-graphe induit de  $L^n(G)$ .

Considérons la suite de graphes de la FIGURE 2.9. Tous les graphes, excepté le premier, sont obtenus en appliquant l'opérateur graphe linéaire au précédent. Le dernier graphe est le graphe roue  $W_4$ . Or, par le théorème 2.4.6, nous savons que  $L(W_4)$  n'est pas représentable par mot.

Considérons maintenant un graphe  $G$  respectant les conditions de l'énoncé. Afin de satisfaire ces conditions,  $G$  possède au moins quatre sommets. Au minimum un des sommets  $x$  est tel que  $d(x) \geq 3$ . En effet, supposons que ce ne soit pas le cas. Tous les sommets ne sont pas de degré 1 puisque le graphe est connexe et ils ne sont pas tous de degré 2 puisque le graphe n'est pas cycle. Si tous les sommets sont de degré 1 ou 2, alors le graphe est un chemin simple puisqu'il est connexe, ce qui est impossible. Par conséquent, il existe un sommet  $x$  tel que  $d(x) \geq 3$ .

Si un des sommets adjacents au moins est de degré plus grand ou égal à 2, alors une copie du premier ou deuxième graphe de la FIGURE 2.9 est dans  $G$ . Ainsi,  $L^4(G)$ , ou respectivement  $L^3(G)$  n'est pas représentable par mot puisqu'il contient, comme sous-graphe induit, le graphe linéaire du graphe roue  $W_4$ .

Si tous les sommets adjacents sont de degré 1, nous obtenons l'étoile  $E_{d(x)}$ . Dans ce cas, puisque le graphe n'est pas le graphe biparti complet  $K_{1,3}$ , il possède au moins 5 sommets et  $d(x) \geq 4$ . Le graphe linéaire  $L(E_{d(x)})$  est le graphe complet  $K_{d(x)}$ . Or, ce graphe contient un sous-graphe correspondant au troisième graphe illustré par la FIGURE 2.9 puisque  $d(x) \geq 4$ . Donc  $L^3(E_{d(x)})$  est non-représentable.

Enfin, constatons que si on supprime une des arêtes liant un des sommets de degré 3 à un des sommets de degré 2 du troisième graphe, nous obtenons un sous-graphe du troisième graphe correspondant au deuxième graphe. C'est pourquoi le résultat est valable pour  $L^{4+k}(G)$ ,  $k \geq 0$ .  $\square$

Les théorèmes précédents donnent des constructions de graphes non-représentables. Il existe cependant une construction naturelle simple. En effet, le fait d'être représentable est héréditaire. Autrement dit, si un graphe est représentable par mot alors tous ses sous-graphes induits le sont. Par conséquent, en ajoutant à un graphe non-représentable de nouveaux sommets et en les connectant aux sommets originaux de façon arbitraire, un nouveau graphe non-représentable est obtenu.

## 2.5 Synthèse

Voici un schéma récapitulatif de quelques résultats présentés dans ce chapitre. Premièrement, les graphes sont séparés en deux catégories : les graphes représentables par mot et ceux non-représentables. Une infinité de graphes appartient à cette dernière catégorie puisque tout graphe possédant un sous-graphe induit non-représentable est non-représentable. De plus, nous avons établi que l'application de graphe linéaire permet d'obtenir des graphes non-représentables. Enfin, nous savons que la représentabilité d'un graphe est équivalente à la représentabilité par un mot  $k$ -uniforme, où  $k$  est un naturel. Par conséquent, l'ensemble des graphes représentables est scindé en fonction de ce naturel  $k$ . Les

graphes ayant un nombre de représentation 1 et ceux dont ce nombre est 2 sont respectivement les graphes complets et les graphes circulaires différents des graphes complets, le nombre de représentation étant unique. Les prismes et le graphe de Petersen, quant à eux, appartiennent à  $\mathcal{R}_3$ .

Graphes représentables	Graphes non-représentables
$\mathcal{R}_1 = \{K_n, n \in \mathbb{N}_0\}$	$W_5$ $\{L(K_n), n \geq 5\}$ $\{L(W_n), n \geq 4\}$ ...
$\mathcal{R}_2 = \{\text{Graphes circulaires}\} \setminus \mathcal{R}_1$	
$\mathcal{R}_3 = \{\text{Prismes, Graphe de Petersen, ...}\}$	
...	
$\mathcal{R}_k$	
...	

Graphes

## 2.6 Complexité

Comme nous venons de le voir, il existe des graphes qui ne sont pas représentables par mot. La question est donc de savoir s'il est aisé de déterminer si un graphe est représentable. Pour cela, nous pouvons recourir aux théorèmes 2.2.1 et 2.3.5. Dans les deux cas, nous avons un problème de décision.

Si le graphe est un graphe de comparabilité, le théorème 2.3.5 permet de conclure que le graphe est représentable. Par contre, s'il ne l'est pas, il n'est pas possible de conclure la représentabilité ou non du graphe. En effet, le graphe de Petersen et le graphe roue  $W_5$  sont deux graphes qui ne sont pas des graphes de comparabilité puisqu'il est impossible de donner une orientation transitive au cycle à 5 sommets présents dans ces graphes (pour le prouver, il faut raisonner par l'absurde, similairement à la preuve du théorème 2.4.1). Cependant, le graphe de Petersen est représentable par mot au vu du théorème 2.2.12 tandis que  $W_5$  ne l'est pas comme le stipule le théorème 2.4.1.

Or, déterminer si le graphe considéré est un graphe de comparabilité et trouver une orientation transitive de ses sommets est possible en temps polynomial  $\mathcal{O}(\#E \times \delta)$ , où  $\delta$  est le degré maximum des sommets. Un algorithme se trouve dans [5, p. 129-132]. Ainsi, si l'algorithme conclut à la comparabilité du graphe, il est représentable par permutation au vu du théorème 2.3.5 et donc représentable par mot mais si le graphe n'est pas un graphe de comparabilité, la seule certitude est qu'il n'est pas représentable par permutation. Par conséquent, un autre critère doit être utilisé.

Nous avons établi qu'un graphe est représentable par mot si et seulement si il existe un naturel  $k$  tel que ce graphe possède un représentant  $k$ -uniforme.

De plus, ce naturel vaut 1 si et seulement si le graphe considéré est un graphe complet. Or l'algorithme présenté ci-après permet de vérifier en  $\mathcal{O}((\#V)^2)$  si un graphe simple et non orienté est complet. En effet, un tel graphe est complet si le degré de chaque sommet vaut  $\#V - 1$ , c'est-à-dire s'il est connecté aux  $\#V - 1$  autres sommets.

**ALGORITHME 2.6.1.**

Pour  $i$  dans 1 à  $\#V - 1$

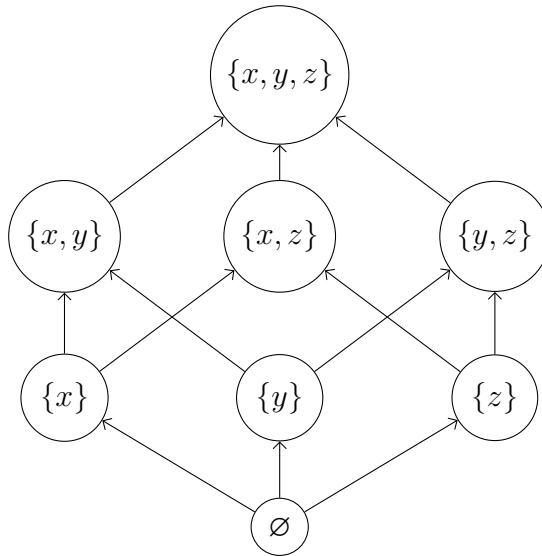
    Pour  $j$  dans  $i+1$  à  $\#V$  : si  $i$  n'est pas connecté à  $j$ , retourner FAUX  
 sinon retourner VRAI.

Ensuite, le théorème 2.2.10 stipule que ce naturel vaut 2 si et seulement si le graphe est circulaire. Un algorithme, se trouvant dans [2] et de complexité  $\mathcal{O}((\#V) \times (\#E))$ , permet de déterminer si un graphe donné est circulaire et, s'il l'est, de construire les cordes du cercle qui le représentent.

Il convient de se demander ce qu'il en est si  $k \geq 3$ . Le corollaire 2.3.3 et le lemme 2.6.3 tirés de [7] permettent d'établir, via un résultat intermédiaire, que déterminer si un graphe donné possède un représentant  $k$ -uniforme, lorsque  $k \in \{3, \dots, \lfloor \frac{\#V}{2} \rfloor\}$ , est un problème NP-complet. Les différents résultats sont présentés dans [6].

**DÉFINITION 2.6.2.** Un ensemble fini  $P$  est *partiellement ordonné* s'il est muni d'une relation binaire  $\mathcal{R}$  irreflexive et transitive. Autrement dit,  $\forall x \in P, (x, x) \notin \mathcal{R}$  et si  $(x, y) \in \mathcal{R}$  et  $(y, z) \in \mathcal{R}$ , alors  $(x, z) \in \mathcal{R}$ . Dans ce cas, l'ensemble  $P$  est appelé *poset*.

Par exemple, l'ensemble des parties d'un ensemble muni de l'inclusion stricte est un poset. Ci-dessous se trouve une représentation graphique des éléments de  $P = \{x, y, z\}$  et des relations d'inclusion stricte entre les éléments qui sont représentées par une flèche.



**LEMME 2.6.3.** *Soit  $k \in \mathbb{N}_0$ . Un graphe de comparabilité est représentable par  $k$  permutations si et seulement si le poset induit par ce graphe est de dimension au plus  $k$ .*

*Démonstration.* Soit  $G$  un graphe de comparabilité et soit  $w$  un représentant formé de  $k$  permutations. Chaque permutation dans  $w$  peut être considérée comme un ordre linéaire où  $a < b$  si  $a$  se situe avant  $b$  dans la permutation. Le but est de montrer que le poset induit par l'intersection de ces ordres linéaires (voir page 28) fournit un graphe de comparabilité qui correspond au graphe  $G$ . Deux noeuds  $a$  et  $b$  sont adjacents dans  $G$  si et seulement si les labels correspondants s'alternent dans  $w$ . Ceci est le cas si et seulement si  $a$  et  $b$  sont dans le même ordre dans chaque permutation, c'est-à-dire soit  $a < b$ , soit  $b < a$  dans chaque ordre linéaire donc dans l'intersection. Cela signifie que  $a$  et  $b$  sont comparables dans le poset induit par l'intersection des ordres linéaires. Autrement dit, ces sommets sont adjacents dans son graphe de comparabilité. Par conséquent, deux noeuds sont adjacents dans  $G$  si et seulement si ils le sont dans le graphe de comparabilité du poset induit par l'intersection des ordres linéaires.  $\square$

Au vu du corollaire 2.3.3, du théorème 2.3.5 et du lemme précédent, déterminer le nombre de représentation  $k$  d'un graphe représentable revient à déterminer si la dimension d'un poset est au plus  $k$ . Yannakakis a démontré dans son article [19] que, pour  $3 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , ce dernier problème est NP-complet. Ce résultat sortant du cadre de ce mémoire, il n'est pas démontré ici. Cependant, il conduit à la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.6.4.** *Décider si un graphe donné possède un représentant  $k$ -uniforme, quel que soit  $k \in \{3, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ , est NP-complet.*

## 2.7 Trouver un représentant $k$ -uniforme grâce au SMT

Nous venons de montrer que déterminer la représentabilité d'un graphe est un problème NP-complet dès lors que le nombre de représentation excède 2. Cependant, en ayant recours aux "satisfiability modulo theories" (SMT), qui permettent de décider de la satisfaisabilité de formules logiques, il est possible de trouver un représentant  $k$ -uniforme d'un graphe donné. En effet, les solveurs SMT sont efficaces pour déterminer si une formule booléenne composée de  $\wedge, \vee, \neg$  et d'inégalités linéaires admet une solution. Si une solution existe, le solveur en fournit une. Une solution est un choix de valeurs des variables tel que la formule soit vraie. Ainsi, le but consiste à trouver une formule booléenne pour laquelle toute solution correspond à un représentant  $k$ -uniforme d'un graphe donné. Dans leur article [1], Akgün et al. proposent une telle formule.

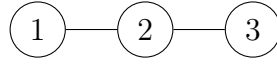
La première étape est d'exprimer le représentant  $k$ -uniforme, noté  $w$ , par des variables. Si le graphe comporte  $n$  sommets, alors  $|w| = kn$  puisque chaque noeud apparaît  $k$  fois. Pour ce faire, il faut labéliser les sommets de 1 à  $n$ , et représenter le mot cherché par les  $kn$  variables entières  $A_{i,j}$ , pour  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$  où la signification de  $A_{i,j}$  est la position de la  $j$ -ème occurrence du symbole  $i$  dans  $w$ , pour  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$ .

La seconde étape est de transcrire les exigences concernant les variables  $A_{i,j}$ .

- $A_{i,j} > 0$ , pour tout  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$ ;
- $A_{i,j} \leq kn$ , pour tout  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$ ;
- tous les  $A_{i,j}$  sont distincts (la distinction est une caractéristique incluse dans le format SMT);
- Pour tout  $i_1 i_2 \in E$ ,  $(A_{i_1,1} < A_{i_2,1} < A_{i_1,2} < A_{i_2,2} < \dots < A_{i_1,j} < A_{i_2,j}) \vee (A_{i_2,1} < A_{i_1,1} < A_{i_2,2} < A_{i_1,2} < \dots < A_{i_2,j} < A_{i_1,j})$ ;
- Pour tout  $i_1 i_2 \notin E$ ,  $\neg(A_{i_1,1} < A_{i_2,1} < A_{i_1,2} < A_{i_2,2} < \dots < A_{i_1,j} < A_{i_2,j}) \wedge \neg(A_{i_2,1} < A_{i_1,1} < A_{i_2,2} < A_{i_1,2} < \dots < A_{i_2,j} < A_{i_1,j})$

où les trois premières conditions proviennent du fait que les variables  $A_{i,j}$  représentent les positions des symboles dans le représentant et les deux dernières établissent les conditions pour que le mot obtenu soit effectivement un représentant en fonction de l'existence ou non d'une arête.

Par exemple, pour le graphe



la combinaison des exigences est

$$\begin{aligned}
 & A_{1,1} > 0 \wedge A_{1,2} > 0 \wedge A_{2,1} > 0 \wedge A_{2,2} > 0 \wedge A_{3,1} > 0 \wedge A_{3,2} > 0 \\
 & \wedge A_{1,1} \leq 6 \wedge A_{1,2} \leq 6 \wedge A_{2,1} \leq 6 \wedge A_{2,2} \leq 6 \wedge A_{3,1} \leq 6 \wedge A_{3,2} \leq 6 \\
 & \wedge \text{distinct}(A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}, A_{3,1}, A_{3,2}) \\
 & \wedge ((A_{1,1} < A_{2,1} < A_{1,2} < A_{2,2}) \vee (A_{2,1} < A_{1,1} < A_{2,2} < A_{1,2})) \wedge ((A_{2,1} < A_{3,1} < A_{2,2} < A_{3,2}) \vee \\
 & (A_{3,1} < A_{2,1} < A_{3,2} < A_{2,2})) \\
 & \wedge \neg(A_{1,1} < A_{3,1} < A_{1,2} < A_{3,2}) \wedge \neg(A_{3,1} < A_{1,1} < A_{3,2} < A_{1,2}).
 \end{aligned}$$

Pour les valeurs  $A_{1,1} = 1, A_{1,2} = 5, A_{2,1} = 3, A_{2,2} = 6, A_{3,1} = 2, A_{3,2} = 4$ , les exigences sont remplies, ce qui donne le mot  $w = 132312$ . Nous vérifions aisément qu'il s'agit d'un représentant 2-uniforme du graphe.

## 2.8 Résolution du problème de la clique maximale

Se restreindre aux graphes représentables par mot permet de résoudre, en un temps polynomial, le problème de la clique maximale. Afin de le démontrer, quelques notions et un lemme sont nécessaires.

**DÉFINITION 2.8.1.** Une *clique* d'un graphe non-orienté et simple est un sous-graphe complet. La *taille d'une clique* est le nombre de sommets qui la composent.



**DÉFINITION 2.8.2.** Etant donné un graphe  $G$ , le *problème de la clique maximale* est de déterminer la taille maximale d'une clique dans  $G$ .

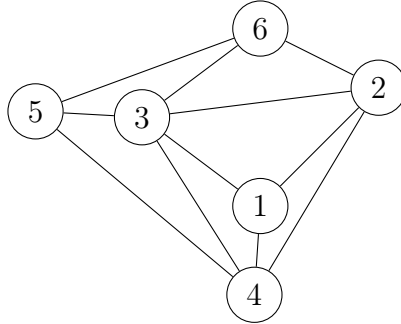


FIGURE 2.10 – Exemple d'un graphe avec une clique de taille 3 et une de taille 4

Le sous-graphe induit par les sommets 1, 2, 3 et 4 forme une clique de taille 4 tandis que le sous-graphe induit par les sommets 3, 5 et 6 en forme une de taille 3. La taille maximale d'une clique de ce graphe est 4.

**LEMME 2.8.3.** *Dans un graphe représentable par mot, le voisinage de chaque sommet est un graphe de comparabilité, où le voisinage d'un sommet est l'ensemble des noeuds qui lui sont adjacents.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un graphe représentable à  $n$  sommets et soit  $x$  un sommet du graphe  $G$ . Le sous-graphe induit par l'ensemble des noeuds adjacents à  $x$ , noté  $H$ , est un graphe représentable par permutation. En effet, comme  $G$  est représentable, le sous-graphe induit par  $\{x\} \cup \{y \text{ tel que } xy \text{ existe}\}$  est représentable au vu du théorème 2.0.5 affirmant l'hérédité du caractère représentable. Or, dans ce sous-graphe induit,  $x$  est un sommet adjacent à tous les autres donc le graphe  $H$  est représentable par permutation au vu du théorème 2.3.2. Par le théorème 2.3.5,  $H$  est donc un graphe de comparabilité.  $\square$

**THÉORÈME 2.8.4.** *Le problème de la clique maximale est résoluble en un temps polynomial sur les graphes représentables.*

*Démonstration.* Par le lemme 2.8.3, le voisinage de chaque sommet d'un graphe représentable  $G$  est un graphe de comparabilité. Or, sur les graphes de comparabilité, le problème de la clique maximale est résoluble en un temps polynomial (voir [5, p. 133-134]). Donc il est résoluble en un temps polynomial sur  $G$ , puisque chaque clique de taille maximale appartient au voisinage d'un sommet incluant le sommet lui-même.  $\square$

## 2.9 Retour au nombre de représentation

Comme nous l'avons signalé précédemment, Halldórsson et al. ont trouvé, dans leur article [7], une borne supérieure au nombre de représentation d'un graphe représentable

possédant au moins 3 sommets, à savoir  $2(\#V - 2)$ . Dans cette section, nous présentons un autre de leur résultat. Ce dernier fournit un graphe ayant un nombre de représentation  $\lfloor \frac{\#V}{2} \rfloor$  et donc atteignant cette borne supérieure lorsque  $\#V = 4$ .

**LEMME 2.9.1.** *Soit  $P$  un poset de  $2k$  éléments  $\{A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_k\}$  tel que  $A_i < B_j$  pour tout  $i \neq j$  et tel que tous les autres éléments ne sont pas comparables. Alors  $P$  est de dimension  $k$ .*

*Démonstration.* Supposons que le poset est l'intersection de  $t$  ordres linéaires (voir page 28). Puisque  $A_i$  et  $B_i$  ne sont pas comparables pour tout  $i$ , il existe, pour chaque  $i$ , un ordre linéaire où  $B_i < A_i$ . Ces ordres linéaires sont différents. En effet, supposons que, dans un même ordre linéaire, nous avons  $B_i < A_i$  et  $B_j < A_j$  pour  $i \neq j$ . Alors, la définition du poset est contredite par ces inégalités puisque  $A_i < B_j$  pour tout  $i \neq j$ . Ainsi, nous avons au moins  $k$  ordres linéaires, donc  $t \geq k$ .

Afin de montrer que  $t = k$ , considérons l'ordre linéaire

$$A_1 < A_2 < \dots < A_{k-1} < B_k < A_k < B_{k-1} < \dots < B_2 < B_1$$

ainsi que tous les ordres linéaires obtenus à partir de cet ordre en échangeant simultanément  $A_k$  et  $B_k$  par  $A_m$  et  $B_m$  respectivement,  $m = 1, 2, \dots, k - 1$ . Nous vérifions facilement que l'intersection de ces  $k$  ordres linéaires coïncide avec notre poset  $P$ .  $\square$

Notons  $G_n$  le graphe obtenu à partir de la couronne  $H_{n,n}$  en ajoutant un sommet adjacent à tous les autres.

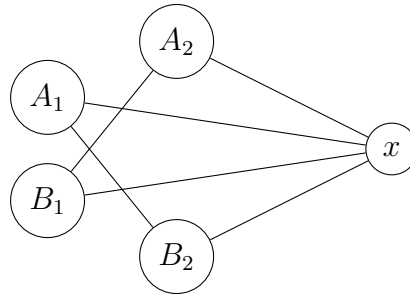


FIGURE 2.11 – Le graphe  $G_2$

**THÉORÈME 2.9.2.** *Le graphe  $G_n$  a un nombre de représentation  $n$ .*

*Démonstration.* Puisque la couronne  $H_{n,n}$  est un graphe de comparabilité dont l'orientation transitive est celle du poset  $P$ , le lemme 2.6.3 et le lemme précédent permettent de conclure que la couronne  $H_{n,n}$  est un graphe de comparabilité représentable par  $n$  permutations mais pas par  $(n - 1)$  permutations puisque la dimension du poset est exactement  $n$ . Ainsi, par le corollaire 2.3.3, nous obtenons que  $G_n$  est représentable par un mot  $n$ -uniforme mais pas par un mot  $(n - 1)$ -uniforme. Autrement dit, nous avons  $G_n \in \mathcal{R}_n$ .  $\square$

Afin de prouver ce résultat, nous avons utilisé le fait que la couronne  $H_{n,n}$  est un graphe représentable par  $n$  permutations. Par conséquent, son nombre de représentation est au plus  $n$ . Dans l'article [4], Glen et al. démontre que, pour  $n \geq 5$ , la couronne  $H_{n,n}$  appartient à  $\mathcal{R}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .

# Chapitre 3

## Graphes $\tau$ -représentables

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux graphes dont au minimum un représentant ne contient pas un motif prédéfini  $\tau$  de longueur au moins 3. De tels graphes sont dits  $\tau$ -représentables. Nous montrons l'importance du label des sommets du graphe pour que ce dernier puisse être  $\tau$ -représentable ainsi que l'hérédité du caractère  $\tau$ -représentable. Ensuite, nous établissons des résultats sur le nombre d'occurrences des lettres dans un  $\tau$ -représentant en fonction des caractéristiques des sommets. Ces différentes informations sont tirées de [15].

**DÉFINITION 3.0.1.** Un *motif* de longueur  $\ell$  est une suite de  $\ell$  symboles.

**DÉFINITION 3.0.2.** Soit  $\tau$  un motif de longueur  $\ell$ ,  $\ell \geq 3$ , et soit  $w$  un mot sur un alphabet totalement ordonné. Le mot  $w$  ne contient pas le motif  $\tau$  s'il n'existe pas de sous-mot de longueur  $\ell$  d'ordre-isomorphe à  $\tau$ , i.e. s'il n'existe pas de sous-mot de longueur  $\ell$  préservant l'ordre apparaissant dans  $\tau$ .

Ainsi, un mot  $w = w^1 \dots w^n$  ne contient pas le motif 123 s'il n'existe pas d'indices  $i_1, i_2, i_3$  tels que  $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n$  et  $w^{i_1} < w^{i_2} < w^{i_3}$ . Par exemple, les mots 54321 et 543621 ne contiennent pas le motif 123 contrairement au mot 5436217 qui contient les sous-mots 567, 467 et 367 correspondants au motif 123.

**DÉFINITION 3.0.3.** Soit  $\tau$  un motif de longueur  $\ell$ ,  $\ell \geq 3$ . Un graphe est  $\tau$ -représentable s'il est représentable par un mot ne contenant pas le motif  $\tau$ . Le mot est appelé un  $\tau$ -représentant du graphe.

Afin de constater si un graphe est  $\tau$ -représentable, les noeuds du graphe doivent provenir d'un alphabet totalement ordonné, i.e. que pour tous  $x, y \in V$  tels que  $x \neq y$ , nous avons  $x < y$  ou  $y < x$ .

**REMARQUE 3.0.4 (IMPORTANCE DU LABEL DES SOMMETS).** Le label des sommets est important quand il est question de la notion de  $\tau$ -représentabilité. Pour s'en rendre compte, considérons les deux graphes isomorphes représentés à la FIGURE 3.1 dont le label des sommets diffère. Le premier graphe est 132-représentable puisqu'il possède le représentant

$w = 43212341$ . Par contre, le second graphe ne l'est pas. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il est 132-représentable. Autrement dit, il possède un 132-représentant  $z$ . Il existe au moins deux lettres  $x, y \in \{1, 2, 3\}$ , avec  $x < y$ , qui sont répétées minimum deux fois dans  $z$ , sinon une des arêtes suivantes serait présente : 12, 13, 23. De plus, comme 4 est lié à tous les sommets,  $x$  et  $y$  apparaissent des deux côtés de 4 dans  $w$ . Par conséquent, le motif  $x4y$  apparait et donc  $z$  contient le motif 132, d'où nous obtenons une contradiction.



FIGURE 3.1 – Importance du label des sommets concernant la  $\tau$ -représentabilité

Ayant établi l'importance du label des sommets, nous prouvons l'hérédité du caractère  $\tau$ -représentable et montrons que la  $\tau$ -représentabilité de tous les sous-graphes induits d'un graphe  $G$  n'implique pas celle du graphe  $G$  lui-même même si la représentabilité est conservée. Ensuite, nous démontrons que les graphes évitant un motif  $\tau$  sont exactement ceux qui évitent le motif  $\tau^R$ .

**PROPOSITION 3.0.5.** *La  $\tau$ -représentabilité est héréditaire.*

*Démonstration.* Si le mot  $w$  est un  $\tau$ -représentant du graphe, un  $\tau$ -représentant d'un de ses sous-graphes induits est le mot  $w'$  obtenu dans la preuve du théorème 2.0.5. En effet, le dit théorème affirme que  $w'$  est un représentant. De plus, la suppression de symboles ne crée pas l'apparition de nouveaux motifs.  $\square$

Cependant, si tous les sous-graphes induits d'un graphe  $G$  possèdent un  $\tau$ -représentant, cela n'implique pas que le graphe  $G$  en possède un. Le théorème 4.3.12 stipule que l'étoile  $E_6$  n'est pas 123-représentable. Or, en labélisant les sommets comme à la FIGURE 3.2, ses sous-graphes induits le sont. En effet, si on retire le sommet connecté à tous les autres, le mot 776655442211 convient comme 123-représentant. Si le sommet retiré est un autre, supposons 7 sans perte de généralité, on obtient alors l'étoile  $E_5$  qui possède le représentant 56365421312. Si on retire plus d'un sommet, on obtient un sous-graphe induit d'un des deux sous-graphes induits précédents donc il est 123-représentable au vu de la proposition 3.0.5.

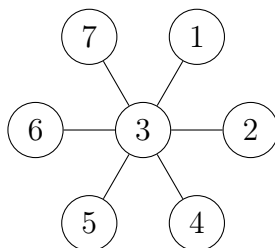


FIGURE 3.2 – Label des sommets de l'étoile  $E_6$

**THÉORÈME 3.0.6.** *Soit  $\tau$  un motif de longueur  $\ell$ ,  $\ell \geq 3$ . Un graphe est  $\tau$ -représentable si et seulement si il est  $\tau^R$ -représentable.*

*Démonstration.* Soit  $\tau$  un motif de longueur  $\ell$ ,  $\ell \geq 3$ . Un graphe  $G$  est  $\tau$ -représentable si et seulement si il possède un  $\tau$ -représentant  $w$ . Le mot miroir  $w^R$  représente  $G$  par la proposition 2.1.1. Il ne contient pas le motif  $\tau^R$  sinon  $w$  contiendrait le motif  $\tau$ .  $\square$

Constatons enfin que lorsque la  $\tau$ -représentabilité d'un graphe est considérée, le mot miroir d'un  $\tau$ -représentant comme  $\tau$ -représentant est potentiellement perdu. Un simple contre-exemple permet de le prouver. Effectivement, si le mot 321 est un 123-représentant d'un graphe complet  $K_3$ , le miroir 123 ne l'est pas puisqu'il correspond au motif 123.

**PROPOSITION 3.0.7.** *Soit  $\tau$  un motif de longueur  $\ell$ ,  $\ell \geq 3$ . Les graphes non-représentables par mot ne sont pas  $\tau$ -représentables.*

Même si ce résultat est évident, il convient de le signaler puisqu'il permet d'obtenir de nombreux graphes non- $\tau$ -représentables. En effet, tous les graphes qui possèdent, comme sous-graphe induit, un graphe non-représentable ne sont pas  $\tau$ -représentables au vu de l'hérédité du caractère  $\tau$ -représentable. Ainsi, par exemple, le graphe roue  $W_5$  et tous graphes contenant le graphe roue  $W_5$  comme sous-graphe induit ne sont pas  $\tau$ -représentables.

**PROPOSITION 3.0.8.** *Si  $\tau$  est une répétition du même symbole  $\ell$  fois,  $\ell \geq 3$ , alors les graphes  $\tau$ -représentables sont ceux qui appartiennent à  $\bigcup_{i=1}^{\ell-1} \mathcal{R}_i$ .*

*Démonstration.* Soit  $\ell \geq 3$ . Puisque  $\tau$  est une répétition du même symbole  $\ell$  fois, nous pouvons l'écrire  $\tau = 1_1 \dots 1_\ell$ . Or, les mots appartenant à  $\bigcup_{i=1}^{\ell-1} \mathcal{R}_i$  sont  $\tau$ -représentables puisqu'ils contiennent moins de  $\ell$  copies de chaque lettre. Si un graphe est représentable mais n'appartient pas à cette union, alors il possède une lettre qui apparaît au moins  $\ell$  fois et conduit donc au motif  $\tau$ .  $\square$

Ces résultats étant établis, nous énonçons et démontrons plusieurs propriétés générales sur les graphes  $\tau$ -représentables. Ainsi, nous établissons le nombre maximum d'instances d'un symbole dont le degré du sommet correspondant est au moins égal à la longueur du motif  $\tau$  diminuée de 1 ainsi que le nombre maximum d'occurrences des noeuds qui lui sont adjacents.

**THÉORÈME 3.0.9.** *Soit  $G$  un graphe  $\tau$ -représentable, où  $\tau$  est un motif de longueur  $\ell + 1$ ,  $\ell \geq 2$ . Soit  $x$  un sommet de  $G$  tel que  $d(x) \geq \ell$ . Alors, tout  $\tau$ -représentant  $w$  de  $G$  contient au plus  $\ell$  occurrences de  $x$ .*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il a au moins  $\ell + 1$  copies de  $x$  dans  $w$ . Alors il existe un sous-mot de  $w$  qui s'écrit  $x_1 w^1 x_2 \dots x_\ell w^\ell x_{\ell+1}$ . Comme  $d(x) \geq \ell$ , il existe des sommets  $a^1, \dots, a^\ell$  adjacents à  $x$ . Par conséquent, ils doivent alterner avec  $x$  dans  $w$ . Donc, pour tout  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ ,  $w^i$  contient une copie de  $a^1, \dots, a^\ell$ .

Cependant, toute permutation possible de  $x, a^1, \dots, a^\ell$  peut être trouvée dans ce mot. En effet, il suffit de prendre les  $a^j$  dans les  $w^i$  avec le  $x$  à l'endroit voulu. Ainsi, par exemple, le sous-mot  $a^2x_2a^1a^3\dots a^\ell$  est obtenu en prenant  $a^2$  dans  $w^1$ , suivi de  $a^1$  dans  $w^2$  et  $a^i$  dans  $w^i$  pour tout  $i \in \{3, \dots, \ell\}$ . D'où, tous les motifs de longueur  $\ell + 1$  peuvent être trouvés dans  $w$ . Ainsi, afin que le mot évite un motif de longueur  $\ell + 1$ , la lettre  $x$  ne peut apparaître qu'au plus  $\ell$  fois dans  $w$ .  $\square$

**COROLLAIRE 3.0.10.** *Soit  $\tau$  un motif de longueur  $\ell + 1$ ,  $\ell \geq 2$  et soit  $G$  un graphe à  $n$  sommets. Si, pour tout sommet  $x$ ,  $d(x) \geq \ell$ , alors tout  $\tau$ -représentant de  $G$  est de longueur au plus  $\ell n$ .*

*Démonstration.* Au vu du théorème précédent 3.0.9, tout sommet  $x$  tel que  $d(x) \geq \ell$  apparaît au plus  $\ell$  fois dans tout  $\tau$ -représentant de  $G$ . Puisque, pour tout sommet  $x$ ,  $d(x) \geq \ell$ , chaque lettre apparaît maximum  $\ell$  fois donc tout  $\tau$ -représentant de  $G$  est de longueur au plus  $\ell n$ .  $\square$

**COROLLAIRE 3.0.11.** *Soit  $w$  un représentant d'un graphe  $G$  évitant un motif de longueur  $\ell + 1$ ,  $\ell \geq 2$ . Si un sommet  $a$  adjacent à  $x$  est de degré au moins  $\ell$ , alors  $x$  apparaît au plus  $\ell + 1$  fois dans  $w$ .*

*Démonstration.* Puisque le sommet  $a$  est tel que  $d(a) \geq \ell$ , la lettre  $a$  apparaît au plus  $\ell$  fois dans  $w$  par le théorème 3.0.9. Puisque les sommets  $x$  et  $a$  sont adjacents, les symboles  $x$  et  $a$  s'alternent dans  $w$  et par conséquent,  $x$  ne peut apparaître qu'au plus  $\ell + 1$  fois.  $\square$

# Chapitre 4

## Graphes $\mu$ -représentables, où $\mu \in S_3$

Dans ce chapitre, nous étudions les graphes  $\mu$ -représentables, où  $\mu$  est un motif de longueur 3 constitué de trois symboles distincts :

$$\begin{array}{ll} \star 123 & \star 321 \\ \star 132 & \star 231 \\ \star 213 & \star 312. \end{array}$$

Pour commencer, nous établissons que tout graphe  $\mu$ -représentable est un graphe circulaire. Ensuite, nous construisons, à l'aide de composantes connexes  $\mu$ -représentables, des graphes  $\mu$ -représentables. Enfin, nous fournissons des exemples de graphes  $\mu$ -représentables et nous prouvons que, si tout graphe  $\mu$ -représentable est circulaire, la réciproque est fautive, autrement dit il existe des graphes circulaires qui ne sont pas  $\mu$ -représentables. Enfin, nous clôturons par une brève synthèse des résultats.

Au vu du théorème 3.0.6, nous pouvons nous contenter d'étudier la  $\mu$ -représentabilité des graphes pour  $\mu \in \{123, 132, 312\}$ . Le théorème suivant permet de se restreindre aux motifs 123 et 132.

**THÉORÈME 4.0.1.** *Les graphes 132-représentables sont les graphes 312-représentables.*

*Démonstration.* Soit un graphe  $G$  à  $n$  sommets 132-représentable. Par définition, il possède un 132-représentant  $w$ . Modifions le label des sommets du graphe  $G$  de la manière suivante : le label du sommet  $i$  devient  $n+1-i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . En modifiant dans le mot  $w$  le symbole  $i$  par  $n+1-i$ , pour tout  $i$ , on obtient un 312-représentant du graphe  $G$  avec le nouvel label. En effet, si dans le nouveau mot, on a le motif 312, cela signifie qu'il existe trois lettres  $i, j, k$  telles que  $(n+1-i) < (n+1-j) < (n+1-k)$  et  $(n+1-k)(n+1-i)(n+1-j)$  en soit un sous-mot. Nous obtenons alors une contradiction puisque  $w$  a comme sous-mot  $kij$  et que les inégalités  $(n+1-i) < (n+1-j) < (n+1-k)$  implique  $k < j < i$ . En raisonnant de même, on obtient qu'un graphe 312-représentable est 132-représentable.  $\square$

Nous pouvons désormais passer à l'étude des graphes  $\mu$ -représentables en nous restreignant aux motifs  $\mu = 123$  et  $\mu = 132$ . Premièrement, un sommet isolé peut être ajouté ou retiré d'un graphe sans modifier son caractère  $\mu$ -représentable. Ce lemme est issu de [3].



**LEMME 4.0.2.** *Soit  $G$  un graphe et soit  $G'$  un graphe obtenu à partir de  $G$  en ajoutant un sommet isolé. Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ . Alors  $G$  est  $\mu$ -représentable si et seulement si  $G'$  est  $\mu$ -représentable.*

*Démonstration.* Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ .

Si le graphe  $G'$  est  $\mu$ -représentable par un mot  $w$ , alors le mot obtenu en supprimant de  $w$  la lettre labélisant le sommet isolé est un  $\mu$ -représentant du graphe  $G$ .

Supposons maintenant que le graphe  $G$  est  $\mu$ -représentable par un mot  $w$ . Considérons  $n$  une lettre plus grande que toutes celles apparaissant dans  $w$  et labélisons le sommet isolé par  $n$ . Alors, le mot  $nnw$  est un  $\mu$ -représentant du graphe  $G'$ .  $\square$

## 4.1 Lien avec les graphes circulaires

Dans cette section, nous établissons que tout graphe  $\mu$ -représentable,  $\mu \in S_3$ , est un graphe circulaire. Les énoncés et preuves sont issus de [15] en ce qui concerne les résultats lorsque  $\mu = 123$  et de [3] dans le cas  $\mu = 132$ .

**LEMME 4.1.1.** *Si  $w$  est un 123-représentant de  $G = (V, E)$  et possède un facteur  $ab$ , avec  $a < b$ , alors le mot  $w'$  formé en échangeant  $a$  et  $b$  dans ce facteur ne possède pas non plus le motif 123. De plus,  $w'$  représente  $G$  si  $ab \notin E$  et  $a$  et  $b$  ne s'alternent pas dans  $w'$ .*

*Démonstration.*

Raisonnons par l'absurde et supposons que le motif 123 apparaît dans  $w'$ . Autrement dit,  $w'$  contient une sous-suite croissante de longueur 3. Etant donné que la seule différence entre les mots  $w$  et  $w'$  est l'ordre de  $a$  et  $b$ , cela signifie que ces deux lettres sont dans la sous-suite. En effet, s'il ne contient aucune ou une seule des deux lettres, alors le motif 123 apparaît également dans  $w$  puisque  $ab$  est un facteur de  $w$ . Cependant,  $a$  et  $b$  apparaissent dans un ordre décroissant dans  $w'$ . Par conséquent, ils ne peuvent pas conduire au motif 123, d'où nous obtenons une contradiction.

Montrons maintenant que  $w'$  représente  $G$  si  $ab \notin E$  et  $a$  et  $b$  ne s'alternent pas dans  $w'$ . Les seules arêtes qui sont affectées par l'échange des lettres  $a$  et  $b$  sont les arêtes dont une des extrémités est  $a$  ou  $b$ . Cependant, l'ordre de  $a$  et  $b$  n'a pas d'importance lorsque nous considérons une arête ayant seulement une des extrémités valant  $a$  ou  $b$  puisque ce sont les symboles du facteur  $ab$  qui sont permutés. Donc, si  $ab \notin E$  et que  $a$  et  $b$  ne s'alternent pas dans  $w'$ , alors  $w'$  représente  $G$ .  $\square$

**THÉORÈME 4.1.2.** *Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ . Si un graphe  $G$  est  $\mu$ -représentable, alors il existe un  $\mu$ -représentant de  $G$  contenant au plus deux occurrences de chaque lettre.*

Ce résultat permet de conclure que les graphes  $\mu$ -représentables sont des graphes circulaires, pour tout  $\mu \in S_3$ .

*Démonstration.* Soit  $\mu \in \{123, 132\}$  et soit  $w$  un  $\mu$ -représentant de  $G = (V, E)$ . Remarquons que, pour tout  $y \in V$  tel que  $d(y) \geq 2$ , la lettre  $y$  apparaît au plus deux fois dans  $w$  vu le

théorème 3.0.9. Il reste donc à considérer les sommets de degré 0 ou de degré 1. Soit  $x$  un tel sommet. Montrons que si  $x$  apparaît plus de deux fois dans  $w$ , un nouveau  $\mu$ -représentant de  $G$  peut être créé, où le symbole  $x$  n'apparaît que deux fois et où le nombre d'instances des autres lettres est inchangé. Il suffira ensuite de répéter le processus sur toutes les lettres ayant plus de deux occurrences dans  $w$  afin que chaque lettre apparaisse au plus deux fois.

- Si  $d(x) = 0$ , considérons le mot  $w^1$  obtenu en supprimant toutes les occurrences de  $x$  dans  $w$ , et changeons le label du noeud  $x$  par  $x'$ , où  $x' > z$  pour tout  $z \in Var(w^1)$ . Le mot  $x'x'w^1$  évite le motif  $\mu$  puisque  $w$  l'évite et que  $x'$  ne peut participer au motif  $\mu$  étant donné qu'il commence le mot et a la plus grande valeur par construction. De plus, il représente le graphe  $G$  puisque  $x'$  n'alterne avec aucun autre sommet et que les autres paires alternantes n'ont pas été affectées.
- Si  $d(x) = 1$ , alors  $x$  a un sommet adjacent  $a$  et  $d(a) \geq 1$ .
  - ★ Si  $d(a) = 1$ , cela signifie que l'arête  $xa$  est déconnectée du reste du graphe. Soit  $w^1$  le mot obtenu en supprimant toutes occurrences de  $a$  et  $x$  dans  $w$ . Le mot  $x'a'x'a'w^1$ , avec  $x' > a' > z$  pour tout  $z \in Var(w^1)$ , évite le motif  $\mu$ . De plus, il représente  $G$  puisque  $x'$  et  $a'$  s'alternent et ils n'alternent avec aucune autre lettre.
  - ★ Si  $d(a) \geq 2$ , alors, au vu du corollaire 3.0.11,  $w$  contient au plus trois instances du symbole  $x$ . Si  $x$  apparaît moins de trois fois, le résultat est démontré. Supposons donc que  $x$  apparaît exactement trois fois. Le théorème 3.0.9 affirme que la lettre  $a$  apparaît au maximum deux fois. En fait, elle apparaît exactement deux fois puisqu'elle doit alterner avec la lettre  $x$  qui apparaît trois fois par hypothèse. Ainsi,

$$w = w^1 x_1 w^2 a_1 w^3 x_2 w^4 a_2 w^5 x_3 w^6$$

où les mots  $w^i$  peuvent éventuellement être vides, pour tout  $i \in \{1, \dots, 6\}$ . Dans la suite, il faut différencier en fonction du motif  $\mu$ .

Considérons  $\mu = 123$ .

Si le mot  $w^3$  n'est pas le mot vide, il existe une lettre  $c \in Var(w^3)$ . Alors 5 des 6 permutations possibles de  $axc$  apparaissent dans  $w$ . En effet, les sous-mots

$$x_1 a_1 c, \quad x_1 c a_2, \quad c x_2 a_2, \quad c a_2 x_3, \quad a_1 c x_2$$

se trouvent dans  $w$  et la seule permutation qui n'apparaît pas est  $axc$ . Par conséquent, pour que  $w$  soit un 123-représentant, il faut que  $a < x < c$  pour toute lettre  $c$  dans  $w^3$ . Similairement, si le mot  $w^4$  n'est pas vide, il existe une lettre  $c \in Var(w^4)$ . Alors 5 des 6 permutations possibles de  $axc$  apparaissent dans  $w$ . En effet, les sous-mots

$$x_1 a_1 c, \quad a_1 x_2 c, \quad x_1 c a_2, \quad a_1 c x_3, \quad c a_2 x_3$$

se trouvent dans  $w$  et la seule permutation n'apparaissant pas est  $cxa$ . D'où, pour que  $w$  soit un 123-représentant, il faut que  $c < x < a$  pour toute lettre  $c$  dans  $w^4$ . Puisque les deux inégalités  $a < x$  et  $x < a$  ne peuvent être vérifiées simultanément, les mots  $w^3$  et  $w^4$  ne peuvent pas être simultanément non vides.

Soit  $b$  un autre sommet adjacent à  $a$ ,  $b$  existe puisque  $d(a) \geq 2$ . Alors le symbole  $b$  se trouve dans  $w^3$  ou  $w^4$  puisqu'il alterne avec  $a$ . Dans ce cas, seuls deux des six ordres relatifs de  $a, b$  et  $x$  sont possibles. En effet, quatre cas mènent à une contradiction puisque le motif  $\mu$  apparaît alors dans  $w$ .

1. Les ordres  $x < a < b$ ,  $x < b < a$ ,  $b < a < x$  et  $a < b < x$  sont impossibles puisque les sous-mots  $x_1a_1b$ ,  $x_1ba_2$ ,  $ba_2x_3$  et  $a_1bx_3$  apparaissent dans  $w$  ;
2. Si  $a < x < b$ , alors  $b$  se trouve dans  $w^3$ . Sinon, si  $b$  apparaît dans  $w^4$ , alors  $a_1x_2b$  apparaît dans  $w$  ;
3. Si  $b < x < a$ , alors  $b$  est une lettre de  $w^4$ . Sinon, si  $b$  apparaît dans  $w^3$ , alors  $bx_2a_2$  apparaît dans  $w$ .

**Premier cas : Si  $a < x < b$  et  $b \in w^3$ .** Puisque  $w^3$  est non-vide,  $w^4$  est vide. Ainsi, nous avons

$$w = w^1x_1w^2a_1w^3bw^4x_2a_2w^5x_3w^6.$$

Si  $w^5$  est non-vide, chaque lettre de  $w^5$  doit être plus petite que  $a$ . Pour le prouver, considérons un symbole  $c$  de  $w^5$ . Alors, le mot  $w$  contient les sous-mots  $a_1cx_3$  et  $a_1x_2c$ . Ainsi, afin que  $w$  soit un 123-représentant, nous avons  $c < a$ . Par conséquent, chaque lettre de  $w^5$  est plus petite que  $a$ . Au vu du lemme 4.1.1, le mot

$$w'_1 = w^1x_1w^2a_1w^3bw^4x_2a_2x_3w^5w^6.$$

est un 123-représentant de  $G$ . En effet, nous savons que  $d(x) = 1$  et, comme le facteur  $x_2a_2x_3$  est dans  $w'_1$ ,  $x$  peut alterner seulement avec  $a$  et il alterne avec  $a$  au vu du sous-mot composé des lettres  $a$  et  $x$ .

**Deuxième cas : Si  $b < x < a$  et  $b \in w^4$ .** Puisque  $w^4$  est non-vide,  $w^3$  est vide. Ainsi, nous avons

$$w = w^1x_1w^2a_1x_2w^3bw^4a_2w^5x_3w^6.$$

Si  $w^2$  est non-vide, chaque lettre de  $w^2$  doit être plus grande que  $x$ . Pour le prouver, considérons un symbole  $c$  de  $w^2$ . Puisque le mot  $w$  contient les motifs  $x_1ca_1$  et  $cx_2a_2$ , nous avons  $a < c$  afin que  $w$  soit un 123-représentant. Vu le cas considéré, il en découle que  $x < c$ . Par conséquent, chaque lettre de  $w^2$  est plus grande que  $x$ . Au vu du lemme 4.1.1, le mot

$$w'_2 = w^1w^2x_1a_1x_2w^3bw^4a_2w^5x_3w^6.$$

est un 123-représentant de  $G$ . En effet, nous savons que  $d(x) = 1$  et, comme le facteur  $x_1a_1x_2$  se trouve dans  $w'_2$ ,  $x$  peut alterner seulement avec  $a$  et il alterne avec  $a$  au vu du sous-mot composé des lettres  $a$  et  $x$ .

En supprimant la première occurrence de  $x$  dans  $w'_1$  et la dernière occurrence dans  $w'_2$ , un nouveau mot représentant  $G$  est créé. Il contient deux copies de  $x$  et conserve la fréquence des autres lettres.

Considérons  $\mu = 132$ .

Le représentant s'écrit

$$w = w^1 x_1 w^2 a_1 w^3 x_2 w^4 a_2 w^5 x_3 w^6.$$

Comme le degré de  $a$  est au moins deux, nous savons que  $w^3$  et  $w^4$  ne peuvent être simultanément vides. Par conséquent, il existe une lettre  $b$ , différente de  $x$ , entre les deux occurrences de  $a$  dans  $w$ . Différents cas sont à considérer en fonction de l'ordre par rapport à  $b$ . Nécessairement, nous avons  $a < x$ . Effectivement, si  $a > x$ , alors le motif 132 apparaît quel que soit l'ordre considéré.

- Si  $b > a > x$ , alors le sous-mot  $x_1 b a_2$  correspond au motif 132.
- Si  $a > b > x$ , alors le sous-mot  $x_1 a_1 b$  correspond au motif 132.
- Si  $a > x > b$ , alors le sous-mot  $b a_2 x_3$  correspond au motif 132.

De plus, afin d'éviter le motif 132, toute lettre  $t$  à gauche de  $a_1$  est forcément plus grande que  $a$  puisque  $w$  contient le sous-mot  $t x_2 a_2$ . Considérons le mot  $w'$  obtenu en supprimant de  $w$  les trois occurrences de  $x$  et en remplaçant  $a_1$  par  $a^+ a_1 a^+$ , avec  $a < a^+ < a + 1$  (il est équivalent de renommer l'alphabet et d'augmenter d'un les labels des sommets supérieurs à  $a$ ).

Ainsi, si  $w'$  contient le motif 132, ce motif ne peut pas impliquer la lettre  $a^+$  créée. Effectivement,  $j c a^+$  et  $j a^+ c$  ne peuvent correspondre au motif 132 puisque que cela impliquerait que  $j < a^+$ . Or, par construction de  $a^+$ , on en tirerait que  $j < a$ . De surcroit, si  $a^+ j c$  correspondait au motif 132, alors  $w$  ne serait pas un 132-représentant à cause du sous-mot  $a_1 j c$ . D'où, si  $w'$  contient le motif 132, comme  $a^+$  ne peut être la cause de ce motif 132 dans  $w'$ , ce motif apparaît déjà dans  $w$ . Nous obtenons donc une contradiction.

En outre,  $a$  est l'unique lettre de  $w'$  alternant avec  $a^+$ . Ainsi,  $w'$  est un 132-représentant du graphe  $G'$  qui est le graphe  $G$  dont le label du sommet  $x$  est devenu  $a^+$ .

En répétant le processus afin que chaque lettre apparaisse au maximum deux fois, un  $\mu$ -représentant du graphe  $G$  est créé, pour tout  $\mu \in \{123, 132\}$ . □

**COROLLAIRE 4.1.3.** *Soit  $\mu \in S_3$ . Tout graphe  $\mu$ -représentable est un graphe circulaire.*

*Démonstration.* Soit  $\mu \in S_3$ . Au vu des théorèmes 3.0.6 et 4.0.1, il suffit de le prouver pour  $\mu \in \{123, 132\}$ . Par le théorème 4.1.2, tout graphe  $\mu$ -représentable possède un  $\mu$ -représentant contenant au plus deux copies de chaque lettre. Le théorème 2.2.10 permet de conclure que tout graphe  $\mu$ -représentable est donc circulaire. □

Ce corollaire permet d'obtenir des exemples de graphes représentables par mot mais non- $\mu$ -représentables comme le stipule le corollaire 4.1.4.

**COROLLAIRE 4.1.4.** *Soit  $\mu \in S_3$ . Les graphes avec un nombre de représentation strictement plus grand que deux ne sont pas  $\mu$ -représentables.*

*Démonstration.* Soit  $\mu \in S_3$ . Si un graphe a un nombre de représentation strictement supérieur à deux, alors ce n'est pas un graphe circulaire au vu du théorème 2.2.10 et de la définition du nombre de représentation. Le corollaire 4.1.3 permet de conclure.  $\square$

Ainsi, le graphe de Petersen et les prismes  $Pr_n$ , avec  $n \geq 3$ , ne sont pas  $\mu$ -représentables,  $\mu \in S_3$ . En effet, par les théorèmes 2.2.12 et 2.2.13, le nombre de représentation du graphe de Petersen et des prismes vaut 3.

## 4.2 Composantes connexes

En travaillant uniquement sur les composantes connexes d'un graphe, il est possible de déterminer si ce dernier est  $\mu$ -représentable, où  $\mu \in \{123, 132\}$ . Ainsi, grâce au théorème suivant, tiré de [15], nous pouvons construire, notamment à partir de différents graphes  $\mu$ -représentables par un mot 2-uniforme, un nouveau graphe composé de composantes connexes correspondants à ces graphes. Son corollaire est issu de [3].

**THÉORÈME 4.2.1.** *Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ . Soient  $G_1, \dots, G_k$  les composantes connexes  $\mu$ -représentables d'un graphe  $G$ . Alors  $G$  est  $\mu$ -représentable si et seulement si au plus une des composantes connexes ne possède pas de  $\mu$ -représentant 2-uniforme.*

*Démonstration.* Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ .

Premièrement, procédons par contraposée et montrons que le graphe  $G$  n'est pas  $\mu$ -représentable si au moins deux de ses composantes connexes ne possèdent pas de  $\mu$ -représentants 2-uniformes. Raisonnons par l'absurde en supposant que le graphe  $G$  est  $\mu$ -représentable et notons  $w$  son  $\mu$ -représentant. Considérons  $G_i$  et  $G_j$  deux composantes qui ne sont pas  $\mu$ -représentables par un mot 2-uniforme. Le théorème 4.1.2 permet de supposer que  $w$  a au plus deux copies de chaque lettre. Il est clair que  $w$  doit avoir des sous-mots  $w^i$  et  $w^j$ , formés en supprimant de  $w$  toutes les lettres qui n'apparaissent pas dans  $G_i$  et  $G_j$  respectivement et représentant  $G_i$  et  $G_j$ , sinon il serait impossible que ce soit des composantes connexes de  $G$ . Il est impossible pour  $w^i$  et  $w^j$  de contenir le motif  $\mu$  puisque  $w$  ne le contient pas. Donc ce sont des  $\mu$ -représentants de  $G_i$  et  $G_j$  respectivement. Au vu de l'hypothèse, nous en tirons que  $w^i$  et  $w^j$  ne sont pas 2-uniformes. Mais  $w$  contient au maximum deux copies de chaque lettre donc il existe  $a$  une lettre qui apparaît une seule fois dans  $w^i$  et  $b$  une lettre qui apparaît une seule fois dans  $w^j$ . Ceci implique que  $a$  et  $b$  sont alternés. Par conséquent,  $G_i$  et  $G_j$  ne sont pas des composantes connexes de  $G$ . On obtient donc une contradiction.

Deuxièmement, montrons que le graphe  $G$  est  $\mu$ -représentable si au plus une de ses composantes connexes ne possède pas de  $\mu$ -représentant 2-uniforme. Pour commencer, labélisons les noeuds des composantes de la manière suivante :  $G_1$  a les sommets  $1, 2, \dots, t_1$  ;  $G_2$  a les sommets  $t_1 + 1, t_1 + 2, \dots, t_2$  ; ... ;  $G_k$  a les sommets  $t_{k-1} + 1, t_{k-1} + 2, \dots, t_k$ . Soient

$w^1, w^2, \dots, w^k$  les  $\mu$ -représentants de  $G_1, G_2, \dots, G_k$  respectivement. Ces mots existent par hypothèse. Alors le mot

$$w = w^k w^{k-1} \dots w^1$$

est un  $\mu$ -représentant de  $G$ . En effet, comme  $w^i$  évite le motif  $\mu$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$  et que chaque lettre de  $w^i$  est plus petite que chaque lettre de  $w^{i+1}$ , le mot  $w$  ne contient pas le motif  $\mu$ . De plus, il représente  $G$  puisqu'il est impossible pour des lettres ayant deux occurrences dans  $w$  d'alterner avec d'autres n'étant pas dans la même composante. En outre, étant donné qu'au plus un des  $w^i$  peut avoir des lettres apparaissant moins de deux fois, ces lettres ne peuvent pas alterner avec des lettres dans  $w^j$  avec  $j \neq i$ . Donc  $G$  est  $\mu$ -représentable.  $\square$

Grâce à ce résultat, nous obtenons de nouveaux graphes  $\mu$ -représentables : ceux formés de l'union disjointe de plusieurs graphes représentables par un  $\mu$ -représentant 2-uniforme et d'au plus un graphe  $\mu$ -représentable ne possédant pas de  $\mu$ -représentant 2-uniforme.

**COROLLAIRE 4.2.2.** *Soit  $\mu \in \{123, 132\}$  et soient  $G_1, \dots, G_k$  les composantes connexes d'un graphe  $G$  possédant les  $\mu$ -représentants 2-uniformes  $w^1, \dots, w^k$  respectivement. Alors  $G$  est  $\mu$ -représentable par un mot 2-uniforme.*

*Démonstration.* Pour  $1 \leq i \leq k$ , notons  $a^i$  le nombre de lettres distinctes dans  $w^i$ , c'est-à-dire le nombre de sommets dans  $G_i$ . Notons  $red(w^i)$  le mot obtenu à partir de  $w^i$  en remplaçant la  $j$ -ème plus petite lettre par  $j$  et considérons  $red^*(w^i)$  le mot obtenu à partir de  $red(w^i)$  en modifiant chaque lettre  $j$ ,  $1 \leq j \leq a^i$ , par  $j + \sum_{m=1}^{i-1} a^m$ . Alors le mot

$$w = red^*(w^k) red^*(w^{k-1}) \dots red^*(w^1)$$

est un  $\mu$ -représentant du graphe  $G$ .  $\square$

### 4.3 Exemples

Dans cette section, nous fournissons des exemples de graphes  $\mu$ -représentables et non- $\mu$ -représentables, où  $\mu \in \{123, 132\}$ . Nous savons que les graphes non-représentables par mot ne peuvent pas être  $\mu$ -représentables. De plus, le corollaire 4.1.3 stipule que tous les exemples de graphes  $\mu$ -représentables sont des graphes circulaires. Ainsi, il existe des graphes représentables par mot mais non- $\mu$ -représentables, citons par exemple ceux possédant un nombre de représentation supérieur à deux au vu du corollaire 4.1.4. Enfin, nous prouvons qu'il existe des graphes circulaires qui ne sont pas  $\mu$ -représentables. De plus, dans certains cas, il est stipulé si un  $\mu$ -représentant 2-uniforme existe, afin de déterminer si le graphe peut être une composante connexe d'un graphe  $\mu$ -représentable d'après le théorème 4.2.1.

### 4.3.1 Graphes complets

Comme les graphes complets ont un nombre de représentation égal à 1, ils possèdent un  $\mu$ -représentant, où  $\mu \in \{123, 132\}$ . L'article [3] dénombre les  $\mu$ -représentants pour  $K_n$  avec  $n \geq 3$  ainsi que la longueur de ceux-ci. Afin de déterminer ce nombre, des résultats intermédiaires, tirés de [8] et de [16], concernant les permutations sont nécessaires.

Pour rappel, une *permutation* de l'ensemble  $X$  est une bijection de  $X$  dans lui-même. Dans notre cas,  $X$  est un ensemble fini puisque  $X = \{1, \dots, n\}$ , où  $n$  est le nombre de sommets du graphe. Nous notons  $S_n$  l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, n\}$ .

Remarquons que, pour tout  $n$ , il existe  $n!$  permutations dans  $S_n$ . En effet, nous avons  $n$  possibilités pour choisir la première lettre de la permutation, puis  $n - 1$  choix pour la seconde, une des lettres ayant déjà été sélectionnée, et ainsi de suite.

Voici les  $4! = 24$  permutations de l'ensemble  $S_4$  :

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,  
3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

**NOTATION 4.3.1.** Notons  $s_n(\mu)$  le nombre de permutations d'un mot formé de  $n$  lettres distinctes, de longueur  $n$  et ne contenant pas le motif  $\mu$ .

Les permutations de  $S_4$  ne contenant pas le motif 132 sont celles soulignées. Nous en tirons que  $s_4(132) = 14$ .

**DÉFINITION 4.3.2.** Pour tout  $n \geq 0$ , le  $n$ -ième nombre de Catalan  $C_n$  est défini par le nombre de manières différentes de calculer le produit de  $n + 1$  éléments  $a^0, \dots, a^n$ , en laissant l'ordre des facteurs inchangés, si on ne peut réaliser le produit que de deux facteurs à la fois.

**PROPOSITION 4.3.3.** Nous avons, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}.$$

**PROPOSITION 4.3.4.** Nous avons, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Les informations sur les nombres de Catalan sont issues de [16, p. 145-151] où les preuves des propositions sont développées.

**PROPOSITION 4.3.5.** On a  $s_n(132) = C_n$ .

L'égalité est vérifiée pour  $s_4(132)$ . En effet, nous savons que  $s_4(132) = 14$ . Or, nous avons

$$14 = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = C_4.$$

*Démonstration.* Soit une permutation de  $S_n$  évitant le motif 132.

Cette permutation s'écrit  $LnR$  où les facteurs  $L$  et  $R$ , situés respectivement à gauche et à droite de la plus grande lettre  $n$ , peuvent éventuellement être vides. Afin d'éviter le motif 132, chaque lettre de  $R$  doit être plus petite que n'importe quelle lettre de  $L$ . Ainsi, si  $|R| = i$ , les lettres de  $R$  sont les  $i$  plus petites lettres de l'alphabet puisque  $LnR$  est une permutation donc ne contient qu'une occurrence de chaque symbole.

De plus,  $L$  et  $R$  doivent être des permutations évitant le motif  $\mu$ . Par conséquent,

$$s_n(132) = \sum_{i=0}^{n-1} s_i(132)s_{n-i-1}(132) = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

où la deuxième égalité provient de la proposition 4.3.3 concernant la réduction pour les nombres de Catalan et la troisième de la proposition 4.3.4.  $\square$

Le nombre exact de 132-représentants pour le graphe complet  $K_n$ ,  $n \geq 3$ , est fourni par le théorème suivant. Cependant, il n'est pas généralisable au cas 123 étant donné la méthode utilisée pour démontrer la proposition 4.3.5 et celle utilisée dans la démonstration suivante, à savoir de considérer la plus grande lettre de l'alphabet.

**THÉORÈME 4.3.6.** *Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ . Pour  $n \geq 1$ , les graphes complets  $K_n$  sont  $\mu$ -représentables. Le graphe  $K_1$  peut être représenté par un mot de la forme  $11\cdots 1$  et le graphe  $K_2$  par un mot de la forme  $1212\cdots$  ou  $2121\cdots$  de longueur paire ou impaire.*

*De plus, pour  $n \geq 3$ , il y a*

$$2 + C_{n-2} + \sum_{i=0}^n C_i$$

*132-représentants différents pour  $K_n$ , où  $C_n$  est le  $n$ -ième nombre de Catalan.*

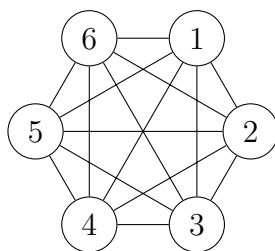


FIGURE 4.1 – Le graphe complet  $K_6$

*Démonstration.* Soit  $\mu \in \{123, 132\}$  et soit  $n \in \mathbb{N}$ . Les sommets du graphe complet à  $n$  sommets  $K_n$  sont labélisés de 1 à  $n$ .

Le graphe  $K_n$  peut être représenté par le mot  $n(n-1)(n-2)\cdots 21$ . Comme chaque lettre n'apparaît qu'une seule fois, chaque lettre alterne avec les autres et donc le mot représente



bien le graphe  $K_n$ . De plus, comme les lettres sont dans l'ordre décroissant, le motif  $\mu$  n'apparaît pas. Donc les graphes complets sont  $\mu$ -représentables.

Il est évident que  $K_1$  peut être représenté par un mot de la forme  $11\cdots 1$  et  $K_2$  par un mot de la forme  $1212\cdots$  ou  $2121\cdots$  de longueur paire ou impaire. De plus, chacun de ces mots ne contient pas le motif  $\mu$  puisqu'ils sont formés uniquement avec deux lettres distinctes.

Soit  $\mu = 132$ . Il reste à trouver le nombre de  $\mu$ -représentants différents de  $K_n$  lorsque  $n \geq 3$ . Soit  $n \geq 3$  et soit  $w$  un  $\mu$ -représentant du graphe  $K_n$ . Par définition d'un graphe complet, les lettres  $i$  et  $j$  s'alternent quelles que soient les lettres  $i$  et  $j$  choisies entre 1 et  $n$ . Comme  $n \geq 3$ , nous avons  $d(n) \geq 2$ . Ainsi, le théorème 3.0.9 affirme que la lettre  $n$  apparaît au plus deux fois.

- Supposons que  $n$  apparaît deux fois dans  $w$ . Dans ce cas,  $w = w^1 n w^2 n w^3$  où les mots  $w^k$  sont formés de lettres comprises entre 1 et  $n-1$  pour tout  $k = 1, 2, 3$ . Puisque le graphe est complet, pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n-1$ , les lettres  $n$  et  $i$  doivent s'alternier. Ainsi, il y a exactement une copie de chaque lettre dans  $w^2$ , ce qui signifie que  $w^2$  est une permutation de longueur  $n-1$ . De plus, la lettre  $i$ , avec  $1 \leq i \leq n-2$ , ne peut apparaître dans  $w^1$  sinon  $in(n-1)$  formerait le motif 132. De ce fait, nous obtenons  $w^1 = n-1$  ou  $w^1 = \varepsilon$ . Similairement, nous avons  $w^3 = 1$  ou  $w^3 = \varepsilon$  afin d'éviter le motif 132. Quatre cas sont donc à considérer.
  - ★ Si  $w^1 = n-1$  et  $w^3 = 1$ , alors 1 doit se trouver à gauche de  $(n-1)$  dans  $w^2$  puisque le graphe est complet, autrement dit toutes les lettres doivent s'alternier. De plus, pour la même raison, la lettre  $i$  doit apparaître entre 1 et  $n-1$  dans  $w^2$ , quel que soit  $i$  entre 2 et  $n-2$ . En outre, afin que  $w$  soit un 132-représentant, les lettres  $i$  et  $j$  doivent être en ordre croissant pour tous symboles  $i, j$  tels que  $2 \leq i < j \leq n-2$ . En effet, sinon, le sous-mot  $1ji$  formerait le motif 132. Ainsi, nous obtenons  $w = (n-1)nw'1$  avec  $w'$  la permutation croissante de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Ce cas mène donc à une représentation du graphe  $K_n$ .
  - ★ Si  $w^1 = n-1$  et  $w^3 = \varepsilon$ , alors, pour  $1 \leq i \leq n-2$ , la lettre  $i$  doit apparaître à gauche de  $n-1$  dans  $w^2$  puisque le graphe est complet. Ainsi, nous obtenons  $w = (n-1)nw'(n-1)n$  où  $w'$  est une permutation de  $\{1, 2, \dots, n-2\}$  ne contenant pas le motif 132. Ce cas mène à  $C_{n-2}$  représentations au vu de la proposition 4.3.5.
  - ★ Si  $w^1 = \varepsilon$  et  $w^3 = 1$ , alors, pour  $2 \leq i \leq n-1$ , la lettre  $i$  doit apparaître à droite de 1 dans  $w^2$  puisque le graphe est complet. Ainsi, nous obtenons  $w = n1w'n1$  où  $w'$  est une permutation de  $\{2, 3, \dots, n-1\}$ . Comme le motif 132 ne peut apparaître,  $w'$  est la permutation croissante de  $\{2, 3, \dots, n-1\}$ . Ce cas mène à une unique représentation du graphe  $K_n$ .
  - ★ Si  $w^1 = \varepsilon$  et  $w^3 = \varepsilon$ , alors nous avons  $w = nw^2n$  avec  $w^2$  est une permutation de  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  évitant le motif 132. Par la proposition 4.3.5, ce cas mène à  $C_{n-1}$  représentations.

Ainsi, lorsque  $n$  possède deux occurrences dans  $w$ , nous avons déjà  $2 + C_{n-2} + C_{n-1}$  représentants du graphe complet  $K_n$ .

- Supposons que  $n$  apparait une fois dans  $w$ . Le théorème 3.0.9 stipule que chaque lettre apparait au plus deux fois puisque le degré de chaque sommet est strictement plus grand que 2. Montrons que seul un symbole peut avoir deux instances. Pour  $1 \leq i < j \leq n-1$ , supposons qu'il existe deux copies de  $i$  et  $j$  dans  $w$ . Puisque  $K_n$  est un graphe complet,  $n$  doit se trouver entre les deux occurrences de  $i$  et entre les deux occurrences de  $j$  afin d'alterner avec les deux lettres. Dans ce cas,  $i_1 n j_2$  forme le motif 132. D'où, au maximum une lettre peut apparaitre deux fois.
  - ★ Si chaque lettre a une unique occurrence dans  $w$ , alors le mot  $w$  est une permutation de  $\{1, \dots, n\}$  évitant le motif 132. La proposition 4.3.5 fournit alors  $C_n$  représentations.
  - ★ Si une lettre  $i$  apparait deux fois dans  $w$ , avec  $1 \leq i \leq n-1$ , alors toutes les lettres distinctes de  $i$  n'apparaissent qu'une fois dans  $w$  et doivent alterner avec  $i$  puisque le graphe est complet. Ainsi, elles se trouvent entre les deux occurrences de  $i$ . Nous avons, afin d'éviter le motif 132,  $w = i(i+1) \dots n w' i$  où  $w'$  est une permutation de  $\{1, \dots, i-1\}$  évitant le motif 132. En effet, les lettres situées après l'occurrence de  $n$  doivent être plus petites que  $i$  sinon  $i_1 n j$ , avec  $i < j < n$ , formerait le motif 132. De plus, entre la première occurrence de  $i$  et  $n$  ne peut se trouver de lettres plus petites que  $i$  sinon  $j n i_2$  avec  $j < i < n$ , formerait le motif 132. Donc toutes lettres plus petites que  $i$  se trouvent après l'occurrence de  $n$  et toutes lettres plus grandes que  $i$  se trouvent avant cette occurrence. De plus, les lettres entre  $i_1$  et  $n$  apparaissent en ordre croissant, sinon  $i j k$  avec  $i < k < j < n$ , formerait le motif 132. Donc,  $w = i(i+1) \dots n w' i$  où  $w'$  est une permutation de  $\{1, \dots, i-1\}$  évitant le motif 132.
- Par conséquent, ce cas conduit à  $\sum_{i=1}^{n-1} C_{i-1} = \sum_{i=0}^{n-2} C_i$  représentations de  $K_n$ .

En combinant les représentations possibles, il y a

$$2 + C_{n-2} + \sum_{i=0}^{n-2} C_i + C_{n-1} + C_n = 2 + C_{n-2} + \sum_{i=0}^n C_i$$

132-représentants du graphe complet  $K_n$ . □

**COROLLAIRE 4.3.7.** *Soit  $n \geq 3$ . La longueur d'un 132-représentant de  $K_n$  est soit  $n$ , soit  $n+1$ , soit  $n+2$ , soit  $n+3$ .*

*Démonstration.* Soit  $n \geq 3$  et soit  $w$  un 132-représentant de  $K_n$ . Les mots du théorème précédent sont considérés.

- Dans un premier temps, supposons que  $n$  apparait deux fois. Quatre cas se sont présentés.
- ★ Dans le premier cas, trois lettres apparaissent deux fois, à savoir  $n, (n-1)$  et 1, les autres symboles apparaissent une seule fois donc  $|w| = n+3$ .
- ★ Dans les deux cas suivants, deux lettres sont présentes deux fois dans le mot  $w$ ,  $n$  et soit  $n-1$ , soit 1, les autres lettres n'étant présentes qu'une fois donc  $|w| = n+2$ .
- ★ Dans le dernier sous-cas, seul  $n$  apparait deux fois donc  $|w| = n+1$ .

- Dans un second temps, supposons que  $n$  apparait une seule fois. Deux cas se sont présentés.
- ★ Soit chaque lettre apparait une seule fois et alors  $|w| = n$ .
- ★ Soit une seule lettre apparait deux fois et, dans ce cas,  $|w| = n + 1$ . □

Ainsi, le graphe complet  $K_3$  possède

$$2 + C_1 + \sum_{i=0}^3 C_i = 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 12$$

132-représentants. Ils sont cités ci-dessous dans l'ordre obtenu grâce à la démonstration du théorème :

231231, 23123, 31231, 3123, 3213, 123, 213, 231, 312, 321, 1231, 2312.

Il est aisé de vérifier que la longueur des représentants est comprise entre 3 et 6.

Sachant que les graphes complets sont  $\mu$ -représentables, où  $\mu \in \{123, 132\}$ , il est intéressant de savoir s'ils possèdent un  $\mu$ -représentant 2-uniforme. En effet, si tel est le cas, le théorème 4.2.1 permet de créer de nouveaux graphes  $\mu$ -représentables possédant un graphe complet comme composante connexe. Les deux théorèmes proviennent de [15].

**THÉORÈME 4.3.8.** *Tout graphe complet est 123-représentable par un mot 2-uniforme.*

*Démonstration.* Le graphe complet à  $n$  sommets  $K_n$  peut être représenté par le mot 2-uniforme  $n(n-1)(n-2)\cdots 21n(n-1)(n-2)\cdots 21$ . □

**THÉORÈME 4.3.9.** *Le graphe complet  $K_3$  est 132-représentable par un mot 2-uniforme.*

*Démonstration.* Le mot 231231 est un représentant 2-uniforme de  $K_3$  évitant le motif 132. □

**THÉORÈME 4.3.10.** *Soit  $n \geq 4$ . Le graphe complet  $K_n$  n'est pas 132-représentable par un mot 2-uniforme.*

*Démonstration.* Soit  $n \geq 4$ .

Raisonnons par l'absurde et supposons avoir  $w$  un 132-représentant de  $K_n$  possédant deux copies de chaque lettre. Nous avons  $w = w^1 1 w^2 1 w^3$  où les symboles des mots  $w^i$  appartiennent à l'alphabet  $A = \{2, \dots, n\}$  pour  $i = 1, 2, 3$ . De plus, le mot  $w^2$  contient les lettres 2, 3, 4 puisque le graphe est complet et elles se trouvent en ordre croissant afin d'éviter le motif 132. Comme le mot  $w$  est 2-uniforme, les lettres 2, 3, 4 apparaissent soit dans  $w^1$ , soit dans  $w^3$ . Les symboles 2 et 3 sont forcément dans  $w^1$ . Effectivement, si un des deux se trouvait dans  $w^3$ , le motif 132 se trouverait dans  $w$ . En outre, puisque chaque sommet est connecté aux autres, les lettres 2 et 3 doivent s'alterner. Donc elles apparaissent en ordre croissant dans  $w^1$ . Enfin, si la lettre 4 se trouve dans  $w^3$ , alors elle n'alterne pas avec les lettres 2 et 3. Ainsi, le symbole 4 doit se situer dans  $w^1$  également et après les lettres 2 et 3 afin que les arêtes 24 et 34 existent. Dans ce cas, le sous-mot 243 apparait dans  $w$ , où 2 et 4 sont pris dans  $w^1$  et 3 est choisi dans  $w^2$ . Or, il correspond au motif 132, d'où nous obtenons une contradiction. □

### 4.3.2 Graphes bipartis complets

Les graphes bipartis complets sont représentables par mot au vu du corollaire 2.3.9 puisque ce sont des graphes de comparabilité. De plus, ce sont des graphes circulaires. En effet, par définition, les sommets sont répartis en deux ensembles  $V_1$  et  $V_2$  tels que  $E = V_1 \times V_2$  où  $E$  est l'ensemble des arêtes. Ainsi, les sommets de  $V_1$  peuvent être associés à des cordes parallèles d'un cercle et ceux de  $V_2$  à des cordes de ce cercle qui sont parallèles entre elles et perpendiculaires aux cordes correspondants aux sommets de  $V_1$ . De cette manière, deux cordes s'intersectent si et seulement si les noeuds correspondants sont adjacents. Comme les graphes bipartis complets sont circulaires, il n'est pas possible de conclure qu'ils ne sont pas  $\mu$ -représentables,  $\mu \in \{123, 132\}$ . La question est donc de savoir s'ils le sont ou non. Le cas des étoiles et des graphes bipartis possédant au moins deux noeuds dans chaque sous-ensemble de sommets sont traités séparément.

Le théorème 4.3.12 concernant l'étoile  $E_6$  est tiré de [15], les autres énoncés et preuves de cette sous-section proviennent de mes recherches.

#### Etoiles

Par définition, les étoiles  $E_j$  sont les graphes bipartis complets  $K_{1,j}$  pour tout  $j$  donc elles sont représentables par mot. Ainsi, il reste à établir si elles sont  $\mu$ -représentables,  $\mu \in \{123, 132\}$ .

**THÉORÈME 4.3.11.** *Les étoiles  $E_j$  possèdent un 132-représentant 2-uniforme pour tout  $j \geq 1$ .*

*Démonstration.* Soit  $j \geq 1$ .

Le mot  $w = j(j-1)\dots 21012\dots(j-1)j0$  est un 132-représentant de l'étoile  $E_j$ , où 0 est le label du sommet lié à tous les autres. En effet, puisque le dernier 0 ne peut contribuer au motif 132 et comme les lettres sont disposées de manière décroissantes avant la première occurrence du symbole 1, et croissantes après la seconde occurrence de ce symbole 1, il n'est pas possible que le motif 132 se trouve dans le mot  $w$ . De plus, le mot  $w$  est bien un représentant de l'étoile  $E_j$  puisque la lettre 0 est la seule à alterner avec les autres symboles au vu du lemme 2.1.2, ce qui signifie que le sommet 0 est lié à tous les autres.  $\square$

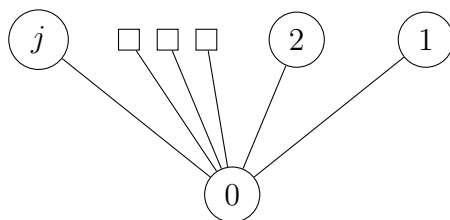


FIGURE 4.2 – Label des sommets de l'étoile  $E_j$

**THÉORÈME 4.3.12.** *L'étoile  $E_6$  n'est pas 123-représentable.*

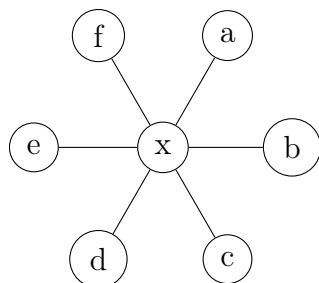


FIGURE 4.3 – L'étoile  $E_6$

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons avoir  $w$  un 123-représentant de l'étoile  $E_6$  telle que représentée à la FIGURE 4.3. Au maximum une des lettres de  $a$  à  $f$  ne peut apparaître qu'une fois. En effet, si deux de telles lettres apparaissent une fois alors elles s'alternent, d'où nous obtenons une contradiction puisque l'arête correspondante n'existe pas. Supposons, sans perte de généralité que  $a, b, c, d, e$  apparaissent deux fois dans  $w$ . De plus, comme  $d(x) \geq 2$ , le théorème 3.0.9 stipule que  $x$  apparaît au maximum deux fois dans  $w$ . Nous avons donc deux cas.

- Si la lettre  $x$  apparaît une fois dans  $w$ , alors, comme  $x$  doit alterner avec toutes les autres lettres, lorsque les lettres sont présentes deux fois dans  $w$ , ce qui est le cas de  $a, b, c, d$  et  $e$ , une occurrence se trouve à gauche de  $x$  et une à droite. Supposons, sans perte de généralité, que  $a < b < c$ . Remarquons que  $b$  doit survenir après  $c$  à droite de  $x$  sinon  $a_1b_2c_2$  formerait le motif 123. De même,  $a$  doit survenir après  $b$  à gauche de  $x$  sinon  $a_1b_1c_2$  formerait le motif 123. Par le lemme 2.1.2, les deux seules possibilités par rapport à l'ordre des lettres dans  $w$  sont  $b_1a_1c_1xc_2a_2b_2$  et  $b_1c_1a_1xa_2c_2b_2$ , les autres cas menant à la création d'arêtes non-existantes. Enfin, la présence des sous-mots  $b_1c_1x$  et  $xa_2b_2$  implique que  $x < c$  et  $a < x$  afin d'éviter le motif 123. Donc nous avons  $a < x < c$ , mais le sous-mot  $a_1xc_2$  correspond au motif 123. Par conséquent, l'étoile  $E_6$  ne possède pas de 123-représentant avec une unique occurrence de la lettre  $x$ .
- Si la lettre  $x$  apparaît deux fois dans  $w$ , alors toutes les lettres distinctes de  $x$  doivent apparaître une unique fois entre les deux occurrences de  $x$  étant donné que  $x$  doit alterner avec toutes les autres lettres. Les lettres  $a, b, c, d$  et  $e$  apparaissant deux fois dans  $w$ , la seconde occurrence se trouve soit avant  $x_1$ , soit après  $x_2$ . Par le principe des tiroirs, il y a au moins trois lettres d'un côté d'un des  $x$ . Sans perte de généralité, supposons que  $a, b$  et  $c$  sont ces lettres. Les mêmes arguments que ceux utilisés dans le cas précédent nous donnent que l'étoile  $E_6$  ne possède pas de 123-représentant avec deux occurrences de la lettre  $x$ .

Arrivant à une contradiction dans les deux cas, l'étoile  $E_6$  n'est pas 123-représentable.  $\square$

**COROLLAIRE 4.3.13.** *Pour tout  $j \geq 6$ , l'étoile  $E_j$  n'est pas 123-représentable.*

*Démonstration.* Pour  $j = 6$ , le résultat est démontré dans le théorème 4.3.12. Or, la proposition 3.0.5 affirme que la  $\tau$ -représentabilité est héréditaire. Donc pour tout  $j > 6$ , si l'étoile  $E_j$  est 123-représentable, alors l'étoile  $E_6$  est 123-représentable, ce qui est impossible.  $\square$

Nous avons établi que les étoiles  $E_j$  ne sont pas 123-représentables lorsque  $j \geq 6$ . Les étoiles  $E_j$ ,  $j < 6$ , sont 123-représentables au vu des représentants fournis pour les labels des sommets présentés aux FIGURES 4.4 et 4.5.



FIGURE 4.4 – L'étoile  $E_5$  : 56365421312 - L'étoile  $E_4$  : 451543212

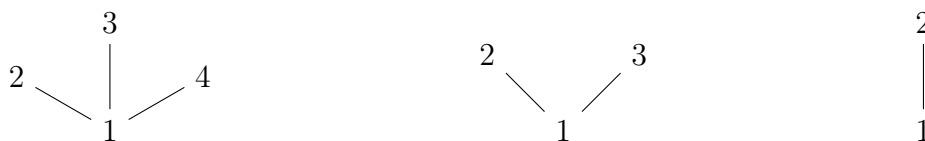


FIGURE 4.5 – L'étoile  $E_3$  : 423132 - L'étoile  $E_2$  : 3212 - L'étoile  $E_1$  : 12

### Graphes bipartis complets possédant au moins deux noeuds dans chaque sous-ensemble de sommets

**REMARQUE 4.3.14.** Les graphes  $K_{n,m}$  et  $K_{m,n}$  étant isomorphes, les rôles de  $n$  et  $m$  sont interchangeables.

Lorsqu'un des deux sous-ensembles de  $V$  ne contient qu'un seul élément, nous obtenons les étoiles dont nous venons de montrer qu'elles sont  $\mu$ -représentables pour tout  $\mu \in \{123, 132\}$  excepté lorsque l'autre sous-ensemble contient au moins six sommets. Effectivement, dans ce cas, nous avons démontré qu'elles ne sont pas 123-représentables. Ce dernier constat nous permet d'obtenir le résultat qui suit.

**COROLLAIRE 4.3.15.** *Les graphes bipartis complets  $K_{n,m}$  ne sont pas 123-représentables lorsque  $m \geq 6$ .*

*Démonstration.* La proposition 3.0.5 stipule que la  $\tau$ -représentabilité est héréditaire. Ainsi, si un sous-graphe n'est pas  $\tau$ -représentable, le graphe n'est pas  $\tau$ -représentable. Or, l'étoile  $E_6$  est un sous-graphe induit de tous graphes bipartis complets  $K_{n,m}$  tels que  $m \geq 6$  et le théorème 4.3.12 affirme que l'étoile  $E_6$  n'est pas 123-représentable.  $\square$

Nous cherchons maintenant à connaître la  $\mu$ -représentabilité des graphes bipartis complets  $K_{n,m}$  en toute généralité.

**THÉORÈME 4.3.16.** *Les graphes bipartis  $K_{2,2}$  et  $K_{3,2}$  possèdent un 123-représentant.*

*Démonstration.*

Le mot 431421 est un 123-représentant du graphe  $K_{2,2}$  dont le label des sommets est illustré à la FIGURE 4.6. Effectivement, trouver le sous-mot  $ab$  tel que  $a < b$  et tel qu'il existe  $c$  avec  $c > b$  implique nécessairement que  $a = 1$  et  $b = 2$ . Or, nous ne trouvons pas de symbole  $c \in \{3, 4\}$  après la lettre 2.

En raisonnant de même, il est aisé de constater que le graphe  $K_{3,2}$ , dont le label des sommets est illustré à la FIGURE 4.6, possède 53215412 comme 123-représentant.  $\square$



FIGURE 4.6 – Label des sommets des graphes bipartis complets  $K_{2,2}$  et  $K_{3,2}$

**THÉORÈME 4.3.17.** *Soient  $n \geq 4$  et  $m \geq 2$ . Les graphes bipartis  $K_{n,m}$  ne sont pas 123-représentables.*

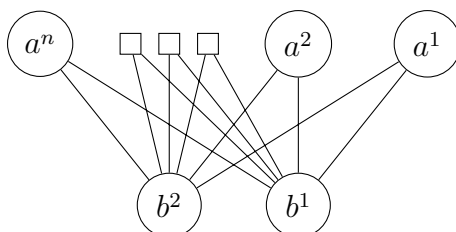


FIGURE 4.7 – Le graphe biparti complet  $K_{n,2}$

*Démonstration.* Soit  $n \geq 4$ . Il suffit de montrer que le graphe biparti complet  $K_{n,2}$  n'est pas 123-représentable au vu du caractère héréditaire de la  $\tau$ -représentabilité établie à la proposition 3.0.5. Par définition, le graphe biparti complet est tel que  $E = V_1 \times V_2$  avec  $\#V_1 = n$  et  $\#V_2 = 2$ . Notons  $a^1, \dots, a^n$  les labels des sommets de  $V_1$  et  $b^1, b^2$  les labels des sommets de  $V_2$ . Vu que chaque sous-ensemble de noeuds en contient au moins deux, le degré de chaque sommet est supérieur ou égal à deux. Etant donné que  $|123| = 3$ , le théorème 3.0.9 stipule que chaque lettre apparaît au maximum deux fois. De surcroît, au plus un des sommets de chaque sous-ensemble de noeuds apparaît une seule fois sinon une arête lierait deux sommets d'un même sous-ensemble de noeuds, ce qui est impossible par

définition. Par conséquent, nous obtenons trois cas, à savoir respectivement lorsque deux ou une lettres ont une unique occurrence, ou lorsque tous les symboles ont deux occurrences.

- Soit un des sommets de chaque sous-ensemble de noeuds apparait une seule fois. Notons ces sommets  $a^n$  et  $b^2$ . Nous obtenons alors les mots

$$w = w^1 a^n w^2 b^2 w^3 \quad \text{et} \quad w' = w^{1'} b^2 w^{2'} a^n w^{3'}$$

où les mots  $w^1, w^2, w^3, w^{1'}, w^{2'}$  et  $w^{3'}$  peuvent éventuellement être vides.

Les lettres distinctes de  $a^n$  et  $b^2$  apparaissent nécessairement deux fois. Comme  $E = V_1 \times V_2$ , les lettres  $a^i$  et  $b^j$  doivent alterner, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  et pour tout  $j \in \{1, 2\}$ . Donc  $w^1, w^{3'}$  contiennent le symbole  $b^1$  et  $w^3, w^{1'}$  contiennent toutes les lettres de  $V_1$  excepté  $a^n$ . De plus, étant donné que les lettres  $a^i$  (resp.  $b^j$ ) ne doivent pas s'alterner entre elles, la copie restante des lettres se trouve dans  $w^2, w^{2'}$ . En outre, dans  $w^2$ , toutes les lettres de  $V_1$  apparaissent avant celle de  $V_2$ , sinon nous aurions le sous-mot  $b^1 a^n b^1 a^i b^2 a^i$ , ce qui contredit la complétude du graphe biparti  $K_{n,2}$ ,  $b^1$  et  $a^i$  ne s'alternant pas. Pour la même raison, dans  $w^{2'}$ , toutes les lettres de  $V_1$  apparaissent après celle de  $V_2$ .

Comme les lettres  $a^i$  (resp.  $b^j$ ) ne peuvent pas s'alterner, elles doivent se trouver dans l'ordre opposé de chaque côté de  $b^2$  (resp.  $a^n$ ) au vu du lemme 2.1.2. Ainsi, nous avons

$$w = b^1 a^n a^1 a^2 \dots a^{n-2} a^{n-1} b^1 b^2 a^{n-1} a^{n-2} \dots a^2 a^1 \quad \text{et} \quad w' = a^1 a^2 \dots a^{n-1} b^2 b^1 a^{n-1} \dots a^2 a^1 a^n b^1.$$

Soit  $\mu = 123$ .

Dans le mot  $w$ , seule la permutation  $a^2 a^1 b^1$  des symboles  $b^1, a^1$  et  $a^2$  n'apparait pas. Afin d'éviter le motif 123, on a alors  $a^2 < a^1 < b^1$ . On en tire que  $a^{n-1} < a^2$ . En effet, les inégalités  $a^{n-1} > b^1$  et  $a^2 < a^{n-1} < b^1$  sont impossible à cause respectivement de la présence des sous-mots  $a_1^1 b_2^1 a_2^{n-1}$  et  $a_1^2 a_1^{n-1} b_2^1$ . Ainsi, on a  $a^{n-1} < a^2 < a^1 < b^1$ . Une contradiction est obtenue due à la présence du sous-mot  $a_2^{n-1} a_2^2 a_1^1$ .

Dans le mot  $w'$ , seule la permutation  $b^1 a^1 a^2$  des symboles  $b^1, a^1$  et  $a^2$  n'apparait pas. Afin d'éviter le motif 123, on a alors  $b^1 < a^1 < a^2$ . On en tire que  $a^{n-1} > a^2$ . En effet, les inégalités  $a^{n-1} < b^1$  et  $b^1 < a^{n-1} < a^2$  sont impossible à cause respectivement de la présence des sous-mots  $a_1^{n-1} b_1^1 a_2^1$  et  $b_1^1 a_2^{n-1} a_2^2$ . Ainsi, on a  $b^1 < a^1 < a^2 < a^{n-1}$ . Une contradiction est obtenue due à la présence du sous-mot  $a_1^1 a_1^2 a_1^{n-1}$ .

- Soit une seule lettre apparait une unique fois. Cela signifie que toutes les autres lettres apparaissent deux fois. La lettre avec une unique instance est soit dans  $V_1$ , soit dans  $V_2$ .
- ★ Notons  $b^2$  la lettre ayant une seule occurrence dans  $w$ . Alors nous avons

$$w'' = w^1 b^2 w^2.$$

Comme l'arête  $b^2 a^i$  existe pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , les  $a^i$  doivent alterner avec  $b^2$  mais pas entre eux donc une copie se trouve dans  $w^1$  et une dans  $w^2$  en sens opposé par le lemme



2.1.2. Ainsi, étant donné que les  $a^i$  et  $b^1$  doivent s'alterner pour tout  $i$ , nous obtenons

$$w'' = b^1 a^n a^1 a^2 \dots a^{n-2} a^{n-1} b^1 b^2 a^{n-1} a^{n-2} \dots a^2 a^1 a^n$$

ou  $w'' = a^n a^1 a^2 \dots a^{n-2} a^{n-1} b^2 b^1 a^{n-1} a^{n-2} \dots a^2 a^1 a^n b^1.$

Puisque ces mots  $w''$  contiennent respectivement comme facteur  $w$  et  $w'$ , ils contiennent le motif 123. En effet, si  $w''$  était un 123-représentant, alors  $w$  ou  $w'$  en serait un.

★ Notons  $a^n$  la lettre ayant une seule occurrence dans  $w$ . Alors nous avons

$$w'' = w^1 a^n w^2.$$

Comme l'arête  $b^j a^n$  existe pour tout  $j \in \{1, 2\}$ , les  $b^j$  doivent alterner avec  $a^n$  mais pas entre eux donc une copie se trouve dans  $w^1$  et une dans  $w^2$  en sens opposé par le lemme 2.1.2. Ainsi, comme les  $a^k$  et les  $b^j$  doivent s'alterner pour tout  $k, j$ , nous obtenons

$$w'' = b^2 b^1 a^n a^1 \dots a^{n-1} b^1 b^2 a^{n-1} \dots a^2 a^1$$

ou  $w'' = a^1 a^2 \dots a^{n-1} b^2 b^1 a^{n-1} \dots a^2 a^1 a^n b^1 b^2$

ou  $w'' = a^{i+1} \dots a^{n-1} b^2 b^1 a^{n-1} \dots a^{i+1} a^n a^1 \dots a^i b^1 b^2 a^i \dots a^1$

où  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ .

Les deux premiers mots  $w''$  contiennent respectivement comme facteur  $w$  et  $w'$ . Par conséquent, ce ne sont pas des 123-représentants.

Le troisième mot  $w''$  contient toutes les permutations des symboles  $b^1$ ,  $b^2$  et  $a^{n-1}$  excepté  $b^1 b^2 a^{n-1}$  puisque  $i \leq n-2$ . On en tire que  $b^1 < b^2 < a^{n-1}$ . Par conséquent, on a  $b^1 < b^2 < a^1 < a^{n-1}$  au vu des sous-mots  $b_1^1 a_2^{n-1} a_1^1$ ,  $a_1^1 b_2^1 b_2^2$  et  $b_1^1 a_1^1 b_2^2$ . Le sous-mot  $b_1^1 b_2^2 a_2^1$  conduit à une contradiction.

- Soit toutes les lettres apparaissent deux fois. Alors, des mots contenant comme facteur un des mots provenant des situations précédentes sont obtenus. Par conséquent, si un de ces mots ne contenait pas le motif 123 alors ses facteurs non plus, donc nous obtenons une contradiction.

Puisqu'aucune des situations n'est possible, les graphes bipartis  $K_{n,m}$  avec  $n \geq 4$  et  $m \geq 2$  ne sont pas 123-représentables.  $\square$

Comme le stipule le théorème suivant, la conclusion diffère en ce qui concerne la 132-représentabilité.

**THÉORÈME 4.3.18.** *Soit  $n \geq 2$ . Les graphes bipartis complets  $K_{n,2}$  sont 132-représentables.*

*Démonstration.* Soit  $n \geq 2$ . La démonstration précédente fournit le représentant

$$w = a^1 a^2 \dots a^{n-2} a^{n-1} b^2 b^1 a^{n-1} a^{n-2} \dots a^2 a^1 a^n b^1$$

pour les graphes bipartis  $K_{n,2}$ .

En prenant  $b^2 = 3$ ,  $b^1 = 2$ ,  $a^n = 1$  et  $a^i = (n - i + 3)$  pour  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ , le mot obtenu

$$w = (n + 2)(n + 1) \cdots 543245 \cdots (n + 1)(n + 2)12$$

est un 132-représentant du graphe  $K_{n,2}$ . Par construction, c'est un représentant du graphe. Il reste à montrer que le motif 132 n'apparaît pas dans  $w$ . Pour trouver un sous-mot  $ac$  avec  $a < c$ , il faut que  $a$  se situe avant l'occurrence de  $a^n = 1$ . En effet, si  $a = 1$  alors il n'existe pas de symbole  $b$  tel que  $c > b > a$ . De plus, comme les lettres avant  $b_1^1$  ne font que décroître, on peut supposer que  $a = 2$ . Or, les symboles après la première occurrence de 2 ne font que croître jusqu'à  $a^n$  donc on peut supposer que  $c = (n + 2)$ . Par conséquent, le symbole  $b$  tel  $2 < b < (n + 2)$  et tel que  $acb$  soit un sous-mot de  $w$  n'existe pas puisque le facteur  $a^n b^1$  ne contient pas de symbole plus grand que 2. Par conséquent, le motif 132 n'apparaît pas.  $\square$

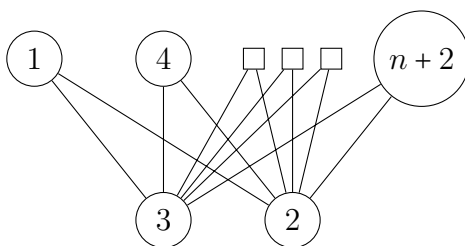


FIGURE 4.8 – Label des sommets du graphe biparti complet  $K_{n,2}$

Nous avons constaté que les graphes bipartis complets  $K_{n,m}$  sont 132-représentables lorsqu'un des deux sous-ensembles de noeuds ne comprend qu'un ou deux sommets au vu des théorèmes 4.3.11 et 4.3.18. Tentons de déterminer ce qu'il en est en général.

**THÉORÈME 4.3.19.** *Soient  $n, m \geq 3$ . Les graphes bipartis complets  $K_{n,m}$  ne sont pas 132-représentables.*

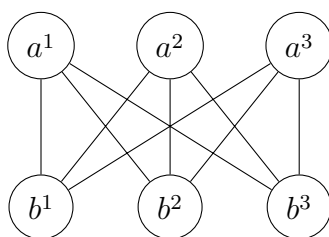


FIGURE 4.9 – Le graphe biparti complet  $K_{3,3}$

*Démonstration.* Si le graphe biparti complet  $K_{3,3}$  n'est pas 132-représentable, alors la proposition 3.0.5 permet de conclure puisque tout graphe biparti complet  $K_{n,m}$  avec  $n, m \geq 3$

possède  $K_{3,3}$  comme sous-graphe induit. Prouvons que  $K_{3,3}$  n'est pas 132-représentable en raisonnant par l'absurde et supposons que  $w$  en est un 132-représentant. Par définition, le graphe est tel que  $E = V_1 \times V_2$  avec  $\#V_1 = 3$  et  $\#V_2 = 3$ . Notons  $a^1, a^2, a^3$  les labels des sommets de  $V_1$  et  $b^1, b^2, b^3$  les labels des sommets de  $V_2$ . Vu que  $n = m = 3$ , le degré de chaque sommet vaut 3 et le théorème 3.0.9 affirme que chaque lettre apparaît au maximum deux fois. De surcroît, au plus un des sommets de chaque sous-ensemble de noeuds apparaît une seule fois sinon une arête lierait deux sommets d'un même sous-ensemble de noeuds, ce qui est impossible par définition. Par conséquent, trois cas sont traités, à savoir respectivement lorsque deux ou une lettres ont une unique occurrence, ou lorsque tous les symboles ont deux occurrences.

- Soit un des sommets de chaque sous-ensemble de noeuds apparaît une seule fois. Notons ces sommets  $a^3$  et  $b^3$  et, comme  $n = m = 3$ , nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que

$$w = w^1 a^3 w^2 b^3 w^3$$

où les mots  $w^1, w^2$  et  $w^3$  peuvent éventuellement être vides. Comme  $E = V_1 \times V_2$ , les lettres  $a^i$  et  $b^j$  doivent alterner pour tout  $i, j$ . Donc  $w^1$  contient toutes les lettres de  $V_2$  excepté  $b^3$  et  $w^3$  contient toutes les lettres de  $V_1$  excepté  $a^3$ . De plus, étant donné que les lettres  $a^i$  (resp.  $b^j$ ) ne doivent pas s'alterner entre elles, la copie restante de chacune de ces lettres se trouve dans  $w^2$ . En outre, dans  $w^2$ , toutes les lettres de  $V_1$  apparaissent avant celles de  $V_2$ , sinon la complétude du graphe biparti  $K_{n,m}$  serait contredite par le sous-mot  $b^\ell a^3 b^\ell a^k b^3 a^k$ . Ainsi, nous avons

$$w = b^1 b^2 a^3 a^1 a^2 b^2 b^1 b^3 a^2 a^1.$$

Seule la permutation  $a^2 a^1 b^j$  des symboles  $b^j, a^1$  et  $a^2$  n'apparaît pas pour  $j \in \{1, 2\}$ . Afin d'éviter le motif 132, on a alors  $a^2 < b^j < a^1$ . De plus, l'alphabet étant totalement ordonné, soit  $b^1 < b^2$ , soit  $b^2 < b^1$ . Cependant, aucun des cas n'est possible au vu des sous-mots  $a_1^2 b_2^2 b_2^1$  et  $b_1^2 a_1^1 b_2^1$ .

Ainsi, ce premier cas ne se produit jamais.

- Soit une seule lettre apparaît une unique fois. Cela signifie que toutes les autres lettres apparaissent deux fois. Comme  $n = m = 3$ , nous pouvons noter, sans perte de généralité,  $a^3$  la lettre ayant une seule occurrence dans  $w$ . Alors nous avons

$$w = w^1 a^3 w^2.$$

Comme, l'arête  $b^j a^3$  existe pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ , les  $b^j$  doivent alterner avec  $a^3$  mais pas entre eux donc une copie se trouve dans  $w^1$  et une dans  $w^2$  en sens opposé par le lemme 2.1.2. Ainsi nous obtenons

$$w = w^1 b^1 b^2 b^3 w^1 a^3 w^2 b^3 b^2 b^1 w^2.$$

Etant donné que les  $a^i$  et les  $b^j$  doivent s'alterner pour tout  $i, j$ , une copie de  $a^1$  et une copie de  $a^2$  se trouvent entre les deux occurrences de  $b^3$ . L'autre copie se trouve dans  $w^{1'}$  ou  $w^{2'}$  et en sens opposé au vu du lemme 2.1.2. De plus, si une lettre apparait dans  $w^{1'}$  (resp.  $w^{2'}$ ) alors la seconde copie est nécessairement dans  $w^{1''}$  (resp.  $w^{2''}$ ) puisque  $a^3$  n'alterne pas avec  $a^i$ .

Il existe au plus un  $j \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $b^j < a^i$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ . En effet, si  $b^j < b^l < a^i$  alors le motif 132 est formé à partir du sous-mot  $b^j a^i b^l$ . Deux cas sont donc à traiter.

- ★ Supposons que pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $b^j > a^i$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ , alors  $b^3 < b^2 < b^1$  sinon  $a^1 b^{j+1} b^j$  correspondrait au motif 132. De plus, nous avons  $w^{1'} = \varepsilon$  car si  $w^{1'} \neq \varepsilon$ , cela signifie qu'il existe  $i \in \{1, 2\}$  tel que  $a^i$  se trouve dans  $w^{1'}$  mais le sous-mot  $a^i b^1 b^3$  ainsi créé équivaut au motif 132. D'où, nous obtenons  $w^{1''} = \varepsilon$ . Notons

$$w = b^1 b^2 b^3 a^3 a^2 a^1 b^3 b^2 b^1 a^1 a^2.$$

Au vu du cas traité (à savoir : pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $b^j > a^i$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ ), il existe  $k \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $a^k$  soit le plus petit symbole dans  $w$  et il existe  $\ell \neq k$  et  $\ell \neq 3$  tel que  $a^k b^1 a^\ell$  forme le motif 132. On obtient donc une contradiction.

- ★ Donc il existe  $j \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $b^j < a^i$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$  et ce  $j$  est unique. Cela implique que  $w^{2'} = \varepsilon$ . En effet, si  $w^{2'} \neq \varepsilon$ , cela signifie qu'il existe  $k \in \{1, 2\}$  tel que  $a^k$  se trouve dans  $w^{2'}$ . Or, le sous-mot  $b_1^j b_2^\ell a^k$  équivaut au motif 132 puisque, pour tout  $\ell \neq j$ ,  $b^\ell > a^i$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Donc nous obtenons  $w^{2'} = w^{2''} = \varepsilon$ . Ainsi nous avons

$$w = a^2 a^1 b^1 b^2 b^3 a^1 a^2 a^3 b^3 b^2 b^1.$$

Puisque  $j$  est unique, il existe  $k \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $b^k > a^i$  pour tout  $i$ . Ainsi, si  $a^1 < a^2$ , le sous-mot  $a_1^1 b_1^k a_2^2$  conduit à une contradiction. Donc  $a^2 < a^1$  mais dans ce cas, le sous-mot  $a_1^2 b_1^k a_2^1$  correspond au motif 132.

Par conséquent, la présence d'une unique instance d'un symbole ne peut survenir.

- Soit toutes les lettres apparaissent deux fois. Alors, des mots contenant comme facteur un des mots provenant des situations précédentes sont obtenus. Par conséquent, si un de ces mots ne contenait pas le motif 132 alors ses facteurs non plus, donc nous obtenons une contradiction.

Puisqu'aucun cas ne survient, le graphe biparti  $K_{3,3}$  n'est pas 132-représentable et par conséquent, les graphes bipartis complets  $K_{n,m}$  lorsque  $n, m \geq 3$  non plus.  $\square$

En combinant tous les résultats, on remarque que la seule inconnue concerne la 123-représentabilité du graphe biparti complet  $K_{3,3}$ . Grâce au théorème 4.3.20, on connaît la  $\mu$ -représentabilité des graphes bipartis complets quelle que soit la taille des deux ensembles de sommets.

**THÉORÈME 4.3.20.** *Le graphe biparti complet  $K_{3,3}$  est 123-représentable.*

*Démonstration.* Le mot 5632165412 convient comme un 123-représentant du graphe  $K_{3,3}$ . □

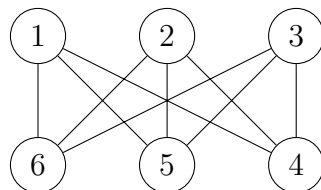


FIGURE 4.10 – Label des sommets du graphe biparti complet  $K_{3,3}$

### Résumé

Le tableau ci-dessous reprend les graphes bipartis complets et précise s'ils sont  $\mu$ -représentables ou non, pour  $\mu \in \{123, 132\}$ . Les graphes  $K_{n,m}$  et  $K_{m,n}$  étant isomorphes, les cas détaillés ci-dessous sont un récapitulatif complet des cas possibles. Comme nous l'avons constaté, il convient de séparer les cas en fonction des valeurs de  $n$  et  $m$ .

	$n = 1$		$n = 2$		$n \geq 3$	
	$m < 6$	$m \geq 6$	$m \in \{2, 3\}$	$m \geq 4$	$m = 3$	$m \geq 4$
123	OUI	NON	OUI	NON	OUI	NON
132	OUI	OUI	OUI	OUI	NON	NON

### 4.3.3 Couronnes

Le corollaire 2.3.9 implique que les couronnes sont représentables par mot. La question est donc de savoir si, parmi ses différents représentants, il en existe qui ne contiennent pas le motif  $\mu$ ,  $\mu \in \{123, 132\}$ . De tels représentants existent uniquement pour les couronnes  $H_{1,1}$ ,  $H_{2,2}$  et  $H_{3,3}$ . En effet, lorsque  $n \geq 4$ , les couronnes  $H_{n,n}$  ne sont pas des graphes circulaires. Les énoncés et preuves sont issus de mes recherches.

**THÉORÈME 4.3.21.** *Soit  $\mu \in \{123, 132\}$  et soit  $n \in \{1, 2, 3\}$ . Les couronnes  $H_{n,n}$  sont  $\mu$ -représentables.*

*Démonstration.* Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ . Les mots 1122, 432121 et 5645342312 conviennent comme  $\mu$ -représentants de  $H_{1,1}$ ,  $H_{2,2}$  et  $H_{3,3}$  respectivement, où les labels des noeuds sont ceux correspondant aux couronnes de la FIGURE 4.11. □

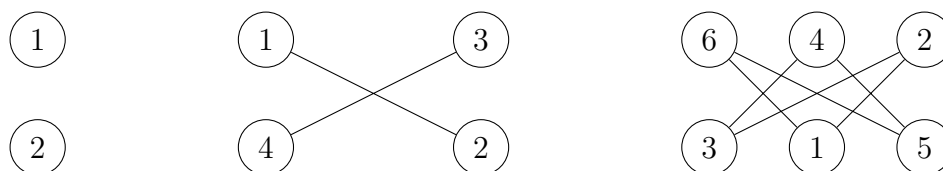


FIGURE 4.11 – Label des sommets des couronnes  $H_{1,1}$ ,  $H_{2,2}$  et  $H_{3,3}$

**THÉORÈME 4.3.22.** Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ . Les couronnes  $H_{n,n}$ ,  $n \geq 4$ , ne sont pas  $\mu$ -représentables.

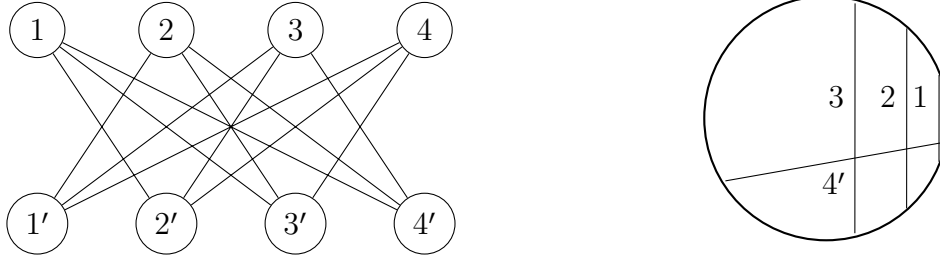


FIGURE 4.12 – La couronne  $H_{4,4}$ , graphe circulaire ?

*Démonstration.* Il suffit de prouver que les couronnes  $H_{n,n}$ ,  $n \geq 4$ , ne sont pas des graphes circulaires et le corollaire 4.1.3 permettra de conclure que ces graphes ne sont pas  $\mu$ -représentables, pour tout  $\mu \in \{123, 132\}$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que les couronnes  $H_{n,n}$ ,  $n \geq 4$ , sont des graphes circulaires. Dans ce cas, les sommets sont associés aux cordes d'un cercle de manière telle que deux cordes s'intersectent si et seulement si l'arête correspondante existe. Notons  $1, 2, \dots, n$  les labels des sommets du premier ensemble de sommet et  $1', 2', \dots, n'$  ceux du second ensemble. Au vu du graphe  $H_{n,n}$ ,  $n \geq 4$ , trois cordes  $1, 2, 3$  sont positionnées de façon telle qu'elles ne s'intersectent pas et qu'une quatrième  $4'$  les coupe comme illustré par la FIGURE 4.12. De plus, le segment correspondant au noeud  $4$  ne doit couper aucune de ces cordes. Cependant, il est impossible de tracer quatre autres cordes  $1', 2', 3', 4$  telles qu'elles coupent respectivement les cordes  $234, 134, 124$  et  $1'2'3'$ .  $\square$

Je fournis une seconde démonstration de la non- $\mu$ -représentabilité des couronnes  $H_{n,n}$  lorsque  $n \geq 4$ . Celle-ci se base sur des résultats établis précédemment et non sur une tentative de représenter les couronnes comme des graphes circulaires.

*Démonstration.* Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ . L'hérédité de la  $\tau$ -représentabilité établie à la proposition 3.0.5 permet de se restreindre à la couronne  $H_{4,4}$  puisque cette dernière est un sous-graphe induit des couronnes  $H_{n,n}$ , pour  $n \geq 4$ . Or, comme le prouve la FIGURE 4.13, la couronne  $H_{4,4}$  est le prisme  $Pr_4$ . En combinant le théorème 2.2.13 qui stipule que  $Pr_4 \in \mathcal{R}_3$  au corollaire 4.1.4, nous pouvons conclure que la couronne  $H_{4,4}$  n'est pas  $\mu$ -représentable.  $\square$

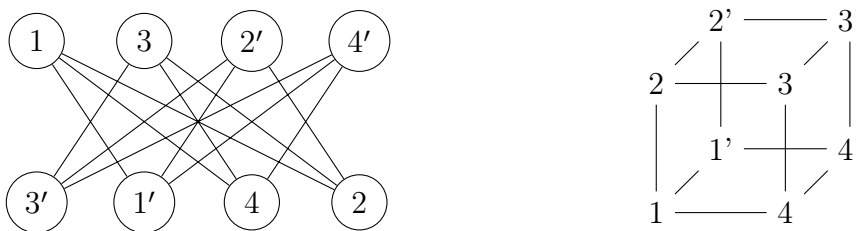


FIGURE 4.13 – La couronne  $H_{4,4}$  et le prisme  $Pr_4$

### 4.3.4 Chemins simples

Mandelstam a établi dans son article [15] que les chemins simples sont  $\mu$ -représentables,  $\mu \in \{123, 132\}$  et qu'un représentant 2-uniforme existe. Par conséquent, le théorème 4.2.1 permet de créer de nouveaux graphes  $\mu$ -représentables avec comme composante(s) connexe(s) un chemin simple.

**THÉORÈME 4.3.23.** *Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ . Les chemins simples sont  $\mu$ -représentables.*

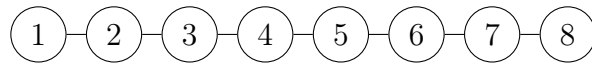


FIGURE 4.14 – Le chemin simple de longueur 7

*Démonstration.* Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ . Le chemin simple de longueur  $n - 1$  (c'est-à-dire à  $n$  sommets),  $n \geq 2$ , peut être représenté par le mot  $n(n - 1)n(n - 2)(n - 1)(n - 3)(n - 2)(n - 4)(n - 3) \dots 3423121$ . Ce mot représente bien un chemin simple puisque chaque sommet alterne uniquement avec celui d'avant et celui d'après, excepté le 1 et le  $n$  qui alternent uniquement avec 2 et  $n - 1$  respectivement. De plus, le mot évite le motif  $\mu$ . En effet, la première apparition d'un nombre  $n - a$ , est directement suivie du nombre consécutif plus grand  $n - a + 1$  puis de nombres plus petits ou égaux à  $n - a$ . Or, pour voir le motif  $\mu$ , il faudrait avoir  $n - a + 2$  après  $n - a$  qui correspondrait au motif 13. Par conséquent, les chemins simples sont  $\mu$ -représentables.  $\square$

**COROLLAIRE 4.3.24.** *Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ . Tout chemin simple est  $\mu$ -représentable par un mot 2-uniforme.*

*Démonstration.* Cela découle directement de la construction donnée au théorème 4.3.23.  $\square$

### 4.3.5 Cycles

Toujours dans l'article [15], la  $\mu$ -représentabilité des cycles est établie,  $\mu \in \{123, 132\}$ . Le représentant fourni ne permet pas de conclure à l'existence d'un représentant 2-uniforme.

**THÉORÈME 4.3.25.** *Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ . Les cycles sont  $\mu$ -représentables.*

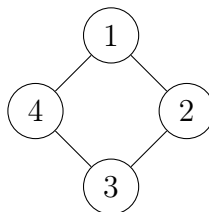


FIGURE 4.15 – Le cycle à 4 sommets

*Démonstration.* Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ . Le cycle à  $n$  sommets,  $n \geq 2$ , peut être représenté par le mot  $(n-1)n(n-2)(n-1)(n-3)(n-2)\dots 2312$ . Ce mot est le même que celui représentant un chemin simple à  $n$  sommets, excepté que nous avons supprimé le premier  $n$  et le dernier 1 afin que 1 et  $n$  s'alternent puisque chacune de ces deux lettres n'apparaît qu'une fois. De plus, le mot évite le motif  $\mu$  pour la même raison que précédemment. Par conséquent, les cycles sont  $\mu$ -représentables.  $\square$

Remarquons, comme illustré à la FIGURE 4.16, que le cycle à six sommets correspond à la couronne  $H_{3,3}$ . Par conséquent, sa  $\mu$ -représentabilité est établie par le théorème 4.3.21.



FIGURE 4.16 – Le cycle à six sommets et la couronne  $H_{3,3}$

### 4.3.6 Echelles

Le théorème 2.2.7 affirme que le nombre de représentation des échelles vaut 2. En combinant ce résultat au théorème 2.2.10, nous savons que les échelles sont des graphes circulaires. Par conséquent, il n'est pas possible de conclure que les échelles ne sont pas  $\mu$ -représentables. D'ailleurs, pour  $n \in \{1, 2\}$ , les échelles sont des cycles et il vient d'être prouvé qu'ils sont  $\mu$ -représentables. Le cas  $n = 3$ , issu de mes recherches, est traité ci-après.

On s'attendrait à ce que les échelles  $L_n$ , avec  $n \geq 4$ , ne soient pas  $\mu$ -représentables. Cependant, il serait long et fastidieux de le prouver puisqu'il y a de nombreux cas à traiter afin de considérer tous les représentants possibles pour ensuite constater qu'ils possèdent un sous-mot correspondant au motif  $\mu$ . Par conséquent, la question de la  $\mu$ -représentabilité des échelles  $L_n$ , avec  $n \geq 4$ , reste ouverte.

**THÉORÈME 4.3.26.** *Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ . L'échelle  $L_3$  est  $\mu$ -représentable.*

*Démonstration.* Les mots 6546321341 et 5463265213 sont, respectivement, les représentants évitant le motif 132 et 123 de l'échelle  $L_3$  dont le label est illustré à la FIGURE 4.17.  $\square$



FIGURE 4.17 – Label des sommets de l'échelle  $L_3$



### 4.3.7 Arbres

Gao donne, dans [3], un 132-représentant des arbres et Mandelshtam, dans [15], en tire un 132-représentant 2-uniforme. Le procédé utilisé dans la démonstration est illustré sur un exemple afin de comprendre la construction du représentant. Aucun résultat n'est disponible concernant la 123-représentabilité des arbres.

**THÉORÈME 4.3.27.** *Les arbres sont 132-représentables.*

*Démonstration.* Procédons par récurrence sur le nombre de sommets avec une condition supplémentaire. L'arbre à un sommet est représentable par le mot 1. Supposons pouvoir représenter un arbre avec moins de  $n$  sommets par un 132-représentant possédant une unique occurrence du label de la racine et deux instances des labels des sommets non-racines.

Soit un arbre  $T$  à  $n$  sommets, nommés de la manière suivante : ordre croissant en commençant par la racine puis en traversant les sous-arbres de la gauche vers la droite récursivement. Supposons que la racine possède  $r$  enfants, ce qui signifie que le graphe  $T$  a  $r$  sous-arbres dont les racines sont les enfants de la racine du graphe  $T$ . Notons  $T_i$  les  $r$  sous-arbres de la gauche vers la droite, pour  $1 \leq i \leq r$  et notons la racine du sous-arbre  $T_i$  par  $n^i$ . Remarquons que  $2 \leq n^1 < n^2 < \dots < n^r \leq n$ . Donc pour  $1 \leq i \leq r$ ,  $T_i$  possède  $n^{i+1} - n^i$  sommets, où  $n^{r+1} = n + 1$ . Ainsi, les sous-arbres  $T_i$  sont des arbres avec moins de  $n$  sommets et par hypothèse de récurrence, ils sont 132-représentables par un 132-représentant  $w^{T_i}$  possédant une unique occurrence du label de la racine et deux instances des labels des sommets non-racines. Considérons le mot

$$w = w^{T_r} w^{T_{r-1}} \dots w^{T_1} 1 n^1 n^2 \dots n^r.$$

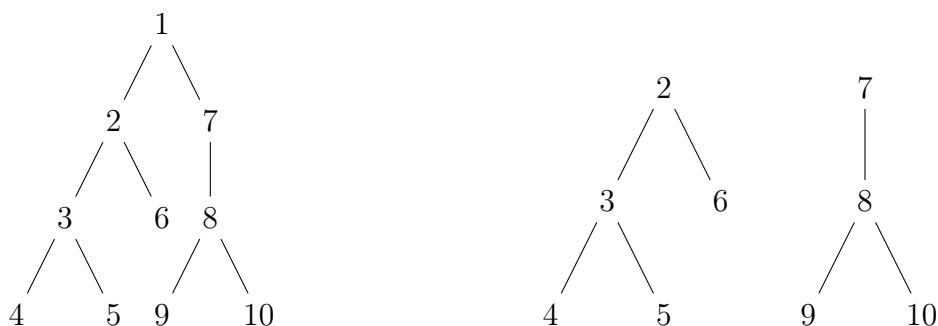
Il représente le graphe  $T$  puisque la racine nommée 1 n'apparaît qu'une fois donc alterne avec tous ses enfants  $n^i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ . De plus, les enfants de la racine de  $T$  apparaissent dans des ordres inversés à gauche et à droite de 1 donc ils ne peuvent alterner entre eux. Enfin, puisque les labels des sommets du sous-arbre  $T_i$  sont plus petits que ceux du graphe  $T_j$  pour tout  $1 \leq i < j \leq r$ , le mot  $w$  est un 132-représentant.  $\square$

L'exemple de la FIGURE 4.18 présente le découpage de la démonstration. Grâce au procédé décrit dans la preuve, un 132-représentant de l'arbre  $T$  est trouvé

$$w = (10)989(10)78 \ 654345236 \ 127$$

puisque en itérant le processus sur les sous-arbres  $T_1$  et  $T_2$ , on obtient les 132-représentants

$$w^{T_1} = 654345236 \quad \text{et} \quad w^{T_2} = (10)989(10)78.$$


 FIGURE 4.18 – Arbre  $T$  de taille 10 et ses sous-arbres  $T_1$  et  $T_2$ 

**THÉORÈME 4.3.28.** *Tout arbre est 132-représentable par un mot 2-uniforme.*

*Démonstration.*

La preuve du théorème 4.3.27 fournit le 132-représentant

$$w = w^{T_r} w^{T_{r-1}} \dots w^{T_1} 1 n^1 n^2 \dots n^r$$

possédant une copie de la racine 1 et deux copies de tous les autres sommets, où  $n^i$  sont les enfants de la racine 1 et  $w^{T_i}$  les mots représentant les sous-arbres de racine  $n^i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Le mot

$$w' = w^{T_r} w^{T_{r-1}} \dots w^{T_1} 1 n^1 n^2 \dots n^r 1$$

évite le motif 132 puisque le symbole 1 ajouté à la fin de  $w^1$  ne peut contribuer au motif 132. De plus,  $w'$  représente le même arbre puisque la lettre 1 alterne uniquement avec ses enfants  $n^i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ . On obtient donc la conclusion.  $\square$

**REMARQUE 4.3.29.** A partir de la construction précédente, une nouvelle preuve de la 132-représentabilité des chemins simples et des cycles est obtenue. En effet, si le chemin simple ou le cycle est de longueur deux ou moins, alors le mot contient moins de trois lettres et, par conséquent, évite le motif 132. Le chemin simple de longueur  $n - 1$ ,  $n \geq 3$ , est un arbre et possède donc le mot

$$w = n(n-1)n(n-2)(n-1)(n-3)(n-2)\dots 453423121$$

comme 132-représentant. Le cycle à  $n$  sommets est le chemin simple de longueur  $n$  dont les extrémités 1 et  $n + 1$  sont égales. Ainsi, en supprimant le premier  $n$  et le deuxième 1 dans  $w$ , nous obtenons un 132-représentant du cycle de longueur  $n$ . Remarquons que les mots obtenus sont les mêmes que dans les preuves des théorèmes 4.3.23 et 4.3.25.

### 4.3.8 Complémentaire d'un graphe

Comme stipulé dans [10], le complémentaire d'un graphe  $\mu$ -représentable n'est pas nécessairement  $\mu$ -représentable et vice-versa. En effet, le graphe roue  $W_5$  n'est pas  $\mu$ -représentable puisqu'il n'est pas représentable par mot au vu du théorème 2.4.1. Cependant, le complémentaire du graphe roue possède, pour tout  $\mu \in \{123, 132\}$ , le  $\mu$ -représentant

$$w = 6645342312.$$

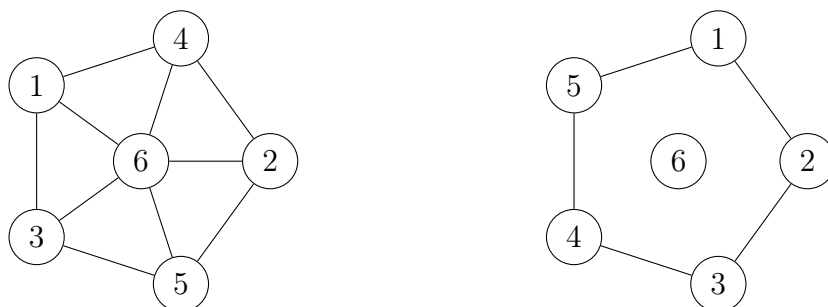


FIGURE 4.19 – Le graphe roue  $W_5$  et son complémentaire

### 4.3.9 Graphes circulaires

Le corollaire 4.1.3 stipule que les graphes  $\mu$ -représentables,  $\mu \in \{123, 132\}$ , sont des graphes circulaires. Le résultat ci-dessous, tiré de [15], affirme que la réciproque est fautive.

**THÉORÈME 4.3.30.** *Soit  $\mu \in \{123, 132\}$ . Il existe des graphes circulaires qui ne sont pas  $\mu$ -représentables.*

*Démonstration.*

Considérons  $\mu = 123$ .

Le théorème 4.3.12 stipule que l'étoile  $E_6$  n'est pas 123-représentable. Cependant, l'étoile  $E_6$  peut être représentée grâce à un cercle comme le prouve la FIGURE 4.20 et est donc un graphe circulaire. Par conséquent, il existe des graphes circulaires qui ne sont pas 123-représentables.

Considérons  $\mu = 132$ .

Le graphe  $K_4$  ne possède pas de 132-représentant 2-uniforme au vu du théorème 4.3.10. Alors, le théorème 4.2.1 affirme que l'union disjointe de graphes complets de taille 4 n'est pas 132-représentable. Cependant, cette union est un graphe circulaire comme le prouvent les graphes à la FIGURE 4.21. Par conséquent, il existe des graphes circulaires qui ne sont pas 132-représentables.  $\square$

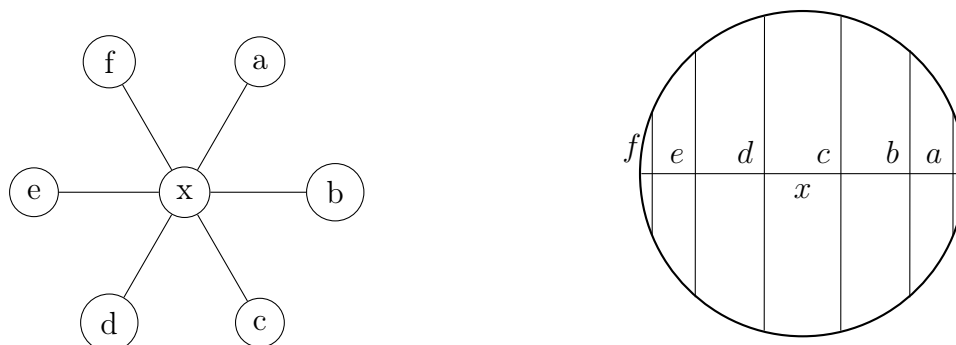


FIGURE 4.20 – L'étoile  $E_6$  et un cercle avec cordes associées

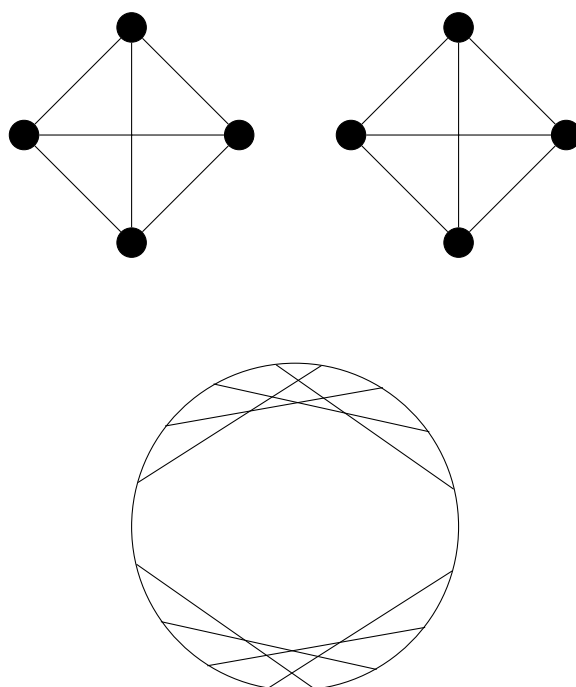


FIGURE 4.21 – L'union disjointe de deux graphes complets  $K_4$  et un cercle avec cordes associées

Comme nous l'avons précisé dans le chapitre 2, il existe un algorithme de complexité  $\mathcal{O}((\#V) \times (\#E))$  permettant de déterminer si un graphe donné est circulaire (voir [2]). Si cet algorithme rend FAUX, le corollaire 4.1.3 permet de conclure que le graphe donné n'est pas  $\mu$ -représentable pour tout  $\mu \in \{123, 132\}$ . Par contre, s'il rend VRAI, il est impossible de conclure au vu du théorème précédent. La question concernant la complexité algorithmique afin de déterminer si un graphe donné est  $\mu$ -représentable est donc encore à déterminer.

### 4.3.10 Graphes non- $\mu$ -représentables

Nous avons déjà établi que les graphes non-représentables par mot et ceux ayant un nombre de représentation supérieur à 2 ne sont pas  $\mu$ -représentables. Dans cette sous-section, nous fournissons un exemple de graphe appartenant à  $\mathcal{R}_2$ , provenant de [15], qui n'est pas  $\mu$ -représentable quel que soit  $\mu \in \{123, 132\}$  en utilisant l'hérédité du caractère  $\tau$ -représentable établi par la proposition 3.0.5.

**THÉORÈME 4.3.31.** *Pour tout  $\mu \in \{123, 132\}$ , le graphe à la FIGURE 4.22 ci-dessous n'est pas  $\mu$ -représentable.*

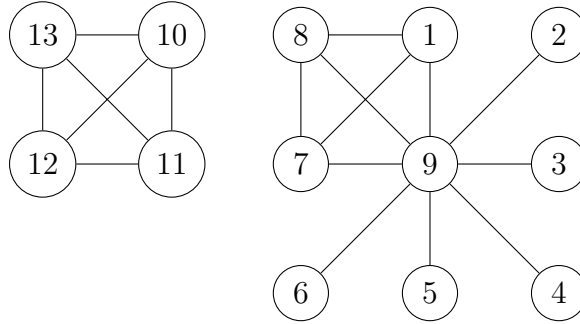


FIGURE 4.22 – Exemple d'un graphe non- $\mu$ -représentable,  $\mu \in \{123, 132\}$

Avant de prouver le résultat, remarquons que ce graphe appartient à  $\mathcal{R}_2$ . En effet, le mot

$$(10)(11)(12)(13)(10)(11)(12)(13)918723456965432187$$

convient comme représentant 2-uniforme.

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $\mu \in \{123, 132\}$  tel que le graphe est  $\mu$ -représentable. C'est impossible au vu de l'hérédité de la  $\tau$ -représentabilité établie à la proposition 3.0.5 puisque, dans ce cas, l'union disjointe de deux graphes complets  $K_4$  serait 132-représentable ou l'étoile  $E_6$  serait 123-représentable.  $\square$

**COROLLAIRE 4.3.32.** *Il existe des graphes circulaires qui ne sont pas  $\mu$ -représentables quel que soit  $\mu \in \{123, 132\}$ .*

*Démonstration.* Le théorème précédent fournit un exemple d'un graphe circulaire non- $\mu$ -représentable quel que soit  $\mu \in \{123, 132\}$ . Par l'hérédité de la  $\tau$ -représentabilité établie à la proposition 3.0.5, on en tire que tout graphe contenant un sous-graphe induit correspondant à celui de la FIGURE 4.22 n'est pas  $\mu$ -représentable quel que soit  $\mu \in \{123, 132\}$ .  $\square$

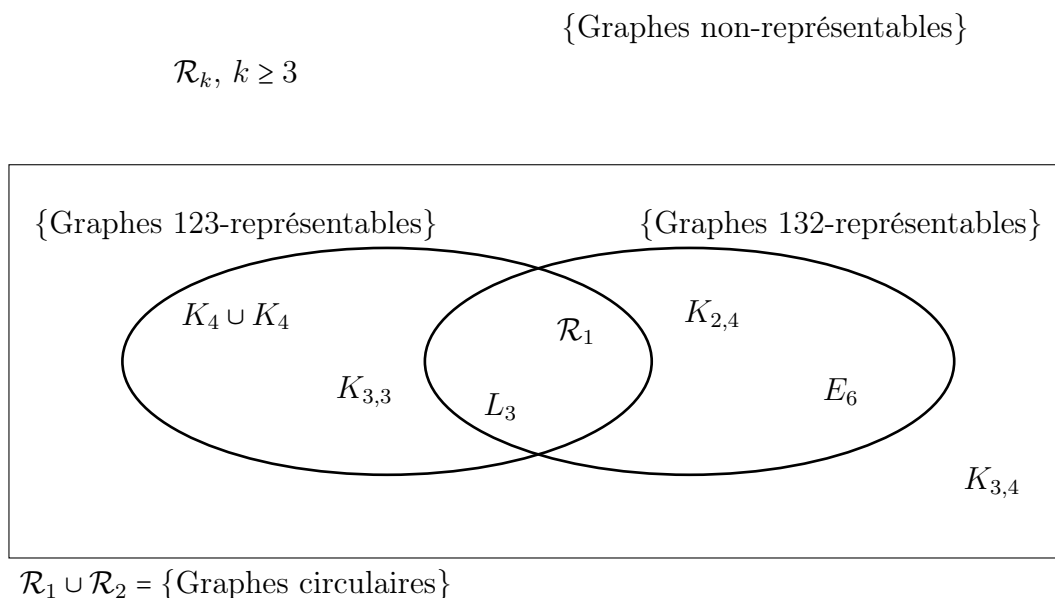
**REMARQUE 4.3.33.** En étudiant la  $\mu$ -représentabilité des graphes bipartis complets  $K_{n,m}$ , nous avons trouvé d'autres graphes prouvant le corollaire 4.3.32. En effet, les théorèmes 4.3.17 et 4.3.19 stipulent que, lorsque  $n \geq 3$  et  $m \geq 4$ , le graphe biparti complet  $K_{n,m}$  n'est pas  $\mu$ -représentable quel que soit  $\mu \in \{123, 132\}$ .

## 4.4 Synthèse

Voici un schéma récapitulatif de quelques résultats présentés dans ce chapitre. Premièrement, un graphe est  $\tau$ -représentable si et seulement si il est  $\tau^R$ -représentable. Deuxièmement, un graphe est 132-représentable si et seulement si il est 312-représentable. Troisièmement, les graphes  $\mu$ -représentables,  $\mu \in S_3$ , sont des graphes circulaires.

De plus, nous avons prouvé qu'il existe des graphes circulaires non- $\mu$ -représentables tels que le graphe biparti complet  $K_{3,4}$ . Nous avons également démontré que certains graphes, dont les graphes complets et l'échelle  $L_3$ , sont  $\mu$ -représentables.

Enfin, nous avons établi l'existence de graphes qui sont 132-représentables mais ne sont pas 123-représentables, comme, par exemple, l'étoile  $E_6$  et les graphes bipartis complets  $K_{2,m}$ ,  $m \geq 4$ . Nous avons aussi vérifié que les graphes 123-représentables ne sont pas nécessairement 132-représentables grâce notamment aux composantes connexes et au graphe  $K_4 \cup K_4$ .





# Bibliographie

- [1] AKGÜN, Özgür, GENT Ian, KITAEV Sergey et ZANTEMA Hans. Solving computational problems in the theory of word-representable graphs. *Journal of Integer Sequences*. 2019, 22, pp. 1–18.
- [2] GABOR, Csaba P, SUPOWIT Kenneth J et HSU Wen-Lian. Recognizing circle graphs in polynomial time. *Journal of the Association for Computing Machinery (JACM)*. 1989, 36(3), pp. 435–473.
- [3] GAO, Alice L. L., KITAEV Sergey et ZHANG Philip B. On 132-representable graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*. 2017, 69(1), pp. 105–118.
- [4] GLEN, Marc, KITAEV Sergey et PYATKIN Artem. On the representation number of a crown graph. *Discrete Applied Mathematics*. 2018, 244, pp. 89–93.
- [5] GOLUMBIC, Martin Charles. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs (Annals of Discrete Mathematics, Vol 57)*. 2<sup>e</sup> éd. NLD : North-Holland Publishing Co., 2004. ISBN 0444515305.
- [6] HALLDÓRSSON, Magnús M., KITAEV Sergey et PYATKIN Artem. Alternation graphs. In : KOLMAN, P. et KRATOCHVIL J., édés, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. WG 2011. Lecture Notes in Computer Science, vol.6986*, SpringerBerlin Heidelberg, 2011, pp. 191–202.
- [7] HALLDÓRSSON, Magnús M., KITAEV Sergey et PYATKIN Artem. Semi-transitive orientations and word-representable graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 2016, 201, pp. 164–171.
- [8] KITAEV, Sergey. *Patterns in permutations and words*. Heidelberg : Springer, 2011. (Monographs in Theoretical Computer Science). ISBN 1-283-36559-6.
- [9] KITAEV, Sergey. On graphs with representation number 3. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*. 2014, 18(2), pp. 97–112.
- [10] KITAEV, Sergey. A comprehensive introduction to the theory of word-representable graphs. In : CHARLIER, E., LEROY J. et RIGO M., édés, *Developments in Language Theory. DLT 2017. Lecture Notes in Computer Science, vol.10396*, 2017, pp. 36–67.



- [11] KITAEV, Sergey et LOZIN Vadim. *Words and Graphs*. Springer-Verlag, 2015. (Monographs in Theoretical Computer Science). ISBN 9783319258591.
- [12] KITAEV, Sergey et PYATKIN Artem. On representable graphs. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*. 2008, 13(1), pp. 45–54.
- [13] KITAEV, Sergey, SALIMOV Pavel, SEVERS Christopher et ULFARSSON Henning. Word-Representability of Line Graphs. *In : Open Journal of Discrete Mathematics, vol.1*, 2011, pp. 96–101.
- [14] KITAEV, Sergey et SEIF, Steve. Word problem of the Perkins semigroup via directed acyclic graphs. *Order*. 2008, 25(3), pp. 177-194.
- [15] MANDELSHTAM, Yelena. On graphs representable by pattern-avoiding words. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*. 2019, 39(2), pp. 375–389.
- [16] RIGO, Michel. *Mathématiques discrètes*. Université de Liège, faculté des sciences, département de mathématiques, 2009–2010. Notes du cours.
- [17] RIGO, Michel. *Théorie des graphes*. Université de Liège, faculté des sciences, département de mathématiques, 2009–2010. Notes du cours.
- [18] RIGO, Michel. *Formal languages, automata and numeration systems*. London : ISTE, 2014. ISBN 978-1-84821-615-0.
- [19] YANNAKAKIS, Mihalis. The complexity of the partial order dimension problem. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 1982, 3(3).