Séries universelles

Auteur : Remacle, Laura
Promoteur(s) : Esser, Céline
Faculté : Faculté des Sciences
Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité spécialisée en informatique
Année académique : 2019-2020
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/9161

Faculté des Sciences

Département de Mathématique

Séries universelles

Master en sciences mathématiques à finalité informatique

Année académique 2019 - 2020

Auteur
REMACLE Laura

Promoteur
ESSER Céline

Remerciements

En premier lieu, j'aimerais remercier Céline Esser, ma promotrice, pour m'avoir proposé ce sujet de mémoire, et surtout, pour avoir continué à me suivre malgré les circonstances qui étaient loin d'être idéales, ainsi que pour ses nombreux conseils et remarques.

J'aimerais également remercier Samuel Nicolay, qui m'a suivie pendant l'absence de Céline.

Finalement, je remercie Florian Glaude pour son soutien indéfectible durant mes années d'étude.

Introduction

Le domaine de la *dynamique topologique* est une branche de l'analyse fonctionnelle qui consiste à étudier d'un point de vue topologique les propriétés d'un système dynamique (une paire (X, T) constituée d'un espace topologique X et d'une application continue $T : X \to X$). Nous retrouvons notamment parmi ces propriétés la *transitivité topologique* (à partir de tout ouvert, il est possible d'atteindre tout autre ouvert pourvu que nous appliquions l'application T un nombre suffisant de fois) et le *mélange* (pour toute paire d'ouverts, il existe une borne à partir de laquelle il sera toujours possible d'atteindre un ouvert à partir de l'autre en appliquant T un nombre de fois supérieur à cette borne). A de telles propriétés, vient s'ajouter la notion d'*élément à orbite dense* (un élément x de X tel que l'ensemble $\{T^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$, appelé *orbite*, soit dense dans X).

Il y a quelques décennies, une spécialisation de la dynamique topologique, nommée l'*hypercyclicité*, a été introduite et est encore largement étudiée aujourd'hui. Cette spécialisation consiste à étudier des questions similaires à celles examinées en dynamique topologique, mais dans le cadre d'espaces topologiques munis d'une structure vectorielle. L'application T associée consiste alors en une application linéaire continue. Le premier exemple d'opérateur hypercyclique a été proposé par Birkhoff en 1929. Dans [2], il a en effet montré que l'opérateur de translation $T : f \mapsto f(\cdot + 1)$ sur $H(\mathbb{C})$ possède des points à orbite dense. En d'autres mots, il existe une fonction entière f dont les translatées permettent, sur chaque compact, d'approcher n'importe quelle fonction entière de manière aussi précise que souhaité. Par la suite, McLane a obtenu en 1952 dans [6] l'hypercyclicité d'un second opérateur défini sur $H(\mathbb{C})$: l'opérateur de dérivation. Le premier exemple d'un opérateur hypercyclique défini sur un espace de suites est dû à Rolewicz, qui a montré en 1969 dans [12] qu'un multiple de l'opérateur shift à gauche est hypercyclique sur l^p, pour $1 \leq p < \infty$.

Dans ce travail, nous allons nous intéresser à une généralisation de la notion d'hypercyclicité, qui s'intitule l'*universalité*.

Dans le cadre de l'hypercyclicité, nous avons notamment considéré la notion d'orbite d'un élément, qui consiste en l'image de x par la suite d'applications continues (T^n). En guise de première généralisation, l'universalité décide de considérer, non plus la suite des puissances d'une unique application T, mais bien une suite d'applications continues arbitraires (T_n). Ceci permet d'introduire une seconde généralisation qui est la différenciation de l'espace d'arrivée et de l'espace de départ. En effet, afin de considérer les puissances de l'application T, celle-ci devait nécessairement avoir le même espace d'arrivée et de départ.

Le fait de considérer une suite quelconque dans le contexte de l'universalité permet de s'abstraire de cette contrainte. La généralisation du concept d'élément à orbite dense dans le cadre de l'universalité se nomme *élément universel* et c'est à l'étude de ceux-ci que va se dédier l'universalité, contrairement à l'hypercyclicité qui préférait se concentrer sur les propriétés de l'application T.

L'étude de l'universalité a commencé avec ce que nous appelons aujourd'hui les *séries universelles* : l'étude des éléments universels associés à une suite d'applications (T_n) particulière, typiquement une suite d'applications de sommes partielles. Le premier résultat dans ce domaine a été obtenu par Fekete en 1914 (voir [10]). Il concerne les séries universelles de Taylor sur $[-1,1]$ et peut être formulé de la façon suivante : il existe une suite réelle (a_n) telle que pour toute fonction continue h sur $[-1,1]$, à valeurs réelles, telle que $h(0)=0$, il existe une suite croissante (λ_n) d'entiers positifs telle que

$$\sup_{x\in[-1,1]} |\sum_{k=1}^{\lambda_n} a_k x^k - h(x)| \to 0$$

si $n\to\infty$. Ce théorème exhibe l'existence d'un élément qui permet, à lui seul, d'approcher un ensemble entier d'objets. C'est cette propriété qui suggéra le nom même d'universalité.

Le résultat de Fekete a été suivi par bien d'autres, concernant des types de séries universelles de plus en plus "élaborés" et variés, notamment sur les séries trigonométriques et les séries de Dirichlet. Menshov a par exemple montré qu'il existe des séries trigonométriques $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ telles que toute fonction à valeurs complexes mesurable 2π-périodique soit une limite presque partout d'une sous-suite de $(\sum_{n=-j}^{j} a_n e^{int})$ (voir [8]).

Les premières preuves concernant l'existence d'éléments universels étaient constructives et donc, longues, compliquées et difficilement transposables d'un contexte à l'autre. En 1920 cependant, G. D. Birkoff a obtenu, dans le contexte de la dynamique topologique, un résultat stipulant que si l'espace X est complet, séparable et sans point isolé, alors la transitivité topologique est équivalente à l'existence d'un élément à orbite dense (voir [2]). De plus, s'il existe un élément à orbite dense, alors il en existe beaucoup (un ensemble dense). Ainsi, pour s'assurer de l'existence d'un élément à orbite dense, il suffit de vérifier que la propriété de transitivité topologique est satisfaite. Ce résultat se traduit sans difficulté dans le cadre de l'universalité et s'intitule *critère d'universalité*.

Le résultat de Birkhoff est valide en toute généralité, mais lorsque nous nous intéressons à un cadre plus restreint, nous pourrions nous demander s'il n'existe pas des critères plus simples, spécifiques à ce cadre, qui y seraient applicables. C'est ce genre de critères plus pratiques que F. Bayart, K. G. Grosse-Erdmann, V. Nestoridis et C. Papadimitropoulos ont souhaité proposer pour les séries universelles. Aussi, ont-ils réexaminé les premières preuves concernant l'existence d'éléments universels. Ils ont alors remarqué que ces preuves possédaient de nombreux points communs. C'est ce qui les a poussé, dans [1], à développer une théorie abstraite et générale sur l'existence d'éléments universels, permettant de s'abstraire des preuves constructives. En effet, cette théorie leur a permis de déduire aisément les résultats déjà existants concernant les éléments universels (notamment le résultat de Fekete), ainsi que de nouveaux théorèmes. C'est cette théorie que ce mémoire va présenter.

Avant d'expliquer la théorie abstraite des séries universelles de [1], le premier chapitre développera d'abord le concept d'universalité dans un cadre très général et fournira notamment une preuve du critère d'universalité cité ci-dessus. Ce contexte montrera cependant rapidement ses limites, aussi nous restreindrons-nous dans les chapitres suivants à l'étude des séries universelles.

Les chapitres suivant le chapitre 1 ont globalement la même structure. Ils présentent tout d'abord une notion d'universalité à chaque fois un peu plus générale que la précédente, puis démontrent un théorème, de plus en plus général également, explicitant des conditions équivalentes à l'existence d'un élément universel. Chacun de ces résultats affirme, entre autres, que l'existence d'un élément universel est équivalente à l'existence de "beaucoup" d'éléments universels, plus précisément, un espace G_δ dense contenant un sous-espace vectoriel privé de 0. Ces résultats donnent également un critère pratique d'universalité.

En particulier, le deuxième chapitre s'intéressera aux séries universelles "simples" et sera illustré à l'aide de deux exemples sur les séries universelles de Taylor réelles. Il démontrera notamment un résultat plus général que celui de Fekete évoqué plus haut.

Le troisième chapitre se situe dans la continuité directe du second et développera la notion d'universalité supérieure, qui est une spécialisation de l'universalité présentée dans le chapitre 2. Cette notion d'universalité pose des restrictions quant à la "taille" des suites d'indices permettant à l'élément universel d'approcher les points de l'ensemble considéré.

Le quatrième chapitre se repositionne après le chapitre 2 et s'intéresse à la notion de séries universelles simplement indexées. Celle-ci ajoute au contexte des séries universelles simples un nouveau paramètre qu'elle laisse varier dans un compact.

Finalement, le chapitre 5 généralise une dernière fois la notion de séries universelles simplement indexées pour obtenir la notion de séries universelles doublement indexées. Le nouveau paramètre introduit par les séries universelles simplement indexées peut à présent appartenir à union de compacts croissants et non plus à un unique compact, ce qui permet notamment de faire varier ce paramètre dans un ouvert. De plus, nous ne considérons plus l'universalité dans un seul espace, mais dans une suite d'espaces. Cette dernière notion d'universalité sera illustrée par les séries universelles de Taylor complexes.

Sauf explicitement précisé, les notations utilisées dans ce mémoire sont

(*i*) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$,

(*ii*) Si A est un ensemble, alors $|A| = \#A$,

(*iii*) Si $m \in \mathbb{N}$ et x est un élément, alors $B(x, m)$ et $B[x, m]$ désignent les boules, respectivement ouverte et fermée, de centre x et de rayon m, tandis que $B(m) := B(0, m)$ et $B[m] := B[0, m]$,

(*iv*) Les suites sont notées (a_n) et non $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ afin d'alléger les notations.

Chapitre 1

Universalité

Dans ce chapitre, nous développons la notion d'universalité dans un cadre très général. Nous donnons les premières définitions et propriétés ainsi que quelques théorèmes, dont le critère d'universalité et le théorème de Furstenberg. Nous nous intéresserons finalement dans la dernière section de ce chapitre à une notion plus forte que l'universalité, intitulée la condition (C).

Dans ce chapitre, nous considérerons, sauf explicitement précisé, un espace métrique X, un espace métrique séparable Y et une suite d'applications continues $T_n : X \to Y$.

Ce premier chapitre est basé sur [3] et sur le premier chapitre de [4].

1.1 Premières définitions et propriétés

Nous commençons cette section par la définition formelle de la notion d'universalité.

Définition 1.1.1. L'orbite d'un élément $x \in X$ est l'ensemble $\operatorname{orb}(x) \coloneqq \{T_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Définition 1.1.2. Un élément $x \in X$ est dit universel si $\operatorname{orb}(x)$ est dense dans Y. L'ensemble des éléments universels est noté $\mathcal{U}$.

Remarque 1.1.1. Si l'ensemble $\{U_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ forme une base de Y, alors un élément $x \in X$ appartient à $\mathcal{U}$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n(x) \in U_k$.

Les orbites étant des ensembles dénombrables, afin d'obtenir l'existence d'un élément universel, il est en fait nécessaire que l'espace Y soit séparable.

Nous allons à présent introduire la notion de suite topologiquement transitive. Cette notion se révèlera très utile car nous démontrerons par la suite l'équivalence entre la transitivité topologique et l'existence d'un ensemble dense d'éléments universels.

Définition 1.1.3. Une suite (T_n) est topologiquement transitive si pour tous ouverts non vides $U \subset X$ et $V \subset Y$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Lemme 1.1.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La suite (T_n) est topologiquement transitive.*

(ii) *Pour tout ouvert non vide $U \subset X$, l'ensemble $\cup_{n=0}^{\infty} T_n(U)$ est dense dans Y.*

(iii) *Pour tout ouvert non vide $V \subset Y$, l'ensemble $\cup_{n=0}^{\infty} T_n^{-1}(V)$ est dense dans X.*

Démonstration. Soient deux ouverts non vides $U \subset X$ et $V \subset Y$.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) L'équivalence se déduit directement du fait que l'ensemble

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} T_n(U) \cap V$$

est non vide si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n(U) \cap V$ est non vide.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) L'équivalence s'obtient en constatant que $T_n(U) \cap V$ est non vide si et seulement si $U \cap T_n^{-1}(V)$ est non vide. $\square$

Nous allons à présent démontrer l'équivalence entre la transitivité topologique et l'existence d'un ensemble dense d'éléments universels. Ce résultat porte le nom de critère d'universalité et permet de faciliter la preuve de l'existence d'un élément universel. En effet, sans ce théorème, si nous souhaitons nous assurer de l'existence d'un élément universel, nous devons construire un élément x de l'espace X tel que son orbite rencontre tout ouvert de l'espace Y, ce qui peut se révéler assez difficile en pratique. Tandis que grâce au critère d'universalité, il suffit de vérifier que la suite (T_n) est topologiquement transitive, ce qui est plus simple que la construction d'un point. En effet, la construction d'un point demande de trouver un point qui convient pour toute paire d'ouvert, tandis que la vérification de la transitivité topologique demande simplement de trouver un point par paire d'ouverts qui convient.

Théorème 1.1.1. *(Critère d'universalité) Soit X un espace métrique complet, Y un espace métrique séparable et $T_n : X \to Y$ des applications continues pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, la suite (T_n) est topologiquement transitive si et seulement si il existe un ensemble d'éléments universels x dense dans Y.*

Dans ce cas, l'ensemble des éléments universels de X est un ensemble G_δ dense.

Démonstration. $\Leftarrow$ Soient deux ouverts non vides $U \subset X$ et $V \subset Y$. Par hypothèse, il existe $x \in U$ tel que x est universel. Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n(x) \in V$ et $y \coloneqq T_n(x)$ est un élément de $T_n(U) \cap V$. D'où la conclusion.

$\Rightarrow$ Comme Y est séparable, il existe un ensemble dénombrable $\{y_n \in Y \mid n \in \mathbb{N}\}$ dense dans Y. Une base de topologie de Y est donc donnée par

$$\left\{ \mathrm{B}\left(y_n, \frac{1}{m}\right) \mid m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Renommons cette base $\{U_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Par la remarque 1.1.1, nous obtenons l'égalité

$$\mathcal{U} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n^{-1}(U_k)$$

et $\mathcal{U}$ est bien une intersection dénombrable d'ouverts denses par le lemme 1.1.1. De plus, comme X est un espace métrique complet, il s'agit également d'un espace de Baire. L'ensemble $\mathcal{U}$ est donc dense dans X, ce qui en fait un ensemble G_δ dense. □

Nous allons à présent introduire deux notions plus fortes que la transitivité topologique : le mélange et le mélange faible.

Définition 1.1.4. Une suite (T_n) est mélangeante si pour tous ouverts non vides $U \subset X$ et $V \subset Y$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $T_n(U) \cap V \neq \emptyset$ pour tout $n \geq N$.

Si X_1, Y_1, X_2, Y_2 sont des espaces métriques et $T_n : X_1 \to Y_1$ et $S_n : X_2 \to Y_2$ des applications continues, alors les espaces $X_1 \times X_2$ et $Y_1 \times Y_2$ sont des espaces métriques et les applications $T_n \times S_n : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ sont continues. Nous pouvons donc considérer les notions d'universalité sur les suites d'applications produits.

Définition 1.1.5. La suite (T_n) est faiblement mélangeante si la suite $(T_n \times T_n)$ est topologiquement transitive.

Remarque 1.1.2. Afin de vérifier les propriétés de transitivité et de mélange, il suffit que leurs définitions soient valides sur les ouverts de base.

Proposition 1.1.1. *La suite $(T_n \times S_n)$ est mélangeante si et seulement si les suites (T_n) et (S_n) sont mélangeantes.*

Démonstration. Ce résultat découle directement de l'égalité

$$(T_n \times S_n)(U_1 \times U_2 \cap V_1 \times V_2) = T_n(U_1) \cap V_1 \times S_n(U_2) \cap V_2$$

ayant lieu pour tous ouverts non vides $U_1 \subset X_1$, $U_2 \subset X_2$, $V_1 \subset Y_1$, $V_2 \subset Y_2$ et tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi que du fait qu'une base de topologie d'un espace produit $X \times Y$ est donnée par

$$\{U \times V \mid U \text{ ouvert de X}, V \text{ ouvert de Y}\}.$$

□

Proposition 1.1.2. *Si la suite $(T_n \times S_n)$ est topologiquement transitive, alors les suites (T_n) et (S_n) sont topologiquement transitives.*

Démonstration. Soient (T_n) et (S_n) tels que $(T_n \times S_n)$ soit topologiquement transitive. Alors, pour tous ouverts non vides $U_1 \subset X_1$, $U_2 \subset X_2$, $V_1 \subset Y_1$, $V_2 \subset Y_2$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$(T_n \times S_n)(U_1 \times U_2 \cap V_1 \times V_2) = T_n(U_1) \cap V_1 \times S_n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

D'où la conclusion. □

Nous verrons par la suite avec l'exemple 1.1.1 que l'implication inverse de la proposition 1.1.2 est fausse.

Grâce aux propositions 1.1.1 et 1.1.2, nous pouvons à présent formellement prouver que le mélange et le mélange faible sont bien des notions plus fortes que la transitivité topologique.

Corollaire 1.1.1. *Mélangeant $\Rightarrow$ faiblement mélangeant $\Rightarrow$ topologiquement transitif.*

Démonstration. Cela découle directement de la définition de faiblement mélangeant ainsi que des propositions 1.1.1 et 1.1.2. $\square$

Exemple 1.1.1. Considérons une rotation

$$T : \mathbb{T} \to \mathbb{T},\ z \to e^{2i\pi\theta} z,$$

où θ est un irrationnel. Montrons que la suite (T^n) est topologiquement transitive. Soit $\epsilon > 0$ et $z \in \mathbb{T}$. L'orbite de z est l'ensemble

$$\{e^{2i\pi n\theta} z \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Elle est infinie car θ est irrationnel. De plus, comme l'ensemble

$$\{\{e^{2i\pi\alpha} \mid \alpha \in [k\epsilon, (k+1)\epsilon]\} \mid k \in \{0, ..., K\}\},$$

où K est tel que $(K+1)\epsilon > 1$, est un recouvrement fini de $\mathbb{T}$, il existe $k \in \{0, ..., K\}$ et $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m > n$ tels que $T^m(z),\ T^n(z) \in \{e^{2i\pi\alpha} \mid \alpha \in [k\epsilon, (k+1)\epsilon]\}$. Il existe donc $\alpha_1, \alpha_2 \in [k\epsilon, (k+1)\epsilon]$ tels que

$$T^m(z) = e^{2i\pi\alpha_1} z = e^{2i\pi m\theta}$$

et

$$T^n(z) = e^{2i\pi\alpha_2} z = e^{2i\pi n\theta}.$$

L'application $S := T^{m-n}$ est donc une rotation irrationnelle d'angle $|\alpha_1 - \alpha_2| < \epsilon$. Ainsi, pour tout arc de cercle d'angle ϵ, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $S^k(z)$ appartient à cet arc. Tous les points de $\mathbb{T}$ sont donc d'orbite dense et nous concluons à la transitivité de la suite (T^n) grâce au théorème 1.1.1.

Montrons à présent que la suite (T^n) n'est pas faiblement mélangeante. Procédons par l'absurde et supposons la suite faiblement mélangeante. Nous avons

$$(T^n \times T^n)(z_1, z_2) = (e^{2i\pi n\theta} z_1, e^{2i\pi n\theta} z_2)$$

et nous remarquons que le quotient des images de z_1 et z_2 ne dépend pas de n. Ainsi, l'application

$$f : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}, (z_1, z_2) \to \frac{T^n(z_1)}{T^n(z_2)} = \frac{z_1}{z_2}$$

ne dépend pas de n.

Or, comme (T^n) est une suite d'applications faiblement mélangeantes, pour tous ouverts $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset \mathbb{T}$ non vides, nous avons

$$f(U_1 \times U_2) \cap V \neq \emptyset,$$

où $V := \{\frac{z_1}{z_2} \mid z_1 \in V_1, z_1 \in V_2\}$.

En posant $U_1 = U_2 = \{e^{2i\pi\alpha} \mid \alpha \in \left]0, \frac{1}{4}\right[\}$, $V_1 = \{e^{2i\pi\alpha_1} \mid \alpha_1 \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[\}$ et $V_2 = \{e^{2i\pi\alpha_2} \mid \alpha_2 \in \left]\frac{-1}{4}, 0\right[\}$, nous avons $V = \{e^{2i\pi\alpha'} \mid \alpha' \in \left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[\}$ et $f(U_1 \times U_2) = \{e^{2i\pi\alpha'} \mid \alpha' \in \left]\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right[\}$. Ainsi, l'intersection ci-dessus est vide, ce qui est absurde. La suite (T^n) n'est donc pas faiblement mélangeante.

Nous remarquons avec cet exemple qu'être topologiquement transitif n'implique pas forcément être faiblement mélangeant. Nous constatons également que l'implication inverse de la proposition 1.1.2 est fausse.

Définition 1.1.6. Soient A, $B \subset X$. On pose

$$N(A, B) = \{n \in \mathbb{N} \mid T_n(A) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Remarque 1.1.3. Si $A \subset A'$ et $B \subset B'$, alors $N(A, B) \subset N(A', B')$.

Lemme 1.1.2. *Soit U un ouvert non vide de X et $x \in U$. Si X n'a pas de points isolés, alors il existe un ouvert V contenant x tel que $\overline{V} \subsetneq U$.*

Démonstration. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, \epsilon) \subset U$. Comme X n'a pas de points isolés, cette boule contient un point y distinct de x. Nous constatons alors que l'ensemble $V := \mathrm{B}(x, \frac{d(x,y)}{2})$ convient. En effet,

$$\overline{\mathrm{B}\left(x, \frac{d(x,y)}{2}\right)} \subset \mathrm{B}\left(x, d(x,y)\right)$$

et $y \in U \setminus \overline{V}$. □

Lemme 1.1.3. *Si Y n'a pas de points isolés et si la suite (T_n) est topologiquement transitive, alors $N(U, V)$ est infini pour tous ouverts $U \subset X$ et $V \subset Y$ non vides.*

Démonstration. Soient $U \subset X$ et $V \subset Y$ des ouverts non vides. Par le lemme 1.1.2, il existe un ouvert V_0 non vide tel que $\overline{V_0} \subsetneq V$. Posons $U_0 := U$. Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $T_{n_0}(U_0) \cap V_0 \neq \emptyset$. Comme Y n'a pas de points isolés et que l'ouvert $V \setminus \overline{V_0}$ est non vide, il existe un ouvert V_1 non vide tel que $\overline{V_1} \subsetneq V \setminus \overline{V_0}$ par le lemme 1.1.2.

Posons
$$U_1 = U_0 \cap T_{n_0}^{-1}(V_0).$$
Comme U_1 et V_1 sont des ouverts non vides, il existe n_1 tel que $T_{n_1}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. Les naturels n_0 et n_1 sont distincts. Sinon, nous aurions l'inclusion $T_{n_1}(U_1) \subset V_0$ et nous obtiendrions $V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$, ce qui est absurde par construction de V_0 et V_1.

Nous pouvons ainsi construire par induction des suites (U_k) et (V_k) d'ouverts non vides et une suite de naturels (n_k) deux à deux distincts telles que

$$\overline{V_k} \subsetneq V \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} \overline{V_j}, \quad U_k = U_{k-1} \cap T_{n_{k-1}}^{-1}(V_{k-1}) \text{ et } T_{n_k}(U_k) \cap V_k \neq \emptyset$$

pour tout $k \in \mathbb{N}_0$.

Nous concluons en remarquant que $n_k \in N(U, V)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ car $U_k \subset U$ et $V_k \subset V$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Nous allons tout de même essayer d'obtenir un semblant de réciproque à la proposition 1.1.2. Pour ce faire, nous ajoutons l'hypothèse stipulant que l'une des deux suites doit être mélangeante ainsi que l'absence de points isolés dans un des deux ensembles d'arrivée.

Proposition 1.1.3. *Si Y_1 n'a pas de points isolés, si la suite (T_n) est topologiquement transitive et si la suite (S_n) est mélangeante, alors $(T_n \times S_n)$ est topologiquement transitive.*

Démonstration. Supposons que la suite (S_n) est mélangeante et soient $U_1 \times V_1$ et $U_2 \times V_2$ des ouverts de base non vides. Comme la suite (S_n) est mélangeante, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $S_n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ pour tout $n \geq N$. Ensuite, par le lemme 1.1.3, il existe $n \geq N$ tel que $T_n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. D'où la conclusion. $\square$

1.2 Théorème de Furstenberg

La notion d'universalité est très générale. Aussi, est-il ardu d'obtenir des résultats sans ajouter des hypothèses plus contraignantes. Dans cette section, nous allons nous restreindre à des applications $T_n : X \to X$ commutant entre elles afin d'obtenir le théorème de Furstenberg. Ce théorème stipule que si une suite (T_n) est faiblement mélangeant, alors toutes les "suites produits" $(\prod_{k=1}^{K} T_n)$ correspondantes le sont également.

Lemme 1.2.1. *Soient U_1, U_2, V_1, V_2 des ouverts non vides. Si il existe une application continue $S : X \to X$ telle que*

(i) $S \circ T_n = T_n \circ S$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

(ii) $S(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$

(iii) $S(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$,

alors il existe des ouverts non vides $U_1' \subset U_1$ et $V_1' \subset V_1$ tels que $N(U_1', V_1') \subset N(U_2, V_2)$ et $N(V_1', U_1') \subset N(V_2, U_2)$.

Démonstration. Comme l'application S est continue, $S^{-1}(V_2)$ et $S^{-1}(U_2)$ sont ouverts. Ainsi, les ensembles $U_1' := U_1 \cap S^{-1}(U_2)$ et $V_1' := V_1 \cap S^{-1}(V_2)$ sont des ouverts non vides, respectivement inclus dans U_1 et V_1.

Montrons que U_1' et V_1' satisfont aux conditions de l'énoncé. Soit $n \in N(U_1', V_1')$. Il existe $x \in U_1'$ tel que $T_n(x) \in V_1'$. Ainsi,

$$S(x) \in S(U_1') = S(U_1 \cap S^{-1}(U_2)) \subset U_2$$
$$T_n(S(x)) = S(T_n(x)) \in S(V_1') = S(V_1 \cap S^{-1}(V_2)) \subset V_2$$

et $T_n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. D'où la première inclusion.

La deuxième inclusion s'obtient par un raisonnement similaire. $\square$

Remarque 1.2.1. Pour le lemme 1.2.1, les applications T_n n'ont pas besoin de commuter entre elles. Elles ont simplement besoin de commuter avec une application continue commune.

Lemme 1.2.2. *Si la suite (T_n) est topologiquement transitive et si $N(U_1, U_2) \cap N(V_1, V_2)$ est non vide, alors $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$ est également non vide.*

Démonstration. Soit $m \in N(U_1, U_2) \cap N(V_1, V_2)$. Les ensembles $T_m(U_1) \cap U_2$ et $T_m(V_1) \cap V_2$ sont non vides. De plus, comme les T_n commutent entre eux, par la remarque 1.1.3 et le lemme 1.2.1 appliqué avec $S = T_m$, il existe des ouverts non vides $U_1' \subset U_1$ et $V_1' \subset V_1$ tels que

$$N(U_1', V_1') \subset N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2).$$

Nous concluons en remarquant que la transitivité topologique de la suite (T_n) implique que l'ensemble $N(U_1', V_1')$ est non vide. □

Théorème 1.2.1. *(Furstenberg) Si la suite (T_n) est faiblement mélangeante, alors la suite $(\prod_{k=1}^{K} T_n)$ est faiblement mélangeante pour tout $K \geq 2$.*

Démonstration. Nous devons montrer que la suite $(\prod_{k=1}^{2K} T_n)$ est topologiquement transitive pour tout $K \geq 2$. Il est donc suffisant (et même plus fort) de montrer que les suites $(\prod_{k=1}^{K} T_n)$ sont topologiquement transitives pour tout $K \geq 2$. Procédons par récurrence.

Le cas de base consiste à montrer que la suite $(T_n \times T_n)$ est topologiquement transitive, ce qui est direct, étant donné que la suite (T_n) est faiblement mélangeante.

Supposons à présent que la suite $(\prod_{k=1}^{K-1} T_n)$ soit topologiquement transitive pour $K > 2$ et montrons que la suite $(\prod_{k=1}^{K} T_n)$ est topologiquement transitive. Comme l'ensemble

$$\{U_1 \times ... \times U_K \mid U_1, ..., U_K \text{ ouverts de } X\}$$

est une base de topologie de $\prod_{k=1}^{K} X$, il suffit de montrer que pour tous ouverts non vides $U_1, ...U_K, V_1, ..., V_K \subset X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\prod_{k=1}^{K} T_n)(U_1 \times ... \times U_K) \cap V_1 \times ... \times V_K = T_n(U_1) \cap V_1 \times ... \times T_n(U_K) \cap V_K \neq \emptyset,$$

c'est à dire, que l'ensemble $\bigcap_{k=1}^{K} N(U_k, V_k)$ est non vide.

Or, comme la suite (T_n) est faiblement mélangeante, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que les ensembles $T_m(U_{K-1}) \cap U_K$ et $T_m(V_{K-1}) \cap V_K$ sont non vides. Par le lemme 1.2.1 appliqué avec $S = T_m$, il existe des ouverts non vides $U_{K-1}' \subset U_{K-1}$ et $V_{K-1}' \subset V_{K-1}$ tels que

$$N(U_{K-1}', V_{K-1}') \subset N(U_{K-1}, V_{K-1}) \cap N(U_K, V_K).$$

Or, par hypothèse de récurrence, nous avons

$$\bigcap_{k=1}^{K-2} N(U_k, V_k) \cap N(U_{K-1}', V_{K-1}') \neq \emptyset,$$

et nous concluons grâce à l'inclusion

$$\bigcap_{k=1}^{K-2} N(U_k, V_k) \cap N(U'_{K-1}, V'_{K-1}) \subset \bigcap_{k=1}^{K} N(U_k, V_k).$$

□

1.3 Condition (C)

Nous avons vu dans le théorème 1.1.1 que, sous l'hypothèse de complétude de X, la transitivité topologique impliquait l'existence d'un ensemble G delta dense de points universels. Nous pourrions nous demander si, depuis d'autres points de vue, cet ensemble de points universels est également "grand". En particulier, lorsque nous travaillons dans un espace vectoriel, pouvons-nous trouver un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie formé d'éléments universels ? Cette question a motivé les auteurs de [2] à introduire la condition (C).

Au vu de la nature du problème, nous allons nous placer dans un contexte "linéaire" : soit X un espace de Fréchet séparable, Y un espace localement convexe séparable satisfaisant le premier axiome de dénombrabilité et $T_n : X \to Y$ une suite d'applications linéaires et continues.

Définition 1.3.1. Une suite d'applications (T_n) satisfait la condition (C) si il existe une suite (n_k) strictement croissante de naturels et un ensemble $X_0 \subset X$ dense dans X tel que

(*i*) $T_{n_k}(x) \to 0 \quad \forall x \in X_0$ si $k \to \infty$

(*ii*) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_{n_k}(B_p(1))$ est dense dans Y pour toute semi-norme continue p sur X.

Cette condition (C) semble à priori très abstraite. Néanmoins, comme précisé ci-dessus, elle consiste en une des hypothèses permettant d'obtenir l'existence d'un sous-espace fermé de dimension infinie constitué d'éléments universels (voir notamment la proposition 3.7 du point 3 de [3]).

Nous n'allons cependant pas démontrer ce genre de proposition et plutôt nous concentrer sur une simplification de la définition de la condition (C) afin de montrer qu'il s'agit d'une notion plus forte que la transitivité topologique. Pour cela, nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 1.3.1. *Soit E un espace localement convexe non trivial. Alors, E n'a pas de points isolés.*

Démonstration. Procédons par l'absurde. Soit P un système fondamental de semi-normes pour E et x un point isolé. Alors l'ensemble $\{x\}$ est ouvert. Comme E est un espace localement convexe, $\{0\}$, en tant que translaté de $\{x\}$, est ouvert. Ainsi, il existe $p \in P$ et $\epsilon > 0$ tels que $B_p(\epsilon) = \{0\}$.

Soit $y \neq 0$. Si $p(y) \neq 0$, alors $\frac{\epsilon}{2p(y)} y \in B_p(\epsilon) = \{0\}$, ce qui est absurde. Donc $p(y) = 0$. Or, dans ce cas, $y \in B_p(\epsilon) = \{0\}$, ce qui est également absurde. □

Lemme 1.3.2. *Soit E un espace localement convexe séparable satisfaisant le premier axiome de dénombrabilité. Soient (x_n) une suite dense de E et (p_n) une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de E. Si (y_n) est une suite de E telle que $p_n(x_n - y_n) \to 0$ si $n \to \infty$, alors (y_n) est dense dans E.*

Démonstration. Soient $m \in X$, $x \in E$ et $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe y_n appartenant à $B_{p_m}(x, \epsilon)$. Par hypothèse, il existe $N > m$ tel que $p_n(x_n - y_n) < \frac{\epsilon}{2}$ pour tout $n > N$. Par le lemme 1.3.1, l'espace E n'a pas de points isolés. La suite $(x_n)_{n>N}$ est donc dense dans E et il existe $n > m$ tel que $x_n \in B_{p_m}(x, \frac{\epsilon}{2})$.

Nous concluons en remarquant que

$$\begin{aligned} p_m(x - y_n) &\leq p_m(x - x_n) + p_m(x_n - y_n) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + p_n(x_n - y_n) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

et donc que le point y_n appartient à $B_{p_m}(x, \epsilon)$. □

Théorème 1.3.1. *Une suite (T_n) satisfait la condition (C) si et seulement si pour tout $j \geq 1$, pour tous ouverts non vides $U_0, ..., U_j \subset X$ tels que $0 \in U_0$, et pour tous ouverts non vides $V, V_0 \subset Y$ tels que $0 \in V_0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$T_n(U_i) \cap V_0 \neq \emptyset \quad \forall\, 1 \leq i \leq j \quad et \quad T_n(U_0) \cap V \neq \emptyset.$$

Démonstration. $\Rightarrow$ Soit (n_k) une suite de naturels strictement croissante satisfaisant la définition 1.3.1. Montrons dans un premier temps que pour tout ouvert non vide $V \subset Y$, toute semi-norme p continue et tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $N(B_p(\epsilon), V)$ contient un sous-ensemble infini de (n_k), autrement dit, que les ensembles

$$\bigcup_{k \geq N} T_{n_k}(B_p(\epsilon))$$

sont denses dans Y pour tout $N \in \mathbb{N}$, tout $\epsilon > 0$ et toute semi-norme p continue.

Remarquons d'abord que pour toute semi-norme p continue sur X et tout $\epsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n_k \in N(B_p(\epsilon), V)$. En effet, soient p une semi-norme continue sur X et $\epsilon > 0$. L'application $\dfrac{p}{\epsilon}$ est également une semi-norme continue sur X. Ainsi, l'ensemble

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_{n_k}(B_{\frac{p}{\epsilon}}(1)) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_{n_k}(B_p(\epsilon))$$

est dense dans Y par hypothèse.

Montrons à présent que ces ensembles contiennent une infinité de n_k. Soient $V \subset Y$ un ouvert non vide, p_0 une semi-norme continue sur X et $\epsilon_0 > 0$.

Il existe un ouvert V_0 contenant 0 tel que $V \setminus \overline{V_0}$ soit un ouvert non vide. En effet, si $0 \in \overline{V}$, alors il existe $x \in B_q(1) \cap V$ pour q une semi-norme continue quelconque sur Y et

$V_0 := B_q(\frac{d(0,x)}{2})$ convient. Tandis que si $0 \notin \overline{V}$, alors il existe une semi-norme q' et $\epsilon > 0$ tel que $\overline{B_{q'}(\epsilon)} \subset \overline{V}^c \subset V^c$ et $B_{q'}(\epsilon)$ convient.

Comme l'ensemble $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_{n_k}(B_{p_0}(\epsilon_0))$ est dense dans Y, il existe $m_0 \in \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ tel que

$$T_{m_0}(B_{p_0}(\epsilon_0)) \cap (V \setminus \overline{V_0}) \neq \emptyset.$$

Or, comme l'ensemble $B_{p_0}(\epsilon_0) \cap T_{m_0}^{-1}(V_0)$ est un voisinage de 0 dans X, il existe une semi-norme p_1 continue et $\epsilon_1 > 0$ tel que

$$B_{p_1}(\epsilon_1) \subset B_{p_0}(\epsilon_0) \cap T_{m_0}^{-1}(V_0).$$

Il existe alors $m_1 \in \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ tel que

$$T_{m_1}(B_{p_1}(\epsilon_1)) \cap (V \setminus \overline{V_0}) \neq \emptyset.$$

Nous remarquons que m_0 et m_1 sont distincts. Sinon, nous aurions l'inclusion $T_{m_1}(B_{p_1}(\epsilon_1)) \subset V_0$ et nous obtiendrions $V_0 \cap (V \setminus \overline{V_0}) \neq \emptyset$, ce qui est absurde. Nous pouvons ainsi construire par induction une suite de boules $(B_{p_l}(\epsilon_l))$ de X et une suite de naturels (m_l) telles que

$$B_{p_l}(\epsilon_l) \subset B_{p_{l-1}}(\epsilon_{l-1}) \cap T_{m_{l-1}}^{-1}(V_0), \quad T_{m_l}(B_{p_l}(\epsilon_l)) \cap (V \setminus \overline{V_0}) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad m_l \in \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

pour tout $l \in \mathbb{N}_0$.

Comme $B_{p_l}(\epsilon_l) \subset T_{m_{l-1}}^{-1}(V_0)$ pour tout $l \in N_0$, nous avons $B_{p_l}(\epsilon_l) \subset T_{m_j}^{-1}(V_0)$ pour tout $j < l$. Cela implique que les naturels m_l sont deux à deux distincts. L'ensemble $N(B_{p_0}(\epsilon_0), V)$ contient donc un sous-ensemble infini de (n_k), étant donné que $B_{p_l}(\epsilon_l) \subset B_{p_0}(\epsilon_0)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.

Montrons à présent que la condition du théorème est nécessaire. Soient $j \geq 1$, $U_0, ..., U_j \subset X$ des ouverts tels que $0 \in U_0$ et $V, V_0 \subset Y$ des ouverts non vides tels que $0 \in V_0$.

Comme $0 \in U_0$, il existe une semi-norme continue p et $\epsilon > 0$ tels que $B_p(\epsilon) \subset U_0$. Par hypothèse, il existe un ensemble dense $X_0 \subset X$ tel que $T_{n_k}(x) \to 0$ pour tout $x \in X_0$ si $k \to \infty$. En particulier, que les ensembles $X_0 \cap U_i$ sont non vides pour tout $1 \leq i \leq j$.

Soient $y_i \in X_0 \cap U_i$ pour tout $1 \leq i \leq j$. Nous avons

$$T_{n_k}(y_i) \to 0 \text{ si } k \to \infty \quad \forall\, 1 \leq i \leq j.$$

Donc, comme $0 \in V_0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $T_{n_k}(y_i) \in V_0$ pour tout $1 \leq i \leq j$ et tout $k \geq N$. Nous concluons en remarquant que

$$T_{n_k}(y_i) \in T_{n_k}(U_i) \cap V_0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq j,\ k \geq N$$

et qu'il existe $k \geq N$ tel que

$$T_{n_k}(B_p(\epsilon)) \cap V \neq \emptyset$$

par densité de $\cup_{k\geq N}T_{n_k}(B_p(\epsilon))$.

$\Leftarrow$ Soient (x_n) une suite dense de X, (y_n) une suite dense de Y, (p_n) une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de X telle que l'ensemble $\{B_{p_n}(1)|n \in \mathbb{N}\}$ forme une base de voisinage de 0 et (q_n) une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de Y. Montrons au préalable que pour tout $j \geq 1$, pour tous ouverts non vides $U_0, ..., U_j \subset X$ tels que $0 \in U_0$, et pour tous ouverts non vides $V, V_0 \subset Y$ tels que $0 \in V_0$, il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$T_n(U_i) \cap V_0 \neq \emptyset \ \ \forall\, 1 \leq i \leq j \ \text{ et } \ T_n(U_0) \cap V \neq \emptyset. \tag{*}$$

Soient $j \geq 1$, $U_0, ..., U_j \subset X$ des ouverts non vides tels que $0 \in U_0$ et $V, V_0 \subset Y$ des ouverts non vides tels que $0 \in V_0$. Montrons qu'il existe $V' \subset V$ et $V_0' \subset V_0$ deux ouverts disjoints non vides tels que $0 \in V_0'$. Traitons les deux cas suivants.

Si $0 \in V$, par le lemme 1.1.2, il existe un ouvert U contenant 0 tel que $\overline{U} \subsetneq V$ et $V' := V \setminus \overline{U}$ et $V_0' := U \cap V_0$ conviennent.

Si $0 \notin V$, fixons $y \in V$. Par le lemme 1.1.2, il existe un ouvert U contenant y tel que $\overline{U} \subsetneq V$. Ainsi $0 \notin \overline{U}$ et il existe un voisinage U' ouvert de 0 tel que $U \cap U' = \emptyset$. Les ensembles $V' := U$ et $V_0' := U' \cap V_0$ conviennent.

Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $T_{n_0}(U_i) \cap V_0' \neq \emptyset$ pour tout $1 \leq i \leq j$ et $T_{n_0}(U_0) \cap V' \neq \emptyset$. Posons

$$U_{j+1} = U_0 \cap T_{n_0}^{-1}(V').$$

Comme U_{j+1} est un ouvert non vide, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $T_{n_1}(U_i) \cap V_0' \neq \emptyset$ pour tout $1 \leq i \leq j+1$ et $T_{n_1}(U_0) \cap V' \neq \emptyset$. Nous remarquons que n_0 et n_1 sont distincts. Sinon, nous aurions l'inclusion $T_{n_1}(U_{j+1}) \subset V'$ et nous obtiendrions $V' \cap V_0' \neq \emptyset$, ce qui est absurde par construction de V' et V_0'.

Nous pouvons ainsi construire par induction une suites $(U_{j+k})_k$ d'ouverts non vides et une suite de naturels (n_k) deux à deux distincts telles que

$$U_{j+k} = U_0 \cap T_{n_{k-1}}^{-1}(V'),\ T_{n_k}(U_i) \cap V_0' \neq \emptyset \ \ \forall\, 1 \leq i \leq j+k \ \text{ et } \ T_{n_k}(U_0) \cap V' \neq \emptyset$$

pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le naturel n_k satisfait la propriété (*) et il existe donc bien une infinité de naturels satisfaisant la propriété (*).

Construisons par induction sur k une famille $(u_{n,k})_{k\geq n\geq 1}$ de X, une suite (v_k) de Y et une suite de naturels strictement croissante (n_k) telles que

$$q_k(T_{n_k}(u_{n,k})) < \frac{1}{2^k},\quad p_k(u_{n,k} - u_{n,k-1}) < \frac{1}{2^k},\quad q_k(T_{n_j}(u_{n,k} - u_{n,k-1})) < \frac{1}{2^k},$$
$$u_{k,k} = x_k,\quad p_k(v_k) < 1 \ \text{ et } \ q_k(T_{n_k}(v_k) - y_k) < \frac{1}{2^k}$$

pour tous $j, n < k$.

Pour $k = 1$, posons $u_{1,1} = x_1$. De plus, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $T_{n_1}(B_{p_1}(1)) \cap B_{q_1}(y_1) \neq \emptyset$. Choisissons finalement $v_1 \in B_{p_1}(1) \cap T_{n_1}^{-1}(B_{q_1}(y_1))$.

Soit $k > 1$ et supposons que les éléments $u_{n,k'}$, $v_{k'}$ et $n_{k'}$ soient définis pour tous $1 \leq n \leq k' < k$ de manière à ce que les 6 propriétés ci-dessus soient satisfaites. Posons $u_{k,k} = x_k$ et définissons

$$U_n = \left(u_{n,k-1} + B_{p_k}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right) \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} T_{n_j}^{-1}\left(B_{q_k}\left(T_{n_j}\left(u_{n,k-1}\right), \frac{1}{2^k}\right)\right)$$

pour $1 \leq n < k$, ainsi que

$$U_0 = B_{p_k}(1), \quad V_0 = B_{q_k}\left(\frac{1}{2^k}\right) \quad \text{et} \quad V = y_k + B_{q_k}\left(\frac{1}{2^k}\right).$$

Nous remarquons que les ensembles U_n contiennent les points $u_{n,k-1}$ pour tous $1 \leq n < k$ et sont donc non vides. Les ensembles ci-dessus satisfaisant les hypothèses de l'énoncé, il existe $n_k > n_{k-1}$ tel que

$$T_{n_k}(U_n) \cap V_0 \neq \emptyset \quad \forall\, 1 \leq n \leq k-1 \quad \text{et} \quad T_{n_k}(U_0) \cap V \neq \emptyset.$$

Autrement dit, pour tout $1 \leq n \leq k-1$, il existe $u_{n,k} \in U_n$ tel que $T_{n_k}(u_{n,k}) \in B_{q_k}(\frac{1}{2^k})$, ce qui implique les trois première inégalités souhaitées, et il existe $v_k \in U_0$ tel que $T_{n_k}(v_k) \in V$, ce qui implique les deux dernières inégalités souhaitées.

Nous constatons que

$$u_{n,q} - u_{n,p} = \sum_{k=p+1}^{q} (u_{n,k} - u_{n,k-1})$$

pour tous $1 \leq n \leq p < q$ et en tirons que

$$\begin{aligned} p_m(u_{n,q} - u_{n,p}) &\leq \sum_{k=p+1}^{q} p_m(u_{n,k} - u_{n,k-1}) \\ &\leq \sum_{k=p+1}^{q} p_k(u_{n,k} - u_{n,k-1}) \\ &\leq \sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

pour tous $n, m \leq p < q$. Ainsi, la suite $(u_{n,k})_{k \geq n}$ est de Cauchy pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Comme X est complet, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe $u_n \in X$ tel que $u_{n,k} \to u_n$ si $k \to \infty$.

Montrons que l'ensemble $X_0 \coloneqq \{u_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ est dense et satisfait la première condition de la définition 1.3.1. Nous avons

$$u_{n,K} - x_n = \sum_{k=n+1}^{K} (u_{n,k} - u_{n,k-1})$$

pour tous $1 \leq n \leq K$, et donc

$$\begin{aligned} p_n(u_n - x_n) &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} p_n(u_{n,k} - u_{n,k-1}) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k(u_{n,k} - u_{n,k-1}) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ en passant à la limite. Par le lemme 1.3.2, l'ensemble X_0 est dense dans X. Nous avons de plus

$$u_n = u_{n,j} + \sum_{k=j+1}^{\infty} (u_{n,k} - u_{n,k-1})$$

pour tout $1 \leq n \leq j$, et donc

$$\begin{aligned} q_m(T_{n_j}(u_n)) &\leq q_j(T_{n_j}(u_{n,j})) + \sum_{k=j+1}^{\infty} q_k(T_{n_j}(u_{n,k} - u_{n,k-1})) \\ &\leq \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^j} \end{aligned}$$

pour tous $m, n \leq j$. La première condition de la définition 1.3.1 est donc bien satisfaite.

Passons à la deuxième condition. Soit p une semi-norme continue sur X. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B_{p_k}(1) \subset B_{p_n}(1) \subset B_p(1)$ pour tout $k \geq n$, car la suite de semi-normes (p_n) est croissante et car l'ensemble $\{B_{p_n}(1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une base de voisinage de 0. Ainsi, comme $p_k(v_k) < 1$ pour tout $k \geq n$, nous avons

$$D := \{T_{n_k}(v_k) \mid k \geq n\} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_{n_k}(B_p(1)).$$

En appliquant le lemme 1.3.2 aux suite (y_k) et $(T_{n_k}(v_k))$, nous constatons que cette dernière est dense dans Y. Ainsi, comme Y ne possède pas de points isolés, l'ensemble D est dense dans Y.

Nous obtenons donc finalement que l'ensemble $\cup_{k \in \mathbb{N}} T_{n_k}(B_p(1))$ est dense dans Y. □

Corollaire 1.3.1. *(T_n) mélangeant $\Rightarrow$ (T_n) satisfait la condition (C) $\Rightarrow$ (T_n) topologiquement transitif.*

Démonstration. Montrons d'abord la première implication. Soient $j \geq 1$, $U_0, ..., U_j \subset X$ des ouverts non vides tels que $0 \in U_0$ et $V, V_0 \subset Y$ des ouverts non vides tels que $0 \in V_0$. Comme la suite (T_n) est mélangeante, il existe N tel que

$$T_n(U_i) \cap V_0 \neq \emptyset \ \text{ et } T_n(U_0) \cap V \neq \emptyset \ \ \forall\, n \geq N,\ 1 \leq i \leq j$$

et nous concluons à l'aide du théorème 1.3.1.

Montrons ensuite la deuxième implication. Soient $U \subset X$ et $V \subset Y$ des ouverts non vides. Il existe des ouverts non vides $U_0, U_1 \subset X$ tels que $U_0 + U_1 \subset U$ et $0 \in U_0$. De manière similaire, il existe $V_0, V_1 \subset Y$ tels que $V_0 + V_1 \subset V$ et $0 \in V_0$. Par le théorème 1.3.1, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$T_n(U_0) \cap V_1 \neq \emptyset \text{ et } T_n(U_1) \cap V_0 \neq \emptyset.$$

Ainsi, il existe $x_0 \in U_0$ et $x_1 \in U_1$ tels que $T_n(x_1) + T_n(x_0) \in V_0 + V_1$. Nous concluons en constatant que $T_n(x_0 + x_1) \in T_n(U) \cap V$.

□

Chapitre 2

Séries universelles simples

Comme statué précédemment, le concept d'universalité est une notion très générale et il est assez ardu d'obtenir des résultats sans restriction. Nous allons donc considérer des applications T_n particulières.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la notion d'universalité restreinte dans le contexte des séries universelles simples introduite dans [1] et examinons plusieurs conditions équivalentes à l'existence d'un élément universel restreint. Ces conditions nous permettront d'obtenir deux théorèmes sur les séries universelles de Taylor réelles, provenant respectivement de [1] et [5].

Nous considérerons tout au long de ce chapitre un espace vectoriel métrisable séparable X sur le champ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dont la topologie est définie par une métrique ρ invariante par translation. Nous fixons également une suite (y_n) d'éléments de X.

Nous notons l'ensemble des polynômes $G := \{a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \{n \mid a_n \neq 0\}$ est fini $\}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, e_n l'élément de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont la nième composante vaut 1 et les autres sont nulles.

Finalement, l'espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est muni de la topologie produit.

2.1 Définitions et généralités

Nous allons considérer comme suite d'applications continues, les applications de sommes partielles associées à la suite (y_j) :

$$T_n : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to X, \quad a \to \sum_{j=0}^{n} a_j y_j.$$

Remarque 2.1.1. Remarquons que dans ce chapitre, l'espace de départ est un espace de suites, tandis que l'espace d'arrivée est nommé X (et non plus Y, comme dans le chapitre 1).

L'ensemble $\mathcal{U}$ des éléments universels par rapport à une telle suite (T_n) est défini de la manière suivante.

Définition 2.1.1. Un élément $a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ appartient à l'ensemble $\mathcal{U}$ si la suite $(\sum_{j=0}^{n} a_j y_j)$ est dense dans X.

Lemme 2.1.1. *Soit X est un espace vectoriel topologique non trivial sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si X est séparable, alors il n'a pas de points isolés.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite dense dans X. Procédons par l'absurde. Si X admet un point isolé, comme X est un espace vectoriel topologique, tous ses singletons sont ouverts. Donc pour tout $x \in X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = x_n$. Ainsi, l'espace X est dénombrable, ce qui est absurde étant donné que X est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. □

La proposition suivante montre que la propriété d'universalité d'un point dépend uniquement des valeurs de la queue de la suite.

Proposition 2.1.1. *Soit $a \in \mathcal{U}$. Si $b \in G$, alors $a + b \in \mathcal{U}$.*

Démonstration. Comme l'espace X est séparable, par le lemme 2.1.1, l'espace X n'a pas de points isolés.

Montrons à présent que $a + b \in \mathcal{U}$. Soient U un ouvert de X et $N \in \mathbb{N}$ tel que $b_n = 0$ pour tout $n > N$. Ainsi,

$$\sum_{j=0}^{n}(a_j + b_j)y_j = \sum_{j=0}^{n} a_j y_j + c$$

pour tout $n > N$, où $c = \sum_{j=0}^{N} b_j y_j$. Comme l'espace X n'a pas de points isolés, la suite $(\sum_{j=0}^{n} a_j y_j)_{n>N}$ est dense dans X et il existe $n > N$ tel que $\sum_{j=0}^{n} a_j y_j \in U - c$. Ainsi, $\sum_{j=0}^{n}(a_j + b_j)y_j \in U$, d'où la conclusion. □

La proposition qui suit indique que s'il existe un élément universel, alors il en existe beaucoup (un ensemble dense).

Proposition 2.1.2. *Si l'ensemble $\mathcal{U}$ est non vide, alors il s'agit d'un ensemble G_δ qui est dense dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.*

Démonstration. Montrons que l'ensemble $\mathcal{U}$ est dense. Soit U un ouvert de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Par hypothèse, il existe $a \in \mathcal{U}$. De plus, comme $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est muni de la topologie produit, il existe $b \in G$ tel que $a + b \in U$. La proposition 2.1.1 permet alors d'obtenir la densité de $\mathcal{U}$.

Montrons que l'ensemble $\mathcal{U}$ est un ensemble G_δ. Comme l'espace X est métrisable et séparable, il admet une base de topologie dénombrable $\{U_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. De plus, par définition de $\mathcal{U}$, nous avons

$$\mathcal{U} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n^{-1}(U_k),$$

ce qui permet de conclure. □

Nous souhaiterions à présent appliquer certaines restrictions quant aux séries universelles considérées. Typiquement, ces restrictions peuvent se traduire par l'appartenance à un certain ensemble. C'est pourquoi nous introduisons le concept de séries universelles restreintes.

Fixons un espace $A \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant les conditions suivantes.

(A1) L'espace A est un espace vectoriel métrisable complet dont la topologie est définie par une métrique d invariante par translation.
(A2) Les projections $A \to \mathbb{K}, \quad a \to a_m$ sont continues.
(A3) L'ensemble G est inclus et dense dans A.

Remarque 2.1.2. Avec ces hypothèses, l'ensemble A est automatiquement séparable. En effet, il est clair que l'ensemble

$$C := \{a \in D^{\mathbb{N}} \mid \{n \mid a_n \neq 0\} \text{ fini } \}$$

où $D = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q}$ est dense dans G, et donc dans A.

Avant de passer à la définition des séries universelles restreintes, nous allons présenter deux exemples d'espace A respectant les hypothèses (A1), (A2) et (A3).

Exemple 2.1.1. Un exemple trivial consiste à prendre $A = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et d la distance invariante par translation définie par

$$d(a,b) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|a_j - b_j|}{1 + |a_j - b_j|}$$

pour $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exemple 2.1.2. Un exemple d'espace moins trivial est le suivant

$$A_{(M)} := \left\{ a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \ \forall C > 0, \ \sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{|a_j|}{M_j C^j} < \infty \right\},$$

où $M = (M_j)$ est une suite croissante de réels tels que $M_0 = 1$. Nous munissons $A_{(M)}$ de la topologie associée aux semi-normes q_m définies par

$$q_m(a) := \sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{|a_j|}{M_j C_m^j}$$

pour $a \in A_{(M)}$, où (C_m) est une suite strictement décroissante vers 0. La distance d est alors la distance invariante par translation définie par

$$d(a,b) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{q_m(a-b)}{1 + q_m(a-b)}$$

pour a, $b \in A_{(M)}$.

Proposition 2.1.3. *L'espace $A_{(M)}$ défini dans l'exemple 2.1.2 satisfait les propriétés (A1), (A2) et (A3).*

Démonstration. La propriété (A1) est clairement vérifiée.

Vérifions la propriété (A2). Soit une suite (a^n) de $A_{(M)}$ convergeant vers un élément $a \in A_{(M)}$ et fixons $m \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\frac{|a_m^n - a_m|}{M_m C_0^m} \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{|a_j^n - a_j|}{M_j C_0^j} = q_0(a^n - a),$$

d'où $|a_m^n - a_m| \to 0$ si $n \to \infty$, ce qui suffit.

Vérifions la propriété (A3). Montrons premièrement que l'ensemble G est inclus dans $A_{(M)}$. Soit $b = (b_0, ..., b_J, 0, 0, ...) \in G$. Nous avons clairement

$$q_m(b) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{|b_j|}{M_j C_m^j} = \sup_{j\leq J} \frac{|b_j|}{M_j C_m^j} < \infty$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. Ainsi, $b \in A_{(M)}$.

Montrons deuxièmement que l'ensemble G est dense dans $A_{(M)}$. Soient $a \in A_{(M)}$ et $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\epsilon}{2}$. Soit $0 < \eta < 1$ tel que $\eta \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{2^j} < \frac{\epsilon}{2}$. Par définition de $A_{(M)}$, il existe $R > 0$ tel que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{|a_j|}{M_j} \left(\frac{2}{C_N}\right)^j < R,$$

d'où

$$\frac{|a_j|}{M_j C_N^j} < \frac{R}{2^j},$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. Ainsi, il existe J tel que

$$\frac{|a_j|}{M_j C_N^j} < \frac{\eta}{1-\eta}$$

pour tout $j \geq J$. Posons $b = (a_0, ..., a_J, 0, 0, ...) \in G$. Par définition de b, nous avons

$$\begin{aligned} q_N(a-b) &= \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{|a_j - b_j|}{M_j C_N^j} \\ &= \sup_{j\geq J} \frac{|a_j|}{M_j C_N^j} \\ &\leq \frac{\eta}{1-\eta}. \end{aligned}$$

De plus, comme (C_m) est une suite décroissante, nous obtenons $q_m(a-b) \leq \frac{\eta}{1-\eta}$ pour tout $m \leq N$. Ainsi,

$$\begin{aligned} d(a,b) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{q_m(a-b)}{1+q_m(a-b)} \\ &\leq \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{2^j}\eta + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

par définition de N et de η. L'ensemble G est donc bien dense dans $A_{(M)}$. $\square$

Définition 2.1.2. Un élément $a \in A$ appartient à l'ensemble $\mathcal{U}_A$ si, pour tout $x \in X$, il existe une suite (λ_n) de $\mathbb{N}$ telle que

(i) $\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j y_j \to x$ si $n \to \infty$

(ii) $\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j e_j \to a$ si $n \to \infty$.

Remarque 2.1.3. Dans la définition 2.1.2, nous pouvons supposer que la suite (λ_n) est strictement croissante. En effet, soient $a \in \mathcal{U}_A$ et $x \in X$. Il suffit de construire par induction une suite (λ'_n) strictement croissante telle que

$$\sum_{j=0}^{\lambda'_n} a_j y_j \in x + B_\rho\left(\frac{1}{n+1}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\lambda'_n} a_j e_j \in a + B_d\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Comme $a \in \mathcal{U}_A$, il existe $\lambda'_0 \in \mathbb{N}$ tel que souhaité.

Soit $m > 0$. Supposons qu'il existe $\lambda'_0 < \lambda'_1 < ... < \lambda'_{m-1}$ satisfaisant les deux propriétés ci-dessus et construisons λ'_m. L'ensemble

$$B \coloneqq \left(x + B_\rho\left(\frac{1}{m+1}\right)\right) \setminus \left\{\sum_{j=0}^{n} a_j y_j \mid n \leq \lambda'_{m-1}\right\}$$

est un ouvert non-vide car X ne possède par de points isolés au vu du lemme 2.1.1.

Soit $x' \in B$. Comme $a \in \mathcal{U}_A$, il existe une suite (λ_n) telle que

$$\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j y_j \to x' \text{ si } n \to \infty \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j e_j \to a \text{ si } n \to \infty.$$

Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j y_j \in B \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j e_j \in a + B_d\left(\frac{1}{m+1}\right)$$

pour tout $n > N$.

Soit $n > N$. Nous remarquons que $\lambda'_m \coloneqq \lambda_n$ convient car $\lambda_n > \lambda'_{m-1}$ par la définition de l'ensemble B.

Remarque 2.1.4. Il est clair que $\mathcal{U}_A \subset \mathcal{U} \cap A$. De plus, si A satisfait la condition (A'3) (plus forte que la condition (A3)) suivante

(A'3) L'ensemble G est inclus dans A et pour tout $a \in A$, nous avons $\sum_{j=0}^{n} a_j e_j \to a$ si $n \to \infty$

alors $\mathcal{U}_A = \mathcal{U} \cap A$.

La proposition suivante, similaire à la proposition 2.1.1, montre que la propriété d'universalité restreinte d'un point dépend uniquement des valeurs de la queue de la suite.

Proposition 2.1.4. *Soit $a \in \mathcal{U}_A$. Si $b \in G$, alors $a + b \in \mathcal{U}_A$.*

Démonstration. Soient $x \in X$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $b_j = 0$ pour tout $j > N$. Par définition de l'ensemble $\mathcal{U}_A$, il existe une suite (λ_n) strictement croissante telle que

$$\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j y_j \to x - \sum_{j=0}^{N} b_j x_j \text{ si } n \to \infty \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j e_j \to a \text{ si } n \to \infty.$$

Nous concluons en remarquant que

$$\sum_{j=0}^{\lambda_n} (a_j + b_j) y_j \to x \text{ si } n \to \infty \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\lambda_n} (a_j + b_j) e_j \to a + b \text{ si } n \to \infty.$$

□

Voyons à présent la traduction des définitions d'universalité restreinte dans le contexte des exemples 2.1.1 et 2.1.2.

Exemple 2.1.3. Soit $N \in \mathbb{N}_0$. Posons $X \coloneqq C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^N$ à valeurs réelles s'annulant en 0, muni de la topologie de convergence uniforme sur les compacts. La topologie de X est la topologie associée aux semi-normes p_m définies par

$$p_m(f) = \sup_{x \in B[m]} |f(x)|,$$

pour $f \in C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Cette topologie peut donc être définie par la distance invariante par translation

$$\rho(f, g) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{p_m(f - g)}{1 + p_m(f - g)}.$$

Définissons

$$y_0 = 0 \quad \text{et} \quad (y_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ x \to x^{b^j}) \in X$$

pour $j \in \mathbb{N}_0$, où (b^j) est une énumération des multi-indices de $\mathbb{N}^N$ telle que $b^0 = (0, ..., 0)$.

Pour finir, prenons l'ensemble A décrit dans l'exemple 2.1.1 et regardons quel est l'ensemble $\mathcal{U}_A$ associé. Comme $A = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble $\mathcal{U}_A$ est l'ensemble des $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que pour tout $h \in C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, il existe une suite (λ_n) telle que

$$\sum_{j=1}^{\lambda_n} a_j x^{b^j} \to h(x) \quad \text{dans} \quad C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}),$$

c'est à dire,

$$\sup_{x \in K} \left| \sum_{j=1}^{\lambda_n} a_j x^{b^j} - h(x) \right| \to 0 \quad \text{si } n \to \infty$$

pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$.

Exemple 2.1.4. Intéressons-nous au contexte de l'exemple 2.1.2. Considérons la suite (y_j) et l'espace X définis dans l'exemple 2.1.3 avec $N = 1$. L'ensemble $\mathcal{U}_{A_{(M)}}$, associé à un ensemble du type $A_{(M)}$ décrit dans l'exemple 2.1.2, correspond alors à l'ensemble des $a \in A_{(M)}$ tels que pour tout $h \in C_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe une suite (λ_n) telle que

$$\sup_{x \in K} \left| \sum_{j=1}^{\lambda_n} a_j x^j - h(x) \right| \to 0 \quad \text{si } n \to \infty$$

pour tout compact K de $\mathbb{R}$.

Avant de terminer cette section, nous introduisons un dernier ensemble de points universels. Celui-ci ajoute une contrainte sur les indices des suites de sommes partielles pouvant être considérées : les possibles suites (λ_n) satisfaisant les conditions de la définition 2.1.2 sont restreintes à un ensemble de sous-suites.

Définition 2.1.3. Soit μ une suite strictement croissante de naturels. Un élément $a \in A$ appartient à l'ensemble $\mathcal{U}_A^\mu$ si, pour tout $x \in X$, il existe une sous-suite (λ_n) de μ telle que

(i) $\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j y_j \to x$ si $n \to \infty$

(ii) $\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j e_j \to a$ si $n \to \infty$.

Remarque 2.1.5. Au vu de la remarque 2.1.3, la définition 2.1.2 est un cas particulier de la définition 2.1.3. En effet, nous avons $\mathcal{U}_A = \mathcal{U}_A^{(n)}$.

2.2 Existence d'un élément universel

Nous allons à présent démontrer un théorème stipulant des conditions équivalentes à l'existence d'un élément universel restreint. Similairement à la proposition 2.1.2, s'il existe un élément universel restreint, alors il en existe beaucoup (un ensemble dense). De plus, l'ensemble des éléments universels restreints est également "grand" du point de vue algébrique (il contient un sous-espace vectoriel dense privé de 0).

Nous illustrerons ensuite ce théorème dans le cas non restreint (exemple 2.1.1) et dans un cas restreint (exemple 2.1.2).

Pour conclure la section, nous examinerons finalement un corollaire de ce théorème qui, grossièrement, nous permet de changer de méthode de sommation.

En pratique, afin de prouver l'existence d'un élément universel, nous utilisons la caractérisation équivalente donnée par la condition (iii) du théorème suivant. Il est en effet plus aisé de prouver cette condition que de trouver un élément universel car pour ce faire, il suffit, pour chaque $x \in X$ et $\epsilon > 0$, de trouver des éléments $a_0, ..., a_n \in \mathbb{K}$ satisfaisant deux certaines inégalités, alors qu'un élément universel ne peut pas dépendre de x et ϵ.

Théorème 2.2.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{U}_A \neq \emptyset$.

(*ii*) *Pour tous* $p \in \mathbb{N}$, $x \in X$ *et* $\epsilon > 0$, *il existe* $n \geq p$ *et* $a_p, ..., a_n \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$\rho\left(\sum_{j=p}^{n} a_j y_j, x\right) < \epsilon \quad \textit{et} \quad d\left(\sum_{j=p}^{n} a_j e_j, 0\right) < \epsilon.$$

(*iii*) *La condition (ii) est valide pour* $p = 0$.

(*iv*) *Pour toute suite strictement croissante* μ *de naturels, l'ensemble* $\mathcal{U}_A^\mu$ *est un ensemble* G_δ *dense dans* A.

(*v*) *Pour toute suite strictement croissante* μ *de naturels, l'ensemble* $\mathcal{U}_A^\mu \cup \{0\}$ *contient un sous-espace vectoriel dense dans* A.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soient $p \in \mathbb{N}$, $x \in X$, $\epsilon > 0$ et $b \in \mathcal{U}_A$. Il existe une suite (λ_n) strictement croissante telle que

$$d\left(b, \sum_{j=0}^{\lambda_n} b_j e_j\right) = d\left(b - \sum_{j=0}^{\lambda_n} b_j e_j, 0\right) \to 0.$$

Ainsi, il existe $q \geq p$ tel que $d(c, 0) < \frac{\epsilon}{2}$, où $c := (0, ..., 0, b_q, b_{q+1}, ...)$. Par la proposition 2.1.4, $c \in \mathcal{U}_A$. Ainsi, il existe $n > q$ tel que $\rho(\sum_{j=q}^{n} b_j y_j, x) < \epsilon$ et $d(\sum_{j=q}^{n} b_j e_j, c) < \frac{\epsilon}{2}$. La condition (ii) s'obtient alors en prenant $a_j = c_j$ pour $j \in \{p, ..., n\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) C'est évident.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Fixons une suite (x_l) dense dans X. Soit μ une suite strictement croissante. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $l, s \in \mathbb{N}_0$, posons

$$\begin{aligned} E^\mu(n, l, s) &= \left\{a \in A \mid \rho(\textstyle\sum_{j=0}^{\mu_n} a_j y_j, x_l) < \dfrac{1}{s}\right\} \\ F^\mu(n, s) &= \left\{a \in A \mid d(\textstyle\sum_{j=0}^{\mu_n} a_j e_j, a) < \dfrac{1}{s}\right\} \\ H^\mu(l, s) &= \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E^\mu(n, l, s) \cap F^\mu(n, s)). \end{aligned}$$

Ces ensembles sont des ouverts de A. De plus, nous avons l'égalité

$$\mathcal{U}_A^\mu = \bigcap_{l, s \in \mathbb{N}_0} H^\mu(l, s).$$

En effet :

$\subseteq$ Cette inclusion se déduit directement de la définition de $\mathcal{U}_A^\mu$.

$\supseteq$ Soient $a \in \bigcap_{l, s \in \mathbb{N}_0} H^\mu(l, s)$ et $x \in X$. Comme (x_l) est une suite dense, il existe une suite (l_s) telle que $x_{l_s} \to x$. De plus, pour tout $s \in \mathbb{N}_0$, il existe $n_s \in \mathbb{N}$ tel que

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{\mu_{n_s}} a_j y_j, x_{l_s}\right) < \frac{1}{s} \quad \text{et} \quad d\left(\sum_{j=0}^{\mu_{n_s}} a_j e_j, a\right) < \frac{1}{s}.$$

Ainsi, nous avons
$$\sum_{j=0}^{\mu_{n_s}} a_j y_j \to x \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\mu_{n_s}} a_j e_j \to a \quad \text{si } s \to \infty.$$

Par un raisonnement similaire à la remarque 2.1.3, nous pouvons supposer que la suite (n_s) est strictement croissante. D'où la conclusion.

Afin de prouver que l'ensemble $\mathcal{U}_A^\mu$ est un ensemble G_δ dense, il suffit de montrer que $H^\mu(l,s)$ est dense dans A pour tous $l,s \in \mathbb{N}_0$. Or, comme G est dense dans A, nous pouvons encore réduire cette condition à : pour tous $l,s \in \mathbb{N}_0$, $b \in G$, et $\epsilon > 0$, il existe $a \in H^\mu(l,s)$ tel que $d(a,b) < \epsilon$.

Soient $l,s \in \mathbb{N}_0$, $b \in G$ et $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $c \in G$ tel que
$$\rho\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j y_j, x_l - \sum_{j=0}^{\infty} b_j y_j\right) < \frac{1}{s} \quad \text{et} \quad d(c,0) < \epsilon.$$

Posons $a = b + c \in G$. Nous avons l'égalité $d(a,b) = d(c,0)$. Il suffit donc de montrer que $a \in H^\mu(l,s)$ afin de compléter la preuve. Soit n tel que $a_j = 0$ pour tout $j > \mu_n$. Nous constatons que $\rho(\sum_{j=0}^{\infty} c_j y_j, x_l - \sum_{j=0}^{\infty} b_j y_j) = \rho(\sum_{j=0}^{\infty} a_j y_j, x_l) = \rho(\sum_{j=0}^{\mu_n} a_j y_j, x_l) < \frac{1}{s}$ et $d(\sum_{j=0}^{\mu_n} a_j e_j, a) = 0 < \frac{1}{s}$. Nous avons donc bien $a \in H^\mu(l,s)$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Comme A est séparable par la remarque 2.1.2, nous pouvons fixer une suite (c^l) dense dans A. Posons $\mu^0 = \mu$. Par hypothèse, il existe $a^1 \in \mathcal{U}_A^{\mu^0}$ tel que $d(a^1, c^1) < 1$. Comme $a^1 \in \mathcal{U}_A^{\mu^0}$, il existe une sous-suite μ^1 de μ^0 telle que $\sum_{j=0}^{\mu_n^1} a_j^1 y_j \to 0$ et $\sum_{j=0}^{\mu_n^1} a_j^1 e_j \to a^1$ si $n \to \infty$. Nous pouvons ainsi construire par induction des suites (μ^l) de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et (a^l) de A telles que

1. μ^l est une sous-suite de μ^{l-1}
2. $a^l \in \mathcal{U}_A^{\mu^{l-1}}$ et $d(a^l, c^l) < \dfrac{1}{l}$
3. $\sum_{j=0}^{\mu_n^l} a_j^l y_j \to 0$ et $\sum_{j=0}^{\mu_n^l} a_j^l e_j \to a^l$ si $n \to \infty$

pour tout $l \in \mathbb{N}_0$.

Posons B l'enveloppe linéaire des a^l et montrons que cet ensemble est un sous-espace vectoriel dense dans A, contenu dans $\mathcal{U}_A^\mu$. Tout d'abord, B est dense dans A. En effet, soient $a \in A$, $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2}$. Par le lemme 2.1.1, A ne possède pas de points isolés. La suite $(c^l)_{l>N}$ est donc dense dans A. Ainsi, il existe $l > N$ tel que $d(a, c^l) < \frac{\epsilon}{2}$ et nous concluons par l'inégalité triangulaire
$$\begin{aligned} d(a, a^l) &\leq d(a, c^l) + d(c^l, a^l) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{l} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Il reste à présent à montrer que $B \subset \mathcal{U}_A^{\mu} \cup \{0\}$. Soit $b \coloneqq b_1 a^1 + ... + b_m a^m \in B \setminus \{0\}$ tel que $b_m \neq 0$ et montrons que $b \in \mathcal{U}_A^{\mu}$. Soit $x \in X$. Comme $a^m \in \mathcal{U}_A^{\mu^{m-1}}$, il existe une sous-suite (λ_n) de μ^{m-1} telle que

$$\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j^m y_j \to \frac{x}{b_m} \text{ et } \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j^m e_j \to a^m.$$

De plus, comme (λ_n) est une sous-suite de μ^l pour tout $l < m$, nous avons

$$\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j^l y_j \to 0 \text{ et } \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j^l e_j \to a^l$$

pour tout $l < m$. Nous concluons en remarquant que

$$\sum_{j=0}^{\lambda_n} (b_1 a_j^1 + ... + b_m a_j^m) y_j \to b_m \frac{x}{b_m} = x$$

et

$$\sum_{j=0}^{\lambda_n} (b_1 a_j^1 + ... + b_m a_j^m) e_j \to b_1 a^1 + ... + b_m a^m = b.$$

(v) $\Rightarrow$ (i) Cela provient du fait que $\mathcal{U}_A^{(n)} = \mathcal{U}_A$. □

Remarque 2.2.1. Remarquons que l'hypothèse (iii) du théorème 2.2.1 implique automatiquement que X est séparable. En effet, montrons que l'ensemble

$$\left\{ \sum_{j=0}^{n} a'_j y_j \mid n \in \mathbb{N}, a'_j \in D \right\},$$

où $D = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q}$, est dense dans X.

Soient $x \in X$ et $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, ..., a_n \in \mathbb{K}$ tels que $\rho(\sum_{j=0}^{n} a_j y_j, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Comme D est dense dans $\mathbb{K}$, pour tout $j \in \{0, ..., n\}$, il existe une suite $(a_{j,m})_m$ de D telle que $a_{j,m} \to a_j$ si $m \to \infty$. Par continuité de la multiplication par un scalaire, $\sum_{j=0}^{n} (a_{j,m} - a_j) y_j \to 0$ si $m \to \infty$. Ainsi, si m est suffisamment grand,

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{n} (a_{j,m} - a_j) y_j, 0 \right) < \frac{\epsilon}{2}$$

et par l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} \rho\left(\sum_{j=0}^{n} a_{j,m} y_j, x \right) &< \rho\left(\sum_{j=0}^{n} (a_{j,m} - a_j) y_j, 0 \right) + \rho\left(\sum_{j=0}^{n} a_j y_j, x \right) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

pour un m suffisamment grand. L'espace X est donc bien séparable.

Illustrons premièrement le théorème 2.2.1 dans le cas non restreint avec le contexte décrit dans les exemples 2.1.1 et 2.1.3.

Théorème 2.2.2. *Soient μ une suite strictement croissante de $\mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ et (b^j) une énumération des multi-indices de $\mathbb{N}^N$ telle que $b^0 = (0,..,0)$. Il existe une suite (a_j) de $\mathbb{R}$ telle que pour toute application continue $h \in C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, il existe une sous-suite (λ_n) de μ telle que*

$$\sup_{x\in K}\left|\sum_{j=1}^{\lambda_n} a_j x^{b^j} - h(x)\right| \to 0 \quad si\ n \to \infty$$

pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$.

De plus, l'ensemble de telles suites (a_j) est un ensemble G_δ dense de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et cet ensemble uni à $\{0\}$ contient un sous-espace vectoriel dense dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. Il suffit de montrer que la condition (iii) du théorème 2.2.1 est satisfaite. Soient $h \in C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Fixons $M \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\epsilon}{2}$ et $K > \max_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} b_i^j$. S'il existe un polynôme Q tel que

$$|(x_1^2 + ... + x_N^2)^K Q(x) - h(x)| < \frac{\epsilon}{4}$$

pour tout $||x|| \leq M$, alors la condition (iii) est satisfaite. En effet, si Q est un polynôme tel que souhaité, alors $P(x) := (x_1^2 + ... + x_N^2)^K Q(x)$ est un polynôme tel que $p_m(P-h) < \frac{\epsilon}{4}$ pour tout $m \leq M$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\rho(P,h) &= \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{2^m}\frac{p_m(P-h)}{1+p_m(P-h)} + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^m}\frac{p_m(P-h)}{1+p_m(P-h)} \\
&\leq \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{2^m} p_m(P-h) + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \\
&< \frac{\epsilon}{4}\sum_{m=0}^{M} \frac{1}{2^m} + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

De plus, nous avons également l'inégalité $d(\sum_{j=0}^{\infty} a_j e_j, 0) < \epsilon$, où les a_j sont les coefficients de P. En effet, par la formule du multinôme de Newton, les termes de P sont de la forme $cx^{b^l + 2(k_1,...,k_N)}$, avec $l \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$ et $k_1 + ... + k_N = K$. Or, comme $\sum_{i=1}^{N}(b_i^l + 2k_i) \geq K$, le multi-indice $b^l + 2(k_1, ..., k_N)$ ne peut correspondre à un des $b^0, ..., b^M$ par définition de K.

Il en résulte que $a_j = 0$ pour tout $j \in \{0, ..., M\}$. Ainsi, nous obtenons bien

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j e_j, 0\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|a_j|}{1+|a_j|} \\ &= \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|a_j|}{1+|a_j|} \\ &\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Montrons à présent qu'un tel polynôme Q existe. Posons $\eta = \frac{\epsilon}{12M^{2K}}$. Etant donné que $h(0) = 0$ et que h est continu, il existe $0 < \delta < 1$ tel que $|h(x)| < \eta$ pour tout $||x|| \leq \delta$. Définissons

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{||x||}{\delta} h\left(\dfrac{\delta x}{||x||}\right) \dfrac{1}{\delta^{2K}} & \text{si } ||x|| \leq \delta \\ \\ \dfrac{h(x)}{||x||^{2K}} & \text{si } \delta < ||x|| \leq M. \end{cases}$$

L'application w est continue sur $B[M]$. En effet, les applications h et $\|\cdot\|$ étant continues sur $\mathbb{R}^N$, l'application w est clairement continue sur $B[M] \setminus \{0\}$. Elle admet de plus un prolongement continu en 0 car

$$\lim_{x \to 0} \frac{||x||}{\delta} h\left(\frac{\delta x}{||x||}\right) \frac{1}{\delta^{2K}} = 0,$$

étant donné que l'ensemble $h(B[\delta])$ est borné.

Par Stone-Weierstrass, il existe un polynôme Q tel que

$$\sup_{x \in B[M]} |Q(x) - w(x)| < \eta.$$

Montrons que le polynôme Q satisfait l'inégalité souhaitée. Soit $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $||x|| \leq \delta$. Alors,

$$\begin{aligned} |Q(x)| &< \eta + |w(x)| \\ &= \eta + \frac{||x||}{\delta} h\left(\frac{\delta x}{||x||}\right) \frac{1}{\delta^{2K}} \\ &< \eta + \frac{\eta}{\delta^{2K}} \end{aligned}$$

car $||\frac{\delta x}{||x||}|| \leq \delta$. Nous obtenons ainsi

$$|\, ||x||^{2K} Q(x) - h(x)| \leq \; ||x||^{2K} |Q(x)| + |h(x)| < \delta^{2K}\eta + 2\eta \leq \frac{\epsilon}{4}$$

car $\delta < M$ et par définition de η.

Soit $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $\delta < ||x|| \ \leq M$. Alors,

$$| \, ||x||^{2K} Q(x) - h(x)| = ||x||^{2K} |Q(x) - w(x)| \leq M^{2K} \eta < \frac{\epsilon}{4}$$

par définition de η.

Le polynôme Q satisfait donc bien l'inégalité souhaitée et la condition (iii) du théorème 2.2.1 est satisfaite. □

Nous allons deuxièmement illustrer le théorème 2.2.1 dans un cas non restreint, dans le contexte décrit dans les exemples 2.1.2 et 2.1.4. Pour cela, nous commençons par introduire une définition.

Définition 2.2.1. Soit M une suite croissante de réels tels que $M_0 = 1$. Une application $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ est ultradifférentiable de classe M de type Beurling si pour tout compact K de $\mathbb{R}$ et tout $C > 0$,

$$\sup_{j \in \mathbb{N}, x \in K} \frac{|D^j f(x)|}{j! M_j C^j} < \infty.$$

L'ensemble des fonctions ultradifférentiable de classe M de type Beurling est noté $\mathcal{E}_{(M)}$. Nous le munissons de la topologie associée aux semi-normes

$$q_{C,K}^M(f) = \sup_{j \in \mathbb{N}, x \in K} \frac{|D^j f(x)|}{j! M_j C^j}$$

où $C > 0$ et K est un compact de $\mathbb{R}$.

Si la suite M satisfait les propriétés suivantes

(H1) La suite $(\frac{M_{n+1}}{M_n})$ est croissante,

(H2) L'inégalité

$$\sup_{p,q \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{M_{p+q}}{M_p M_q} \right)^{\frac{1}{p+q}} < \infty$$

est vérifiée,

(H3) Il existe $C > 0$ tel que

$$\sum_{n \geq p} \frac{M_n}{(n+1) M_{n+1}} \leq C \frac{M_p}{M_{p+1}}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}_0$,

alors l'ensemble des polynômes est dense dans $\mathcal{E}_{(M)}$ (voir [5]). Nous avons également le résultat suivant (lemme 5.1 de [5]).

Lemme 2.2.1. *Soient M une suite satisfaisant les hypothèses (H1), (H2) et (H3), K un compact de $\mathbb{R}$ et (Ω_j) une suite d'ensembles ouverts recouvrant K. Alors, il existe des applications $\phi_j \in \mathcal{E}_{(M)}$ de support compact inclus dans Ω_j telles que*

(i) $\phi_j \geq 0$ *pour tout* $j \in \mathbb{N}$,
(ii) $\phi_j = 0$ *excepté pour un nombre fini de naturels* j,
(iii) $\sum_j \phi_j = 1$ *sur un voisinage de* K.

La suite $(n!)$ est un exemple de suite satisfaisant les propriétés (H1), (H2) et (H3).

Proposition 2.2.1. *La suite* $(n!)$ *satisfait les hypothèses (H1), (H2) et (H3).*

Démonstration. La condition (H1) est clairement satisfaite.

Montrons que la condition (H2) est satisfaite. Soient $p, q \in \mathbb{N}_0$. Nous avons

$$\left(\frac{M_{p+q}}{M_pM_q}\right)^{\frac{1}{p+q}} = {C_{p+q}^q}^{\frac{1}{p+q}}.$$

Or, par le binôme de Newton,

$$C_{p+q}^q \leq \sum_{n=0}^{p+q} C_{p+q}^n = 2^{p+q}.$$

Ainsi, ${C_{p+q}^q}^{\frac{1}{p+q}} \leq 2$, d'où la conclusion.

Montrons que la condition (H3) est satisfaite. Soit $p \in \mathbb{N}_0$. Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq p} \frac{M_n}{(n+1)M_{n+1}} &= \sum_{n\geq p} \frac{1}{(n+1)^2}\\ &\leq \sum_{n\geq p+1} \frac{1}{n(n-1)}\\ &\leq \sum_{n\geq p+1} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\\ &\leq \frac{1}{p}\\ &\leq \frac{2}{p+1} = 2\frac{M_p}{M_{p+1}},\end{aligned}$$

ce qui suffit. □

Lemme 2.2.2. *Soit* (M_n) *une suite croissante satisfaisant la propriété (H1) telle que* $M_0 = 1$. *Alors* $M_kM_l \leq M_{k+l}$ *pour tous* $k, l \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $l \in \mathbb{N}$. Si $l = 0$, alors l'inégalité est clairement vérifiée, car $M_0 = 1$. Sinon, fixons $l > 0$ et procédons par récurrence sur k. Le cas de base est clair. Passons donc à l'induction. Fixons $k > 0$, supposons que l'inégalité $M_kM_l \leq M_{k+l}$ soit vérifiée et montrons que $M_{k+1}M_l \leq M_{k+l+1}$ est satisfait. Nous avons

$$\begin{aligned}M_{k+1}M_l &\leq \frac{M_{k+2}}{M_{k+1}}M_kM_l\\ &\leq \frac{M_{k+2}}{M_{k+1}}M_{k+l}\end{aligned}$$

en appliquant successivement la propriété (H1) et l'hypothèse de récurrence. Ensuite, nous remarquons que

$$\begin{aligned}\frac{M_{k+2}}{M_{k+1}}M_{k+l} &\leq \frac{M_{k+l+1}}{M_{k+l}}M_{k+l}\\ &\leq M_{k+l+1}\end{aligned}$$

par la propriété (H1). D'où la conclusion. □

Lemme 2.2.3. *Soient $f, g \in \mathcal{E}_{(M)}$. Alors $fg \in \mathcal{E}_{(M)}$.*

Démonstration. Soient $C > 0$, $J \in \mathbb{N}$ et K un compact de $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{|D^J(fg)|}{J!M_JC^J} &= \sum_{n=0}^{J} C_J^n |D^{J-n}g| \frac{|D^n f|}{J!M_JC^J}\\ &= \sum_{n=0}^{J} \frac{|D^{J-n}g|}{(J-n)!} \frac{|D^n f|}{n!M_JC^J}\\ &\leq \sum_{n=0}^{J} \frac{|D^{J-n}g|}{(J-n)!M_{J-n}C^{J-n}} \frac{|D^n f|}{n!M_nC^n}\end{aligned}$$

par le lemme 2.2.2. Or, comme $f, g \in \mathcal{E}_{(M)}$, il existe B_1 tel que

$$\sup_K \frac{|D^n f|}{n!M_n}\left(\frac{2}{C}\right)^n \leq B_1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, et il existe B_2 tel que

$$\sup_K \frac{|D^{J-n}g|}{(J-n)!M_{J-n}C^{J-n}} \leq B_2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. En combinant ces deux dernières inégalités, nous obtenons

$$\sup_K \frac{|D^J(fg)|}{J!M_JC^J} \leq B_1B_2 \sum_{n=0}^{J} \frac{1}{2^n} \leq 2B_1B_2$$

pour tout $J \in \mathbb{N}$, ce qui suffit. □

Nous pouvons à présent finalement illustrer le théorème 2.2.1 à l'aide des exemples 2.1.2 et 2.1.4. Pour ce faire, fixons une suite croissante M telle que $M_0 = 1$ et satisfaisant les propriétés (H1), (H2) et (H3). L'ensemble $A_{(M)}$ auquel nous faisons référence dans la suite est l'ensemble défini dans l'exemple 2.1.2. Nous fixons de plus une suite (C_m) décroissant strictement vers 0. Cette suite nous permet de considérer le système dénombrable de semi-normes (q_m) également défini dans l'exemple 2.1.2.

Théorème 2.2.3. *Soit μ une suite strictement croissante de $\mathbb{N}$. Il existe une suite $(a_j) \in A_{(M)}$ telle que pour toute application continue $h \in C_0^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il existe une sous-suite (λ_n) de μ telle que*

$$\sup_{x\in K}\left|\sum_{j=1}^{\lambda_n} a_j x^j - h(x)\right| \to 0 \quad si \quad n\to\infty$$

pour tout compact K de $\mathbb{R}$. De plus, l'ensemble de telles suites (a_j) est un ensemble G_δ dense de $A_{(M)}$ et cet ensemble uni à $\{0\}$ contient un sous-espace vectoriel dense dans $A_{(M)}$.

Démonstration. L'ensemble des suites $a \in A_{(M)}$ de l'énoncé consistant en l'ensemble $\mathcal{U}^{\mu}_{A_{(M)}}$ associé à l'exemple 2.1.4, il suffit de montrer que la condition (iii) du théorème 2.2.1 est satisfaite. Montrons donc que cette condition est vérifiée. Soient $h \in C_0^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Fixons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\epsilon}{2}$. S'il existe un polynôme P tel que

$$|P(x) - h(x)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \forall\, |x| \le N, \quad d((a_j), 0) < \epsilon \ \text{ et } \ a_0 = 0,$$

où les a_j sont les coefficients de P, alors, par un raisonnement similaire au théorème 2.2.2, l'inégalité $\rho(P,h) < \epsilon$ est vérifiée, ce qui permet d'affirmer que la condition (iii) est satisfaite.

Montrons qu'un tel polynôme existe. Premièrement, par Weierstrass il existe un polynôme Q tel que

$$\sup_{B[N]} |Q - h| < \frac{\epsilon}{6}.$$

Posons $Q_0(x) = Q(x) - Q(0)$. Par l'inégalité triangulaire, nous avons

$$\begin{aligned}\sup_{B[N]} |Q_0 - h| &= \sup_{B[N]} |Q - Q(0) - h| \\ &\le \sup_{B[N]} |Q - h| + |Q(0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} \end{aligned} \tag{2.1}$$

car $|Q(0)| = |Q(0) - h(0)| < \frac{\epsilon}{6}$. Par continuité de Q_0, il existe $0 < \delta < N$ tel que $|Q_0(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ pour tout $|x| \le \delta$. Posons

$$\Omega := \left]-N-1, N+1\right[\setminus \left[-\frac{3\delta}{4}, \frac{3\delta}{4}\right].$$

Comme l'ensemble $[-N,N]\setminus]-\delta,\delta[$ est un compact inclus dans l'ouvert Ω, par le lemme 2.2.1, il existe $\phi \in \mathcal{E}_{(M)}$ de support compact inclus dans Ω tel que $\phi = 1$ sur un voisinage de $[-N,N]\setminus]-\delta,\delta[$ et $0 \le \phi \le 1$. Par le lemme 2.2.3, l'application $Q_0\phi$ appartient à $\mathcal{E}_{(M)}$. Fixons $0 < \eta < 1$ tel que $\eta \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2^j} < \frac{\epsilon}{2}$ et $\frac{\eta}{1-\eta} < \frac{\epsilon}{6}$. Comme les polynômes sont denses dans $\mathcal{E}_{(M)}$, il existe un polynôme P_0 tel que

$$\sup_{J\in\mathbb{N}, x\in B[N]} \frac{|D^J(Q_0\phi - P_0)(x)|}{C_N^J J! M_J} < \frac{\eta}{1-\eta}. \tag{2.2}$$

Posons $P(x) = P_0(x) - P_0(0)$, pour $x \in \mathbb{R}$ et montrons qu'il s'agit du polynôme recherché. Nous avons

$$\sup_{B[N]} |Q_0\phi - P| \leq |P_0(0)| + \sup_{B[N]} |Q_0\phi - P_0| < \frac{\epsilon}{3}$$

car $\sup_{B[N]} |Q_0\phi - P_0| < \frac{\eta}{1-\eta} < \frac{\epsilon}{6}$ en utilisant (2.2) avec $J = 0$. Posons $I_1 = [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$, $I_2 = [-\delta, \delta] \backslash] - \frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}[$ et $I_3 = [-N, N] \backslash] - \delta, \delta[$. Nous avons clairement $B[N] = I_1 \cup I_2 \cup I_3$. Par ailleurs,

$$\sup_{I_1} |Q_0 - P| \leq \sup_{I_1} |Q_0| + \sup_{I_1} |P| < \frac{2\epsilon}{3}$$

par définition de δ et car le fait que ϕ soit à support compact dans Ω implique que $|Q_0\phi - P| = |P|$ sur I_1. Nous avons de plus

$$\begin{aligned}
\sup_{I_2} |Q_0 - P| &\leq \sup_{I_2} |Q_0 - Q_0\phi| + \sup_{I_2} |Q_0\phi - P| \\
&< \sup_{I_2} |Q_0| + \frac{\epsilon}{3} \\
&< \frac{2\epsilon}{3},
\end{aligned}$$

par définition de I_2 et car $0 \leq \phi \leq 1$. Par ailleurs,

$$\sup_{I_3} |Q_0 - P| = \sup_{I_3} |Q_0\phi - P| < \frac{\epsilon}{3}$$

car $\phi = 1$ sur I_3. En combinant ces inégalités ainsi que (2.1), nous obtenons

$$\sup_{B[N]} |P - h| \leq \sup_{B[N]} |P - Q_0| + \sup_{B[N]} |Q_0 - h| < \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Il reste à montrer que $d((a_j), 0) < \epsilon$. Posons $p := (a_j)$. Comme ϕ est à support compact dans Ω, nous avons

$$|D^J(Q_0\phi - P_0)(0)| = |D^J P(0)| = J!|a_J|$$

pour tout $J \in \mathbb{N}$. Par (2.2), nous obtenons

$$q_N(p) = \sup_{J \in \mathbb{N}} \frac{|a_J|}{M_J C_N^J} < \frac{\eta}{1 - \eta}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
d(p, 0) &= \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2^m} \frac{q_m(p)}{1 + q_m(p)} + \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{q_m(p)}{1 + q_m(p)} \\
&< \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2^m} \eta + \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

car les q_m forment une suite d'applications décroissante.

Le polynôme P est donc bien le polynôme recherché. $\square$

Nous allons à présent démontrer un corollaire du théorème 2.2.1. Nous considérons dans ce corollaire une nouvelle suite d'applications continues (S_n) et un ensemble associé $\mathcal{U}_A^S$ plus petit que l'ensemble $\mathcal{U}_A$: ses éléments sont tels que leurs sommes partielles et leurs images par les applications S_n peuvent approcher n'importe quel élément de X. Sous certaines conditions, nous obtenons alors un résultat similaire à celui obtenu dans le théorème 2.2.1, c'est à dire, que l'existence d'un élément universel restreint implique que l'ensemble $\mathcal{U}_A^S$ est un ensemble G_δ dense contenant un sous-espace vectoriel privé de $\{0\}$.

Corollaire 2.2.1. *Soit $S_n : A \to X$ une suite d'applications continues telles que pour tout $b = (b_0, ..., b_M, 0, 0, ...) \in G$, il existe une suite (n_k) strictement croissante de naturels satisfaisant*

$$S_{n_k}(b) \to \sum_{j=0}^{\infty} b_j y_j = \sum_{j=0}^{M} b_j y_j \quad \text{si } k \to \infty.$$

Notons $\mathcal{U}_A^S$ l'ensemble des éléments $a \in A$ tels que pour tout $x \in X$, il existe une suite (λ_n) strictement croissante de naturels satisfaisant

$$\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j y_j \to x,\ S_{\lambda_n}(a) \to x \text{ et } \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j e_j \to a \quad \text{si } n \to \infty.$$

Si $\mathcal{U}_A$ est non vide, alors $\mathcal{U}_A^S$ est un ensemble G_δ dense de A.

De plus, si la suite (n_k) peut être choisie indépendamment du $a \in G$ et si chaque S_{n_k} est linéaire, alors l'ensemble $\mathcal{U}_A^S \cup \{0\}$ contient un sous-espace vectoriel dense dans A.

Démonstration. Nous allons imiter la preuve de (iii) $\Rightarrow$ (iv) du théorème 2.2.1 pour la première partie de l'énoncé. Soient (x_l) une suite dense dans X et $l, s, n \in \mathbb{N}_0$. Posons

$$\begin{aligned}
E(n,l,s) &= \left\{ a \in A \mid \rho(\textstyle\sum_{j=0}^{n} a_j y_j, x_l) < \frac{1}{s} \right\} \\
F(n,s) &= \left\{ a \in A \mid d(\textstyle\sum_{j=0}^{n} a_j e_j, a) < \frac{1}{s} \right\} \\
G(n,l,s) &= \left\{ a \in A \mid \rho(S_n(a), x_l) < \frac{1}{s} \right\} \\
H(l,s) &= \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E(n,l,s) \cap F(n,s) \cap G(n,l,s)).
\end{aligned}$$

Ces ensembles sont des ouverts de A. De plus, nous avons l'égalité

$$\mathcal{U}_A^S = \bigcap_{l,s\in\mathbb{N}_0} H(l,s)$$

par un raisonnement similaire à la preuve de (iii) $\Rightarrow$ (iv) du théorème 2.2.1. Pour montrer que l'ensemble $\mathcal{U}_A^S$ est un ensemble G_δ dense de A, il suffit donc de montrer que $H(l,s)$ est dense dans G pour tous $l, s \in \mathbb{N}_0$.

Soient $b \in G$ et $\epsilon > 0$. Par la condition (iii) du théorème 2.2.1, il existe $c \in G$ tel que

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j y_j, x_l - \sum_{j=0}^{\infty} b_j y_j\right) < \frac{1}{2s} \quad \text{et} \quad d(c,0) < \epsilon. \tag{*}$$

Posons $a = b + c \in G$. Nous avons l'égalité $d(a,b) = d(c,0)$. Il suffit donc de montrer que $a \in \mathcal{U}_A^S$ afin de compléter la première partie de la preuve. La conclusion s'obtient par un raisonnement similaire à la preuve de (iii) $\Rightarrow$ (iv) en choisissant $\mu_n \in \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ tel que $\rho(S_{\mu_n}(a), \sum_{j=0}^{\infty} a_j y_j) < \frac{1}{2s}$ et $a_j = 0$ pour tout $j > \mu_n$.

Pour prouver la seconde partie de l'énoncé, montrons d'abord que pour toute sous-suite μ de (n_k), l'ensemble

$$\mathcal{U}_A^{(\mu,S)} := \left\{ a \in A \mid \forall x \in X, \exists (\lambda_n) \text{ sous-suite de } \mu : \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j y_j \to x, S_{\lambda_n}(a) \to x \text{ et} \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j e_j \to a \right\}$$

est un ensemble G_δ dense dans A. Pour ce faire, nous procédons de la même manière que dans la preuve (iii) $\Rightarrow$ (iv) du théorème 2.2.1. Le fait que μ soit une sous-suite de (n_k) permet de conserver la convergence $S_{\mu_n}(a) \to \sum_{j=0}^{\infty} a_j y_j$ pour tout $a \in G$.

Nous agissons ensuite de façon similaire à la preuve (iv) $\Rightarrow$ (v) du théorème 2.2.1 en remplaçant $\mathcal{U}_A^{\mu}$ par $\mathcal{U}_A^{(\mu,S)}$ et en ajoutant l'hypothèse $S_{\mu_n^l}(a^l) \to 0$ si $n \to \infty$ aux trois propriétés des suites construites par induction. Nous trouvons comme dans cette preuve une suite (λ_n) qui satisfait à la définition de $\mathcal{U}_A^{(\mu,S)}$, la linéarité des S_n permettant de conclure pour la convergence

$$S_{\lambda_n}(b_1 a^1 + \ldots + b_m a^m) = b_1 S_{\lambda_n}(a^1) + \ldots + b_m S_{\lambda_n}(a^m) \to x.$$

□

Avant de clôturer cette section, nous allons illustrer ce corollaire dans le cas non restreint à l'aide des exemples 2.1.1 et 2.1.3. Définissons au préalable les applications sommes partielles

$$S_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}),\ a \to \left(x \to \sum_{j=1}^{n} a_j x^{b^j}\right)$$

et les applications moyenne de Césaro

$$\sigma_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}),\ a \to \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k(a)$$

pour $n \in \mathbb{N}_0$.

Ces applications sont clairement linéaires et continues. De plus, l'ensemble $\mathcal{U}_A^{\sigma}$ du corollaire 2.2.1 est l'ensemble des $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que pour tout $h \in C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, il existe une suite (λ_n) strictement croissante de naturels satisfaisant

$$\sup_{x \in K} \left| \sum_{j=1}^{\lambda_n} a_j x^{b^j} - h(x) \right| \to 0 \quad \text{et} \quad \sup_{x \in K} |\sigma_{\lambda_n}(a)(x) - h(x)| \to 0$$

pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 2.2.4. *Il existe une suite (a_j) de $\mathbb{R}$ telle que pour toute application $h \in C_0^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, il existe une suite (λ_n) satisfaisant*

$$\sup_{x\in K}\left|\sum_{j=1}^{\lambda_n} a_j x^{b^j} - h(x)\right| \to 0 \qquad et \qquad \sup_{x\in K}|\sigma_{\lambda_n}(a)(x) - h(x)| \to 0$$

pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$.

De plus, l'ensemble de telles suites (a_j) est un ensemble G_δ dense de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et cet ensemble uni à $\{0\}$ contient un sous-espace vectoriel dense dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. Il s'agit d'une simple application du corollaire 2.2.1. Montrons donc que ses hypothèses sont vérifiées. Pour ce faire, prouvons que pour tout $a = (a_0, ..., a_M, 0, 0, ...) \in G$, la suite $(\sigma_n(a))$ converge uniformément sur tout compact vers $\sum_{j=1}^{M} a_j x^{b^j}$. Fixons $a = (a_0, ..., a_M, 0, 0, ...) \in G$. Nous avons clairement

$$S_k(a)(x) = S_M(a)(x) = \sum_{j=1}^{M} a_j x^{b^j}$$

pour tous $x \in \mathbb{R}^N$ et $k \geq M$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in K}|\sigma_n(a)(x) - S_M(a)(x)| &= \sup_{x\in K}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M} S_k(a)(x) + \frac{(n-M)}{n}S_M(a)(x) - S_M(a)(x)\right| \\
&= \frac{1}{n}\sup_{x\in K}\left|\sum_{k=1}^{M} S_k(a)(x) - MS_M(a)(x)\right| \\
&= \frac{1}{n}c
\end{aligned}$$

pour tout $n > M$, où c est une constante ne dépendant pas de n. Ainsi,

$$\sup_{x\in K}\left|\sigma_n(a)(x) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^{b^j}\right| \to 0$$

si $n \to \infty$.

La suite $(n_k) := (n)$ satisfait donc la condition du corollaire 2.2.1 et est de plus choisie indépendamment du $a \in G$. Pour finir, l'ensemble $\mathcal{U}_A$ est non vide par le théorème 2.2.2. $\square$

Chapitre 3

Densités supérieures et inférieures

Dans le chapitre 1, nous avons vu que si $N(U,V)$ est non vide pour tous ouverts U,V, alors il contient une infinité d'éléments. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la "taille" de ces ensembles.

Comme dans [11], nous commencerons par introduire des notions de densité dans $\mathbb{N}_0$, puis nous intéresserons au concept d'universalité supérieure. Nous verrons finalement que le concept d'universalité inférieure (que nous aurions pu introduire de manière similaire à l'aide de la densité inférieure) est en fait obsolète. Pour cela, nous nous plaçons dans le même contexte que celui du chapitre 2.

3.1 Densités dans $\mathbb{N}_0$ et premières propriétés

Nous commençons par introduire les notions de densité supérieure et de densité inférieure pour des sous-ensembles de $\mathbb{N}_0$.

Définition 3.1.1. Soit $\lambda \subset \mathbb{N}_0$. La densité supérieure de λ est définie par

$$\overline{D}(\lambda) = \limsup_{N\to\infty} \frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda\}|}{N}$$

et la densité inférieure de λ par

$$\underline{D}(\lambda) = \liminf_{N\to\infty} \frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda\}|}{N}.$$

Si ces deux limites existent et sont égales, la densité de λ est définie par

$$D(\lambda) = \lim_{N\to\infty} \frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda\}|}{N}.$$

Remarque 3.1.1. Pour tout $\lambda \subset \mathbb{N}_0$, nous avons $0 \leq \overline{D}(\lambda) \leq 1$ et $0 \leq \underline{D}(\lambda) \leq 1$. De plus, si $\lambda \subset \lambda' \subset \mathbb{N}_0$, nous avons $\overline{D}(\lambda) \leq \overline{D}(\lambda')$ et $\underline{D}(\lambda) \leq \underline{D}(\lambda')$.

Exemple 3.1.1. Un exemple trivial de sous-ensemble de densité nulle est n'importe quel sous-ensemble fini.

Un autre exemple moins trivial de sous-ensemble de densité nulle est $\lambda := \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. En effet

$$\frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda\}|}{N} = \frac{\lfloor \sqrt{N} \rfloor}{N} \to 0$$

si $N \to \infty$.

Exemple 3.1.2. Il existe bien évidemment des ensembles de densités différentes de 0 et de 1. Examinons par exemple la densité des ensembles

$$A_k := \{2^k m \mid m \in 2\,\mathbb{N}+1\} = \{2^{k+1}m + 2^k \mid m \in \mathbb{N}\},$$

pour $k \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\lim_N \frac{|\{n \leq N \mid n \in A_k\}|}{N} = \lim_N \frac{\lfloor \frac{N-2^k}{2^{k+1}} \rfloor}{N} = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Ainsi $D(A_k) = \frac{1}{2^{k+1}}$.

Exemple 3.1.3. Il existe également des ensembles n'admettant pas de densité. L'ensemble des entiers dont la représentation en base binaire comporte un nombre impair de chiffres

$$\lambda := \bigcup_{m=0}^{\infty} \{2^{2m}, ..., 2^{2m+1} - 1\}$$

admet comme densité supérieure $\frac{2}{3}$ et comme densité inférieure $\frac{1}{3}$. En effet,

$$\begin{aligned}
\overline{D}(\lambda) &= \lim_{M\to\infty} \sup_{N \geq 2^{2M+1}-1} \frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda\}|}{N} \\
&= \lim_{M\to\infty} \frac{|\{n \leq 2^{2M+1} - 1 \mid n \in \lambda\}|}{2^{2M+1} - 1} \\
&= \lim_{M\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{M} 2^{2n}}{2^{2M+1} - 1} \\
&= \lim_{M\to\infty} \frac{2^{2M+2} - 1}{3(2^{2M+1} - 1)} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\underline{D}(\lambda) &= \lim_{M\to\infty} \inf_{N\geq 2^{2M}-1} \frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda\}|}{N} \\
&= \lim_{M\to\infty} \frac{|\{n \leq 2^{2M}-1 \mid n \in \lambda\}|}{2^{2M}-1} \\
&= \lim_{M\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{M-1} 2^{2n}}{2^{2M}-1} \\
&= \lim_{M\to\infty} \frac{2^{2M}-1}{3(2^{2M}-1)} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Proposition 3.1.1. *Pour tout $\lambda \subset \mathbb{N}_0$, nous avons*

$$\underline{D}(\lambda) = 1 - \overline{D}(\mathbb{N}_0 \setminus \lambda).$$

Démonstration. Soient $\lambda \subset \mathbb{N}_0$ et $N \in \mathbb{N}_0$. Nous avons clairement

$$\frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda\}|}{N} = 1 - \frac{|\{n \leq N \mid n \in \mathbb{N} \setminus \lambda\}|}{N}.$$

Nous en tirons que si $N_0 \in \mathbb{N}_0$, alors

$$\inf_{N\geq N_0} \frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda\}|}{N} \leq 1 - \frac{|\{n \leq N' \mid n \in \mathbb{N}_0 \setminus \lambda\}|}{N'}$$

et

$$\frac{|\{n \leq N' \mid n \in \lambda\}|}{N'} \geq 1 - \sup_{N\geq N_0} \frac{|\{n \leq N \mid n \in \mathbb{N}_0 \setminus \lambda\}|}{N}$$

pour tout $N' \geq N_0$. Ces deux inégalités impliquent

$$\inf_{N\geq N_0} \frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda\}|}{N} = 1 - \sup_{N\geq N_0} \frac{|\{n \leq N \mid n \in \mathbb{N}_0 \setminus \lambda\}|}{N},$$

ce qui permet de conclure. □

La proposition 3.1.1 nous permet de construire des ensembles de densité égale à 1 en tant que complémentaires de sous-ensemble de densité nulle. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}_0$ privé d'un sous-ensemble fini et l'ensemble $\mathbb{N}_0$ privé de l'ensemble des carrés sont des ensembles de densité égale à 1.

Définition 3.1.2. Soient $\lambda \subset \mu \subset \mathbb{N}_0$. La densité supérieur de λ par rapport à μ est définie par

$$\overline{D}_\mu(\lambda) = \limsup_{N\to\infty} \frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda\}|}{|\{n \leq N \mid n \in \mu\}|}.$$

Remarque 3.1.2. Il est clair que pour tout $\lambda \subset \mu \subset \mathbb{N}_0$, nous avons $0 \leq \overline{D}_\mu(\lambda) \leq 1$. De plus, si $\lambda' \subset \lambda \subset \mu \subset \mathbb{N}_0$, alors $\overline{D}_\mu(\lambda') \leq \overline{D}_\mu(\lambda)$.

Remarque 3.1.3. Tout sous-ensemble infini $\lambda \subset \mathbb{N}_0$ peut être identifié à une suite strictement croissante et celle-ci est définie par la récurrence

$$\lambda_1 = \inf \lambda, \quad \lambda_{n+1} = \inf(\lambda \setminus \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}).$$

Au vu de la définition de la suite, il est clair que si les ensembles $\lambda \subset \mu \subset \mathbb{N}_0$ sont des ensembles infinis, alors λ est une sous-suite de μ.

Lorsque nous manipulerons des sous-ensembles infinis, nous utiliserons ces notations.

Proposition 3.1.2. *Soient $\lambda \subset \mu \subset \mathbb{N}_0$ des ensembles infinis. Alors $\overline{D}(\lambda) = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n}$ et $\overline{D}_\mu(\lambda) = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\{m \leq \lambda_n | m \in \mu\}|}$.*

Démonstration. Montrons la première égalité. Comme $|\{m \leq \lambda_n \mid m \in \lambda\}| = n$, il suffit de prouver que

$$\sup_{n\geq N} \frac{|\{m \leq \lambda_n \mid m \in \lambda\}|}{\lambda_n} = \sup_{k\geq \lambda_N} \frac{|\{m \leq k \mid m \in \lambda\}|}{k}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}_0$, par définition de $\overline{D}(\lambda)$. Soit $N \in \mathbb{N}_0$. Comme (λ_n) est une suite strictement croissante, nous avons l'inégalité

$$\sup_{n\geq N} \frac{|\{m \leq \lambda_n \mid m \in \lambda\}|}{\lambda_n} \leq \sup_{k\geq \lambda_N} \frac{|\{m \leq k \mid m \in \lambda\}|}{k}.$$

En effet, si $n \geq N$, alors $\lambda_n \geq \lambda_N$ et

$$\frac{|\{m \leq \lambda_n \mid m \in \lambda\}|}{\lambda_n} \leq \sup_{k\geq \lambda_N} \frac{|\{m \leq k \mid m \in \lambda\}|}{k}.$$

Montrons donc l'autre inégalité. Soient $k \geq \lambda_N$ et n le plus grand naturel m tel que $\lambda_m \leq k$. Nous avons

$$\frac{|\{m \leq k \mid m \in \lambda\}|}{k} = \frac{n}{k} \leq \frac{n}{\lambda_n} \leq \sup_{n'\geq N} \frac{|\{m \leq \lambda_{n'} \mid m \in \lambda\}|}{\lambda_{n'}}$$

car $n \geq N$.

Au final, nous obtenons bien

$$\sup_{k\geq \lambda_N} \frac{|\{m \leq k \mid m \in \lambda\}|}{k} \leq \sup_{n\geq N} \frac{|\{m \leq \lambda_n \mid m \in \lambda\}|}{\lambda_n},$$

ce qui permet de conclure.

Un raisonnement similaire nous permet de prouver que

$$\sup_{n\geq N} \frac{|\{m \leq \lambda_n \mid m \in \lambda\}|}{|\{m \leq \lambda_n \mid m \in \mu\}|} = \sup_{k\geq \lambda_N} \frac{|\{m \leq k \mid m \in \lambda\}|}{|\{m \leq k \mid m \in \mu\}|},$$

d'où la deuxième égalité. □

Proposition 3.1.3. *Soient $\lambda \subset \mu \subset \mathbb{N}_0$ des ensembles infinis et $n_1, ..., n_k \in \lambda$. Si $\lambda' := \lambda \setminus \{n_1, ..., n_k\}$, alors $\overline{D}(\lambda) = \overline{D}(\lambda')$ et $\overline{D}_\mu(\lambda) = \overline{D}_\mu(\lambda')$.*

Démonstration. Nous avons déjà $\overline{D}(\lambda') \leq \overline{D}(\lambda)$ et $\overline{D}_\mu(\lambda') \leq \overline{D}_\mu(\lambda)$. De plus,

$$|\{m \leq N \mid m \in \lambda'\}| = |\{m \leq N \mid m \in \lambda\}| - k$$

pour tout $N \geq \max_{i=1}^k n_i$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overline{D}(\lambda) &= \limsup_{N\to\infty} \frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda'\}| + k}{N} \\
&\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda'\}|}{N} + \limsup_{N\to\infty} \frac{k}{N} \\
&= \overline{D}(\lambda').
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\overline{D}_\mu(\lambda) &= \limsup_{N} \frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda'\}| + k}{|\{n \leq N \mid n \in \mu\}|} \\
&\leq \limsup_{N} \frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda'\}|}{|\{n \leq N \mid n \in \mu\}|} + \limsup_{N} \frac{k}{|\{n \leq N \mid n \in \mu\}|} \\
&= \overline{D}_\mu(\lambda')
\end{aligned}$$

car μ est infini. □

3.2 Universalité supérieure

Nous allons à présent définir la notion d'universalité supérieure.

Définition 3.2.1. Soit $\mu \subset \mathbb{N}_0$ un ensemble infini tel que $\overline{D}(\mu) = c \in [0, 1]$. Un élément $a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ appartient à $\widetilde{\mathcal{U}}^{\mu}$ si pour tout $x \in X$, il existe une sous-suite λ de μ telle que
(i) $\overline{D}(\lambda) = c$,
(ii) $\overline{D}_\mu(\lambda) = 1$,
(iii) $\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j y_j \to x$ si $n \to \infty$.

Un élément est donc universel supérieurement si, comme précédemment, il peut approcher n'importe quel élément de X. Cependant, les suites permettant d'approcher ses éléments doivent avoir une grande densité supérieure (elles doivent avoir la même densité supérieure que la suite μ dont nous imposons qu'elles soient des sous-suites).

Nous allons maintenant introduire la notion d'universalité supérieure restreinte, similairement au chapitre 2.

Définition 3.2.2. Soit $\mu \subset \mathbb{N}_0$ un ensemble infini tel que $\overline{D}(\mu) = c$. Un élément $a \in A$ appartient à $\widetilde{\mathcal{U}}^{\mu}_A$ si pour tout $x \in X$, il existe une sous-suite λ de μ telle que

(i) $\overline{D}(\lambda) = c$,
(ii) $\overline{D}_\mu(\lambda) = 1$,
(iii) $\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j y_j \to x$ si $n \to \infty$,
(iv) $\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j e_j \to a$ si $n \to \infty$.

Si $c = 0$ dans la définition 3.2.2, nous avons en fait automatiquement l'égalité du point (i). En effet, $\overline{D}(\lambda) \leq \overline{D}(\mu) = 0$.

Par ailleurs, la condition (ii) de la définition 3.2.2 est également obsolète dans le cas où la densité supérieure de la suite μ est non nulle. Intuitivement, si $\lambda \subset \mu$ a la même densité supérieure que μ, alors λ est "très grand" par rapport à μ. La proposition suivante montre formellement cette affirmation.

Proposition 3.2.1. *Soit $\mu \subset \mathbb{N}_0$ un ensemble infini tel que $\overline{D}(\mu) = c > 0$. Si λ est une sous-suite de μ telle que $\overline{D}(\lambda) = c$, alors $\overline{D}_\mu(\lambda) = 1$.*

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons que $\overline{D}_\mu(\lambda) < 1$. Alors pour un $\overline{D}_\mu(\lambda) < \delta < 1$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\sup_{N \geq N_0} \frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda\}|}{|\{n \leq N \mid n \in \mu\}|} \leq \delta.$$

Ainsi

$$\frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda\}|}{N} \leq \delta \frac{|\{n \leq N \mid n \in \mu\}|}{N}$$

pour tout $N \geq N_0$. D'où

$$\overline{D}(\lambda) = c \leq \delta \overline{D}(\mu) = \delta c,$$

ce qui est absurde. □

Théorème 3.2.1. *Soit $\mu \subset \mathbb{N}_0$ un ensemble infini tel que $\overline{D}(\mu) = c > 0$. Si $\mathcal{U}_A$ est non vide, alors $\widetilde{\mathcal{U}}_A^\mu$ est un ensemble G_δ dense de A et $\widetilde{\mathcal{U}}_A^\mu \cup \{0\}$ contient un sous-espace vectoriel dense dans A.*

Démonstration. Fixons une suite (x_l) dense dans X. Pour $k, l, s \in \mathbb{N}_0$, définissons

$$U(k,l,s) = \left\{ a \in A \mid \rho\left(\sum_{j=0}^{k} a_j y_j, x_l\right) < \frac{1}{s} \text{ et } d\left(\sum_{j=0}^{k} a_j e_j, a\right) < \frac{1}{s} \right\}.$$

Ensuite, pour $n, l, s, p \in \mathbb{N}_0$, définissons

$$E(n,l,s,p) = \bigcup_{\{\lambda_1 < \ldots < \lambda_n\} \in \Lambda_{n,p,s}} \bigcap_{k=1}^{n} U(\lambda_k, l, s),$$

où $\Lambda_{n,p,s} = \{\{\lambda_1 < \ldots < \lambda_n\} \subset \mu \mid \lambda_1 > p \text{ et } \frac{n}{\lambda_n} > c - \frac{1}{s}\}$. Nous avons

$$\widetilde{\mathcal{U}}_A^\mu = \bigcap_{p,l,s \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} E(n,l,s,p). \tag{3.1}$$

En effet :

$\subseteq$ Soient $a \in \widetilde{\mathcal{U}}_A^{\mu}$ et $p, l, s \in \mathbb{N}_0$. Il existe une sous-suite λ' de μ telle que $\overline{D}(\lambda') = c$, $\sum_{j=0}^{\lambda'_k} a_j y_j \to x_l$ et $\sum_{j=0}^{\lambda'_k} a_j e_j \to a$. Ainsi, il existe N tel que

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{\lambda'_k} a_j y_j, x_l\right) < \frac{1}{s}$$

$$d\left(\sum_{j=0}^{\lambda'_k} a_j e_j, a\right) < \frac{1}{s}$$

$$\lambda'_k > p$$

pour tout $k > N$. Notons $\lambda = \lambda' \setminus \{\lambda'_1, ..., \lambda'_N\}$ et montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $\frac{n}{\lambda_n} > c - \frac{1}{s}$. Procédons par l'absurde et supposons que $\frac{n}{\lambda_n} \leq c - \frac{1}{s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Ainsi, nous obtenons

$$\limsup \frac{n}{\lambda_n} \leq c - \frac{1}{s}.$$

Or, par la proposition 3.1.3, nous avons $c = \overline{D}(\lambda') = \overline{D}(\lambda)$. Donc, par la proposition 3.1.2, nous obtenons $\limsup \frac{n}{\lambda_n} = c$, ce qui est absurde.

Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $\frac{n}{\lambda_n} > c - \frac{1}{s}$. La suite finie $(\lambda_k)_{k=1}^n \in \Lambda_{n,p,s}$ et est telle que

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{\lambda_k} a_j y_j, x_l\right) < \frac{1}{s} \quad \text{et} \quad d\left(\sum_{j=0}^{\lambda_k} a_j e_j, a\right) < \frac{1}{s}$$

pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. Ce qui permet de conclure.

$\supseteq$ Soient $a \in \cap_{p,l,s \in \mathbb{N}_0} \cup_{n \in \mathbb{N}_0} E(n, l, s, p)$ et $x \in X$. Il existe une suite strictement croissante (l_m) telle que $x_{l_m} \to x$ car la suite (x_l) est dense et l'espace X n'a pas de points isolés.

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}_0$ tel que $a \in E(n_1, l_1, l_1, 1)$, c'est à dire, il existe $\{\lambda_1^{(1)} < ... < \lambda_{n_1}^{(1)}\} \subset \mu$ tel que

$$\rho(\textstyle\sum_{j=0}^{\lambda_k^{(1)}} a_j y_j, x_{l_1}) < \displaystyle\frac{1}{l_1}, \quad d(\textstyle\sum_{j=0}^{\lambda_k^{(1)}} a_j e_j, a) < \displaystyle\frac{1}{l_1},$$

$$\frac{n_1}{\lambda_{n_1}^{(1)}} > c - \frac{1}{l_1} \quad \text{et} \quad \lambda_1^{(1)} > 1$$

pour tout $1 \leq k \leq n_1$.

Il existe ensuite $n_2 \in \mathbb{N}_0$ tel que $a \in E(n_2, l_2, l_2, \lambda_{n_1}^{(1)})$, c'est à dire, il existe

$\{\lambda_1^{(2)} < ... < \lambda_{n_2}^{(2)}\} \subset \mu$ tel que

$$\rho(\textstyle\sum_{j=0}^{\lambda_k^{(2)}} a_j y_j, x_{l_2}) < \frac{1}{l_2}, \quad d(\textstyle\sum_{j=0}^{\lambda_k^{(2)}} a_j e_j, a) < \frac{1}{l_2},$$

$$\frac{n_2}{\lambda_{n_2}^{(2)}} > c - \frac{1}{l_2} \quad \text{et} \quad \lambda_1^{(2)} > \lambda_{n_1}^{(1)}$$

pour tout $1 \leq k \leq n_2$.

En procédant par induction, nous construisons une suite d'ensembles $B_m = \{\lambda_1^{(m)} < ... < \lambda_{n_m}^{(m)}\} \subset \mu$ tels que

$$\rho(\textstyle\sum_{j=0}^{\lambda_k^{(m)}} a_j y_j, x_{l_m}) < \frac{1}{l_m}, \quad d(\textstyle\sum_{j=0}^{\lambda_k^{(m)}} a_j e_j, a) < \frac{1}{l_m},$$

$$\frac{n_m}{\lambda_{n_m}^{(m)}} > c - \frac{1}{l_m} \quad \text{et} \quad \lambda_1^{(m)} > \lambda_{n_{m-1}}^{(m-1)}$$

pour tout $1 \leq k \leq n_m$ et tout $m \in \mathbb{N}_0$.

Posons $\lambda = \cup_{m \in \mathbb{N}} B_m$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, nous avons $\lambda_k = \lambda_{k-n_1-...-n_{m_k-1}}^{(m_k)}$, où m_k est le plus grand naturel m tel que $k > n_1 + ... + n_{m-1}$. Ainsi

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{\lambda_k} a_j y_j, x_{l_{m_k}}\right) < \frac{1}{l_{m_k}} \quad \text{et} \quad d\left(\sum_{j=0}^{\lambda_k} a_j e_j, a\right) < \frac{1}{l_{m_k}}$$

pour tout $k > n_1 + ... + n_{m-1}$ et tout $m \in \mathbb{N}_0$. Comme $m_k \nearrow \infty$ si $k \to \infty$, nous obtenons $\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_k} a_j y_j, x) \to 0$ et $d(\sum_{j=0}^{\lambda_k} a_j e_j, a) \to 0$ si $k \to \infty$.

Montrons que $\overline{D}(\lambda) = c$. Comme λ est une sous-suite de μ, nous avons $\overline{D}(\lambda) \leq c$. De plus,

$$c - \frac{1}{l_M} < \frac{n_M}{\lambda_{n_M}^{(M)}} \leq \frac{n_1 + ... + n_M}{\lambda_{n_1+...+n_M}} \leq \sup_{m \geq \sum_{i=1}^M n_i} \frac{m}{\lambda_m}.$$

Ainsi, par la proposition 3.1.2, nous avons $c \leq \overline{D}(\lambda)$. Nous obtenons donc bien $\overline{D}(\lambda) = c$. Or, comme par hypothèse $c > 0$, la proposition 3.2.1 permet de prouver que $a \in \widetilde{\mathcal{U}}_A^\mu$.

Montrons à présent que l'ensemble $\widetilde{\mathcal{U}}_A^\mu$ est un ensemble G_δ dense. Au vu de l'égalité (3.1), il suffit de prouver que les ensembles $\cup_{n \in \mathbb{N}_0} E(n, l, s, p)$ sont des ouverts denses dans A.

Soient $n, l, p, s \in \mathbb{N}_0$. L'ensemble $\cup_{n \in \mathbb{N}_0} E(n, l, s, p)$ est ouvert, car les ensembles $U(k, l, s)$ sont ouverts pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Montrons qu'il est dense dans A. Pour ce faire, il suffit de prouver que $\cup_{n \in \mathbb{N}_0} E(n, l, s, p)$ est dense dans G. Soient $b \in G$, $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $b_j = 0$ pour tout $j > m$ et $\epsilon < \frac{1}{s}$. Par le théorème 2.2.1, il existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ et $a'_0, ..., a'_{n_0} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{n_0} a'_j y_j, x_l - \sum_{j=0}^{m} b_j y_j\right) < \epsilon \quad \text{et} \quad d\left(\sum_{j=0}^{n_0} a'_j e_j, 0\right) < \epsilon.$$

Posons $a = (a'_0, ..., a'_{n_0}, 0, ...) + b \in G$. Comme $\overline{D}(\mu) = c$, il existe $\{\lambda_1 < ... < \lambda_n\} \subset \mu$ tel que $\lambda_1 > \max(n_0, p, m)$ et $\frac{n}{\lambda_n} > c - \frac{1}{s}$, par un raisonnement identique à celui de l'inclusion $\subseteq$ démontrée précédemment.

Ainsi

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{\lambda_k} a_j y_j, x_l\right) = \rho\left(\sum_{j=0}^{n_0} a'_j y_j, x_l - \sum_{j=0}^{m} b_j y_j\right) < \epsilon < \frac{1}{s}$$

et

$$d\left(\sum_{j=0}^{\lambda_k} a_j e_j, a\right) = 0 < \frac{1}{s}$$

pour tout $1 \leq k \leq n$. Ainsi $a \in \cup_{n \in \mathbb{N}_0} E(n, l, p, s)$. De plus, $d(a, b) = d(\sum_{j=0}^{n_0} a'_j e_j, 0) < \epsilon$ et l'ensemble $\widetilde{\mathcal{U}}_A^{\mu}$ est bien un ensemble G_δ dense de A.

Montrons à présent que $\widetilde{\mathcal{U}}_A^{\mu} \cup \{0\}$ contient un sous-espace vectoriel dense. Soit (c^l) une suite dense dans A et posons $\mu^0 = \mu$. Comme les ensembles $\widetilde{\mathcal{U}}_A^{\nu}$ sont denses dans A pour toute suite ν strictement croissante, nous pouvons construire par induction des suites (μ^l) de $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}$ et (a^l) de A telles que

1. μ^l est une sous-suite de μ^{l-1}
2. $\overline{D}(\mu^l) = c$
3. $a^l \in \widetilde{\mathcal{U}}_A^{\mu^{l-1}}$ et $d(a^l, c^l) < \dfrac{1}{l}$
4. $\sum_{j=0}^{\mu_n^l} a_j^l y_j \to 0$ et $\sum_{j=0}^{\mu_n^l} a_j^l e_j \to a^l$

pour tout $l \in \mathbb{N}_0$.

Soit B l'enveloppe linéaire des éléments a^l. L'ensemble B est dense dans A, étant donné l'inégalité $d(a^l, c^l) < \frac{1}{l}$. Il reste donc à montrer que $B \subset \widetilde{\mathcal{U}}_A^{\mu} \cup \{0\}$. Soit $b := b_1 a^1 + ... + b_m a^m \in B \setminus \{0\}$ tel que $b_m \neq 0$.

Soit $x \in X$. Comme $a^m \in \widetilde{\mathcal{U}}_A^{\mu^{m-1}}$, il existe une sous suite λ de μ^{m-1} telle que $\overline{D}(\lambda) = c$, $\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j^m y_j \to \frac{x}{b_m}$ et $\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j^m e_j \to a^m$ si $n \to \infty$. Comme λ est une sous-suite de μ^l pour tout $l < m$, nous obtenons

$$\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j^l y_j \to 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j^l e_j \to a^l$$

pour tout $l < m$. De plus, comme $c > 0$, la proposition 3.2.1 implique que $\overline{D}_\mu(\lambda) = 1$, ce qui suffit pour prouver que $b \in \widetilde{\mathcal{U}}_A^{\mu}$.

$\square$

Il est clair que $\mathcal{U}_A^{\mu} \subset \widetilde{\mathcal{U}}_A^{\mu}$ pour toute suite μ strictement croissante. Mais en toute généralité, nous avons $\mathcal{U}_A^{\mu} \neq \widetilde{\mathcal{U}}_A^{\mu}$. Nous allons montrer via un exemple que $\mathcal{U}_A^{(n)}$ n'est pas toujours égal à $\widetilde{\mathcal{U}}_A^{(n)}$.

Exemple 3.2.1. Posons $X = \mathbb{R}$, $y_j = 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $A = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie associée à la distance invariante par translation $d(a, b) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|a_j - b_j|}{1+|a_j - b_j|}$.

Les ensembles $A_k = \{2^k m \mid m \in 2\,\mathbb{N}+1\} = \{2^{k+1}m + 2^k \mid m \in \mathbb{N}\}$, $k \in \mathbb{N}$, forment une partition de $\mathbb{N}_0$. Nous avons de plus vu dans l'exemple 3.2.1 que $D(A_k) = \frac{1}{2^{k+1}}$.

Construisons un élément (a_j) de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $(a_j) \in \mathcal{U}_A^{(n)} \setminus \widetilde{\mathcal{U}}_A^{(n)}$. Fixons (r_k) une énumération de $\mathbb{Q}$. Comme les A_k forment une partition de $\mathbb{N}_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe un et un seul $k_n \in \mathbb{N}$ tel que $n \in A_{k_n}$. Posons $t_n = r_{k_n}$ pour $n \in \mathbb{N}_0$ et $t_0 = 0$.

Montrons que la suite (a_j), définie par $a_0 = t_0 = 0$ et $a_j = t_j - t_{j-1}$ pour $j \in \mathbb{N}_0$, appartient à $\mathcal{U}_A^{(n)}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y_j = t_n - t_0 = t_n.$$

Or, comme $\{t_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$, il existe une suite λ strictement croissante telle que $t_{\lambda_n} \to x$. D'où, $a \in \mathcal{U}_A^{(n)}$.

Montrons à présent que $(a_j) \notin \widetilde{\mathcal{U}}_A^{(n)}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et λ une suite strictement croissante telle que $\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j y_j = t_{\lambda_n} \to x$. Fixons $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_{k_0} \neq x$. Il existe alors $J \in \mathbb{N}$ tel que $(\lambda_j)_{j \geq J} \subset \mathbb{N} \setminus A_{k_0}$. En effet, si λ contient une infinité d'élément appartenant à A_{k_0}, alors il existe une sous-suite $\lambda' \subset A_{k_0}$ de λ. Or, dans ce cas, la suite $t_{\lambda'_n} = r_{k_0}$ ne peut converger vers x, ce qui est absurde. Nous avons donc

$$\overline{D}_{(n)}(\lambda) = \overline{D}(\lambda) = \overline{D}(\{\lambda_j \mid j \geq J\}) \leq \overline{D}(\mathbb{N} \setminus A_{k_0})$$

par la proposition 3.1.3. Or

$$\overline{D}(\mathbb{N} \setminus A_{k_0}) = 1 - \underline{D}(A_{k_0}) = 1 - D(A_{k_0}) = 1 - \frac{1}{2^{k+1}} < 1.$$

par la proposition 3.1.1. Ainsi, $\overline{D}_{(n)}(\lambda) < 1$ et a ne peut appartenir à $\widetilde{\mathcal{U}}_A^{(n)}$.

Nous avons donc bien $\mathcal{U}_A^{(n)} \subsetneq \widetilde{\mathcal{U}}_A^{(n)}$.

3.3 Densité inférieure

Nous pourrions essayer de nous intéresser à la notion d'universalité inférieure. La proposition suivante nous montre cependant que ce concept n'est pas très intéressant.

Proposition 3.3.1. *L'ensemble*

$$B := \left\{ a \in \mathcal{U} \mid \forall\, x \in X,\ \exists\, \lambda \subset \mathbb{N} \text{ infini} : \underline{D}(\lambda) > 0 \text{ et } \sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j y_j \to x \text{ si } n \to \infty \right\}$$

est vide.

Démonstration. Procédons par l'absurde. Soit $a \in B$. Pour $n \in \mathbb{N}_0$, posons

$$X_n = \left\{ x \in X \mid \exists\ \lambda_x \subset \mathbb{N} \text{ infini} : \underline{D}(\lambda_x) \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\lambda_{x,k}} a_j y_j \to x \ \text{ si } k \to \infty \right\}$$

Par définition de B, nous avons $X = \cup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n$. Ainsi, comme X est non-dénombrable, il existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que X_{n_0} est non-dénombrable.

Soient $x_1 \neq x_2 \in X$. Alors, l'ensemble $\lambda_{x_1} \cap \lambda_{x_2}$ est fini. En effet, s'il était infini, il consisterait en une sous-suite λ' de λ_{x_1} et de λ_{x_2} telle que la suite $\sum_{j=0}^{\lambda'_n} a_j y_j$ convergerait vers x_1 et x_2, ce qui est impossible, étant donné que $x_1 \neq x_2$.

Quitte à remplacer λ_{x_1} par $\lambda_{x_1} \setminus (\lambda_{x_1} \cap \lambda_{x_2})$ et λ_{x_2} par $\lambda_{x_2} \setminus (\lambda_{x_1} \cap \lambda_{x_2})$, nous pouvons supposer que $\lambda_{x_1} \cap \lambda_{x_2} = \emptyset$. Ainsi, nous obtenons

$$\frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda_{x_1} \cup \lambda_{x_2}\}|}{N} = \frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda_{x_1}\}|}{N} + \frac{|\{n \leq N \mid n \in \lambda_{x_2}\}|}{N}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}_0$. Ce qui nous amène à

$$\underline{D}(\lambda_{x_1} \cup \lambda_{x_2}) \geq \underline{D}(\lambda_{x_1}) + \underline{D}(\lambda_{x_2}).$$

Soient $x_1, ..., x_{n_0+1} \in X_{n_0}$ des éléments deux à deux distincts. Par induction, nous obtenons

$$\underline{D}(\lambda_{x_1} \cup ... \cup \lambda_{n_0+1}) \geq \underline{D}(\lambda_{x_1}) + ... + \underline{D}(\lambda_{n_0+1}) > (n_0+1)\frac{1}{n_0+1} = 1,$$

ce qui est absurde. □

Remarque 3.3.1. Soit $a \in \mathcal{U}$. Il ne peut exister de suite λ_x strictement croissante telle que $\underline{D}(\lambda_x) > 0$ et $\sum_{j=0}^{\lambda_{x,k}} a_j y_j \to x$ que pour au plus une infinité dénombrable de $x \in X$. En effet, s'il existait des suites λ_x pour une infinité non dénombrable de $x \in X$, l'ensemble

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n,$$

où les X_n sont les ensembles définis dans la preuve de la proposition 3.3.1, est non dénombrable et nous pouvons procéder de manière identique à la preuve de la proposition 3.3.1 afin d'arriver à une contradiction.

L'exemple suivant nous montre qu'il est possible qu'une infinité dénombrable d'éléments x de X puissent être associés à une suite (λ_x) permettant de les approcher et ayant une densité inférieure strictement positive.

Exemple 3.3.1. Mettons-nous dans le contexte de l'exemple 3.2.1. Posons $\lambda_{r_k} = A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, nous avons $\underline{D}(\lambda_{r_k}) = D(A_k) = \frac{1}{2^{k+1}} > 0$ et

$$\sum_{j=0}^{\lambda_{r_k,n}} a_j y_j = t_{\lambda_{r_k,n}} = r_k \to r_k \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

par définition des t_n. Il existe donc une infinité dénombrable de $x \in X$ pour lesquels il existe une suite λ_x strictement croissante telle que $\underline{D}(\lambda_x) > 0$ et $\sum_{j=0}^{\lambda_{x,n}} a_j y_j \to x$ si $n \to \infty$.

Au vu de la proposition 3.3.1, la notion d'universalité "à densité inférieure strictement positive" a peu d'intérêt. C'est pourquoi nous préférons considérer la notion d'universalité "à densité inférieure strictement positive sur tout voisinage".

Définition 3.3.1. Un élément $a \in \mathcal{U}$ appartient à $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ si pour tout $x \in X$ et tout $\epsilon > 0$, il vérifie

$$\underline{D}\left(\{n \in \mathbb{N} \mid \rho(\sum_{j=0}^{n} a_j y_j, x) < \epsilon\}\right) > 0.$$

Malgré tout, l'ensemble $\underset{\sim}{\mathcal{U}} \cap A$ reste tout de même "relativement petit" par rapport à A.

Proposition 3.3.2. *Si $\mathcal{U}_A$ est non vide, alors $\underset{\sim}{\mathcal{U}} \cap A$ est maigre dans A.*

Démonstration. Montrons que $\underset{\sim}{\mathcal{U}} \cap \widetilde{\mathcal{U}}^{(n)} \cap A = \emptyset$. Procédons par l'absurde et fixons $a \in \underset{\sim}{\mathcal{U}} \cap \widetilde{\mathcal{U}}^{(n)} \cap A$. Soit $x \in X \setminus \{0\}$ et posons $\epsilon = \frac{\rho(x,0)}{2} > 0$. Comme $a \in \widetilde{\mathcal{U}}^{(n)}$, il existe une suite strictement croissante λ telle que $\overline{D}(\lambda) = 1$ et $\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j y_j \to x$ si $n \to \infty$. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j y_j, x) < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Nous avons donc $(\lambda_n)_{n \geq N} \subset \mathbb{N} \setminus B$, où $B := \{n \in \mathbb{N} \mid \rho(\sum_{j=0}^{n} a_j y_j, 0) < \epsilon\}$.

Par la proposition 3.1.3,

$$1 = \overline{D}(\lambda) \leq \overline{D}(\mathbb{N} \setminus B).$$

Ainsi, $\overline{D}(\mathbb{N} \setminus B) = 1$ et $\underline{D}(B) = 1 - \overline{D}(\mathbb{N} \setminus B) = 0$, ce qui est absurde car $a \in \underset{\sim}{\mathcal{U}}$.

Nous avons donc bien $\underset{\sim}{\mathcal{U}} \cap \widetilde{\mathcal{U}}^{(n)} \cap A = \emptyset$, ou encore

$$\underset{\sim}{\mathcal{U}} \cap A \subset A \setminus \widetilde{\mathcal{U}}^{(n)} \subset A \setminus \widetilde{\mathcal{U}}_A^{(n)}.$$

Or, comme $\mathcal{U}_A$ est non vide, par le théorème 3.2.1, l'ensemble $\widetilde{\mathcal{U}}_A^{(n)}$ est un ensemble G_δ dense de A. Il existe donc des ouverts U_m denses dans A tels que $\widetilde{\mathcal{U}}_A^{(n)} = \cap_{m \in \mathbb{N}} U_m$. Ainsi,

$$\underset{\sim}{\mathcal{U}} \cap A \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (A \setminus U_m).$$

et donc

$$A \setminus (\underset{\sim}{\mathcal{U}} \cap A) \supset \bigcap_{m \in \mathbb{N}} U_m.$$

Par construction des ensembles U_m, l'ensemble $\underset{\sim}{\mathcal{U}} \cap A$ est donc bien un ensemble maigre dans A. □

Montrons à l'aide d'un exemple que l'ensemble $\underset{\sim}{\mathcal{U}} \cap A$ n'est pas généralement vide.

Exemple 3.3.2. Mettons-nous dans le contexte de l'exemple 3.2.1 et fixons $x \in X$ et $\epsilon > 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\rho(x, r_k) < \epsilon$. Ainsi,

$$A_k \subset \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \rho\left(\sum_{j=0}^{n} a_j y_j, x\right) < \epsilon \right\}$$

car $\sum_{j=0}^{n} a_j y_j = t_n = r_k$ pour tout $n \in A_k$. Il en découle que

$$\frac{1}{2^{k+1}} = D(A_k) = \underline{D}(A_k) \leq \underline{D}\left(\{n \in \mathbb{N} \mid \rho(\sum_{j=0}^{n} a_j y_j, x) < \epsilon\} \right).$$

Ainsi, $a \in \underset{\sim}{\mathcal{U}} \cap A$ et l'ensemble $\underset{\sim}{\mathcal{U}} \cap A$ est non vide.

Chapitre 4

Séries universelles simplement indexées

Ce chapitre s'intéresse aux séries universelles simplement indexées introduites dans [1]. Ce type de série consiste en un point intermédiaire entre le chapitre 2 et le chapitre 5. En effet, elles sont plus générales que les séries universelles du chapitre 2, mais moins générales que les séries universelles doublement indexées du chapitre 5. Nous ne passons pas directement des séries universelles aux séries universelles doublement indexées car la généralisation serait trop abrupte que pour être présentée directement.

Ce chapitre consistant en un point intermédiaire, l'illustrer se révélerait assez artificiel, aussi, ne présenterons-nous aucun exemple. Nous nous contenterons d'énoncer des définitions et de démontrer des théorèmes similaires à ceux présentés dans le chapitre 2.

En ce qui concerne le contexte dans lequel nous allons travailler, nous considérons toujours un espace vectoriel métrisable séparable X sur le champ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dont la topologie est définie par une métrique ρ invariante par translation.

Nous considérerons en plus un espace vectoriel topologique complet E, dont la topologie est définie par une métrique d invariante par translation, L un espace compact et $\xi_0 \in L$. Nous supposerons également disposer d'applications continues

$$e_n : L \to E,\ y_n : L \to X \text{ et } \phi_n : L \times E \to \mathbb{K}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, telles que les ϕ_n soient linéaires par rapport à leurs deuxièmes variables.

Pour $a \in G$, nous notons $g_a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e_j(\xi_0) \in E$.

4.1 Définitions

L'ensemble E défini dans le contexte du chapitre est une généralisation de l'ensemble A du chapitre 2. En plus des propriétés déjà cités ci-dessus, nous allons supposer qu'il possède les caractéristiques suivantes.

(E1) L'ensemble $\{g_a \mid a \in G\}$ est dense dans E.

(E2) Pour tout $a \in G$ et $\xi \in L$, les ensembles $\{n \mid \phi_n(\xi, g_a) \neq 0\}$ sont finis et uniformément bornés par rapport à ξ.

(E3) Pour tout $a \in G$ et $\xi \in L$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(\xi, g_a) e_j(\xi) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j e_j(\xi_0), \\ \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(\xi, g_a) y_j(\xi) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j y_j(\xi_0). \end{aligned}$$

Remarque 4.1.1. Par un raisonnement similaire à la remarque 2.1.2, nous constatons que E est séparable.

La définition suivante présente une notion plus générale que la définition 2.1.2 du chapitre 2. Elle introduit un paramètre supplémentaire ξ que nous laissons varier à l'intérieur d'un compact.

Définition 4.1.1. Un élément $f \in E$ appartient à l'ensemble $\mathcal{U}_{E,L}$ si pour tout $x \in X$, il existe une suite (λ_n) de naturels telle que

(i) $\sup_{\xi \in L} \left[\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n} \phi_j(\xi, f) y_j(\xi), x)\right] \to 0$ si $n \to \infty$

(ii) $\sup_{\xi \in L} \left[d(\sum_{j=0}^{\lambda_n} \phi_j(\xi, f) e_j(\xi), f)\right] \to 0$ si $n \to \infty$.

Remarque 4.1.2. Nous travaillons bien dans un cadre plus général que dans le chapitre 2. En effet, si nous posons $E = A$, $L = \{\xi_0\}$, $e_n(\xi_0) = e_n$, $y_n(\xi_0) = y_n$ et $\phi_n(\xi_0, a) = a_n$, nous nous ramenons à la situation exposée au chapitre 2.

Remarque 4.1.3. Par un raisonnement similaire à la remarque 2.1.3, nous pouvons supposer que la suite de la définition 4.1.1 est strictement croissante. En effet, soient $f \in \mathcal{U}_{E,L}$ et $x \in X$. Il suffit de construire par récurrence une suite (λ'_n) strictement croissante telle que

$$\sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi, f) y_j(\xi) \in x + B_\rho\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi, f) e_j(\xi) \in f + B_d\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.1}$$

pour tout $\xi \in L$ et tout $n \in \mathbb{N}_0$. Par définition de $\mathcal{U}_{E,L}$, il est clair qu'il existe λ'_1 satisfaisant (4.1). Supposons à présent qu'il existe $\lambda'_1 < ... < \lambda'_m$ satisfaisant (4.1). Posons

$$B := \left(x + B_\rho\left(\frac{1}{m+1}\right)\right) \setminus \left\{\sum_{j=0}^{n} \phi_j(\xi_0, f) y_j(\xi_0) \mid n \leq \lambda'_m\right\}.$$

Comme X n'a pas de points isolés, l'ensemble B est un ouvert non vide. Soit $x' \in B$. Comme $f \in \mathcal{U}_{E,L}$, il existe une suite (λ_n) telle que

$$\sup_{\xi \in L} \left[\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n} \phi_j(\xi, f) y_j(\xi), x')\right] \to 0$$

$$\sup_{\xi \in L} \left[d(\sum_{j=0}^{\lambda_n} \phi_j(\xi, f) e_j(\xi), f)\right] \to 0$$

si $n \to \infty$. Ainsi, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{\xi\in L}\left[\rho(\textstyle\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,f)y_j(\xi),x')\right] < \frac{1}{m+1} - \rho(x,x')$$

$$\sup_{\xi\in L}\left[d(\textstyle\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,f)e_j(\xi),f)\right] < \frac{1}{m+1}$$

pour tout $n > N_1$. De plus, comme

$$\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi_0,f)y_j(\xi_0),x') \leq \sup_{\xi\in L}\left[\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,f)y_j(\xi),x')\right],$$

la suite $\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi_0,f)y_j(\xi_0) \to x'$ et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi_0,f)y_j(\xi_0) \in B$$

pour tout $n > N_2$. Ainsi $\lambda'_{m+1} := \lambda_n$ pour un $n > \max(N_1,N_2)$ satisfait (4.1) et est strictement plus grand que λ'_m par définition de B.

Nous pouvons donc bien construire une suite satisfaisant (4.1).

Introduisons une dernière définition similaire à celle du chapitre 2 avant d'entamer la section suivante.

Définition 4.1.2. Soit μ une suite strictement croissante de naturels.

Un élément $f \in E$ appartient à l'ensemble $\mathcal{U}^{\mu}_{E,L}$ si pour tout $x \in X$, il existe une sous-suite (λ_n) de μ telle que :

(i) $\sup_{\xi\in L}\left[\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,f)y_j(\xi),x)\right] \to 0$ si $n \to \infty$

(ii) $\sup_{\xi\in L}\left[d(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,f)e_j(\xi),f)\right] \to 0$ si $n \to \infty$.

4.2 Existence d'un élément universel

De manière similaire au chapitre 2, nous allons examiner dans cette section des conditions équivalentes à l'existence d'un élément universel au sens des séries simplement indexées. Avant de démontrer un théorème semblable au théorème 2.2.1, nous aurons cependant besoin de quelques lemmes.

Lemme 4.2.1. *Soit Y un espace topologique vectoriel dont la topologie est définie par une métrique d' invariante par translation. Alors, si $x_1,...,x_n,y_1,...,y_n \in Y$, nous avons $d'(x_1+...+x_n,y_1+...+y_n) \leq \sum_{j=1}^{n} d'(x_i,y_i)$.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur n.

Le cas de base ($n = 1$) est clair.

Soit $k \geq 1$. Supposons que l'égalité souhaitée soit vérifiée pour k et montrons qu'elle l'est également pour $k + 1$. Nous avons

$$\begin{aligned} d'(x_1 + ... + x_{k+1}, y_1 + ... + y_{k+1}) &= d'(x_1 + ... + x_{k+1} - y_1 - ... - y_k, y_{k+1}) \\ &\leq d'(x_1 + ... + x_{k+1} - y_1 - ... - y_k, x_{k+1}) + d'(x_{k+1}, y_{k+1}) \\ &= d'(x_1 + ... + x_k, y_1 + ... + y_k) + d'(x_{k+1}, y_{k+1}) \end{aligned}$$

et nous concluons grâce à l'hypothèse de récurrence. □

Lemme 4.2.2. *Pour tout $f \in \mathcal{U}_{E,L}$ et tout $a \in G$, nous avons $f + g_a \in \mathcal{U}_{E,L}$.*

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{U}_{E,L}$, $a \in G$ et $x \in X$. Posons $h_a = f + g_a$. Par l'hypothèse (E2), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{\xi \in L}\{n \in \mathbb{N} \mid \phi_n(\xi, g_a) \neq 0\} < N$ et $a_n = 0$ pour tout $n > N$. Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} \phi_j(\xi, h_a) y_j(\xi) &= \sum_{j=0}^{n} \phi_j(\xi, f) y_j(\xi) + \sum_{j=0}^{n} \phi_j(\xi, g_a) y_j(\xi) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \phi_j(\xi, f) y_j(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(\xi, g_a) y_j(\xi) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \phi_j(\xi, f) y_j(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} a_j y_j(\xi_0) \end{aligned}$$

pour $n > N$ par linéarité de ϕ_j par rapport à sa deuxième variable et par l'hypothèse (E3).

De façon similaire, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} \phi_j(\xi, h_a) e_j(\xi) &= \sum_{j=0}^{n} \phi_j(\xi, f) e_j(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} a_j e_j(\xi_0) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \phi_j(\xi, f) e_j(\xi) + g_a \end{aligned}$$

par linéarité de ϕ_j par rapport à sa deuxième variable et par l'hypothèse (E3). De plus, comme $f \in \mathcal{U}_{E,L}$, il existe une suite strictement croissante (λ_n) telle que

$$\sup_{\xi \in L} \left[\rho\Big(\sum_{j=0}^{\lambda_n} \phi_j(\xi, f) y_j(\xi), x - \sum_{j=0}^{\infty} a_j y_j(\xi_0)\Big) \right] \to 0$$

$$\sup_{\xi \in L} \left[d\Big(\sum_{j=0}^{\lambda_n} \phi_j(\xi, f) e_j(\xi), f\Big) \right] \to 0.$$

Ainsi, pour n suffisamment grand, nous avons

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,h_a)y_j(\xi),x\right)=\rho\left(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,f)y_j(\xi)+\sum_{j=0}^{\infty}a_jy_j(\xi_0),x\right)$$

$$d\left(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,h_a)e_j(\xi),h_a\right)=d\left(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,f)e_j(\xi)+g_a,f+g_a\right)=d\left(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,f)e_j(\xi),f\right),$$

ce qui permet de conclure. □

Théorème 4.2.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{U}_{E,L}\neq\emptyset$.

(ii) Pour tous $x\in X$ *et* $\epsilon>0$*, il existe* $n\in\mathbb{N}$ *et* $a_0,...,a_n\in\mathbb{K}$ *tels que*

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{n}a_jy_j(\xi_0),x\right)<\epsilon\quad\text{et}\quad d\left(\sum_{j=0}^{n}a_je_j(\xi_0),0\right)<\epsilon.$$

(iii) Pour toute suite strictement croissante μ *de naturels, l'ensemble* $\mathcal{U}^{\mu}_{E,L}$ *est un ensemble* G_δ *dense de* E*.*

(iv) Pour toute suite strictement croissante μ *de naturels, l'ensemble* $\mathcal{U}^{\mu}_{E,L}\cup\{0\}$ *contient un sous-espace vectoriel dense dans* E*.*

Démonstration. (i) ⇒ (ii) Soient $f\in\mathcal{U}_{E,L}$, $x\in X$ et $\epsilon>0$. Il existe une suite (λ_n) de naturels telle que $d(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi_0,f)e_j(\xi_0),f)\to 0$. Donc, il existe $q\in\mathbb{N}$ tel que

$$d\left(f-\sum_{j=0}^{q}\phi_j(\xi_0,f)e_j(\xi_0),0\right)<\frac{\epsilon}{2}.$$

Posons $a'=(\phi_0(\xi_0,f),...,\phi_q(\xi_0,f),0,...)$. Par l'hypothèse (E2), il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que $\sup_{\xi\in L}\{n\in\mathbb{N}\mid\phi_n(\xi,g_{a'})\neq 0\}<N_0$. Ainsi,

$$\sum_{j=0}^{n}\phi_j(\xi_0,g_{a'})y_j(\xi_0)=\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j(\xi_0,g_{a'})y_j(\xi_0)\tag{4.2}$$

pour tout $n>N_0$. Comme en particulier $f\in\mathcal{U}_{E,\{\xi_0\}}$, par le lemme 4.2.2, nous avons que

$f - g_{a'} \in \mathcal{U}_{E,\{\xi_0\}}$, et il existe une suite strictement croissante (λ'_n) et $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi_0, f - g_{a'}) y_j(\xi_0), x\right) < \epsilon$$

$$d\left(\sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi_0, f - g_{a'}) e_j(\xi_0), f - g_{a'}\right) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$N_0 < \lambda'_n$$

pour tout $n > N_1$. Or,

$$\sum_{j=0}^{q} \phi_j(\xi_0, f) y_j(\xi_0) = \sum_{j=0}^{q} a'_j y_j(\xi_0) = \sum_{j=0}^{\infty} a'_j y_j(\xi_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(\xi_0, g_{a'}) y_j(\xi_0) \tag{4.3}$$

par l'hypothèse (E3).

Au final, en combinant (4.2) et (4.3), nous obtenons

$$\sum_{j=0}^{q} \phi_j(\xi_0, f) y_j(\xi_0) = \sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi_0, g_{a'}) y_j(\xi_0)$$

pour tout $n > N_1$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
\rho\left(\sum_{j=q+1}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi_0, f) y_j(\xi_0), x\right) &= \rho\left(\sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi_0, f) y_j(\xi_0) - \sum_{j=0}^{q} \phi_j(\xi_0, f) y_j(\xi_0), x\right) \\
&= \rho\left(\sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi_0, f) y_j(\xi_0) - \sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi_0, g_{a'}) y_j(\xi_0), x\right) \\
&= \rho\left(\sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi_0, f - g_{a'}) y_j(\xi_0), x\right) \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

pour tout $n > N_1$.

De manière similaire, nous trouvons $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned}
d\left(\sum_{j=q+1}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi_0, f) e_j(\xi_0), f - g_{a'}\right) &= d\left(\sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi_0, f - g_{a'}) e_j(\xi_0), f - g_{a'}\right) \\
&< \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

pour tout $n > N_2$.

Soit $n > \max(N_1, N_2)$ et posons $a_0 = ... = a_q = 0$ et $a_j = \phi_j(\xi_0, f)$ pour $j \in \{q+1, ..., \lambda'_n\}$. Comme souhaité dans l'énoncé, nous avons

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{\lambda'_n} a_j y_j(\xi_0), x\right) = \rho\left(\sum_{j=q+1}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi_0, f) y_j(\xi_0), x\right) < \epsilon$$

et

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{j=0}^{\lambda'_n} a_j e_j(\xi_0), 0\right) &\leq d\left(\sum_{j=0}^{\lambda'_n} a_j e_j(\xi_0), f - g_{a'}\right) + d(f - g_{a'}, 0) \\ &= d\left(\sum_{j=q+1}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi_0, f) e_j(\xi_0), f - g_{a'}\right) + d\left(f - \sum_{j=0}^{q} \phi_j(\xi_0, f) e_j(\xi_0), 0\right) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

par l'inégalité triangulaire.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Nous allons globalement procéder de manière similaire à la preuve de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv) du théorème 2.2.1. Fixons (x_l) une suite dense dans X et μ une suite strictement croissante. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $l, s \in \mathbb{N}_0$, posons

$$\begin{aligned} E^\mu(n, l, s) &= \left\{f \in E \mid \sup_{\xi \in L}\left[\rho(\textstyle\sum_{j=0}^{\mu_n} \phi_j(\xi, f) y_j(\xi), x_l)\right] < \frac{1}{s}\right\} \\ F^\mu(n, s) &= \left\{f \in E \mid \sup_{\xi \in L}\left[d(\textstyle\sum_{j=0}^{\mu_n} \phi_j(\xi, f) e_j(\xi), f)\right] < \frac{1}{s}\right\} \\ H^\mu(l, s) &= \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}}[E^\mu(n, l, s) \cap F^\mu(n, s)]. \end{aligned}$$

Montrons que $E^\mu(n, l, s)$ est un ouvert de E. Soit $f \in E^\mu(n, l, s)$. L'application

$$h : L \times E \to X, (\xi, f) \to \sum_{j=0}^{\mu_n} \phi_j(\xi, f) y_j(\xi)$$

est continue et $(\xi, f) \in h^{-1}(B_\rho(x_l, \frac{1}{s}))$ pour tout $\xi \in L$. Ainsi, pour tout $\xi \in L$, il existe un voisinage V_ξ ouvert de ξ et $\epsilon_\xi > 0$ tels que $(\xi, f) \in V_\xi \times B_d(f, \epsilon_\xi) \subset h^{-1}(B_\rho(x_l, \frac{1}{s}))$. La compacité de L implique alors qu'il existe $\xi_1, ..., \xi_n \in L$ tels que $L = \cup_{j=1}^n V_{\xi_j}$. Posons $\epsilon = \min_{j=1}^n \epsilon_{\xi_j}$ et montrons que $B_d(f, \epsilon) \subset E^\mu(n, l, s)$. Soient $f' \in B_d(f, \epsilon)$ et $\xi \in L$. Il existe $j \in \{1, .., n\}$ tel que $\xi \in V_{\xi_j}$. Ainsi, nous avons

$$(\xi, f) \in V_{\xi_j} \times B_d(f, \epsilon) \subset V_{\xi_j} \times B_d(f, \epsilon_{\xi_j}) \subset h^{-1}\left(B_\rho\left(x_l, \frac{1}{s}\right)\right),$$

ce qui permet de conclure.

En procédant de manière similaire, nous constatons que l'ensemble $F^{\mu}(n,s)$ est aussi un ouvert de E. Nous avons l'égalité

$$\mathcal{U}^{\mu}_{E,L} = \bigcap_{l,s\in\mathbb{N}_0} H^{\mu}(l,s)$$

par un raisonnement similaire à celui utilisé dans l'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv) du théorème 2.2.1. Comme E est de Baire, il suffit de montrer que les $H^{\mu}(l,s)$ sont des ouverts denses de E afin de prouver (iii). Il est clair qu'il s'agit d'ouverts. Montrons donc leur densité. Pour cela, il suffit de montrer qu'ils sont denses dans $\{g_a \mid a \in G\}$ par l'hypothèse (E1). Soient $l, s \in \mathbb{N}_0$, $b \in G$ et $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $q \in \mathbb{N}$ et $a_0, ..., a_q \in \mathbb{K}$ tels que

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{q} a_j y_j(\xi_0), x_l - \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(\xi_0, g_b) y_j(\xi_0)\right) < \frac{1}{s} \quad \text{et} \quad d\left(\sum_{j=0}^{q} a_j e_j(\xi_0), 0\right) < \epsilon.$$

Posons $c = (a_0, ..., a_q, 0, ...) \in G$. En utilisant l'hypothèse (E3), nous obtenons

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(\xi_0, g_c) y_j(\xi_0), x_l - \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(\xi_0, g_b) y_j(\xi_0)\right) < \frac{1}{s} \tag{4.4}$$

$$d(g_c, 0) < \epsilon. \tag{4.5}$$

Posons $g = g_b + g_c = g_{b+c}$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_n \geq \sup\left[\cup_{\xi\in L}\{m \mid \phi_m(\xi, g) \neq 0\}\right]$ par l'hypothèse (E2). Ainsi, nous avons $g = \sum_{j=0}^{\mu_n} \phi_j(\xi, g) e_j(\xi)$ et $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(\xi_0, g) y_j(\xi_0) = \sum_{j=0}^{\mu_n} \phi_j(\xi, g) y_j(\xi)$ pour tout $\xi \in L$ par l'hypothèse (E3). Nous constatons alors que

$$\sup_{\xi\in L}\left[\rho(\sum_{j=0}^{\mu_n} \phi_j(\xi, g) y_j(\xi), x_l)\right] = \rho(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(\xi_0, g) y_j(\xi_0), x_l) < \frac{1}{s}$$

par (2.4), ainsi que

$$d\left(\sum_{j=0}^{\mu_n} \phi_j(\xi, g) e_j(\xi), g\right) = 0 < \frac{1}{s}.$$

Nous tirons de ces 2 inégalités que $g \in H^{\mu}(l,s)$. Par ailleurs, nous avons $d(g, g_b) = d(g_b + g_c, g_b) < \epsilon$ par (2.5), ce qui suffit.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Nous allons imiter la démonstration de l'implication (iv) $\Rightarrow$ (v) du théorème 2.2.1. Posons (h_l) une suite dense dans E et $\mu^0 = \mu$. Nous trouvons des suites (μ^l) de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et (f_l) de E telles que

1. μ^l est une sous-suite de μ^{l-1}
2. $f_l \in \mathcal{U}^{\mu^{l-1}}_{E,L}$ et $d(f_l, h_l) < \dfrac{1}{l}$

3. $\sup_{\xi\in L}\left[\rho(\sum_{j=0}^{\mu_n^l}\phi_j(\xi,f_l)y_j(\xi),0)\right]\to 0$ et $\sup_{\xi\in L}\left[d(\sum_{j=0}^{\mu_n^l}\phi_j(\xi,f_l)e_j(\xi),f_l)\right]\to 0$

pour tout $l\in\mathbb{N}_0$. Posons B l'enveloppe linéaire des éléments f_l et montrons que cet ensemble convient. L'ensemble B est dense par un raisonnement similaire à (iv) $\Rightarrow$ (v) du théorème 2.2.1.

Montrons que $B\subset\mathcal{U}^{\mu}_{E,L}\cup\{0\}$. Soient $f:=b_1f_1+...+b_mf_m\in B\setminus\{0\}$ tel que $b_m\neq 0$ et $x\in X$. Comme $f_m\in\mathcal{U}^{\mu^{m-1}}_{E,L}$, il existe une sous-suite (λ_n) de μ^{m-1} telle que

$$\sup_{\xi\in L}\left[\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,f_m)y_j(\xi),\frac{x}{b_m})\right]\to 0 \text{ et } \sup_{\xi\in L}\left[d(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,f_m)e_j(\xi),f_m)\right]\to 0.$$

De plus, comme (λ_n) est une sous-suite de μ^l pour tout $l<m$, nous avons

$$\sup_{\xi\in L}\left[\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,f_l)y_j(\xi),0)\right]\to 0 \text{ et } \sup_{\xi\in L}\left[d(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,f_l)e_j(\xi),f_l)\right]\to 0$$

pour tout $l<m$.

Montrons que

$$\sup_{\xi\in L}\left[\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,f)y_j(\xi),x)\right]\to 0 \text{ et } \sup_{\xi\in L}\left[d(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,f)e_j(\xi),f)\right]\to 0.$$

Soit $\epsilon>0$. Par continuité de la multiplication par un scalaire, il existe $\delta>0$ tel que pour tout $y\in X$, si $\rho(y,\frac{x}{b_m})<\delta$, alors $\rho(b_my,x)<\epsilon$. Ainsi, comme il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $\sup_{\xi\in L}\left[\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,f_m)y_j(\xi),\frac{x}{b_m})\right]<\delta$ pour tout $n>N$, nous avons

$$\sup_{\xi\in L}\left[\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,b_mf_m)y_j(\xi),x)\right]<\epsilon$$

pour tout $n>N$, et donc

$$\sup_{\xi\in L}\left[\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n}\phi_j(\xi,b_mf_m)y_j(\xi),x)\right]\to 0.$$

Le lemme 4.2.1 et la linéarité des ϕ_j par rapport à leur deuxième variable permet alors de conclure.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Cela provient du fait que $\mathcal{U}^{(n)}_{E,L}=\mathcal{U}_{E,L}$. □

Le corollaire suivant est une généralisation du corollaire 2.2.1, où les applications S_n prennent 2 paramètres supplémentaires, chacun variant dans un compact.

Corollaire 4.2.1. *Soient J un compact et pour tout $n \in \mathbb{N}$, une application continue $S_n : J \times L \times E \to X$. Supposons que pour tout $a \in G$, il existe une suite (n_k) de naturels telle que*

$$\sup_{\eta \in J} \sup_{\xi \in L} \left[\rho(S_{n_k}(\eta, \xi, g_a), \sum_{j=0}^{\infty} a_j y_j(\xi_0)) \right] \to 0 \quad \text{si } k \to \infty.$$

Notons $\mathcal{U}^S_{E,L}$ l'ensemble des éléments $f \in E$ tels que, pour tout $x \in X$, il existe une suite (λ_n) de naturels tels que

$$\sup_{\xi \in L} \left[\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n} \phi_j(\xi, f) y_j(\xi), x) \right] \to 0, \qquad \sup_{\xi \in L} \left[d(\sum_{j=0}^{\lambda_n} \phi_j(\xi, f) y_j(\xi), f) \right] \to 0$$

et

$$\sup_{\eta \in J} \sup_{\xi \in L} \left[\rho(S_{\lambda_n}(\eta, \xi, f), x) \right] \to 0$$

si $n \to \infty$. Alors, si $\mathcal{U}_{E,L} \neq \emptyset$, l'ensemble $\mathcal{U}^S_{E,L}$ est un ensemble G_δ dense de E.

De plus, si la suite (n_k) peut être choisie indépendamment du $a \in G$ et si chaque S_{n_k} est linéaire par rapport à sa troisième variable, alors l'ensemble $\mathcal{U}^S_{E,L} \cup \{0\}$ contient un sous-espace vectoriel dense dans E.

Démonstration. Nous allons globalement procéder de manière similaire à la preuve du corollaire 2.2.1. Tout d'abord, pour montrer la première partie de l'énoncé, nous allons imiter la preuve de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) du théorème 4.2.1. Soient (x_l) une suite dense dans X et $l, s, n \in \mathbb{N}_0$. Posons

$$\begin{aligned}
E(n,l,s) &= \left\{ f \in E \mid \sup_{\xi \in L} \left[\rho(\textstyle\sum_{j=0}^{n} \phi_j(\xi, f) y_j(\xi), x_l) \right] < \frac{1}{s} \right\} \\
F(n,s) &= \left\{ f \in E \mid \sup_{\xi \in L} \left[d(\textstyle\sum_{j=0}^{n} \phi_j(\xi, f) e_j(\xi), f) \right] < \frac{1}{s} \right\} \\
G(n,l,s) &= \left\{ f \in E \mid \sup_{\eta \in J} \sup_{\xi \in L} \left[\rho(S_n(\eta, \xi, f), x_l) \right] < \frac{1}{s} \right\} \\
H(l,s) &= \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E(n,l,s) \cap F(n,s) \cap G(n,l,s))
\end{aligned}$$

Les ensembles $E(n,l,s)$, $F(n,s)$ et $G(n,l,s)$ sont des ouverts de E car les applications ϕ_j, y_j, e_j et S_n sont continues et car les ensembles L et J sont compacts.

De manière similaire au corollaire 2.2.1, nous avons l'égalité

$$\mathcal{U}^S_{E,L} = \cap_{l,s \in \mathbb{N}_0} H(l,s)$$

et les ensembles $H(l,s)$ sont des ouverts denses, ce qui fait de l'ensemble $\mathcal{U}^S_{E,L}$ un ensemble G_δ dense de E.

Passons à la seconde partie de l'énoncé. Notons, pour μ une suite strictement croissante de naturels, $\mathcal{U}_{E,L}^{(\mu,S)}$ l'ensemble des éléments $f \in E$ tels qu'il existe une sous-suite (λ_n) de μ satisfaisant

$$\sup_{\xi \in L} \left[\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n} \phi_j(\xi, f) y_j(\xi), x) \right] \to 0, \qquad \sup_{\xi \in L} \left[d(\sum_{j=0}^{\lambda_n} \phi_j(\xi, f) y_j(\xi), f) \right] \to 0$$

et

$$\sup_{\eta \in J} \sup_{\xi \in L} [\rho(S_{\lambda_n}(\eta, \xi, f), x)] \to 0.$$

Nous commençons par montrer que les ensembles $\mathcal{U}_{E,L}^{(\mu,S)}$ sont des ensembles G_δ denses de E pour toute sous-suite μ de (n_k). Pour cela, il suffit de procéder de la même façon que dans la preuve (ii) $\Rightarrow$ (iii) du théorème 4.2.1, le fait que μ soit une sous-suite de (n_k) permettant de conserver la convergence

$$\sup_{\eta \in J} \sup_{\xi \in L} \left[\rho(S_{\mu_n}(\eta, \xi, f), \sum_{j=0}^{\infty} a_j y_j(\xi_0)) \right] \to 0$$

pour tout $a \in G$.

Nous procédons ensuite de manière similaire à la preuve (iii) $\Rightarrow$ (iv) du théorème 4.2.1 en remplaçant $\mathcal{U}_{E,L}^{\mu}$ par $\mathcal{U}_{E,L}^{(\mu,S)}$ et en ajoutant l'hypothèse

$$\sup_{\eta \in J} \sup_{\xi \in L} \left[\rho(S_{\mu_n^l}(\eta, \xi, f_l), 0) \right] \to 0$$

aux trois propriétés des suites construites par induction. □

Chapitre 5

Séries universelles doublement indexées

Comme annoncé dans le chapitre précédent, nous allons généraliser la notion de série universelle simplement indexée. Nous commencerons par présenter les habituelles définitions et un théorème stipulant des conditions équivalentes à l'existence d'un élément universel, présentés dans [1]. Pour finir, nous illustrerons ce chapitre à l'aide d'un exemple sur les séries de Taylor complexes, à nouveau tiré de [1].

La généralisation que nous allons définir va notamment nous donner une latitude supplémentaire au niveau de l'espace L, qui au lieu de consister en un compact, sera une union de compacts croissants. Cet "agrandissement" de l'ensemble L nous permet de ne plus restreindre le paramètre ξ du chapitre précédent à un seul compact. Nous pourrons donc par exemple considérer une convergence uniforme en ξ sur un ouvert de $\mathbb{C}$, ce que nous ferons lors de l'exemple sur les séries de Taylor complexes.

Une autre généralisation par rapport au chapitre précédent est que nous n'examinons plus l'universalité dans un seul espace, mais dans une suite d'espaces. Cela permet par exemple de considérer, dans le cas des séries de Taylor complexes, des ensembles $H(\mathbb{C})$ munis de topologies différentes.

Durant ce chapitre, nous considérons, pour $k \in \mathbb{N}_0$, un espace vectoriel métrisable X_k sur $\mathbb{K}$, dont la topologie est définie par une métrique ρ_k invariante par translation. Nous considérons également, pour $m \in \mathbb{N}_0$, un compact non vide L_m tel que la suite (L_m) soit croissante. Nous posons $L = \cup_{m \in \mathbb{N}_0} L_m$. Les ensembles et applications G, E, e_n, ϕ_n satisfont les mêmes hypothèses que celles utilisées dans le chapitre précédent. Pour tous $k \in \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}$, nous considérons de plus une application $y_{k,n} : L \to X_k$ continue. Nous imposons finalement que ξ_0 soit un élément de L_1.

5.1 Définitions

Nous supposons que l'espace E satisfait les généralisations suivantes des propriétés (E1), (E2) et (E3).

(E'1) L'ensemble $\{g_a \mid a \in G\}$ est dense dans E.

(E'2) Pour tous $a \in G$ et $\xi \in L$, les ensembles $\{n \mid \phi_n(\xi, g_a) \neq 0\}$ sont finis et uniformément bornés par rapport à $\xi \in L_m$, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.
(E'3) Pour tous $a \in G$, $\xi \in L$ et $k \in \mathbb{N}_0$, nous avons

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(\xi, g_a) e_j(\xi) &= \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} a_j e_j(\xi_0), \\ \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(\xi, g_a) y_{k,j}(\xi) &= \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} a_j y_{k,j}(\xi_0). \end{aligned}$$

Remarque 5.1.1. Par un raisonnement similaire à la remarque 2.1.2, nous constatons que E est séparable.

La définition suivante présente une notion plus générale que la définition 4.1.1. Au lieu de laisser varier le paramètre ξ dans un compact, elle le laisse varier dans une union dénombrable de compacts. Les éléments satisfaisant cette définition peuvent de plus approcher n'importe quel élément de n'importe quel espace X_k.

Remarque 5.1.2. Comme dans les définitions suivantes, nous fixons k au préalable, nous nous permettons de noter ρ à la place de ρ_k.

Définition 5.1.1. Un élément $f \in E$ appartient à l'ensemble $\mathcal{U}_{E,L}$ si pour tous $k \in \mathbb{N}_0$ et $x \in X_k$, il existe une suite (λ_n) de naturels telle que pour tout $m \in \mathbb{N}_0$

(*i*) $\sup_{\xi \in L_m} \left[\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n} \phi_j(\xi, f) y_{k,j}(\xi), x)\right] \to 0 \text{ si } n \to \infty$

(*ii*) $\sup_{\xi \in L_m} \left[d(\sum_{j=0}^{\lambda_n} \phi_j(\xi, f) e_j(\xi), f)\right] \to 0 \text{ si } n \to \infty.$

Remarque 5.1.3. Avec les notations du chapitre 4, en posant $X_k = X$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, $L_m = L$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, $e_n = e_n$, $\phi_n = \phi_n$ et $y_{k,n} = y_n$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}_0$, nous constatons bien que ce qui est considéré dans cette section est une généralisation du chapitre 4.

Remarque 5.1.4. Nous pouvons supposer que la suite de la définition 5.1.1 est strictement croissante. En effet, soient $f \in \mathcal{U}_{E,L}$, $k \in \mathbb{N}_0$ et $x \in X_k$. Il suffit de construire par récurrence une suite (λ'_n) strictement croissante telle que

$$\sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi, f) y_j(\xi) \in B_\rho\left(x, \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi, f) e_j(\xi) \in B_d\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

pour tous $\xi \in L_n$ et $n \in \mathbb{N}_0$. La construction d'une telle suite se fait comme dans la remarque 4.1.3. Pour conclure, il suffit de constater que comme la suite (L_n) est croissante, nous avons

$$\sup_{\xi \in L_m} \left[\rho(\textstyle\sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi, f) y_{k,j}(\xi), x)\right] \leq \sup_{\xi \in L_n} \left[\rho(\textstyle\sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi, f) y_{k,j}(\xi), x)\right] \leq \frac{1}{n}$$

$$\sup_{\xi \in L_m} \left[d(\textstyle\sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi, f) e_j(\xi), f)\right] \leq \sup_{\xi \in L_n} \left[d(\textstyle\sum_{j=0}^{\lambda'_n} \phi_j(\xi, f) e_j(\xi), f)\right] \leq \frac{1}{n}$$

pour tout $n \geq m$.

Introduisons une dernière définition avant de passer à la section suivante.

Définition 5.1.2. Soit μ une suite strictement croissante de naturels. Un élément $f \in E$ appartient à l'ensemble $\mathcal{U}^{\mu}_{E,L}$ si pour tous $k \in \mathbb{N}_0$ et $x \in X_k$, il existe une sous-suite (λ_n) de μ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}_0$

(i) $\sup_{\xi \in L_m} \left[\rho(\sum_{j=0}^{\lambda_n} \phi_j(\xi, f) y_{k,j}(\xi), x)\right] \to 0$ si $n \to \infty$

(ii) $\sup_{\xi \in L_m} \left[d(\sum_{j=0}^{\lambda_n} \phi_j(\xi, f) e_j(\xi), f)\right] \to 0$ si $n \to \infty$.

5.2 Existence d'un élément universel

Nous allons dans cette section démontrer un théorème similaire au théorème 4.2.1, stipulant des conditions équivalentes à l'existence d'un élément universel dans le cadre des séries universelles doublement indexées.

Théorème 5.2.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{U}_{E,L} \neq \emptyset$.

(ii) *Pour tous $k \in \mathbb{N}_0$, $x \in X_k$ et $\epsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, ..., a_n \in \mathbb{K}$ tels que*

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{n} a_j y_{k,j}(\xi_0), x\right) < \epsilon \quad \text{et} \quad d\left(\sum_{j=0}^{n} a_j e_j(\xi_0), 0\right) < \epsilon.$$

(iii) *Pour toute suite strictement croissante μ de naturels, l'ensemble $\mathcal{U}^{\mu}_{E,L}$ est un ensemble G_δ dense de E.*

(iv) *Pour toute suite strictement croissante μ de naturels, l'ensemble $\mathcal{U}^{\mu}_{E,L} \cup \{0\}$ contient un sous-espace vectoriel dense dans E.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Il s'agit d'un cas particulier du théorème 4.2.1. En effet, il suffit de l'appliquer pour chaque X_k avec $L = L_1$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Nous allons procéder de façon similaire à l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) du théorème 4.2.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, soit $(x_{k,l})$ une suite dense dans X_k. Posons, pour μ une suite strictement croissante, $n \in \mathbb{N}$ et $l, s, k, m \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} E^{\mu}(n,l,s,k,m) &= \left\{ f \in E \mid \sup_{\xi \in L_m} \left[\rho(\textstyle\sum_{j=0}^{\mu_n} \phi_j(\xi, f) y_{k,j}(\xi), x_{k,l})\right] < \frac{1}{s} \right\} \\ F^{\mu}(n,s,m) &= \left\{ f \in E \mid \sup_{\xi \in L_m} \left[d(\textstyle\sum_{j=0}^{\mu_n} \phi_j(\xi, f) e_j(\xi), f)\right] < \frac{1}{s} \right\} \\ H^{\mu}(l,s,k,m) &= \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [E^{\mu}(n,l,s,k,m) \cap F^{\mu}(n,s,m)]. \end{aligned}$$

Le fait que ces ensembles soient ouverts se démontre comme dans l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) du théorème 4.2.1.

Nous avons l'égalité
$$\mathcal{U}^{\mu}_{E,L} = \bigcap_{l,s,k,m\in\mathbb{N}_0} H^{\mu}(l,s,k,m).$$
En effet :

$\subseteq$ Cette inclusion se déduit directement de la définition de $\mathcal{U}^{\mu}_{E,L}$.

$\supseteq$ Soient $f \in \cap_{l,s,k,m\in\mathbb{N}_0} H^{\mu}(l,s,k,m)$, $k \in \mathbb{N}_0$ et $x \in X_k$. Il existe une suite (l_s) telle que $x_{k,l_s} \to x$. Pour tout $s \in \mathbb{N}_0$, il existe n_s tel que

$$\sup_{\xi\in L_s}\left[\rho(\textstyle\sum_{j=0}^{\mu_{n_s}} \phi_j(\xi,f)y_{k,j}(\xi), x_{k,l_s})\right] < \frac{1}{s}$$

$$\sup_{\xi\in L_s}\left[d(\textstyle\sum_{j=0}^{\mu_{n_s}} \phi_j(\xi,f)e_j(\xi), f)\right] < \frac{1}{s}$$

par définition de l'ensemble de $H^{\mu}(l,s,k,m)$.

Soit $m \in \mathbb{N}_0$. Comme la suite (L_s) est croissante, nous avons

$$\sup_{\xi\in L_m}\left[\rho(\textstyle\sum_{j=0}^{\mu_{n_s}} \phi_j(\xi,f)y_{k,j}(\xi), x_{k,l_s})\right] \leq \sup_{\xi\in L_s}\left[\rho(\textstyle\sum_{j=0}^{\mu_{n_s}} \phi_j(\xi,f)y_{k,j}(\xi), x_{k,l_s})\right] < \frac{1}{s}$$

$$\sup_{\xi\in L_m}\left[d(\textstyle\sum_{j=0}^{\mu_{n_s}} \phi_j(\xi,f)e_j(\xi), f)\right] \leq \sup_{\xi\in L_s}\left[d(\textstyle\sum_{j=0}^{\mu_{n_s}} \phi_j(\xi,f)e_j(\xi), f)\right] < \frac{1}{s}$$

pour tout $s \geq m$. Ainsi, pour tout $x \in X_k$, il existe une suite (n_s) tel que

$$\sup_{\xi\in L_m}\left[\rho(\textstyle\sum_{j=0}^{\mu_{n_s}} \phi_j(\xi,f)y_{k,j}(\xi), x)\right] \to 0$$

$$\sup_{\xi\in L_m}\left[d(\textstyle\sum_{j=0}^{\mu_{n_s}} \phi_j(\xi,f)e_j(\xi), f)\right] \to 0$$

si $s \to \infty$. Nous pouvons supposer cette suite strictement croissante. D'où $f \in \mathcal{U}^{\mu}_{E,L}$.

Afin de conclure, il suffit donc de montrer que les $H^{\mu}(l,s,k,m)$ sont des ouverts denses de E. Cela se démontre de manière similaire à l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) du théorème 4.2.1.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Soit μ une suite strictement croissante et (h_l) une suite dense dans E. Par hypothèse, il existe $f_1 \in \mathcal{U}^{\mu}_{E,L}$ tel que $d(f_1,h_1) < 1$. Par définition de $\mathcal{U}^{\mu}_{E,L}$, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe une sous-suite $\mu^{k,1}$ de μ telle que

$$\sup_{\xi\in L_m}\left[\rho(\sum_{j=0}^{\mu^{k,1}_n} \phi_j(\xi,f_1)y_{k,j}(\xi), 0)\right] \to 0 \quad \text{et} \quad \sup_{\xi\in L_m}\left[d(\sum_{j=0}^{\mu^{k,1}_n} \phi_j(\xi,f_1)e_j(\xi), f_1)\right] \to 0$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Comme chaque ensemble $\mathcal{U}^{\mu^{k,1}}_{E,L}$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses, l'intersection $\cap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{U}^{\mu^{k,1}}_{E,L}$ est également une intersection dénombrable d'ouverts denses, et est donc dense dans E, car E est de Baire. Ainsi, il existe $f_2 \in \cap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{U}^{\mu^{k,1}}_{E,L}$

tel que $d(f_2, h_2) < \frac{1}{2}$. De plus, comme $f_2 \in \mathcal{U}_{E,L}^{\mu^{k,1}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe une sous-suite $\mu^{k,2}$ de $\mu^{k,1}$ telle que

$$\sup_{\xi \in L_m} \left[\rho\Big(\sum_{j=0}^{\mu_n^{k,2}} \phi_j(\xi, f_2) y_{k,j}(\xi), 0\Big) \right] \to 0 \quad \text{et} \quad \sup_{\xi \in L_m} \left[d\Big(\sum_{j=0}^{\mu_n^{k,2}} \phi_j(\xi, f_2) e_j(\xi), f_2\Big) \right] \to 0$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Nous pouvons donc construire par récurrence des suites (f_l) et $\mu^{k,l}$ telles que

1. $\mu^{k,l}$ est une sous-suite de $\mu^{k,l-1}$
2. $d(f_l, h_l) < \dfrac{1}{l}$
3. $f_l \in \bigcap_{k' \in \mathbb{N}_0} \mathcal{U}_{E,L}^{\mu^{k',l-1}}$
4. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\sup_{\xi \in L_m} \left[\rho\Big(\sum_{j=0}^{\mu_n^{k,l}} \phi_j(\xi, f_l) y_{k,j}(\xi), 0\Big) \right] \to 0 \quad \text{et} \quad \sup_{\xi \in L_m} \left[d\Big(\sum_{j=0}^{\mu_n^{k,l}} \phi_j(\xi, f_l) e_j(\xi), f_l\Big) \right] \to 0$$

pour tous $k, l \in \mathbb{N}_0$, où $\mu^{k,0} = \mu$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$.

Posons B l'enveloppe linéaire des éléments f_l. Par un raisonnement similaire à celui de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv) du théorème 4.2.1, l'ensemble B convient. $\square$

5.3 Séries universelles de Taylor

Dans cette section, nous allons illustrer le théorème 5.2.1 avec les séries de Taylor complexes. Mais avant cela, nous avons besoin d'un lemme.

Lemme 5.3.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert ayant un nombre dénombrable de composantes connexes, notées (Ω_n).*

Si pour tout compact $L \subset \mathbb{C}$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid L \cap \Omega_n \neq \emptyset\}$ est fini, alors, il existe une suite de compacts (K_k) telle que $K_k \cap \Omega = \emptyset$ et K_k^c est connexe pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. De plus, pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$ tel que $K \cap \Omega = \emptyset$ et K^c est connexe, il existe $k \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subset K_k$.

Démonstration. Soit K un compact tel que $K \cap \Omega = \emptyset$ et K^c est connexe. Il existe $N_K \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subset D[0, N_K]$. Comme le disque fermé $D[0, N_K]$ est compact, par hypothèse, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid D[0, N_K] \cap \Omega_n \neq \emptyset\}$ est fini et il existe $m_K \in \mathbb{N}_0$ tel que $D[0, N_K] \cap \Omega_m = \emptyset$ pour tout $m > m_K$.

Montrons que pour tout $1 \leq m \leq m_K$, il existe une ligne polygonale $\Gamma_{m_K, N_K} \subset K^c$ dont les sommets ont des coordonnées rationnelles, dont le premier sommet appartient à Ω_m et dont le dernier est $N_K + 1$. Soient $1 \leq m \leq m_K$ et $z_0' \in \Omega_m \cap (\mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q})$. L'élément z_0' appartient à K^c car $\Omega_m \subset D[0, N_K]^c \subset K^c$. De plus, comme K^c est ouvert, pour tout

$z \in K^c$, il existe $\epsilon_z > 0$ tel que $D(z, \epsilon_z) \subset K^c$. Nous avons donc que $\{D(z, \epsilon_z) \mid z \in K^c\}$ est un recouvrement ouvert de K^c. Or, comme K^c est connexe, il existe une chaîne de ce recouvrement joignant z_0' à $N_K + 1$, c'est à dire, il existe $z_1, ..., z_n \in K^c$ tels que $z_0' \in D(z_1, \epsilon_1)$, $N_K + 1 \in D(z_n, \epsilon_n)$ et $D(z_i, \epsilon_i) \cap D(z_j, \epsilon_j) \neq \emptyset$ si et seulement si $i - j \in \{-1, 0, 1\}$.

Soient $z_i' \in D(z_i, \epsilon_i) \cap D(z_{i+1}, \epsilon_{i+1}) \cap (\mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q})$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Il est clair que la ligne polygonale Γ_{m_K, N_K} de sommets $z_0', z_1', ..., z_{n-1}', N_K + 1$ satisfait les conditions souhaitées, les boules étant convexes. Posons $\Gamma_{N_K} = \cup_{m=1}^{m_0} \Gamma_{m_K, N_K}$ et fixons $s_K \in \mathbb{N}$ tel que $d(\Gamma_{N_K}, K) > \frac{1}{s_K}$.

Définissons $L(N_K, m_K, \Gamma_{N_K}, s_K) = \{z \in \Omega^c \mid |z| \leq N_K \text{ et } d(z, \Gamma_{N_K}) \geq \frac{1}{s_K}\}$. Cet ensemble est clairement compact. De plus, nous avons $K \subset L(N_K, m_K, \Gamma_{N_K}, s_K)$.

Montrons que $L(N_K, m_K, \Gamma_{N_K}, s_K)^c$ est connexe. Nous avons

$$\begin{aligned} L(N_K, m_K, \Gamma_{N_K}, s_K)^c &= \Omega \cup D[0, N_K]^c \cup \left\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, \Gamma_{N_K}) < \frac{1}{s_K}\right\} \\ &= \Omega_1 \cup ... \cup \Omega_{m_K} \cup D[0, N_K]^c \cup \left\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, \Gamma_{N_K}) < \frac{1}{s_K}\right\} \end{aligned}$$

car $\Omega_m \subset D[0, N_K]^c$ pour tout $m > m_K$. Tous les ensembles de cette union sont connexes. Les ensembles Ω_j le sont par hypothèse et l'ensemble $D[0, N_K]^c$ l'est clairement. Enfin, l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, \Gamma_{N_K}) < \frac{1}{s_K}\}$ est connexe car Γ_{N_K} est connexe. En effet, Γ_{N_K} est une union d'ensembles connexes (les ensembles Γ_{j, N_K}) ayant un point en commun (le point $N_K + 1$).

Afin de montrer que $L(N_K, m_K, \Gamma_{N_K}, s_K)^c$ est connexe, il suffit donc de montrer que l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, \Gamma_{N_K}) < \frac{1}{s_K}\}$ intersecte tous les autres ensembles de l'union. Premièrement, par construction, $N_K + 1 \in \Gamma_{N_K}$ et donc

$$N_K + 1 \in D[0, N_K]^c \cup \left\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, \Gamma_{N_K}) < \frac{1}{s_K}\right\}.$$

Deuxièmement, pour tout $m \leq m_K$, il existe $z_m \in \Gamma_{N_K} \cap \Omega_m$. Donc

$$z_m \in \Omega_m \cup \left\{z \in \mathbb{C} \mid d(z, \Gamma_{N_K}) < \frac{1}{s_K}\right\}$$

pour tout $m \leq m_K$. L'ensemble $L^c(N_K, m_K, \Gamma_{N_K}, s_K)$ est donc bien connexe.

Pour conclure, il suffit de remarquer que l'ensemble

$$\Lambda := \{L(N, m, \Gamma, s) \mid N, m, s \in \mathbb{N}_0 \text{ et } \Gamma \in LP(m)\},$$

où $LP(m)$ est l'ensemble des unions de m lignes polygonales de sommets à coordonnées rationnelles, est dénombrable. En effet, vu ce qui a été fait précédemment, si K est un compact quelconque, alors l'ensemble associé $L(N_K, m_K, \Gamma_K, s_K) \in \Lambda$, défini comme précédemment, est de complémentaire connexe, d'intersection vide avec Ω et contient K. Ainsi, l'ensemble

$$\{L(N_K, m_K, \Gamma_K, s_K) \mid K \text{ compact }\} \subset \Lambda$$

est dénombrable, car il s'agit d'un sous-ensemble de Λ, et satisfait donc l'énoncé. $\square$

Nous allons à présent illustrer le théorème 5.2.1 avec les séries de Taylor universelles complexes.

Commençons par définir les ensembles E, L_n et X_k. Posons E l'espace des fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$, noté $H(\mathbb{D})$, muni de la topologie de convergence uniforme sur les compacts. Posons $L_n = D[\frac{n}{n+1}]$, pour $n \in \mathbb{N}_0$. La suite (L_n) est une suite de compacts telle que $L_n \subset \overset{\circ}{L}_{n+1}$ et $\mathbb{D} = \cup_{n\in\mathbb{N}_0} L_n = L$. La topologie de E est donc la topologie associée aux semi-normes p_n définies par $p_n(f) = \sup_{z\in L_n} |f(z)|$, pour $f \in H(\mathbb{D})$ et $n \in \mathbb{N}_0$. Elle est définie par la métrique invariante par translation

$$d(f,g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(f-g)}{1+p_j(f-g)},$$

pour $f, g \in H(\mathbb{D})$.

Soit (K_k) une suite de compacts satisfaisant les conditions du lemme 5.3.1 pour $\Omega = \mathbb{D}$ et définissons, pour $k \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble X_k comme l'espace des fonctions entières muni de la topologie associée aux semi-normes $q_{k,n}$ définies par $q_{k,n}(f) = \sup_{z\in K_k} |f^{(n)}(z)|$. Cette topologie est définie par la métrique invariante par translation

$$\rho_k(f,g) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{q_{k,j}(f-g)}{1+q_{k,j}(f-g)},$$

pour $f, g \in X_k$.

Fixons $\xi_0 \in L_1$. Ensuite, pour $\xi \in \mathbb{D}$, $f \in H(\mathbb{D})$ et $n \in \mathbb{N}$, nous posons

$$e_n(\xi) = (z \to (z-\xi)^n) \in E, \quad y_{k,n}(\xi) = (z \to (z-\xi)^n) \in X_k, \quad \text{et} \quad \phi_n(\xi, f) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Ces ensembles et applications satisfont les conditions (E'1), (E'2) et (E'3) de la section 5.1. En effet, remarquons premièrement que si $a \in G$, alors $g_a(z) = \sum_{j=0}^{N} a_j (z-\xi_0)^j$, où $N \in \mathbb{N}$, est tel que $a_j = 0$ pour tout $j > N$. Les g_a sont donc les polynômes habituels de $\mathbb{C}$ restreints à $\mathbb{D}$. Or, comme le complémentaire de L_n est connexe pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, les polynômes sont denses dans E par le théorème de Runge. La condition (E'1) est donc satisfaite.

Montrons que la condition (E'2) est satisfaite. Soit $a = (a_0, ..., a_N, 0, 0, ...) \in G$. Alors, $\phi_n(\xi, g_a) = \frac{g_a^{(n)}(\xi)}{n!} = 0$ pour tous $j > N$ et $\xi \in L$. Ainsi

$$\sup_{\xi\in L_m} \{n \mid \phi_n(\xi, f) \neq 0\} \leq N,$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, ce qui suffit.

Montrons finalement que la condition (E'3) est satisfaite. Soient $a = (a_0, ..., a_N, 0, 0, ...) \in G$, $\xi \in L$ et $k \in \mathbb{N}_0$. Par Taylor, nous avons

$$g_a(z) = \sum_{j=0}^{N} \frac{g_a^{(j)}(\xi)}{j!} (z-\xi)^j = \sum_{j=0}^{N} \frac{g_a^{(j)}(\xi_0)}{j!} (z-\xi_0)^j \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

d'où la conclusion.

Passons à présent à l'application du théorème 5.2.1 aux séries universelles de Taylor.

Théorème 5.3.1. *Il existe $f \in H(\mathbb{D})$ tel que pour tout $h \in H(\mathbb{C})$, pour tout compact K inclus dans $\mathbb{C}$ tel que $K \cap \mathbb{D} = \emptyset$ et K^c connexe, il existe une suite (λ_n) de naturels telle que pour tout compact J inclus dans $\mathbb{D}$ et tout $l \in \mathbb{N}$, nous avons*

(i) $\sup_{\xi\in J} \sup_{z\in J} |S_{\lambda_n}(f,\xi)(z) - f(z)| \to 0$ *si* $n \to \infty$

(ii) $\sup_{\xi\in J} \sup_{z\in K} |S_{\lambda_n}(f,\xi)^{(l)}(z) - h^{(l)}(z)| \to 0$ *si* $n \to \infty$,

où $S_N(f,\xi) : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \to \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(z-\xi)^n$.

De plus, l'ensemble de tels éléments f est G_δ dense dans $H(\mathbb{D})$, muni de la topologie de convergence uniforme sur les compacts, et cet ensemble uni à $\{0\}$ contient un sous-espace vectoriel dense dans $H(\mathbb{D})$.

Démonstration. Remarquons au préalable que $S_N(f,\xi) = \sum_{n=0}^{N} \phi_n(\xi,f) y_{k,n}(\xi)$ et que $S_N(f,\xi)_{|\mathbb{D}} = \sum_{n=0}^{N} \phi_n(\xi,f) e_n(\xi)$. Afin de simplifier les notations, nous noterons $S_N(f,\xi)_{|\mathbb{D}}$ comme $S_N(f,\xi)$ dans cette preuve.

Montrons que la condition (ii) du théorème 5.2.1 est satisfaite. Soient $k \in \mathbb{N}_0$, $h \in X_k$, $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$.

Commençons par montrer qu'il existe un polynôme P tel que

$$\sup_{z\in K_k} |P^{(l)}(z) - h^{(l)}(z)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \forall\, l \le N \quad \text{et} \quad \sup_{z\in L_N} |P(z)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Comme K_k est un compact, il existe $C > 0$ tel que $K_k \subset D(0,C)$. De plus, étant donné que K_k et L_N sont des compacts disjoints, il existe $0 < \delta < d(L_N, K_k)$. Posons

$$\Omega_1 := D\left(0, \frac{N}{N+1} + \frac{\delta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \Omega_2 := D(0,C) \setminus \overline{D\left(0, \frac{N}{N+1} + \frac{\delta}{2}\right)}.$$

Les ouvert Ω_1 et Ω_2 contiennent respectivement L_N et K_k. Ils sont de plus disjoints.

Fixons $z \notin D(0,C)$. Alors, comme $0 \notin K_k$ et que le complémentaire de K_k est connexe, il existe un chemin $\mathcal{C}$, reliant 0 et z, d'intersection vide avec K_k. Le chemin $\mathcal{C}$ et K_k étant des compacts disjoints, il existe $0 < \eta < d(K_k, \mathcal{C})$. Posons

$$\Omega_2' := \Omega_2 \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} \mid d(z,\mathcal{C}) \le \frac{\eta}{2} \right\}.$$

L'ouvert Ω_2' contient K_k, est disjoint de Ω_1 et est de complémentaire connexe. Ainsi, l'application définie par

$$F : \Omega_1 \cup \Omega_2' \to \mathbb{C},\ z \to \begin{cases} 0 & \text{si } z \in \Omega_1 \\ h(z) & \text{si } z \in \Omega_2' \end{cases}$$

est holomorphe sur $\Omega_1 \cup \Omega_2'$. Posons

$$J_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq n \;\text{ et }\; d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega_2') \geq \frac{1}{n+1} \right\}$$

pour $n \in \mathbb{N}_0$. Remarquons que comme l'ensemble Ω_2' est de complémentaire connexe, les ensembles J_n le sont également. Posons ensuite

$$J_n' := D\left[0, \left(\frac{N}{N+1} + \frac{\delta}{2}\right)\frac{n}{n+1}\right] \bigcup J_n$$

pour $n \in \mathbb{N}_0$. Les ensembles J_n' forment une suite croissante de compacts tels que $\cup_{n\in\mathbb{N}_0} J_n' = \Omega_1 \cup \Omega_2'$. Leurs complémentaires sont de plus connexes. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\sup_{z \in J_n'} |P_n(z) - F(z)| < \frac{1}{n}$$

par le théorème de Runge.

Montrons que la suite (P_n) converge uniformément vers F. Soient $\epsilon' > 0$ et $K \subset \Omega_1 \cup \Omega_2'$ un compact. Il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $\frac{1}{M} < \epsilon'$ et $K \subset J_M'$, par construction des ensembles J_n'. Ainsi

$$\sup_{z\in K} |P_M(z) - F(z)| \leq \sup_{z \in J_M'} |P_M(z) - F(z)| < \frac{1}{M} < \epsilon',$$

ce qui suffit.

Par Weierstrass, la suite $(P_n^{(l)})$ converge uniformément vers $F^{(l)}$ pour tout $l \in \mathbb{N}$. Ainsi, comme les ensembles L_N et K_k sont des compacts respectivement inclus dans Ω_1 et Ω_2', il existe N_0 tel que

$$\sup_{z\in K_k} |P_{N_0}^{(l)}(z) - h^{(l)}(z)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \forall\, l \leq N \qquad \text{et} \qquad \sup_{z \in L_N} |P_{N_0}(z)| < \frac{\epsilon}{2}$$

par définition de F. Ainsi, $P := P_{N_0}$ convient.

Pour un tel polynôme P, nous avons

$$\begin{aligned}
\rho_k(P, h) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l} \frac{\sup_{z\in K_k} |P^{(l)}(z) - h^{(l)}(z)|}{1 + \sup_{z \in K_k} |P^{(l)}(z) - h^{(l)}(z)|} \\
&\leq \sum_{l=0}^{N} \frac{1}{2^l} \sup_{z \in K_k} |P^{(l)}(z) - h^{(l)}(z)| + \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
d(P,0) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\sup_{z\in L_m} |P(z)|}{1+\sup_{z\in L_m} |P(z)|} \\
&\le \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2^m} \sup_{z\in L_m} |P(z)| + \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \\
&\le \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2^m} \sup_{z\in L_N} |P(z)| + \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

La condition (ii) du théorème 5.2.1 est donc satisfaite et il existe $f \in H(\mathbb{D})$ tel que pour tous $k \in \mathbb{N}_0$ et $h \in H(\mathbb{C})$, il existe une suite (λ_n) telle que

$$\sup_{\xi\in L_m} [\rho_k(S_{\lambda_n}(f,\xi),h)] \to 0 \quad \text{et} \quad \sup_{\xi\in L_m} [d(S_{\lambda_n}(f,\xi),f)] \to 0 \tag{5.1}$$

si $n \to \infty$, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.

Montrons que l'application f satisfait l'énoncé. Soient $h \in H(\mathbb{C})$ et $K \subset \mathbb{C}$ un compact tel que $K \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$ et K^c soit connexe. Par le lemme 5.3.1, il existe $k \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subset K_k$. Soient (λ_n) une suite satisfaisant (5.1) et $J \subset \mathbb{D}$ un compact. Par construction des ensembles L_m, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $J \subset L_m$. Il suffit donc de montrer que

$$\sup_{\xi\in L_m} \sup_{z\in L_m} |S_{\lambda_n}(f,\xi)(z) - f(z)| \to 0 \;\text{ si } n \to \infty \tag{5.2}$$

$$\sup_{\xi\in L_m} \sup_{z\in K_k} |S_{\lambda_n}(f,\xi)^{(l)}(z) - h^{(l)}(z)| \to 0 \;\text{ si } n \to \infty \tag{5.3}$$

pour tout $l \in \mathbb{N}$. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité des semi-normes p_m, il existe $\delta > 0$ tel que si $g \in H(\mathbb{D})$ satisfait $d(g,f) < \delta$, alors $p_m(g-f) < \epsilon$. Or, par (5.1), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(S_{\lambda_n}(f,\xi),f) < \delta$ pour tous $\xi \in L_m$ et $n \ge N$. Ainsi,

$$\sup_{\xi\in L_m} \sup_{z\in L_m} |S_{\lambda_n}(f,\xi)(z) - f(z)| = \sup_{\xi\in L_m} [p_m(S_{\lambda_n}(f,\xi) - f)] \le \epsilon$$

pour tout $n \ge N$, et nous obtenons bien (5.2).

La convergence (5.3) s'obtient de manière similaire.

Afin de prouver la seconde partie de l'énoncé, il suffit de montrer que si $f \in H(\mathbb{D})$ satisfait (i) et (ii), alors $f \in \mathcal{U}_{E,L}$. Le théorème 5.2.1 permet alors de conclure. Soient $f \in H(\mathbb{D})$ satisfaisant (i) et (ii), $k \in \mathbb{N}_0$ et $h \in H(\mathbb{C})$. Par hypothèse, il existe une suite (λ_n) telle que

$$\sup_{\xi\in L_m} \sup_{z\in L_m} |S_{\lambda_n}(f,\xi)(z) - f(z)| \to 0 \;\text{ si } n \to \infty$$
$$\sup_{\xi\in L_m} \sup_{z\in K_k} |S_{\lambda_n}(f,\xi)^{(l)}(z) - h^{(l)}(z)| \to 0 \;\text{ si } n \to \infty$$

pour tous $m \in \mathbb{N}_0$ et $l \in \mathbb{N}$.

Montrons que

$$\sup_{\xi \in L_m} [\rho(S_{\lambda_n}(f,\xi),h)] \to 0 \quad \text{et} \quad \sup_{\xi \in L_m} [d(S_{\lambda_n}(f,\xi),f)] \to 0$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Comme les ensembles L_m forment une suite croissante, il suffit de montrer que la convergence a lieu à partir d'un certain naturel m_0. Soit $\epsilon > 0$. Fixons $J \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{j=J+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\epsilon}{2}$. Par continuité des semi-normes p_j, il existe $\delta > 0$ et $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que, si $p_{m_0}(g) < \delta$, alors $\sum_{j=1}^{J} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(g)}{1+p_j(g)} < \frac{\epsilon}{2}$. Soit $m \geq m_0$. Comme $L_{m_0} \subset L_m$,

$$\sup_{\xi \in L_m} [p_{m_0}(S_{\lambda_n}(f,\xi) - f)] \to 0$$

et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $p_{m_0}(S_{\lambda_n}(f,\xi) - f) < \delta$ pour tous $\xi \in L_m$ et $n \geq N$. Ainsi,

$$d(S_{\lambda_n}(f,\xi),f) \leq \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(S_{\lambda_n}(f,\xi) - f)}{1 + p_j(S_{\lambda_n}(f,\xi) - f)} + \sum_{j=J+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \epsilon$$

pour tous $\xi \in L_m$ et $n \geq N$. Nous obtenons donc bien $\sup_{\xi \in L_m} [d(S_{\lambda_n}(f,\xi),f)] \to 0$ si $n \to \infty$.

L'autre convergence se prouve de manière similaire. $\square$

Table des matières

Bibliographie

[1] F. Bayart, K. G. Grosse-Erdmann, V. Nestoridis, et C. Papadimitropoulos, *Abstract theory of universal series and applications*, Proc. London Math. Soc. **96** (2008), n° 3, 417–463.

[2] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théoreme elémentaire sur les fonctions entières*, Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473–475.

[3] S. Charpentier, Q. Menet, et A. Mouze, *Closed universal subspaces of spaces of infinitely differentiable functions*, Annales de l'Institut Fourier **64** (2014), n° 1, 297–325.

[4] K. G. Grosse-Erdmann et A. P. Manguillot, *Linear chaos*, Universitext, Springer-Verlag London, Londres, 2011.

[5] H. Komatsu, *Ultradistributions, I. structure theorems and a characterization*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **20** (1973), 25–105.

[6] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Anal. Math. **2** (1952), 72–87.

[7] A. Melas et V. Nestoridis, *Universality of Taylor series as a generic property of holomorphic functions*, Adv. Math. **157** (2001), 138–176.

[8] D. Menshov, *Sur les séries trigonométriques universelles*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) **49** (1945), 79–82.

[9] A. Mouze et V. Nestoridis, *Universality and ultradifferentiable funtions : Fekete's theorem*, Proc. Am. Math. Soc. **138** (2010), n° 11, 3945–3955.

[10] G. Pál, *Zwei kleine Bemerkungen*, Tohoku Math. J. **6** (1914), 42–43.

[11] C. Papachristodoulos, *Upper and lower frequently universal series*, Glasgow Math. J. **55** (2013), 615–627.

[12] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math. **32** (1969), 17–22.