

Etude de quelques modèles de dynamique quantique non-markovienne

Auteur : Morleghem, Romain

Promoteur(s) : Martin, John

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences physiques, à finalité approfondie

Année académique : 2019-2020

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/9951>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



FACULTÉ DES SCIENCES - DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

Etude de quelques modèles de dynamique quantique non-markovienne

ROMAIN MORLEGHEM

PROMOTEUR : JOHN MARTIN

Travail de fin d'études présenté dans le cadre
de l'obtention du grade de
Master en sciences physiques

Année académique 2019 - 2020

Remerciements

Je tiens à remercier mon promoteur Monsieur J. Martin pour son encadrement et sa disponibilité m'ayant permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions.

Je tiens également à remercier M.M. Jean-Yves Raty, Peter Schlagheck et Nicolas Vandewalle d'avoir accepté de constituer mon comité de lecture. Je leur souhaite une agréable lecture.

Table des matières

Remerciements	1
Table des matières	2
Introduction	4
1 L'opérateur densité	6
I États purs	6
II États mixtes	7
III Formulation des postulats de la physique quantique avec l'opérateur densité	8
IV La trace partielle et l'opérateur densité réduit	10
2 Equations maîtresses	11
I Concepts préliminaires	11
II Equations maîtresses markoviennes : forme de Lindblad	12
III Equations maîtresses non-markoviennes	13
IV Dérivation d'une équation maîtresse non-markovienne dissipative pour un système de N atomes	15
3 Résolution de l'équation maîtresse superradiante	19
I Equation maîtresse superradiante	19
II Résolution de l'équation maîtresse	20
II.1 Deux atomes	20
II.2 Trois atomes	23
III Illustration pour des taux constants et oscillants	24
4 Dynamique dissipative d'atomes en cavité	27
I Définition du système	27
II Solutions pour les amplitudes de probabilité	30
III Mise sous forme d'une équation maîtresse et détermination des taux	36
III.1 Expression générale des taux $\gamma_0(t)$ et $\gamma(t)$	36
III.2 Illustration pour un état initial symétrique à N atomes	39
III.3 Illustration pour un état initial à 2 atomes	43
III.4 Discussion des résultats	45
IV Intensité rayonnée par le système de N atomes	46
V Etude du cas à deux atomes	49

V.1	Populations et cohérence	49
V.2	Intensité rayonnée pour 2 atomes	52
V.3	Mesure d'intrication par la concurrence de Wootters	54
VI	Modulation du système atomes + champ de la cavité	57
VI.1	Modulation des forces couplage	57
VI.2	Modulation des modes de la cavité	61
VI.3	Modulation des forces de couplage et des modes de la cavité	67
VII	Effet de la distance entre atomes	69
5	Au-delà d'une seule excitation	74
I	Description de l'approche	74
II	Deux atomes	75
III	N atomes et intensité rayonnée	77
	Conclusion	79
	Annexe A : Résolution d'une équation différentielle du premier ordre	82
	Annexe B : Transformée de Laplace	84
	Annexe C : Approche pseudomodes	86
	Annexe D : Code Mathematica pour l'approche pseudomode	89
	Bibliographie	92

Introduction

Les systèmes physiques ne sont en pratique jamais totalement isolés de leur environnement. Ce constat général s'applique en particulier aux systèmes à l'échelle microscopique, nécessitant une description quantique. Le système quantique (par exemple un ensemble d'atomes) est dit *ouvert* et échange de l'information avec son environnement (par exemple le champ électromagnétique). Un système quantique ouvert est généralement le siège d'une dynamique *irréversible*, pouvant donner lieu à deux types de processus distincts. Le premier est le processus de *décohérence* au cours duquel le système perd sa capacité à exhiber des effets *d'interférences* (expérience des fentes d'Young [7]) mais sans échanger d'énergie avec l'environnement. Le second processus est la *dissipation* auquel s'ajoute, en plus des effets liés à la décohérence, un échange d'énergie avec l'environnement. Dans ce travail, nous investiguons le cas dissipatif.

Ce travail de fin d'études est davantage un travail de recherche visant à apporter une contribution, aussi modeste soit-elle, à l'étude de la dynamique dissipative d'atomes en interaction avec le champ électromagnétique, en incluant *les effets de mémoire* résultant de l'interaction. On parle alors d'effets *non-markoviens*.

Dans beaucoup de situations, notamment en optique quantique, une description markovienne (sans effets de mémoire) est une très bonne approximation et donne des résultats conformes à l'expérience. Quelles sont alors les motivations pour étudier les dynamiques non-markoviennes ? Tout d'abord, certains effets non-markoviens semblent se manifester dans les expériences en optique quantique [15]. Ensuite, les effets non-markoviens peuvent être une véritable ressource dans le domaine de l'information quantique. Il a été démontré expérimentalement que les effets de mémoire peuvent considérablement augmenter la probabilité de succès d'un algorithme de type *Deutsch-Jozsa* [22]. Ils permettent aussi de rendre quasiment insensible l'efficacité d'un protocole de communication (*superdense coding*) face à une diminution de l'intrication initiale du système [20]. Il y a également des motivations plus fondamentales. Certaines expériences, dans le domaine du contrôle d'un système quantique et de son environnement (*reservoir engineering*), permettent de tester des résultats théoriques, notamment sur les propriétés des dynamiques non-markoviennes [21] et sur la transition entre régime markovien et non-markovien [19]. Ces exemples, entre autres, expliquent l'attrait actuel pour l'étude de la dynamique quantique non-markovienne.

Nous donnons ci-dessous un aperçu des grandes lignes de ce travail.

Au premier chapitre, nous rappelons la différence entre les notions d'état pur et d'état mixte et introduisons un objet central dans la description des systèmes quantiques ouverts : *l'opérateur*

densité. Nous exprimons les postulats de la physique quantique en termes de ce dernier et clôturons ce chapitre en introduisant la notion de *trace partielle*.

Au deuxième chapitre, nous nous focalisons sur un type d'équation d'évolution pour l'opérateur densité d'un système en interaction avec un environnement : les *équations maîtresses*. Ces dernières peuvent incorporer des effets de mémoire au travers de coefficients dépendant du temps appelés taux (*decay rates*) et sont alors qualifiées d'équations maîtresses non-markoviennes. Nous donnons les étapes importantes dans la dérivation d'une équation maîtresse non-markovienne dissipative pour un système de N atomes, en insistant sur les diverses approximations employées.

Au troisième chapitre, nous résolvons l'équation maîtresse établie au chapitre 2 lorsque celle-ci est composée de deux taux dépendant arbitrairement du temps. Nous donnons la solution explicite dans le cas de 2 atomes et décrivons le processus de résolution dans le cas de 3 atomes.

Le quatrième chapitre constitue la partie la plus conséquente de ce travail. Nous y étudions la dynamique dissipative d'atomes dans une cavité (*cavity QED* [45]). Nous adoptons une approche exacte de type système fermé où le système global atomes + champ de la cavité est décrit par un vecteur d'état, en nous restreignant au sous-espace à une excitation pour le système atomique. Nous faisons le lien avec l'approche de type système ouvert en déterminant l'expression des taux de l'équation maîtresse et illustrons leur comportement pour différentes conditions initiales. Nous évaluons l'intensité rayonnée par le système de N atomes et étudions plus en détails le cas de 2 atomes, notamment au travers de l'évolution de l'intrication entre ces deux derniers. Nous explorons des effets de dépendance temporelle supplémentaire liés à une modulation du système atomes + champ de la cavité, cette situation étant typiquement rencontrée lorsqu'un des miroirs de la cavité oscille [17]. Dans la dernière section, nous évoquons succinctement l'effet de la distance entre atomes, auparavant négligé.

Enfin, le cinquième chapitre a pour but d'aller au-delà de la restriction à une seule excitation répartie dans le système atomique. Nous nous basons sur la *théorie des pseudomodes* [23, 8] permettant d'écrire une équation maîtresse markovienne pour le système atomes + pseudomodes de la cavité.

Nous clôturons ce travail par une conclusion synthétisant les résultats obtenus et mentionnons quelques perspectives.

Chapitre 1

L'opérateur densité

I Etats purs

Dans cette section, nous rappelons les postulats de la physique quantique [9] pour un système fermé se trouvant avec *certitude* à l'instant t dans l'état $|\psi(t)\rangle$. On parle alors d'état *pur*.

Postulat 1 : A tout système physique fermé est associé un espace d'Hilbert \mathcal{H} défini sur le corps des complexes \mathbb{C} , appelé *espace des états du système*, dont les éléments de norme unité, appelés *vecteurs d'états*, représentent les états possibles du système.

Postulat 2 : Tout système fermé est caractérisé par un opérateur *hamiltonien* \hat{H} hermitique qui gouverne l'évolution temporelle de l'état du système conformément à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$$

où \hbar est la constante de Planck réduite.

Une version équivalente de ce deuxième postulat s'exprime de la manière suivante. L'évolution d'un système fermé est descriptible par une *transformation unitaire* $\hat{U}(t_2, t_1)$ liant l'état du système entre deux instants t_1 et t_2 :

$$|\psi(t_2)\rangle = \hat{U}(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle$$

L'opérateur d'évolution $\hat{U}(t_2, t_1)$ satisfait lui-même à l'équation de Schrödinger. Lorsque l'hamiltonien \hat{H} du système est indépendant du temps, l'opérateur d'évolution est connecté à l'hamiltonien via :

$$\hat{U}(t_2, t_1) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_2 - t_1)\right)$$

De manière générale, lorsque l'hamiltonien $\hat{H}(t)$ dépend du temps, nous devons ordonner dans le temps ($t_1 > t_2 > \dots > t_n$) l'hamiltonien via l'opérateur T , conduisant à la solution formelle :

$$\hat{U}(t, t_0) = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t') dt'\right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n (\hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \dots \hat{H}(t_n))$$

Postulat 3 : Toute opération de mesure sur un système physique (opération visant à faire interagir le système initialement fermé avec un système extérieur, typiquement un appareil de mesure, pour obtenir des informations sur l'état du système) ne peut donner qu'un ensemble déterminé de résultats et est décrite par la donnée d'un ensemble d'opérateurs $\{\hat{M}_k\}$, dits *opérateurs de mesure*, agissant dans l'espace des états du système, l'indice k se référant aux différents résultats de mesure possibles. Les opérateurs de mesure satisfont la relation de complétude

$$\sum_k \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k = \mathbb{1}$$

Si $|\psi\rangle$ est l'état du système *avant* l'opération de mesure, la probabilité d'obtenir le résultat k vaut

$$p_k = \langle \psi | \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k | \psi \rangle$$

et, si ce résultat a été obtenu, l'état du système *immédiatement après* la mesure est donné par

$$|\psi_k\rangle = \frac{\hat{M}_k |\psi\rangle}{\sqrt{p_k}}$$

La relation de complétude exprime que la somme des probabilités p_k est égale à l'unité. S'il n'est pas requis de connaître l'état du système juste après la mesure, la donnée des opérateurs positifs $\{\hat{E}_k = \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k\}$ suffit et porte le nom de POVM (*positive operator valued measure*). Toute observable \hat{A} peut se décomposer sur ses éléments POVM :

$$\hat{A} = \sum_k a_k \hat{E}_k$$

où a_k sont les valeurs propres de \hat{A} . La réciproque n'est pas forcément vraie : tout POVM ne provient pas nécessairement d'une observable [44]. Les mesures dites *projectives* ne sont qu'un cas particulier des opérations de mesure décrites par le postulat 3 et nous avons dans ce cas $\hat{E}_k = \hat{P}_k^\dagger \hat{P}_k = \hat{P}_k^2 = \hat{P}_k$.

Postulat 4 : L'espace des états d'un système composite est le produit tensoriel des espaces des états individuels des divers constituants du système. Dans le cas d'un système composite constitués de N sous-systèmes, chacun préparé individuellement dans un état $|\psi_i\rangle$ ($i = 1, \dots, N$), l'état du système global est donné par

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle$$

II Etats mixtes

Lorsqu'il est impossible d'associer un unique vecteur d'état $|\psi\rangle$ à un système physique, mais que l'on sait néanmoins qu'il a probabilité p_i d'être dans l'état $|\psi_i\rangle$ ($i = 1, \dots, n$), nous pouvons

définir l'opérateur densité $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (1.1)$$

On dit que le système est dans un *mélange statistique* d'états $|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$ ou dans l'état *mixte* $\hat{\rho}$. Un état pur $|\psi\rangle$ n'est qu'un cas particulier d'un état mixte où l'on a une probabilité égale à 1 d'être dans l'état $|\psi\rangle$. L'opérateur densité est alors donné par le simple projecteur sur $|\psi\rangle$: $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$. Calculons maintenant la valeur moyenne d'une observable \hat{A} dans un état mixte $\hat{\rho}$. La valeur moyenne de \hat{A} dans l'état mixte $\hat{\rho}$ est naturellement définie comme étant la somme des valeurs moyennes de \hat{A} dans l'état pur $|\psi_i\rangle$ pondérées par la probabilité p_i d'être dans l'état pur $|\psi_i\rangle$:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{i=1}^n p_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle = \sum_{i=1}^n p_i \text{Tr} [|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \hat{A}] = \text{Tr} \left[\sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \hat{A} \right] = \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{A}]$$

où nous avons introduit la trace $\text{Tr}[\cdot]$ pouvant être définie comme $\text{Tr}[|\alpha\rangle\langle\beta|] = \langle\beta|\alpha\rangle$. Nous caractérisons maintenant de manière intrinsèque les opérateurs densité. Un opérateur densité est un opérateur hermitique, positif et de trace unité :

$$\hat{\rho} \equiv \text{opérateur densité} \iff \begin{cases} \hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho} \\ \hat{\rho} \geq 0 \equiv \langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle \geq 0 \quad \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H} \\ \text{Tr}[\hat{\rho}] = 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

Comme un opérateur positif est nécessairement hermitique, nous pouvons dire plus brièvement qu'un opérateur densité est un opérateur positif de trace unité. Comme l'opérateur densité est positif ($\hat{\rho} \geq 0$), ses valeurs propres λ_i sont positives ($\lambda_i \geq 0$) et il est toujours possible de le diagonaliser par une transformation unitaire, c'est-à-dire, trouver une base dans laquelle ses vecteurs propres $|\chi_i\rangle$ sont orthogonaux entre eux :

$$\hat{\rho} = \sum_i \lambda_i |\chi_i\rangle\langle\chi_i|, \quad \text{avec} \quad \sum_i \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i$$

Dans une base orthonormée quelconque $\{|n\rangle\}$, $\hat{\rho}$ n'est pas nécessairement diagonal et nous appelons :

- les éléments diagonaux $\rho_{nn} \geq 0 \forall n$ les *populations*
- les éléments non-diagonaux $\rho_{nn'} = \rho_{n'n}^*$ ($n \neq n'$) les *cohérences*

Le phénomène de *décohérence* d'un système quantique, souvent mentionné dans la littérature [52], correspond à la décroissance au cours du temps des éléments non-diagonaux de l'opérateur densité du système (les cohérences), suite à l'interaction du système avec son environnement. Un système quantique (un ensemble d'atomes par exemple) en interaction avec un environnement (le champ électromagnétique par exemple) porte le nom de *système quantique ouvert*.

III Formulation des postulats de la physique quantique avec l'opérateur densité

Nous énonçons maintenant les postulats de la physique quantique [9] dans la formulation de l'opérateur densité.

Postulat 1 : A tout système physique fermé est associé un espace d'Hilbert \mathcal{H} défini sur le corps des complexes \mathbb{C} , appelé *espace des états du système*. A tout instant, l'état du système est décrit par la donnée d'un *opérateur densité* $\hat{\rho}$, opérateur positif de trace unité agissant dans l'espace \mathcal{H} . Si le système est dans un état $\hat{\rho}_i$ avec une probabilité p_i , alors l'opérateur densité du système est $\sum_i p_i \hat{\rho}_i$.

Postulat 2 : Tout système fermé est caractérisé par un opérateur *hamiltonien* \hat{H} hermitique qui gouverne l'évolution temporelle de l'état du système conformément à l'équation de Liouville-von Neumann

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

où \hbar est la constante de Planck réduite.

L'équation de Liouville-von Neumann découle directement de l'équation de Schrödinger. Si les états $|\psi_i\rangle$ évoluent conformément à l'équation de Schrödinger, nous avons

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} &= i\hbar \frac{d}{dt} \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right) = i\hbar \sum_i p_i \frac{d}{dt} (|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) = i\hbar \sum_i p_i \left(\left(\frac{d}{dt} |\psi_i\rangle \right) \langle\psi_i| + |\psi_i\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle\psi_i| \right) \right) \\ &= \sum_i p_i (\hat{H} |\psi_i\rangle \langle\psi_i| - |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \hat{H}^\dagger) = \sum_i p_i (\hat{H} |\psi_i\rangle \langle\psi_i| - |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \hat{H}) = \hat{H} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H} \end{aligned}$$

Postulat 3 : Toute opération de mesure sur un système physique ne peut donner qu'un ensemble déterminé de résultats et est décrite par la donnée d'un ensemble d'opérateurs $\{\hat{M}_k\}$, dits *opérateurs de mesure*, agissant dans l'espace des états du système, l'indice k se référant aux différents résultats de mesure possibles. Les opérateurs de mesure satisfont à la relation de complétude

$$\sum_k \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k = \mathbb{1}$$

Si $\hat{\rho}$ est l'état du système *avant* l'opération de mesure, la probabilité d'obtenir le résultat k vaut

$$p_k = \text{Tr} \left[\hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \hat{\rho} \right]$$

et, si ce résultat a été obtenu, l'état du système *immédiatement après* la mesure est donné par

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{M}_k \hat{\rho} \hat{M}_k^\dagger}{p_k}$$

Si une opération de mesure sur un système est réalisée *sans qu'il ne soit pris connaissance* du résultat de mesure, alors l'état du système après la mesure est, avec certitude, l'état mixte

$$\sum_k p_k \hat{\rho}_k = \sum_k \hat{M}_k \hat{\rho} \hat{M}_k^\dagger$$

Il s'agit justement de la représentation de Kraus (évoquée plus loin) : l'évolution temporelle d'un système S en interaction avec un environnement E peut être vue comme un processus de mesure continu de E sur S (*mesures non-sélectives*) [13, 38] :

$$\hat{\rho}_S(t) = \sum_k \hat{M}_k(t) \hat{\rho}_S(0) \hat{M}_k^\dagger(t) \quad \text{avec} \quad \sum_k \hat{M}_k^\dagger(t) \hat{M}_k(t) = \mathbb{1}$$

Postulat 4 : L'espace des états d'un système composite est le produit tensoriel des espaces des états individuels des divers constituants du système. Dans le cas d'un système composite constitués de N sous-systèmes, chacun préparé individuellement dans un état $\hat{\rho}_i (i = 1, \dots, N)$, l'état du système global est donné par

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_N$$

IV La trace partielle et l'opérateur densité réduit

Dans cette section, nous introduisons une opération importante dans l'étude des systèmes quantiques ouverts. Cette opération, tout aussi fondamentale que le produit tensoriel ou que l'opération d'évolution unitaire en mécanique quantique, porte le nom de *trace partielle* et permet de définir les *opérateurs densité réduits*.

Nous considérons un système composite constitué de 2 parties A et B respectivement d'espace d'Hilbert \mathcal{H}_A et \mathcal{H}_B . Nous pouvons associer un opérateur densité $\hat{\rho}_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ au système global $A + B$. De manière générale, le système global ne peut pas être vu comme 2 sous-systèmes dans les états $\hat{\rho}_A$ et $\hat{\rho}_B$: $\hat{\rho}_{AB} \neq \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$. C'est uniquement le cas lorsque le système global est dans un état *produit*. Bien que de manière générale $\hat{\rho}_{AB} \neq \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$, nous pouvons cependant définir des observables uniquement pertinentes pour le sous-système A de la forme $\hat{A} \otimes \mathbb{1}_B$. Nous définissons alors l'*opérateur densité réduit* $\hat{\rho}_A \in \mathcal{H}_A$ par

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B[\hat{\rho}_{AB}] = \sum_j (\mathbb{1}_A \otimes \langle j_B |) \hat{\rho}_{AB} (\mathbb{1}_A \otimes |j_B\rangle) \quad \text{où } \{|j_B\rangle\} \text{ est une base de } B \quad (1.3)$$

On dit qu'on effectue la trace sur les degrés de liberté de B . L'opérateur densité réduit est positif, de trace égale à 1 et jouit donc pleinement du statut d'opérateur densité. La trace partielle est en réalité l'*unique* opération qui pour toutes observables \hat{A} de A et $\hat{A} \otimes \mathbb{1}_B$ de $A + B$ fournit des statistiques de mesures *identiques* selon que $\hat{A} \otimes \mathbb{1}_B$ soit mesuré sur $A + B$ dans l'état $\hat{\rho}_{AB}$ ou que \hat{A} soit mesuré sur A dans l'état $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B[\hat{\rho}_{AB}]$. Nous avons en particulier pour la valeur moyenne de \hat{A} :

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}_{AB}[\hat{\rho}_{AB}(\hat{A} \otimes \mathbb{1}_B)] = \text{Tr}_A[\hat{\rho}_A \hat{A}]$$

L'évolution temporelle des opérateurs densité réduits est régie par des équations plus compliquées que l'équation de Liouville-von Neumann à laquelle obéit un opérateur densité d'un système fermé. En pratique, les systèmes physiques ne sont jamais totalement isolés de leur environnement et nous devons donc considérer ces équations d'évolution plus complexes pour l'opérateur densité réduit du système physique en question. Dans ce travail, nous nous focalisons sur un type en particulier d'équations d'évolution qui porte le nom d'*équations maîtresses* et qui font l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Equations maîtresses

I Concepts préliminaires

Nous introduisons dans cette section quelques concepts que nous utilisons par la suite au sujet de l'évolution des systèmes quantiques ouverts.

Nous considérons un système quantique ouvert S (système d'intérêt). Ce dernier peut toujours être vu comme un sous-système du système composite $S + E$, où E est l'environnement de S . Les états physiques du système total $S + E$ sont représentés par des opérateurs densité $\hat{\rho}_{tot}(t)$ positifs et de trace unité ($\hat{\rho}_{tot}(t) \geq 0$, $\text{Tr}[\hat{\rho}_{tot}(t)] = 1$). L'opérateur densité réduit du sous-système S ($\hat{\rho}(t)$) est obtenu par l'opération de trace partielle sur E de l'opérateur densité total $\hat{\rho}_{tot}(t)$: $\hat{\rho}(t) = \text{Tr}_E[\hat{\rho}_{tot}(t)]$. Nous considérons un système total $S + E$ fermé régi par l'hamiltonien $\hat{H}_{tot} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_{int}$ où \hat{H}_S et \hat{H}_E sont les hamiltoniens libres et \hat{H}_{int} est l'hamiltonien d'interaction. Comme le système total $S + E$ est fermé, son évolution est unitaire et l'opérateur d'évolution \hat{U}_{tot} conduit à la solution formelle :

$$\hat{U}_{tot}(t) = e^{-i\hat{H}_{tot}t} \quad \Rightarrow \quad \hat{\rho}_{tot}(t) = \hat{U}_{tot}(t)\hat{\rho}_{tot}(0)\hat{U}_{tot}^\dagger(t)$$

En supposant que l'état initial du système total est non corrélé : $\hat{\rho}_{tot}(0) = \hat{\rho}(0) \otimes \hat{\rho}_E(0)$, l'expression de l'opérateur densité réduit $\hat{\rho}(t)$ à l'instant t est donnée par [49]

$$\hat{\rho}(0) \longmapsto \hat{\rho}(t) = \Phi_t \hat{\rho}(0) = \text{Tr}_E [\hat{U}_{tot}(t)\hat{\rho}(0) \otimes \hat{\rho}_E(0)\hat{U}_{tot}^\dagger(t)]$$

où nous avons introduit l'opération quantique (*quantum dynamical map*) Φ_t qui préserve la positivité et la trace unité de l'opérateur densité $\hat{\rho}(t)$. En réalité, Φ_t n'est pas seulement positive mais est *complètement* positive (CP) : Φ_t est CP $\iff \Phi_t \otimes \mathbb{1}_n \geq 0 \forall n$. On parle alors de transformation linéaire complètement positive préservant la trace (*CPTP maps*) [12]. Nous proposons une représentation schématique à la figure 2.1.

En introduisant une base orthonormée de E $\{|\phi_k\rangle\}$ et en supposant pour simplifier que $\hat{\rho}_E(0)$ est dans l'état pur $\hat{\rho}_E(0) = |0\rangle\langle 0|$, nous pouvons écrire explicitement la trace partielle et aboutissons à la représentation de Kraus [33] :

$$\hat{\rho}(t) = \sum_k \hat{M}_k(t)\hat{\rho}(0)\hat{M}_k^\dagger(t), \quad \hat{M}_k(t) = \langle \phi_k | \hat{U}_{tot}(t) | 0 \rangle \quad \text{avec} \quad \sum_k \hat{M}_k^\dagger(t)\hat{M}_k(t) = \mathbb{1}$$

Nous avons une équivalence entre la positivité complète de Φ_t et la décomposition de Kraus : une transformation linéaire Φ_t est complètement positive si et seulement si elle admet une

représentation de Kraus (conséquence du théorème de Choi [14]). Nous introduisons enfin la notion de divisibilité [12]. Lorsque Φ_t admet un inverse Φ_t^{-1} , la dynamique est dite divisible et nous pouvons alors définir la famille de transformations à deux paramètres (deux temps t_1 et t_2) comme

$$\Phi_{t_2, t_1} = \Phi_{t_2} \Phi_{t_1}^{-1} \quad t_2 \geq t_1 \geq 0 \quad \text{tel que} \quad \Phi_{t_2, 0} = \Phi_{t_2, t_1} \Phi_{t_1, 0} \quad \text{avec} \quad \Phi_{t, 0} = \Phi_t$$

La transformation Φ_{t_2, t_1} n'est pas nécessairement positive ou complètement positive. Cependant, si Φ_{t_2, t_1} est positive (respectivement CP), alors on dit que la famille $\{\Phi_{t_2, t_1}, t_2 \geq t_1 \geq 0\}$ est P-divisible (respectivement CP-divisible). Nous donnons à la section suivante un exemple d'un processus CP-divisible (équation maîtresse markovienne sous forme de Lindblad).

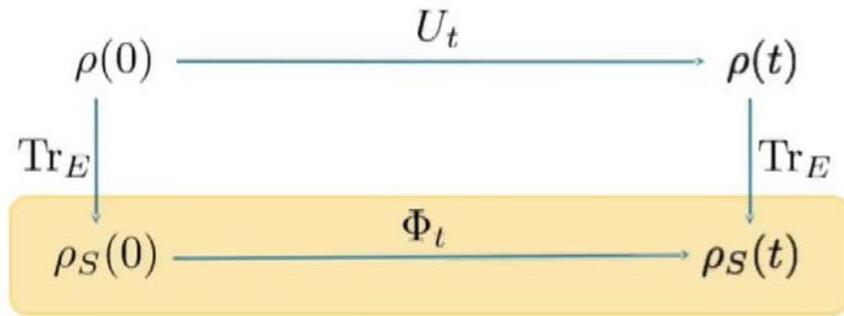


FIGURE 2.1 – Représentation schématique de l'évolution d'un système quantique ouvert. Sur le schéma, ρ désigne l'opérateur du système total $S + E$ et ρ_S désigne l'opérateur densité du sous-système d'intérêt S .

II Equations maîtresses markoviennes : forme de Lindblad

Une équation maîtresse est une équation différentielle locale dans le temps pour l'opérateur densité réduit $\hat{\rho}(t)$ du système S . Dans ce travail, nous dirons qu'une équation maîtresse est *markovienne* lorsque l'approximation dite de Markov (explicitée plus loin) est effectuée, cette dernière éliminant tous les effets de mémoire. Pour les équations maîtresses markoviennes, nous avons le résultat important suivant : une équation maîtresse markovienne préservant la positivité complète et la trace unité d'un opérateur densité $\hat{\rho}(t)$ admet toujours la forme suivante [28, 39] :

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \mathcal{L}(\hat{\rho}(t)) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + D(\hat{\rho}(t))$$

avec

$$D(\hat{\rho}(t)) = \sum_{k,l=1}^{N_S-1} \gamma_{kl} \left(\hat{F}_k \hat{\rho}(t) \hat{F}_l^\dagger - \frac{1}{2} \hat{F}_l^\dagger \hat{F}_k \hat{\rho}(t) - \frac{1}{2} \hat{\rho}(t) \hat{F}_l^\dagger \hat{F}_k \right)$$

où \hat{H} est l'hamiltonien du système S incluant les déplacements d'énergie suite à l'interaction avec son environnement E (*Lamb shift*), N_S est la dimension de l'espace d'Hilbert \mathcal{H}_S du

système S , les opérateurs $\{\hat{F}_k, k = 0, 1, \dots, N_S^2 - 1\}$ avec $\hat{F}_0 = \mathbb{1}$ forment une base de l'espace des opérateurs définis sur \mathcal{H}_S (appelé espace de Liouville) et la matrice γ_{kl} est positive et indépendante du temps. Le Liouvillien $\mathcal{L}(\cdot)$ est composé d'une partie unitaire $-\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \cdot]$ et d'un dissipateur $D(\cdot)$. Comme γ_{kl} est positive (de valeurs propres $\Gamma_k \geq 0$), elle est diagonalisable par une matrice unitaire. En notant u_{lk} cette matrice unitaire et en appliquant cette transformation unitaire sur les opérateurs, nous nous ramenons à la forme standard de Lindblad :

$$\hat{L}_k = \sum_{l=1}^{N_S^2-1} u_{lk} \hat{F}_l \Rightarrow \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \sum_{k=1}^{N_S^2-1} \Gamma_k \left(\hat{L}_k \hat{\rho}(t) \hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2} \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k \hat{\rho}(t) - \frac{1}{2} \hat{\rho}(t) \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k \right)$$

La transformation Φ_t dans le cas d'un processus markovien s'écrit alors $\Phi_t = e^{\mathcal{L}t}$. On dit que \mathcal{L} est le générateur du semi-groupe $\{\Phi_t = e^{\mathcal{L}t}, t \geq 0\}$ (un semi-groupe est un groupe où les éléments n'ont plus nécessairement d'inverse). On montre également que $\Phi_{t_2, t_1} = e^{\mathcal{L}(t_2 - t_1)}$ est complètement positive et donc que la dynamique est CP-divisible.

III Equations maîtresses non-markoviennes

Par opposition au cas markovien, nous dirons dans ce travail qu'une équation maîtresse est *non-markovienne* lorsque l'approximation de Markov n'est pas réalisée. Nous insistons sur le fait que la notion de non-markovianité est vaste et peut être définie de plusieurs manières différentes [37]. Par exemple, une autre définition répandue repose sur la CP-divisibilité : une dynamique est non-markovienne si la famille de transformations Φ_{t_2, t_1} est non CP-divisible [12].

Lorsque la transformation Φ_t admet un inverse Φ_t^{-1} (processus divisible), nous pouvons écrire une équation maîtresse locale dans le temps de la forme [46] :

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \mathcal{L}_t \hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] + \sum_{k=1}^{N_S^2-1} \Gamma_k(t) \left(\hat{L}_k(t) \hat{\rho}(t) \hat{L}_k^\dagger(t) - \frac{1}{2} \hat{L}_k^\dagger(t) \hat{L}_k(t) \hat{\rho}(t) - \frac{1}{2} \hat{\rho}(t) \hat{L}_k^\dagger(t) \hat{L}_k(t) \right)$$

Le Liouvillien \mathcal{L}_t dépend du temps (via $\hat{H}(t), \Gamma_k(t), \hat{L}_k(t)$) et de manière générale, le processus ne représente pas un semi-groupe comme dans le cas markovien. En revanche, nous avons le résultat suivant [12] : la dynamique est CP-divisible si et seulement si tous les taux $\Gamma_k(t)$ sont positifs à chaque instant ($\Gamma_k(t) \geq 0 \forall t$). Il est également possible de montrer qu'une telle équation maîtresse, avec tous les taux $\Gamma_k(t)$ positifs, peut être déduite d'un modèle microscopique où le système interagit avec un ensemble d'environnements bosoniques indépendants [6]. Ce type d'équation maîtresse avec tous les taux $\Gamma_k(t)$ positifs peut ainsi être vu comme une généralisation d'une équation maîtresse markovienne sous forme de Lindblad. Lorsque la transformation Φ_t n'admet pas un inverse Φ_t^{-1} à chaque instant, l'évolution temporelle du système S peut parfois être décrite par une équation maîtresse locale dans le temps dans laquelle les taux $\Gamma_k(t)$ divergent à l'infini aux instants où Φ_t^{-1} n'existe pas. Bien que la CP-divisibilité requiert que tous les taux $\Gamma_k(t)$ soient positifs à chaque instant, nous pouvons nous poser la question suivante : la transformation à un paramètre Φ_t peut-elle être complètement positive lorsque un ou plusieurs taux $\Gamma_k(t)$ deviennent temporairement négatifs ? La réponse est oui mais cela dépend du modèle étudié (au cas par cas) et de la forme explicite des taux $\Gamma_k(t)$. Pour illustrer

ce fait, nous pouvons considérer l'exemple simple d'un système à deux niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$ avec l'opérateur de Lindblad $\hat{L} = \hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$. En considérant uniquement le dissipateur D_t^- avec le taux $\gamma^-(t)$, nous avons l'équation maîtresse :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = D_t^-(\hat{\rho}(t)) = \gamma^-(t)\left(\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+ - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right)$$

On peut alors montrer que [34] :

$$\Phi_t \text{ est CP} \iff \int_0^t dt' \gamma^-(t') \geq 0$$

Afin que cette dernière équation maîtresse décrive un processus physique, le taux $\gamma^-(t)$ ne doit pas nécessairement être positif mais son intégrale le doit. Nous illustrons avec un exemple typique à la figure 2.2. Un autre exemple, de type phénoménologique (c'est-à-dire pour lequel nous n'avons pas de modèle microscopique sous-jacent), est de considérer, en plus de la dissipation D_t^- , une contribution d'absorption D_t^+ et une contribution purement décohérente D_t^z données par

$$D_t^+(\hat{\rho}(t)) = \gamma^+(t)\left(\hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_- - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\right), \quad D_t^z(\hat{\rho}(t)) = \gamma^z(t)\left(\hat{\sigma}_z\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_z - \hat{\rho}(t)\right)$$

où $\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+$. On peut alors montrer [35] que la positivité complète se met sous la forme d'inégalités entre les taux $\gamma^-(t)$, $\gamma^+(t)$ et $\gamma^z(t)$. De manière plus générale, une équation maîtresse avec des taux temporairement négatifs peut être physiquement acceptable ($\hat{\rho}(t)$ est CP) à condition que ces taux satisfassent à certaines contraintes. Dans ce travail, nous sommes particulièrement intéressés à étudier les effets de mémoire et de ce fait, notre cadre d'étude est basé sur une équation maîtresse non-markovienne dans laquelle les taux peuvent prendre des valeurs négatives. Dans la section suivante, nous précisons cette équation maîtresse et explicitons son développement.

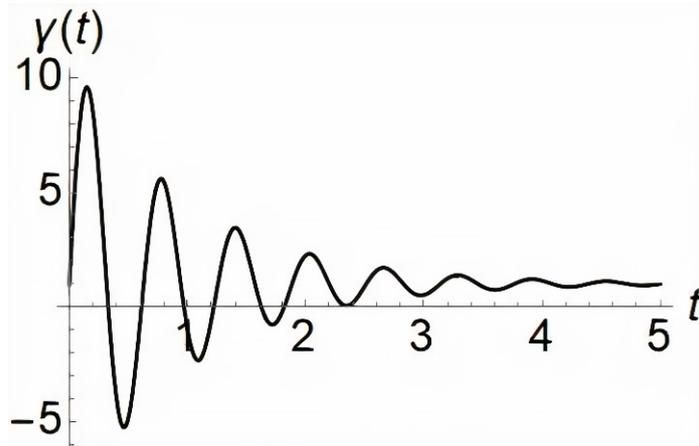


FIGURE 2.2 – Illustration d'un taux $\gamma(t)$ pouvant prendre des valeurs négatives. Nous avons représenté un taux oscillant, prenant des valeurs négatives mais dont l'intégrale reste positive et évoluant asymptotiquement vers une valeur positive (markovienne).

IV Dérivation d'une équation maîtresse non-markovienne dissipative pour un système de N atomes

Dans cette sous-section, nous donnons les différentes étapes dans la dérivation d'une équation maîtresse non-markovienne (sans faire l'approximation dite de Markov) pour un système de N atomes avec interaction dissipative. Nous insistons particulièrement sur les différentes approximations. Dans les deux premières sous-sections, nous restons assez généraux pour ensuite particulariser dans les deux sous-sections suivantes au cas d'une interaction dissipative. Nous aboutissons au final à une équation maîtresse pour l'opérateur densité $\hat{\rho}(t)$ du système de N atomes dans laquelle les taux sont dépendants du temps.

Définitions et expansion au second ordre

Nous considérons un système S d'intérêt dont nous voulons connaître la dynamique ($\hat{\rho}(t)$) d'hamiltonien \hat{H}_S . Le système S est couplé à un environnement E (d'hamiltonien \hat{H}_E) via un hamiltonien d'interaction \hat{H}_{int} . L'hamiltonien \hat{H}_{tot} du système total $S + E$ est donc composé d'une partie libre $\hat{H}_0 = \hat{H}_S + \hat{H}_E$ et d'une partie d'interaction \hat{H}_{int} . L'évolution temporelle de l'opérateur densité du système total $\hat{\rho}_{tot}(t)$ est régie par l'équation de Liouville-von Neumann :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{tot}(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \hat{\rho}_{tot}(t) \right]$$

Nous passons ensuite en schéma d'interaction (I) par rapport à l'hamiltonien libre \hat{H}_0 . Les opérateurs $\hat{O} = \hat{H}_{int}, \hat{\rho}_{tot}(t)$ évoluent au cours du temps via \hat{H}_0 et $\hat{\rho}_{tot,I}(t)$ évolue via $\hat{H}_{int,I}(t)$. En posant dans la suite $\hbar = 1$, nous avons :

$$\hat{O}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{O} e^{-i\hat{H}_0 t}, \quad \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{tot,I}(t) = -i \left[\hat{H}_{int,I}(t), \hat{\rho}_{tot,I}(t) \right]$$

Nous laissons tomber l'indice I dans la suite référant au schéma d'interaction. En intégrant formellement

$$\hat{\rho}_{tot}(t) = \hat{\rho}_{tot}(0) - i \int_0^t dt' \left[\hat{H}_{int}(t'), \hat{\rho}_{tot}(t') \right]$$

et en injectant cette dernière expression dans l'équation de Liouville-von Neumann, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{tot}(t) = -i \left[\hat{H}_{int}(t), \hat{\rho}_{tot}(0) \right] - \int_0^t dt' \left[\hat{H}_{int}(t), \left[\hat{H}_{int}(t'), \hat{\rho}_{tot}(t') \right] \right]$$

L'évolution pour l'opérateur densité $\hat{\rho}(t)$ du système S est obtenue en prenant la trace partielle Tr_E sur les degrés de liberté de l'environnement E :

$$\frac{d}{dt} \text{Tr}_E [\hat{\rho}_{tot}(t)] = \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -i \text{Tr}_E \left\{ \left[\hat{H}_{int}(t), \hat{\rho}_{tot}(0) \right] \right\} - \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left\{ \left[\hat{H}_{int}(t), \left[\hat{H}_{int}(t'), \hat{\rho}_{tot}(t') \right] \right] \right\}$$

Redfield equation

Nous faisons maintenant une série d'approximations afin d'aboutir à une équation locale dans le temps pour l'opérateur densité $\hat{\rho}(t)$. L'équation locale dans le temps obtenue est dite *Redfield equation*.

La première hypothèse est de considérer un état initial sans corrélation : $\hat{\rho}_{tot}(0) = \hat{\rho}(0) \otimes \hat{\rho}_E(0)$. Dès lors, nous pouvons toujours faire en sorte que [16]

$$\mathrm{Tr}_E \left\{ \left[\hat{H}_{int}(t), \hat{\rho}(0) \otimes \hat{\rho}_E(0) \right] \right\} = 0$$

Cette dernière équation traduit le fait que nous pouvons toujours redéfinir les niveaux d'énergie de \hat{H}_S d'une quantité dépendante de l'état de l'environnement E . La deuxième hypothèse que nous allons réaliser est connue sous le nom d'approximation de Born. Cette dernière consiste à négliger les corrélations à chaque instant t entre S et E . De manière générale, nous pouvons toujours écrire :

$$\hat{\rho}_{tot}(t) = \hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_E(t) + \hat{\rho}_{corr}(t)$$

L'approximation de Born revient à négliger $\hat{\rho}_{corr}(t)$. Cette approximation est justifiée dans l'optique où nous sommes uniquement intéressés par l'évolution du système S et nous n'avons pas accès aux degrés de liberté de l'environnement E . Même si S et E sont intriqués, nous ne pouvons pas mesurer cette intrication $\hat{\rho}_{corr}(t)$ et tout se passe comme si S et E restent décorrélés à chaque instant. La troisième hypothèse consiste à considérer que l'environnement est stationnaire : $\hat{\rho}_E(t) = \hat{\rho}_E(0) \equiv \hat{\rho}_E$. Ces 3 approximations permettent d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = - \int_0^t dt' \mathrm{Tr}_E \left\{ \left[\hat{H}_{int}(t), \left[\hat{H}_{int}(t'), \hat{\rho}(t') \otimes \hat{\rho}_E \right] \right] \right\}$$

Cette équation est non locale dans le temps car elle fait intervenir une intégrale sur tous les $\hat{\rho}(t')$, $0 \leq t' \leq t$. La quatrième approximation consiste à supposer que $\hat{\rho}(t') \simeq \hat{\rho}(t)$, permettant ainsi d'écrire une équation locale dans le temps. Dans la perspective de vouloir rendre compte des effets de mémoire, cette approximation peut sembler trop forte. En effet, en faisant cette approximation, nous négligeons les effets de mémoire liés aux valeurs antérieures prises par $\hat{\rho}$. Cependant, nous ne négligeons pas tous les effets de mémoire. Il intervient également au membre de droite l'hamiltonien d'interaction \hat{H}_{int} aux instants t et t' . Les effets de mémoire liés à l'interaction et à la structure spectrale de l'environnement (comme nous le verrons plus loin) sont donc préservés. Cette quatrième approximation nous amène à l'équation dite *Redfield equation* locale dans le temps :

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = - \int_0^t dt' \mathrm{Tr}_E \left\{ \left[\hat{H}_{int}(t), \left[\hat{H}_{int}(t'), \hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_E \right] \right] \right\} \quad (\text{Redfield equation})$$

L'approximation de Markov, menant à une équation maîtresse markovienne (Lindblad) avec des taux indépendants du temps, consiste à étendre la borne d'intégration supérieure à l'infini :

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = - \int_0^\infty dt' \mathrm{Tr}_E \left\{ \left[\hat{H}_{int}(t), \left[\hat{H}_{int}(t'), \hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_E \right] \right] \right\} \quad (\text{Markov})$$

Cette approximation markovienne est justifiée lorsque le temps typique de corrélation τ_c entre le système S et l'environnement E est très petit devant le temps typique de relaxation τ_R du système S due à l'interaction avec son environnement E ($\tau_c \ll \tau_R$) [16]. Comme nous voulons rendre compte des effets de mémoire liés à la structure spectrale de l'environnement (ne pas négliger τ_c), nous ne réalisons pas l'approximation de Markov et travaillons avec la *Redfield equation*.

Hamiltonien d'interaction

Dans les chapitres suivants, nous étudierons une interaction dissipative entre un système de N atomes et l'environnement que constitue le champ électromagnétique. Nous nous plaçons d'ores et déjà dans ce cadre de travail et considérons l'hamiltonien d'interaction

$$\hat{H}_{int}(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{\mathbf{k}} \left(g_{\mathbf{k},j} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t} \hat{\sigma}_+^{(j)} \otimes \hat{b}_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k},j}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t} \hat{\sigma}_-^{(j)} \otimes \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) \quad (2.1)$$

où $\hat{\sigma}_\pm^{(j)}$ sont les opérateurs d'échelle pour l'atome j , $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ et $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ sont les opérateurs de création et d'annihilation du mode \mathbf{k} du champ, $\omega_{\mathbf{k}}$ est la fréquence associée au mode \mathbf{k} , ω_0 est la fréquence de transition atomique et $g_{\mathbf{k},j}$ sont les forces de couplage entre le mode \mathbf{k} et l'atome j . Dans cet hamiltonien d'interaction, nous avons négligé d'emblée les termes de la forme $\sigma_-^{(i)} \hat{b}_{\mathbf{k}}$ et $\sigma_+^{(i)} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ oscillant à une fréquence $\omega_{\mathbf{k}} + \omega_0$. Cette approximation est connue sous le nom de RWA (*rotating wave approximation*) et est souvent vérifiée en pratique. Cette approximation peut être vue comme une séparation entre les deux échelles de temps $\tau_S \sim 1/\omega_0$ et τ_R : le temps typique d'évolution du système S est très petit devant le temps typique de relaxation de S due à son interaction avec E ($\tau_S \ll \tau_R$). Notons également que cet hamiltonien d'interaction ne fait pas intervenir les positions $\mathbf{r}_i (i = 1, \dots, N)$ des différents atomes. Nous reviendrons plus tard sur ce point lorsque nous discuterons de l'approximation superradiante.

Nous pouvons également réécrire $\hat{H}_{int}(t)$ comme

$$\hat{H}_{int}(t) = \sum_{j=1}^N \left(\hat{\sigma}_+^{(j)}(t) \otimes \hat{E}_j(t) + \hat{\sigma}_-^{(j)}(t) \otimes \hat{E}_j^\dagger(t) \right)$$

avec

$$\hat{E}_j(t) = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k},j} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \hat{b}_{\mathbf{k}} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_-^{(j)}(t) = e^{-i\omega_0t} \hat{\sigma}_-^{(j)}$$

Champ électromagnétique dans l'état du vide et équation maîtresse avec taux dépendant du temps

L'hamiltonien d'interaction étant spécifié, nous devons évaluer le membre de droite de la *Redfield equation*, qui est composé d'une trace partielle et d'un double commutateur. Comme $\hat{H}_{int}(t)$ est composé de 2 termes (de la forme $\hat{\sigma}_+^{(j)}(t) \hat{E}_j(t) + \hat{\sigma}_-^{(j)}(t) \hat{E}_j^\dagger(t)$), ce double commutateur comptabilise en tout 16 termes. Nous spécifions maintenant l'état du champ électromagnétique. Le nombre moyen de photons $\langle \hat{n}(\omega_{\mathbf{k}}) \rangle$ à l'énergie $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ pour un environnement à la température T est donné par la distribution de Bose-Einstein [47] :

$$\langle \hat{n}(\omega_k) \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega_k/k_B T) - 1}$$

Pour une température ambiante $T \simeq 300K$ et des transitions optiques $f_0 \simeq 10^{15}$ Hz, nous avons que $\langle \hat{n}(\omega_k) \rangle \simeq 10^{-15}$. Comme nous nous focalisons par après sur le domaine optique, nous pouvons négliger les effets thermiques et poser $T = 0$. Nous considérons alors que le champ électromagnétique est dans l'état du vide (aucun photon), ce dernier s'écrivant alors $\hat{\rho}_E = |0\rangle\langle 0|$. Concrètement, cela implique que, parmi les 16 termes du double commutateur, seuls 4 termes vont subsister à la trace partielle car

$$\text{Tr}_E \left[\hat{E}_i(t) \hat{E}_j(t') \hat{\rho}_E \right] = \text{Tr}_E \left[\hat{E}_i^\dagger(t) \hat{E}_j^\dagger(t') \hat{\rho}_E \right] = \text{Tr}_E \left[\hat{E}_i^\dagger(t) \hat{E}_j(t') \hat{\rho}_E \right] = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad t \geq t' \geq 0$$

En définissant alors les fonctions de corrélation de l'environnement $f_{ij}(t - t')$ comme

$$f_{ij}(t - t') = e^{i\omega_0(t-t')} \text{Tr}_E \left[\hat{E}_i(t) \hat{E}_j^\dagger(t') \hat{\rho}_E \right] = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k},i} g_{\mathbf{k},j}^* e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t-t')}$$

nous pouvons, après quelques lignes d'algèbre, écrire la *Redfield equation* comme

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \int_0^t dt' \sum_{i,j=1}^N \left(f_{ij}(t-t') \left(\hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_+^{(j)} - \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\rho}(t) \right) + f_{ij}^*(t-t') \left(\hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_+^{(j)} - \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \right) \right)$$

Nous définissons ensuite

$$\int_0^t dt' f_{ij}(t-t') \equiv \frac{1}{2} \gamma_{ij}(t) + i \chi_{ij}(t) \quad (2.2)$$

permettant de réécrire l'équation sous la forme standard

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -i \sum_{i,j=1}^N \chi_{ij}(t) \left[\hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)}, \hat{\rho}(t) \right] + \sum_{i,j=1}^N \gamma_{ij}(t) \left(\hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_+^{(j)} - \frac{1}{2} \left\{ \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)}, \hat{\rho}(t) \right\} \right) \quad (2.3)$$

où $\{.,.\}$ désigne l'anticommutateur. Cette équation maîtresse fait intervenir un hamiltonien de déplacement de Lamb $H_{LS}(t)$ (*Lamb-shift hamiltonian*) et un dissipateur $D_t(\cdot)$, tous deux dépendant du temps au travers des *Lamb shift* $\chi_{ij}(t)$ et des taux $\gamma_{ij}(t)$:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -i[H_{LS}(t), \hat{\rho}(t)] + D_t(\hat{\rho}(t)) \quad (2.4)$$

avec

$$H_{LS}(t) = \sum_{i,j=1}^N \chi_{ij}(t) \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \quad \text{et} \quad D_t(\hat{\rho}(t)) = \sum_{i,j=1}^N \gamma_{ij}(t) \left(\hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\rho}(t) \hat{\sigma}_+^{(j)} - \frac{1}{2} \left\{ \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)}, \hat{\rho}(t) \right\} \right) \quad (2.5)$$

Le temps typique de corrélation τ_c que nous avons introduit n'est rien d'autre que le temps typique de décroissance des fonctions de corrélation de l'environnement $f_{ij}(t-t')$ ($i, j = 1, \dots, N$). Dans la suite de ce travail, nous nous focalisons sur l'évolution dissipative $D_t(\hat{\rho}(t))$ et laissons de côté l'hamiltonien $H_{LS}(t)$.

Chapitre 3

Résolution de l'équation maîtresse superradiante

Dans le chapitre précédent, nous avons établi une équation maîtresse non-markovienne pour un système de N atomes. L'objectif de ce chapitre est de trouver la solution de cette équation maîtresse dans le cas de 2 et 3 atomes. Dans la première section, nous rappelons brièvement la forme de cette équation maîtresse. Dans la deuxième section, nous donnons l'expression de la solution générale pour 2 atomes et décrivons le processus de résolution dans le cas de 3 atomes. Dans la troisième section, nous illustrons la solution pour le cas de deux atomes avec des taux constants et oscillants dans le temps.

I Equation maîtresse superradiante

Nous considérons un système de N atomes identiques. Chaque atome possède 2 états $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ séparés d'une différence d'énergie $\hbar\omega_0$. Nous nous plaçons dans le régime superradiant : la distance typique entre atomes r_{ij} ($i, j = 1, \dots, N$) est plus petite que la longueur d'onde correspondant à la transition atomique ($\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$). La condition de régime superradiant se lit donc $r_{ij} \ll \lambda_0$. Nous considérons une partie dissipative de l'équation maîtresse avec des taux dépendant du temps $\gamma_{ij}(t)$. Nous supposons de plus que cette matrice $\gamma_{ij}(t)$ est composée de 2 taux uniquement : $\gamma_{ii}(t) \equiv \gamma_0(t)$ et $\gamma_{ij}(t) \equiv \gamma(t)$ pour $i \neq j$. Dans la limite superradiante, nous pouvons écrire l'équation maîtresse suivante pour l'opérateur densité $\hat{\rho}$ du système de N atomes :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + D_t(\hat{\rho}) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_{i,j=1}^N \gamma_{ij}(t) \left(\hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(j)} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\rho} - \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \right) \quad (3.1)$$

où $\hat{\sigma}_\pm^{(i)}$ sont les opérateurs d'échelle (de Pauli) pour l'atome i :

$$\hat{\sigma}_\pm^{(i)} = \mathbb{1}_2^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_2^{(i-1)} \otimes \hat{\sigma}_\pm \otimes \mathbb{1}_2^{(i+1)} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_2^{(N)}$$

avec $\hat{\sigma}_\pm$ les opérateurs d'échelle à 1 atome : $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ et $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$. \hat{H} est l'hamiltonien du système de N atomes. En choisissant le zéro d'énergie au niveau de l'état $|G\rangle \equiv |g, \dots, g\rangle$ ($E_G = 0$), celui-ci s'écrit comme $\hat{H} = \hbar\omega_0 \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{\sigma}_-^{(i)}$. Dans la suite, nous laissons de côté

l'évolution unitaire induite par \hat{H} pour nous concentrer sur la partie dissipative $D_t(\hat{\rho})$. De ce fait, nous nous attachons à résoudre l'équation maîtresse :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \gamma_0(t) \sum_{i=1}^N \left(\hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(i)} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\rho} - \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \right) + \gamma(t) \sum_{i \neq j=1}^N \left(\hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(j)} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\rho} - \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \right)$$

Nous pouvons réécrire cette dernière équation comme

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \gamma_0(t) \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(i)} - \frac{1}{2} \gamma_0(t) (\hat{S}_0 \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{S}_0) + \gamma(t) \sum_{i \neq j=1}^N \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(j)} - \frac{1}{2} \gamma(t) (\hat{S} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{S}) \quad (3.2)$$

où nous avons introduit les opérateurs collectifs

$$\hat{S}_0 = \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \quad \text{et} \quad \hat{S} = \sum_{i \neq j=1}^N \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \quad (3.3)$$

II Résolution de l'équation maîtresse

II.1 Deux atomes

Réécrivons l'équation maîtresse dans le cas de 2 atomes de manière explicite :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \gamma_0(t) \left(\hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{\sigma}_-^{(2)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(2)} - \frac{1}{2} \hat{S}_0 \hat{\rho} - \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{S}_0 \right) + \gamma(t) \left(\hat{\sigma}_-^{(1)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{\sigma}_-^{(2)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(1)} - \frac{1}{2} \hat{S} \hat{\rho} - \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{S} \right)$$

où

$$\hat{S}_0 = \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{\sigma}_-^{(2)} \quad \text{et} \quad \hat{S} = \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{\sigma}_-^{(1)}$$

Pour 2 atomes, les états de base sont au nombre de 4 et se notent dans la base computationnelle $\{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$. Le premier élément du vecteur ket fait référence à l'atome 1 et le second à l'atome 2. Comme les atomes sont identiques, nous préconisons de faire un changement vers une base qui prend en compte le nombre total d'excitations dans le système atomique. Pour 2 atomes, il s'agit de la base constituée des 3 états symétriques $|2\rangle = |ee\rangle$, $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle + |ge\rangle)$, $|0\rangle = |gg\rangle$ et de l'état anti-symétrique $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle - |ge\rangle)$. Nous exprimons les opérateurs d'échelle dans cette base :

$$\hat{\sigma}_+^{(1)} = |eg\rangle\langle gg| + |ee\rangle\langle ge| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle\langle 0| + |-\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle +| - |2\rangle\langle -| \right) = (\hat{\sigma}_-^{(1)})^\dagger$$

$$\hat{\sigma}_+^{(2)} = |ge\rangle\langle gg| + |ee\rangle\langle eg| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle\langle 0| - |-\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle +| + |2\rangle\langle -| \right) = (\hat{\sigma}_-^{(2)})^\dagger$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(1)} = |2\rangle\langle 2| + \frac{1}{2} (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) + \frac{1}{2} (|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|) \\ \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{\sigma}_-^{(2)} = |2\rangle\langle 2| + \frac{1}{2} (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) - \frac{1}{2} (|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|) \\ \hat{S}_0 = \hat{\sigma}_+^{(1)} \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(2)} \hat{\sigma}_-^{(2)} = 2|2\rangle\langle 2| + |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{\sigma}_-^{(2)} = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|) + \frac{1}{2}(|-\rangle\langle+| - |+\rangle\langle-|) \\ \hat{\sigma}_+^{(2)}\hat{\sigma}_-^{(1)} = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|) - \frac{1}{2}(|-\rangle\langle+| - |+\rangle\langle-|) \\ \hat{S} = \hat{\sigma}_+^{(1)}\hat{\sigma}_-^{(2)} + \hat{\sigma}_+^{(2)}\hat{\sigma}_-^{(1)} = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| \end{cases}$$

Nous pouvons remarquer que \hat{S}_0 et \hat{S} sont tous deux diagonaux dans cette base. \hat{S}_0 est l'hamiltonien du système atomique (à un facteur $\hbar\omega_0$ près) et \hat{S} agit dans le sous-espace à une excitation. Nous pouvons réécrire l'équation maîtresse en remplaçant les différents opérateurs par leur expression :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho} = & \frac{1}{2}\gamma_0(t) \left(|0\rangle\langle+| + |0\rangle\langle-| + |+\rangle\langle 2| - |-\rangle\langle 2| \right) \hat{\rho} \left(|+\rangle\langle 0| + |-\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle+| - |2\rangle\langle-| \right) \\ & + \frac{1}{2}\gamma_0(t) \left(|0\rangle\langle+| - |0\rangle\langle-| + |+\rangle\langle 2| + |-\rangle\langle 2| \right) \hat{\rho} \left(|+\rangle\langle 0| - |-\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle+| + |2\rangle\langle-| \right) \\ & + \frac{1}{2}\gamma(t) \left(|0\rangle\langle+| + |0\rangle\langle-| + |+\rangle\langle 2| - |-\rangle\langle 2| \right) \hat{\rho} \left(|+\rangle\langle 0| - |-\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle+| + |2\rangle\langle-| \right) \\ & + \frac{1}{2}\gamma(t) \left(|0\rangle\langle+| - |0\rangle\langle-| + |+\rangle\langle 2| + |-\rangle\langle 2| \right) \hat{\rho} \left(|+\rangle\langle 0| + |-\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle+| - |2\rangle\langle-| \right) \\ & - \frac{1}{2}\gamma_0(t) \left(2|2\rangle\langle 2| + |+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| \right) \hat{\rho} - \frac{1}{2}\gamma_0(t) \hat{\rho} \left(2|2\rangle\langle 2| + |+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| \right) \\ & - \frac{1}{2}\gamma(t) \left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| \right) \hat{\rho} - \frac{1}{2}\gamma(t) \hat{\rho} \left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| \right) \end{aligned}$$

Nous projetons ensuite cette équation (à gauche et à droite) sur les différents états de base. Nous adoptons la notation $\rho_{ij}(t) = \langle i | \hat{\rho}(t) | j \rangle$ et $\frac{d}{dt}\rho_{ij}(t) = \dot{\rho}_{ij}(t)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho}_{22}(t) = -2\gamma_0(t)\rho_{22}(t) \\ \dot{\rho}_{2+}(t) = -\frac{1}{2}(3\gamma_0(t) + \gamma(t))\rho_{2+}(t) \\ \dot{\rho}_{2-}(t) = -\frac{1}{2}(3\gamma_0(t) - \gamma(t))\rho_{2-}(t) \\ \dot{\rho}_{20}(t) = -\gamma_0(t)\rho_{20}(t) \\ \dot{\rho}_{+-}(t) = -\gamma_0(t)\rho_{+-}(t) \\ \dot{\rho}_{++}(t) = -(\gamma_0(t) + \gamma(t))\rho_{++}(t) + (\gamma_0(t) + \gamma(t))\rho_{22}(t) \\ \dot{\rho}_{--}(t) = -(\gamma_0(t) - \gamma(t))\rho_{--}(t) + (\gamma_0(t) - \gamma(t))\rho_{22}(t) \\ \dot{\rho}_{+0}(t) = -\frac{1}{2}(\gamma_0(t) + \gamma(t))\rho_{+0}(t) + (\gamma_0(t) + \gamma(t))\rho_{2+}(t) \\ \dot{\rho}_{-0}(t) = -\frac{1}{2}(\gamma_0(t) - \gamma(t))\rho_{-0}(t) - (\gamma_0(t) - \gamma(t))\rho_{2-}(t) \\ \dot{\rho}_{00}(t) = (\gamma_0(t) + \gamma(t))\rho_{++}(t) + (\gamma_0(t) - \gamma(t))\rho_{--}(t) \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Afin de simplifier davantage, nous remarquons que nous pouvons introduire les taux $\gamma_{\pm}(t) = \gamma_0(t) \pm \gamma(t)$. Les équations sur les éléments $\rho_{22}(t), \rho_{2\pm}(t), \rho_{20}(t)$ et $\rho_{+-}(t)$ sont de la forme $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$ et peuvent être directement résolues :

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) \longrightarrow x(t) = \exp\left\{\int_0^t dt' a(t')\right\}x(0)$$

Les équations portant sur $\rho_{\pm\pm}(t)$ et $\rho_{\pm 0}(t)$ dépendent respectivement des éléments $\rho_{22}(t)$ et $\rho_{2\pm}(t)$ qui sont désormais connus. Celles-ci sont donc de la forme $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$ avec $b(t)$ connu et sont résolues via :

$$x(t) = \exp\left\{\int_0^t dt' a(t')\right\}x(0) + \exp\left\{\int_0^t dt' a(t')\right\} \int_0^t dt' \exp\left\{-\int_0^{t'} dt'' a(t'')\right\}b(t')$$

Nous revenons dans l'annexe A sur la dérivation de cette solution. L'équation portant sur $\rho_{00}(t)$ est résolue par intégration du membre de droite ou en exploitant la condition de normalisation $\text{Tr}[\hat{\rho}(t)] = 1$. La solution de l'équation maîtresse superradiante s'écrit comme :

$$\rho_{22}(t) = \exp\left\{-2 \int_0^t dt' \gamma_0(t')\right\}\rho_{22}(0), \quad \rho_{2\pm}(t) = \exp\left\{-\int_0^t dt' (\gamma_0(t') + \frac{1}{2}\gamma_{\pm}(t'))\right\}\rho_{2\pm}(0) \quad (3.5)$$

$$\rho_{20}(t) = \exp\left\{-\int_0^t dt' \gamma_0(t')\right\}\rho_{20}(0), \quad \rho_{+-}(t) = \exp\left\{-\int_0^t dt' \gamma_0(t')\right\}\rho_{+-}(0) \quad (3.6)$$

$$\rho_{\pm\pm}(t) = \exp\left\{-\int_0^t dt' \gamma_{\pm}(t')\right\}\rho_{\pm\pm}(0) + \exp\left\{-\int_0^t dt' \gamma_{\pm}(t')\right\} \int_0^t dt' \gamma_{\pm}(t') \rho_{22}(t') \exp\left\{-\int_0^{t'} dt'' \gamma_{\pm}(t'')\right\} \quad (3.7)$$

$$\rho_{\pm 0}(t) = \exp\left\{-\int_0^t dt' \frac{\gamma_{\pm}(t')}{2}\right\}\rho_{\pm 0}(0) \pm \exp\left\{-\int_0^t dt' \frac{\gamma_{\pm}(t')}{2}\right\} \int_0^t dt' \gamma_{\pm}(t') \rho_{2\pm}(t') \exp\left\{-\int_0^{t'} dt'' \frac{\gamma_{\pm}(t'')}{2}\right\} \quad (3.8)$$

$$\rho_{00}(t) = 1 - \rho_{22}(t) - \rho_{++}(t) - \rho_{--}(t) \quad (3.9)$$

Si nous souhaitons repasser dans la base computationnelle, en notant symboliquement la transformation des vecteurs de base comme $|e, g\rangle = U|n\rangle$ ($n = 2, +, -, 0$) avec la matrice unitaire U donnée par

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

nous devons simplement appliquer cette transformation à la matrice densité :

$$\rho_{\{e,g\}}(t) = U\rho_{n,n'}(t)U^\dagger$$

II.2 Trois atomes

Nous procédons de la même manière pour le cas à 3 atomes. Le nombre d'états de base est égal à $2^3 = 8$. Nous souhaitons de nouveau écrire l'équation dans une base appropriée en termes du nombre total d'excitations du système atomique. En notant $\phi^\pm = \exp\{\pm \frac{2i\pi}{3}\}$, un choix possible est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} |3, 1\rangle = |eee\rangle \\ |2, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|eeg\rangle + |ege\rangle + |gee\rangle) \\ |2, 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|eeg\rangle + \phi^- |ege\rangle + \phi^+ |gee\rangle) \\ |2, 3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|eeg\rangle + \phi^+ |ege\rangle + \phi^- |gee\rangle) \\ |1, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|gge\rangle + |geg\rangle + |egg\rangle) \\ |1, 2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}(|gge\rangle + \phi^- |geg\rangle + \phi^+ |egg\rangle) \\ |1, 3\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}(|gge\rangle + \phi^+ |geg\rangle + \phi^- |egg\rangle) \\ |0, 1\rangle = |ggg\rangle \end{array} \right.$$

Le premier nombre n du vecteur ket $|n, g_n\rangle$ fait référence au nombre d'excitations. Le second nombre g_n indique la dégénérescence et permet de différencier des vecteurs ket ayant un même nombre d'excitations. Par exemple $|2, 3\rangle$ est le troisième vecteur ket à 2 excitations. Nous pouvons exprimer les opérateurs d'échelle $\hat{\sigma}_\pm^{(i)}$ dans cette base nombre d'excitations. Nous donnons la forme de $\hat{\sigma}_-^{(1)}$ dans cette base.

$$\hat{\sigma}_-^{(1)} = \begin{array}{l} \langle 3, 1| \\ \langle 2, 1| \\ \langle 2, 2| \\ \langle 2, 3| \\ \langle 1, 1| \\ \langle 1, 2| \\ \langle 1, 3| \\ \langle 0, 1| \end{array} \begin{pmatrix} |3, 1\rangle & |2, 1\rangle & |2, 2\rangle & |2, 3\rangle & |1, 1\rangle & |1, 2\rangle & |1, 3\rangle & |0, 1\rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi^-/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi^+/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -\phi^+/3 & -\phi^-/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^-/3 & 1/3 & -2\phi^+/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^+/3 & -2\phi^-/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & -\phi^+/\sqrt{3} & -\phi^-/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $\hat{\sigma}_-^{(2)}$ est obtenue à partir de $\hat{\sigma}_-^{(1)}$ en substituant $\phi^\pm \rightarrow \phi^\mp$, la matrice $\hat{\sigma}_-^{(3)}$ en substituant $\phi^\pm \rightarrow 1$ et les matrices $\hat{\sigma}_\pm^{(i)}$ en prenant l'hermitien conjugué des $\hat{\sigma}_-^{(i)}$. L'opérateur collectif \hat{S} est diagonal et agit dans le sous-espace à 1 et 2 excitations. En exprimant l'équation maîtresse dans cette base nombre d'excitations, nous constatons de nouveau que nous pouvons trouver les solutions de proche en proche pour les éléments de la matrice densité. Afin de décrire le processus de résolution, nous définissons les populations $P_{ng_n}(t)$ et les cohérences $C_{ng_n, n'g_{n'}}(t)$ de la matrice densité $\rho_{ng_n, n'g_{n'}}(t)$ ($n, n' = 0, 1, 2, 3$) :

$$P_{ng_n}(t) = \langle n, g_n | \hat{\rho}(t) | n, g_n \rangle, \quad C_{ng_n, n'g_{n'}}(t) = \langle n, g_n | \hat{\rho}(t) | n', g_{n'} \rangle \quad (n \neq n')$$

Nous faisons les constatations suivantes sur le système d'équations différentielles :

- Certains éléments de la matrice densité $\rho(t)$ sont directement solubles car ils obéissent à une équation du type $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$. En ne considérant que les éléments diagonaux de $\rho(t)$ et ceux supérieurs à la diagonale (les éléments inférieurs à la diagonale étant

redondants comme $\rho(t)$ est hermitique), ces éléments directement solubles, au nombre total de 11, constituent la première ligne de $\rho(t)$ ($P_{33}(t)$, $C_{31,21}(t)$, $C_{31,22}(t)$, $C_{31,23}(t)$, $C_{31,11}(t)$, $C_{31,12}(t)$, $C_{31,13}(t)$, $C_{31,01}(t)$) ainsi que les 3 cohérences $C_{21,22}(t)$, $C_{21,23}(t)$ et $C_{22,23}(t)$.

- Tous les autres éléments de la matrice densité $\rho(t)$ obéissent à une équation du type $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$ avec $b(t)$ connu. Par exemple, les équations portant sur les $P_{2i}(t)$ ($i = 1, 2, 3$) dépendent de la résolution de $P_{33}(t)$, qui est connu. Nous notons cette dépendance $P_{2i}(P_{33}(t), t)$ ($i = 1, 2, 3$) qui signifie que la solution des éléments $P_{2i}(t)$ ($i = 1, 2, 3$) dépend de la connaissance de $P_{33}(t)$. Nous avons les dépendances suivantes : $P_{1i}(P_{2i}(t), t)$ ($i = 1, 2, 3$), $P_{01} = (P_{1i}(t), t)$ ($i = 1, 2, 3$), $C_{2i,1j}(C_{31,2i}(t), t)$ ($i, j = 1, 2, 3$), $C_{2i,01}(C_{31,1i}(t), t)$ ($i = 1, 2, 3$), $C_{1i,01}(C_{2i,1j}(t), t)$ ($i, j = 1, 2, 3$) et enfin, les 3 éléments $C_{11,12}(t)$, $C_{11,13}(t)$, $C_{12,13}(t)$ dépendent de $C_{21,22}(t)$, $C_{21,23}(t)$, $C_{22,23}(t)$. Nous notons une structure de résolution en cascade. Les populations à n excitations dépendent des populations à $n + 1$ excitations ($n = 0, 1, 2$). Les cohérences à nn' excitations dépendent des cohérences à $(n + 1)(n' + 1)$ excitations ($n = 1, 2$ et $n' = 0, 1$). Il semble assez naturel de penser que cette structure de résolution en cascade reste d'application dans le cas général à $N > 3$ atomes.

Une fois la matrice densité connue dans la base nombre d'excitations $|n, g_n\rangle$, nous pouvons repasser dans la base computationnelle via $|\{e, g\}\rangle = U|n, g_n\rangle$ et $\rho_{\{e, g\}} = U\rho_{ng_n, n'g_{n'}}(t)U^\dagger$ ($n, n' = 0, 1, 2, 3$) avec la matrice unitaire U donnée par

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\phi^+ & \frac{1}{\sqrt{3}}\phi^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\phi^- & \frac{1}{\sqrt{3}}\phi^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\phi^+ & -\frac{1}{\sqrt{3}}\phi^- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\phi^- & -\frac{1}{\sqrt{3}}\phi^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons testé pour $N = 3$ le cas où les taux non diagonaux peuvent être différents (avec toujours un même taux diagonal $\gamma_0(t)$). Nous n'avons plus un seul $\gamma(t)$ mais 3 ($\gamma_{12}(t)$, $\gamma_{13}(t)$ et $\gamma_{23}(t)$). Dans ce cas de figure, il n'est plus possible de résoudre en cascade les équations. Par exemple, l'équation portant sur $\rho_{31,21}(t)$ fait intervenir les éléments $\rho_{31,22}(t)$ et $\rho_{31,23}(t)$ qui sont eux-mêmes inconnus. Le constat est similaire lorsque nous imposons des taux diagonaux différents ($\gamma_{11}(t)$, $\gamma_{22}(t)$ et $\gamma_{33}(t)$) avec un même taux non diagonal $\gamma(t)$.

III Illustration pour des taux constants et oscillants

Dans la section précédente, nous avons raisonné avec des taux étant des fonctions arbitraires du temps. Dans cette section, nous illustrons davantage et particularisons à deux types de dépendance temporelle :

- deux taux constants : $\gamma_0(t) = \gamma_0$ et $\gamma(t) = \gamma$
- un taux $\gamma_0(t)$ constant ($\gamma_0(t) = \gamma_0$) et un taux $\gamma(t)$ oscillant ($\gamma(t) = \gamma_A \sin(\omega t)$)

Dans le cas de deux taux constants, nous pouvons trouver des expressions analytiques pour les différents éléments de la matrice densité $\rho(t)$. Dans le cas de deux atomes, nous avons en particulier les expressions suivantes pour les populations dans la base nombre d'excitations :

$$\rho_{22}(t) = e^{-2\gamma_0 t}, \quad \rho_{++}(t) = \frac{\gamma + \gamma_0}{\gamma + 3\gamma_0} e^{-2(\gamma+2\gamma_0)t} (e^{(\gamma+3\gamma_0)t} - 1)$$

$$\rho_{--}(t) = -\frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma - 3\gamma_0} e^{(\gamma-\gamma_0)t} (e^{(\gamma-3\gamma_0)t} - 1), \quad \rho_{00}(t) = 1 - \rho_{22}(t) - \rho_{++}(t) - \rho_{--}(t)$$

Nous représentons ces 4 populations à la figure 3.1. Dans la seconde situation où $\gamma(t) = \gamma_A \sin(\omega t)$, les éléments $\rho_{\pm\pm}(t)$ et $\rho_{\pm 0}(t)$ ne sont pas évaluables analytiquement et nous devons donc recourir à une intégration numérique. Pour ce faire, nous utilisons la fonction *ode15s* de *Matlab*. Aux figures 3.2 et 3.3, nous représentons l'évolution des populations pour deux valeurs différentes de la fréquence ω .

De manière générale, nous constatons que pour un $\gamma(t)$ oscillant à la fréquence ω , nous avons un comportement oscillant dans la solution $\rho(t)$ à la même fréquence ω . A la figure 3.2, l'amplitude des oscillations est relativement grande (comparativement à la figure 3.3) car la période des oscillations est du même ordre de grandeur que le temps de relaxation (pour atteindre les valeurs asymptotiques). A la figure 3.3, nous observons que la population de l'état symétrique $\rho_{++}(t)$ (en jaune) est davantage marquée par ces oscillations par rapport aux autres populations.

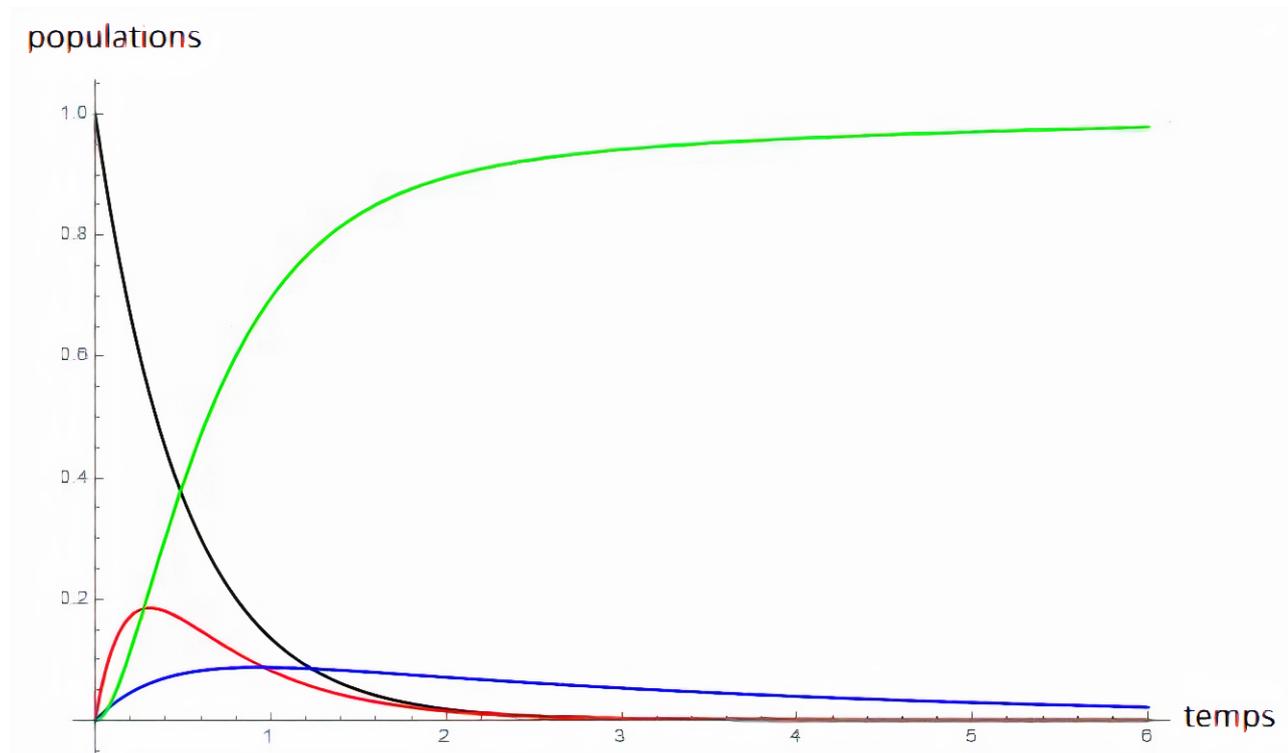


FIGURE 3.1 – Evolution des populations pour 2 atomes dans le cas de **taux constants** ($\gamma_0 = 1$, $\gamma = 0.7$) avec la condition initiale $\rho_{22}(0) = 1$: $\rho_{22}(t)$ en noir, $\rho_{++}(t)$ en rouge, $\rho_{--}(t)$ en bleu et $\rho_{00}(t)$ en vert.

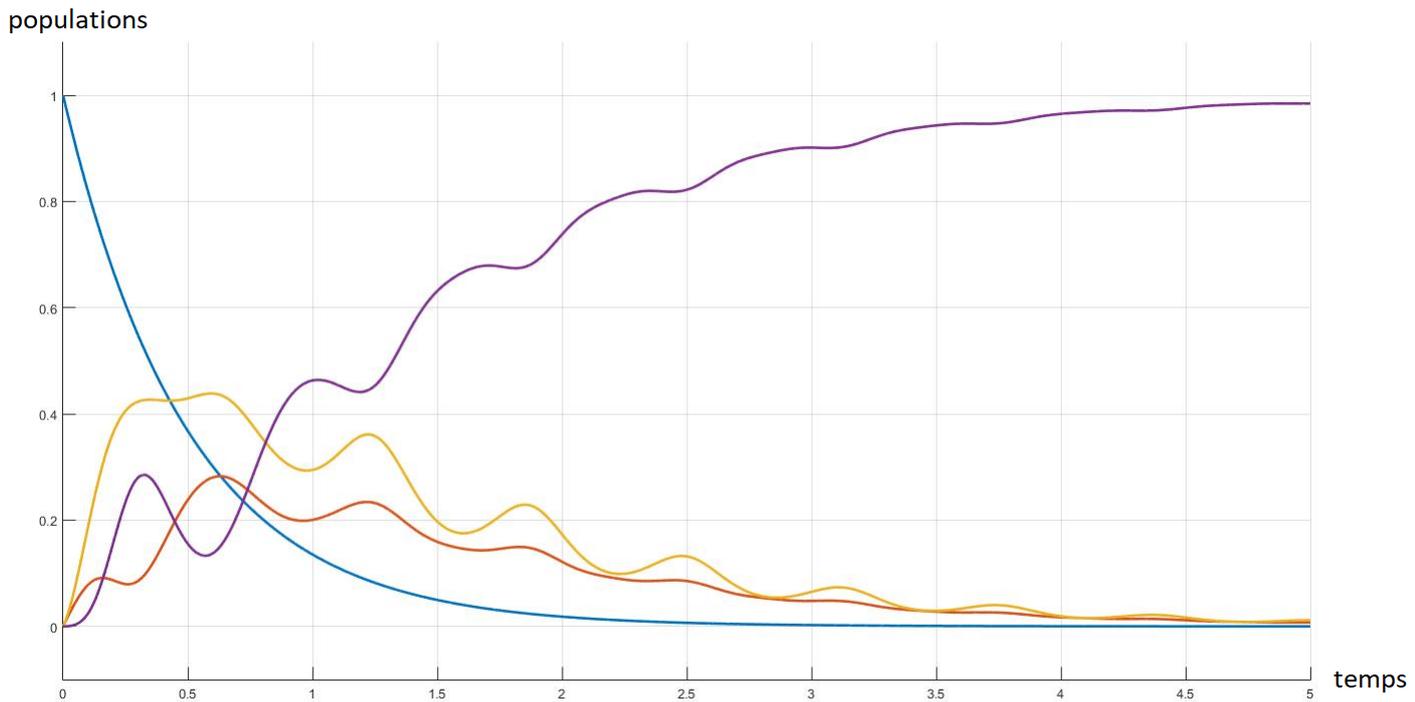


FIGURE 3.2 – Evolution des populations pour 2 atomes dans le cas d'un $\gamma(t)$ oscillant ($\gamma_0 = 1$, $\gamma_A = 3$, $\omega = \mathbf{10}$) avec la condition initiale $\rho_{22}(0) = 1$: $\rho_{22}(t)$ en bleu, $\rho_{++}(t)$ en jaune, $\rho_{eg, eg}(t)$ en rouge et $\rho_{00}(t)$ en mauve.

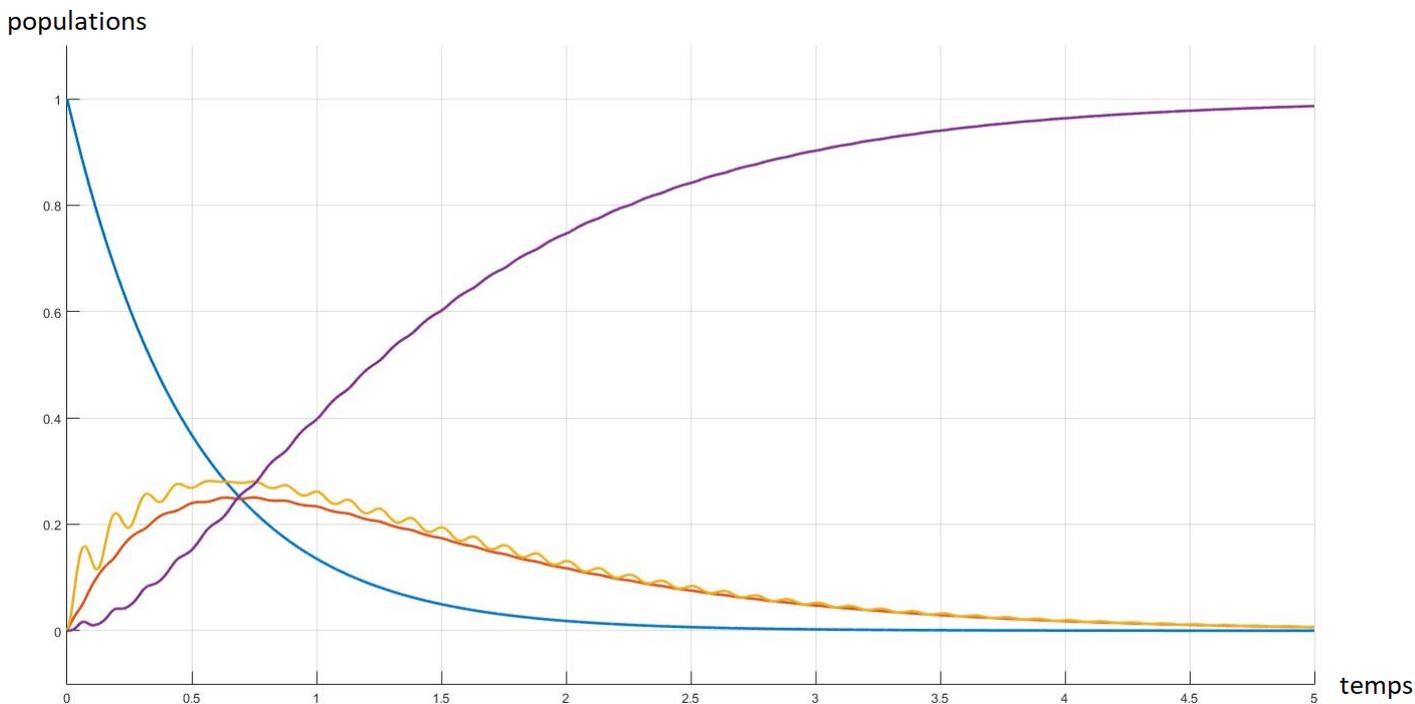


FIGURE 3.3 – Evolution des populations pour 2 atomes dans le cas d'un $\gamma(t)$ oscillant ($\gamma_0 = 1$, $\gamma_A = 3$, $\omega = \mathbf{50}$) avec la condition initiale $\rho_{22}(0) = 1$: $\rho_{22}(t)$ en bleu, $\rho_{++}(t)$ en jaune, $\rho_{eg, eg}(t)$ en rouge et $\rho_{00}(t)$ en mauve.

Chapitre 4

Dynamique dissipative d'atomes en cavité

I Définition du système

Nous proposons d'étudier dans ce chapitre la dynamique interne d'un ensemble de N atomes identiques placés dans une cavité. Nous nous focalisons sur une interaction dissipative : le système atomique échange de l'énergie avec les différents modes du champ électromagnétique supportés par la cavité. Nous utilisons une approche exacte où l'état du système global atomes + champ électromagnétique est décrit par un vecteur ket $|\psi(t)\rangle$ évoluant conformément à l'équation de Schrödinger [43]. Nous considérons l'état initial suivant : une seule excitation est présente dans le système atomique et le champ de la cavité est dans l'état du vide $|0\rangle$ (aucun photon). L'hamiltonien du système global est composé de l'hamiltonien libre \hat{H}_0 des atomes et du champ et de l'hamiltonien d'interaction \hat{H}_{int} entre les atomes et le champ. En posant dans la suite $\hbar = 1$, les hamiltoniens \hat{H}_0 et \hat{H}_{int} sont donnés par :

$$\hat{H}_0 = \omega_0 \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{\sigma}_-^{(i)} + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}}, \quad \hat{H}_{int} = \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{k}} \left(g_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{b}_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) \quad (4.1)$$

où $\hat{\sigma}_\pm^{(i)}$ sont les opérateurs d'échelle pour l'atome i , $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ et $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ sont les opérateurs de création et d'annihilation du mode \mathbf{k} du champ, $\omega_{\mathbf{k}}$ est la pulsation associée au mode \mathbf{k} , \mathbf{r}_i est la position (classique) de l'atome i et $g_{\mathbf{k}}$ sont les forces de couplage entre le mode \mathbf{k} et les atomes (identiques pour tous les atomes). L'hamiltonien \hat{H}_{int} conserve le nombre total d'excitations (pas de terme $\hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{b}_{\mathbf{k}}$ et $\hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \rightarrow$ RWA). Afin de s'affranchir de l'évolution de \hat{H}_0 , nous passons en schéma d'interaction (indice I) :

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle$$
$$\hat{H}_{int,I}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{k}} \left(g_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i - (\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t)} \hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{b}_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k}}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i - (\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \right)$$
$$i \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = \hat{H}_{int,I}(t) |\psi_I(t)\rangle$$

Etant donné notre restriction au sous-espace à une excitation, l'état initial peut s'écrire :

$$|\psi_I(0)\rangle = \sum_{i=1}^N a_i(0) \hat{\sigma}_+^{(i)} |g_1, \dots, g_N\rangle |0\rangle, \quad \sum_{i=1}^N |a_i(0)|^2 = 1 \quad (4.2)$$

où $|g_1, \dots, g_N\rangle$ désigne l'état où tous les atomes sont dans leur état $|g\rangle$. L'état du système global à l'instant t est donné par :

$$|\psi_I(t)\rangle = \sum_{i=1}^N a_i(t) \hat{\sigma}_+^{(i)} |g_1, \dots, g_N\rangle |0\rangle + \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(t) |g_1, \dots, g_N\rangle \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle, \quad \sum_{i=1}^N |a_i(t)|^2 + \sum_{\mathbf{k}} |c_{\mathbf{k}}(t)|^2 = 1 \quad (4.3)$$

où $a_i(t)$ et $c_{\mathbf{k}}(t)$ sont respectivement les amplitudes de probabilité de trouver l'atome i dans l'état excité et le photon émis par le système atomique dans le mode \mathbf{k} à l'instant t . Nous développons le membre de droite de l'équation de Schrödinger $\hat{H}_{int,I}(t) |\psi_I(t)\rangle$: les termes $\hat{b}_{\mathbf{k}} |0\rangle$ et $\hat{\sigma}_-^{(i)} |g_1, \dots, g_N\rangle$ donnent une contribution nulle et il subsiste :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int,I}(t) |\psi_I(t)\rangle &= \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_+^{(i)} |g_1, \dots, g_N\rangle \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'}(t) g_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger |0\rangle + \\ &\quad \sum_{i,j=1}^N a_j(t) \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\sigma}_+^{(j)} |g_1, \dots, g_N\rangle \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle \end{aligned}$$

Nous utilisons les relations de commutation $\hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger - \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ et d'anticommutation $\hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\sigma}_+^{(j)} + \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)} = \delta_{ij}$ permettant de simplifier cette dernière expression comme :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int,I}(t) |\psi_I(t)\rangle &= \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(t) g_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t} \hat{\sigma}_+^{(i)} |g_1, \dots, g_N\rangle |0\rangle \\ &\quad + \sum_{\mathbf{k}'} g_{\mathbf{k}'}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}'} - \omega_0)t} \sum_{i=1}^N a_i(t) e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_i} |g_1, \dots, g_N\rangle \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger |0\rangle \end{aligned}$$

En prenant la dérivée temporelle de $|\psi_I(t)\rangle$, en l'égalant à $-i\hat{H}_{int,I}(t) |\psi_I(t)\rangle$ et en projetant sur les états $\hat{\sigma}_+^{(j)} |g_1, \dots, g_N\rangle |0\rangle$ et $|g_1, \dots, g_N\rangle \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$, nous aboutissons à un système d'équations différentielles couplées pour les amplitudes $a_j(t) (j = 1, \dots, N)$ et $c_{\mathbf{k}}(t)$:

$$\begin{cases} \dot{a}_j(t) = -i \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(t) g_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} & j = 1, \dots, N \\ \dot{c}_{\mathbf{k}}(t) = -i g_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t} \sum_{i=1}^N a_i(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \end{cases} \quad (4.4)$$

Nous intégrons formellement l'équation portant sur $c_{\mathbf{k}}(t)$ avec la condition initiale $c_{\mathbf{k}}(0) = 0$:

$$c_{\mathbf{k}}(t) = -i g_{\mathbf{k}}^* \int_0^t dt' e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t'} \sum_{i=1}^N a_i(t') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i}$$

Nous injectons cette dernière expression dans l'équation portant sur $a_j(t) (j = 1, \dots, N)$:

$$\dot{a}_j(t) = - \int_0^t dt' \sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)(t-t')} \sum_{i=1}^N e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ij}} a_i(t') \quad \text{avec } \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \quad (j = 1, \dots, N) \quad (4.5)$$

Cette dernière équation est intégró-différentielle : l'évolution de l'amplitude de probabilité $a_j(t)$ dépend de l'intégrale de toutes les amplitudes de probabilité $a_i(t)$.

Dans la suite, nous étudions le cas d'atomes supposés immobiles dans une cavité. Cette dernière est caractérisée par une fréquence centrale ω_c et une largeur spectrale λ . Nous supposons ici que la cavité est accordée à la transition atomique ($\omega_c = \omega_0$) et que la largeur spectrale de la cavité est bien plus petite que sa fréquence centrale ($\lambda \ll \omega_c = \omega_0$). Typiquement, pour des transitions optiques, $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ est de l'ordre de 10^{15} Hz et λ est typiquement de l'ordre du MHz [30, 11]. Nous faisons une hypothèse supplémentaire permettant de simplifier les développements : nous nous plaçons dans le régime superradiant $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}| \ll \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$ ($i, j = 1, \dots, N$). Concrètement, dans l'équation d'évolution pour $a_j(t)$, le facteur $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{ij}} \simeq 1$. En effet,

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{ij} = |\mathbf{k}|r_{ij} \cos(\mathbf{k}, \mathbf{r}_{ij}) = \frac{\omega_k}{c} r_{ij} \cos(\mathbf{k}, \mathbf{r}_{ij}) \simeq \frac{\omega_0}{c} r_{ij} \cos(\mathbf{k}, \mathbf{r}_{ij}) \ll 1$$

où les modes ω_k supportés par la cavité sont proches de ω_0 comme $\lambda \ll \omega_0$. Nous introduisons maintenant la densité spectrale de modes de la cavité $J(\omega)$ permettant de prendre la limite continue $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int d\omega$:

$$\frac{g^2}{\pi} J(\omega) \equiv \sum_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_k) |g_{\mathbf{k}}|^2 \quad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\omega J(\omega) = \pi \quad \text{et} \quad g > 0 \quad (4.6)$$

où g mesure la force de couplage de la transition atomique à tous les modes du champ de la cavité (plus d'indice \mathbf{k}) et $\delta(\omega - \omega_k)$ est la distribution de Dirac. Nous pouvons donc écrire :

$$\sum_{\mathbf{k}} |g_{\mathbf{k}}|^2 e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t-t')} = \frac{g^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega J(\omega) e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')}$$

Dans les expressions précédentes, nous avons étendu la borne d'intégration inférieure à $-\infty$. Cette approximation est valable pour autant que $J(\omega)$ s'annule dans la région des fréquences négatives, ce qui est justifié dans notre cas comme $\omega_0 \gg \lambda$. Nous précisons maintenant le profil de la densité spectrale de modes qui, pour une cavité, est typiquement lorentzien :

$$J(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad \text{avec} \quad \lambda > 0 \quad (4.7)$$

II Solutions pour les amplitudes de probabilité

Nous nous attachons dans cette section à expliciter le développement de la solution pour les amplitudes de probabilité $a_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) et $c_{\mathbf{k}}(t)$. Notre point de départ est l'équation intégral-différentielle pour $a_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) dans laquelle nous appliquons la condition du régime superradiant $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{ij}} \simeq 1$ ainsi que la limite continue :

$$\dot{a}_j(t) = -\frac{g^2}{\pi} \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega J(\omega) e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')} \sum_{i=1}^N a_i(t') \quad j = 1, \dots, N \quad (4.8)$$

Nous sommes ramenés à devoir évaluer la transformée de Fourier de $J(\omega)$. Cette dernière n'est rien d'autre que la fonction de corrélation de l'environnement $f(t-t')$, que constitue dans notre cas le champ de la cavité :

$$f(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega J(\omega) e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\lambda}{\lambda^2 + (\omega - \omega_0)^2} e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')}$$

La transformée de Fourier d'une lorentzienne est bien connue et peut être évaluée par le théorème des résidus. Les pôles de l'intégrand sont en $\omega = \omega_0 \pm i\lambda$ et nous fermons le contour par un arc de cercle Γ_R (de rayon $R > 0$) situé dans la partie inférieure du plan complexe, permettant d'écrire notre intégrale comme :

$$\int_{-R}^R d\omega = \oint dz - \int_{\Gamma_R} dz \quad \text{avec } z \in \mathbb{C}$$

En posant $t-t' = \tau \geq 0$ et en paramétrant Γ_R comme $z = R e^{i\theta}$, l'intégrale sur Γ_R s'écrit :

$$\int_0^\pi (i R e^{i\theta} d\theta) \frac{\lambda}{\lambda^2 + (R e^{i\theta} - \omega_0)^2} e^{i\tau(\omega_0 - R \cos(\theta))} e^{R\tau \sin(\theta)} \xrightarrow{(R \rightarrow \infty)} 0$$

étant donné le sens de parcours ($\sin(\theta) \leq 0$). L'intégrale cherchée est donc égale à celle sur le contour fermé qui est évaluée par le théorème des résidus. Nous avons ici un résidu en $\omega_0 - i\lambda$, ce qui donne :

$$f(\tau) = (-2\pi i) \frac{\lambda}{(\omega_0 - i\lambda) - (\omega_0 + i\lambda)} e^{-i(\omega_0 - i\lambda - \omega_0)\tau} = \pi e^{-\lambda\tau} \quad (4.9)$$

La corrélation entre les atomes et la cavité décroît sur un temps typique $\tau_c \sim \frac{1}{\lambda}$. Dans la limite formelle $\lambda \rightarrow 0$, $\tau_c \rightarrow \infty$ et $f(\tau)$ devient constant, menant à une équation pour les amplitudes de probabilité $a_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) :

$$\dot{a}_j(t) = -g^2 \int_0^t dt' \sum_{i=1}^N a_i(t') \quad (\lambda = 0) \quad j = 1, \dots, N$$

En prenant la somme sur j ($j = 1, \dots, N$) de part et d'autre de l'équation et en définissant $a_S(t)$ comme étant la somme des amplitudes de probabilité $a_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$), nous obtenons :

$$a_S(t) \equiv \sum_{j=1}^N a_j(t) \implies \dot{a}_S(t) = -N g^2 \int_0^t dt' a_S(t') \quad (\lambda = 0) \quad (4.10)$$

En prenant la dérivée par rapport à t de cette dernière équation, nous arrivons à l'équation bien connue de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{a}_S(t) = -Ng^2 a_S(t) \implies a_S(t) = C_1 \cos(\sqrt{N}gt) + C_2 \sin(\sqrt{N}gt)$$

Etant donné la condition $\dot{a}_S(0) = 0$, la solution est donnée par $a_S(t) = a_S(0) \cos(\sqrt{N}gt)$. Dans la limite $\lambda \rightarrow 0$, nous avons donc des oscillations de Rabi à fréquence $\Omega = \sqrt{N}g$. La solution pour $a_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) peut être déduite de $a_S(t)$ en remarquant que le membre de droite de l'équation pour $a_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) est identique $\forall j = 1, \dots, N$. Prendre alors la somme sur $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, N$) de $\dot{a}_i(t)$ est effectivement égal à $(N-1)\dot{a}_j(t)$:

$$(N-1)\dot{a}_j(t) - \sum_{i \neq j=1}^N \dot{a}_i(t) = 0$$

Cette dernière équation est trivialement résolue :

$$(N-1)a_j(t) - \sum_{i \neq j=1}^N a_i(t) = (N-1)a_j(0) - \sum_{i \neq j=1}^N a_i(0)$$

En ajoutant de part et d'autre de l'équation $a_S(t) = \sum_{i=1}^N a_i(t)$, il subsiste à gauche de l'égalité $Na_j(t)$:

$$Na_j(t) = a_S(t) + (N-1)a_j(0) - \sum_{i \neq j=1}^N a_i(0)$$

En divisant de part et d'autre par N et en simplifiant, nous obtenons :

$$a_j(t) = \frac{1}{N}a_S(t) + \frac{N-1}{N}a_j(0) - \frac{1}{N}\sum_{i \neq j=1}^N a_i(0) = a_j(0) + \frac{1}{N}(a_S(t) - a_S(0)) \quad (4.11)$$

Nous pouvons reprendre exactement le même raisonnement afin de résoudre l'équation intégral-différentielle portant sur $a_S(t)$ avec un $\lambda \neq 0$. En annexe B, nous proposons une seconde alternative de résolution par transformée de Laplace. En prenant la dérivée par rapport à t de l'équation :

$$\dot{a}_S(t) = -Ng^2 \int_0^t dt' e^{-\lambda(t-t')} a_S(t') \quad (4.12)$$

Nous aboutissons à :

$$\ddot{a}_S(t) = -Ng^2(-\lambda) \int_0^t dt' e^{-\lambda(t-t')} a_S(t') - Ng^2 a_S(t) = -\lambda \dot{a}_S(t) - Ng^2 a_S(t) \quad (4.13)$$

Cette équation différentielle du second ordre fait maintenant intervenir un terme d'amortissement en dérivée première avec pour coefficient λ . Nous appliquons la méthode classique de résolution de ce type d'équation différentielle (recherche des racines r_k du polynôme caractéristique) :

$$r^2 + \lambda r + Ng^2 = 0 \implies r_{\pm} = -\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4Ng^2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \frac{\lambda}{2}\delta_N$$

$$\text{avec } \begin{cases} \delta_N = \sqrt{1 - R_N^2} \\ R_N = \sqrt{N} \frac{g}{(\lambda/2)} \end{cases} \quad (4.14)$$

La solution pour $a_S(t)$ s'écrit alors :

$$a_S(t) = C_+ e^{r_+ t} + C_- e^{r_- t} = C_+ \left(e^{r_+ t} - \frac{r_+}{r_-} e^{r_- t} \right)$$

où nous avons utilisé le fait que $\dot{a}_S(0) = 0$ dans la dernière égalité. En factorisant $(1 - \frac{r_+}{r_-})$ et en substituant r_{\pm} par leur expression en fonction de λ et δ_N , nous obtenons :

$$a_S(t) = C_+ \left(1 - \frac{r_+}{r_-}\right) e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left\{ \frac{1}{2} e^{\frac{\lambda t}{2} \delta_N} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda t}{2} \delta_N} + \frac{1}{2\delta_N} e^{\frac{\lambda t}{2} \delta_N} - \frac{1}{2\delta_N} e^{-\frac{\lambda t}{2} \delta_N} \right\}$$

Nous reconnaissons les fonctions hyperboliques dans les accolades et $C_+ (1 - \frac{r_+}{r_-})$ correspond simplement à la condition initiale $a_S(0)$. Nous pouvons finalement écrire $a_S(t)$ comme :

$$a_S(t) = a_S(0) G(t) \quad \text{avec } G(t) = e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left\{ \cosh\left(\delta_N \frac{\lambda t}{2}\right) + \frac{1}{\delta_N} \sinh\left(\delta_N \frac{\lambda t}{2}\right) \right\} \quad (4.15)$$

où $G(t)$ est la fonction de dissipation (dans la littérature, on parle plus souvent de fonction de décohérence mais nous traitons ici d'un processus dissipatif et gardons de ce fait cette terminologie plus adéquate dans notre cas). La solution pour les amplitudes $a_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) étant connue, nous pouvons évaluer les amplitudes $c_{\mathbf{k}}(t)$ dans l'approximation du régime superradiant en posant sans perte de généralité $\mathbf{r}_i = 0$ ($i = 1, \dots, N$), ce qui donne :

$$c_{\mathbf{k}}(t) = -ig_{\mathbf{k}}^* \int_0^t dt' e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t'} \sum_{i=1}^N a_i(t') = -ig_{\mathbf{k}}^* \int_0^t dt' e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t'} a_S(t')$$

Nous exprimons $a_S(t')$ sous forme exponentielle afin d'effectuer l'intégration. En introduisant de nouveau les racines du polynôme caractéristique r_{\pm} , nous obtenons :

$$c_{\mathbf{k}}(t) = -ig_{\mathbf{k}}^* a_S(0) \left\{ \left(\frac{\delta_N + 1}{2\delta_N} \right) \frac{e^{r_+ t + i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t} - 1}{r_+ + i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)} + \left(\frac{\delta_N - 1}{2\delta_N} \right) \frac{e^{r_- t + i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t} - 1}{r_- + i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)} \right\}$$

Nous proposons maintenant d'analyser le comportement de la fonction de dissipation $G(t)$. Cette dernière dépend du paramètre $\delta_N = \sqrt{1 - R_N^2}$ avec R_N dépendant lui-même de 3 paramètres : le nombre d'atomes N , la force de couplage atomes-cavité g et la largeur spectrale de la cavité λ via l'expression $R_N = \sqrt{N} \frac{g}{(\lambda/2)}$. Suivant que R_N soit plus petit ou plus grand que l'unité, δ_N est respectivement réel ou imaginaire et le comportement de la solution est radicalement différent :

$$\begin{aligned}
 - R_N < 1 : G(t) &= e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left\{ \cosh \left(\sqrt{1 - R_N^2} \frac{\lambda t}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 - R_N^2}} \sinh \left(\sqrt{1 - R_N^2} \frac{\lambda t}{2} \right) \right\} \\
 - R_N > 1 : G(t) &= e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left\{ \cos \left(\sqrt{R_N^2 - 1} \frac{\lambda t}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{R_N^2 - 1}} \sin \left(\sqrt{R_N^2 - 1} \frac{\lambda t}{2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

La fonction de dissipation est réelle pour toute valeur de R_N mais nous distinguons les 2 régimes suivants. Lorsque $R_N < 1$, le comportement est monotone décroissant. Lorsque $R_N > 1$, δ_N est imaginaire et les fonctions hyperboliques deviennent des sinusoides et le comportement est oscillant amorti (oscillations de Rabi amorties à la fréquence $\sqrt{R_N^2 - 1} \frac{\lambda}{2}$). L'amortissement se fait sur une échelle de temps liée au facteur exponentiel $e^{-\frac{\lambda t}{2}}$, donc sur une échelle de temps de l'ordre de l'inverse de $\frac{\lambda}{2}$. Nous retombons d'ailleurs sur des oscillations de Rabi (non amorties) dans la limite $\lambda \rightarrow 0$. Dans la littérature, on parle souvent de couplage fort (respectivement faible) lorsque $R_N > 1$ (respectivement $R_N < 1$) mais nous insistons sur le fait que la transition entre les 2 régimes dépend du couplage atomes-environnement (g) mais également de sa structure spectrale (λ) et du nombre d'atomes (N). Nous représentons R_N en fonction de N à la figure 4.1. Nous portons également en graphique la fonction de dissipation $G(t)$ dans les deux régimes à la figure 4.2.

Nous pouvons encore faire quelques remarques. Lorsque $R_N \ll 1$, nous pouvons développer $G(t)$ au premier ordre en R_N . Nous utilisons les développements limités $(1 - \epsilon)^n \simeq 1 - n\epsilon$ et $\frac{1}{1 - \epsilon} \simeq 1 + \epsilon$ afin d'arriver à

$$G(t) \simeq e^{-\frac{1}{2}\sqrt{N}gt} + \frac{1}{2}R_N e^{-\frac{\lambda t}{2}} \sinh \left(\frac{\lambda t}{2} \left(1 - \frac{1}{2}R_N \right) \right), \quad R_N \ll 1$$

Nous avons une fonction de dissipation $G(t)$ purement exponentielle avec un taux d'évolution $\sqrt{N}g$ (indépendant de λ) auquel s'ajoute une correction en R_N . Nous pouvons également faire un développement limité à temps très courts de $G(t)$. A l'ordre le plus bas, nous avons :

$$G(t) \simeq \left(1 - \frac{\lambda t}{2} \right) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\delta_N \frac{\lambda t}{2} \right)^2 + \frac{\lambda t}{2} \right\} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \delta_N^2 \right) \left(\frac{\lambda t}{2} \right)^2, \quad \lambda t \ll 1$$

Les termes du premier ordre en t se sont simplifiés et nous avons une décroissance quadratique à temps très courts dans les deux types de régime. Cette décroissance quadratique à temps très courts est un phénomène quantique assez général connu sous le nom de *Quantum Zeno Effect* [50]. Enfin, en reprenant l'expression des amplitudes de probabilité $a_j(t)$:

$$a_j(t) = a_j(0) + \frac{1}{N} (a_S(t) - a_S(0)) = a_j(0) + \frac{1}{N} a_S(0) (G(t) - 1) \quad (4.16)$$

Nous constatons que celles-ci n'évoluent pas lorsque trivialement $G(t) = 1$ mais également lorsque la somme de toutes les amplitudes de probabilité initiales est nulle ($a_S(0) = 0$). Pour 2 atomes, cela correspond à un état initial anti-symétrique de la forme $\{a_1(0), a_2(0)\} = \{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ en choisissant les $a_i(0)$ ($i = 1, 2$) réelles. Pour N atomes et en choisissant des $a_i(0)$ ($i = 1, \dots, N$) réelles, l'ensemble de ces valeurs correspond à l'intersection dans un espace à N dimensions de l'hyperplan $\sum_{i=1}^N a_i(0) = 0$ et de l'hypersphère $\sum_{i=1}^N (a_i(0))^2 = 1$ de

la condition de normalisation. Au contraire, pour un état initialement symétrique de la forme $a_i(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} (i = 1, \dots, N)$, les amplitudes de probabilité évoluent au cours du temps et tendent vers une valeur nulle pour $t \rightarrow \infty$.

Nous aurions pu considérer dès notre point de départ un désaccord $\Delta = \omega_c - \omega_0$ entre la fréquence centrale de la cavité et la fréquence de la transition atomique. En reprenant un développement similaire, les pôles de la densité spectrale $J(\omega)$ sont alors situés en $(\omega_0 + \Delta) \pm i\lambda$, menant ainsi à une fonction de corrélation $f(\tau)$ proportionnelle à $e^{-(\lambda+i\Delta)\tau}$. L'effet est un shift $\lambda \rightarrow \lambda + i\Delta$ dans toutes les quantités résultantes. En particulier, la fonction de dissipation $G_\Delta(t) \in \mathbb{C}$ est alors donnée par [4] :

$$G_\Delta(t) = e^{-\frac{(\lambda+i\Delta)t}{2}} \left\{ \cosh \left(\sqrt{(\lambda+i\Delta)^2 - 4Ng^2} \frac{t}{2} \right) + \frac{\lambda+i\Delta}{\sqrt{(\lambda+i\Delta)^2 - 4Ng^2}} \sinh \left(\sqrt{(\lambda+i\Delta)^2 - 4Ng^2} \frac{t}{2} \right) \right\}$$

Le terme sous la racine est en général complexe et l'analyse exacte du comportement de $G_\Delta(t)$ est difficile. Nous avons cependant pour de grands désaccords $|\Delta| \gg \lambda$, où nous approximations $\lambda + i\Delta \simeq i\Delta$, simplifiant l'expression de $G_\Delta(t)$ comme :

$$G_\Delta(t) \simeq \left\{ \cos \left(\frac{\Delta}{2} t \right) - i \sin \left(\frac{\Delta}{2} t \right) \right\} \left\{ \cos \left(\sqrt{\Delta^2 + 4Ng^2} \frac{t}{2} \right) + \frac{i\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + 4Ng^2}} \sin \left(\sqrt{\Delta^2 + 4Ng^2} \frac{t}{2} \right) \right\}$$

Nous avons alors un comportement oscillant de $G_\Delta(t)$ pour $|\Delta| \gg \lambda$. Par ailleurs, dans la limite du couplage faible $R_N < 1$, des simulations numériques ont montré [48, 51] qu'à partir d'un certain désaccord Δ , le comportement devient oscillant (alors qu'il est monotone dans le cas $R_N < 1$ et $\Delta = 0$).

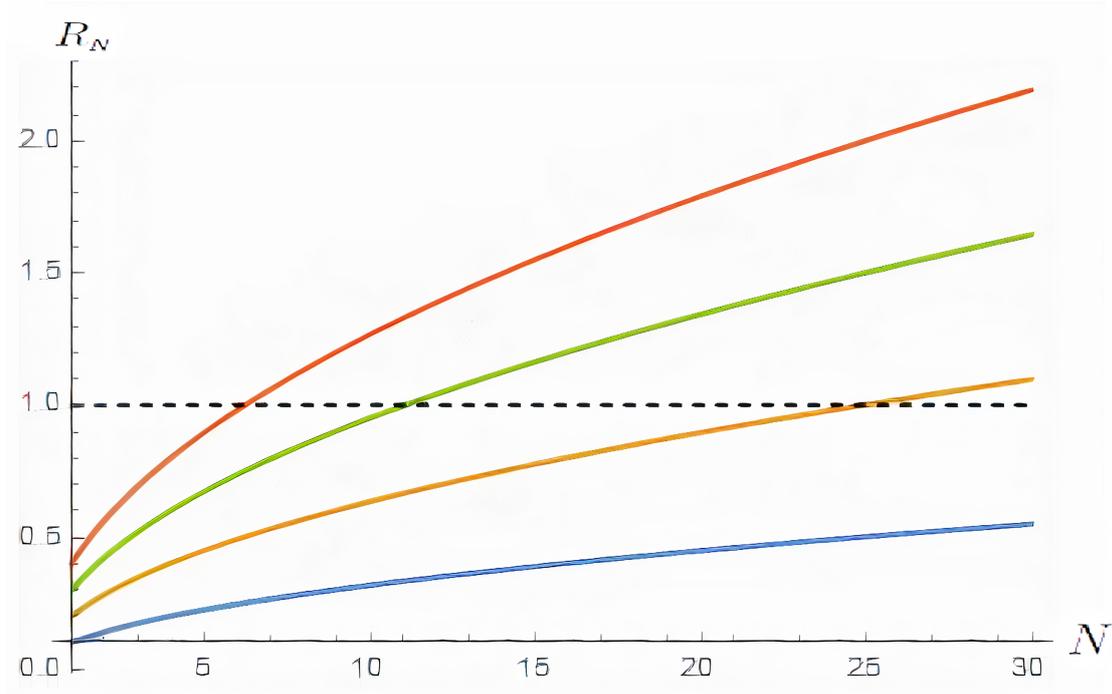


FIGURE 4.1 – R_N en fonction de N (variant de 1 à 30) pour différentes valeurs de $\frac{g}{(\lambda/2)}$ (0.1 en bleu, 0.2 en jaune, 0.3 en vert et 0.4 en rouge). La courbe en pointillé noire indique la transition entre les 2 régimes.

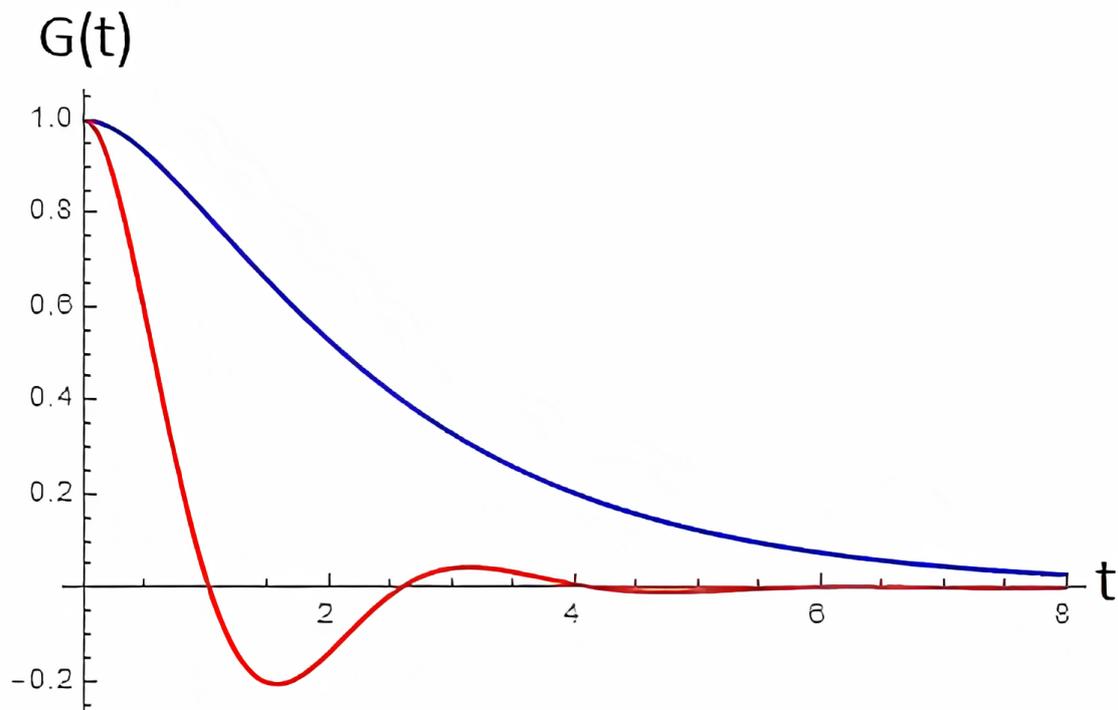


FIGURE 4.2 – Fonction de dissipation $G(t)$ ($\frac{\lambda}{2} = 1$) tracée pour les deux types de régime : $\delta_N = \frac{1}{2}$ en bleu et $\delta_N = 2i$ en rouge. La courbe bleue tend moins rapidement vers 0 que la rouge étant donné les fonctions hyperboliques croissantes qui contrecarrent l'effet de $e^{-\frac{\lambda t}{2}}$.

III Mise sous forme d'une équation maîtresse et détermination des taux

III.1 Expression générale des taux $\gamma_0(t)$ et $\gamma(t)$

Maintenant que nous connaissons la solution exacte restreinte au sous-espace à une excitation et dans le régime superradiant $r_{ij} \ll \lambda_0$ ($i, j = 1, \dots, N$) pour les amplitudes de probabilité $a_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$), nous souhaitons remettre le problème sous la forme d'une équation maîtresse afin de déterminer l'expression des taux $\gamma_{ii}(t) \equiv \gamma_0(t)$ et $\gamma_{ij}(t) \equiv \gamma(t)$ $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, N$). Concrètement, nous devons exprimer l'opérateur densité réduit du système atomique en fonction de ces amplitudes $a_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$), insérer son expression dans l'équation maîtresse superradiante et projeter cette dernière afin de déterminer un système d'équations liant les $a_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) et $\gamma_{ij}(t)$.

Nous exprimons en premier lieu l'opérateur densité total $\hat{\rho}_{tot,I}$ du système total atomes + champ de la cavité. Etant donné que nous avons adopté une approche en termes de vecteur d'état $|\psi_I(t)\rangle$, $\hat{\rho}_{tot,I}$ est simplement donné par le projecteur $|\psi_I(t)\rangle\langle\psi_I(t)|$. Nous laissons tomber dans la suite l'indice I référant au schéma d'interaction afin d'alléger les notations. Nous rappelons l'expression de $|\psi_I(t)\rangle$:

$$|\psi_I(t)\rangle = \sum_{i=1}^N a_i(t) \hat{\sigma}_+^{(i)} |g_1, \dots, g_N\rangle |0\rangle + \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(t) |g_1, \dots, g_N\rangle \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle, \quad \sum_{i=1}^N |a_i(t)|^2 + \sum_{\mathbf{k}} |c_{\mathbf{k}}(t)|^2 = 1$$

Nous employons également la notation $|G\rangle = |g_1, \dots, g_N\rangle$. Il vient alors :

$$\hat{\rho}_{tot} = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \left(\sum_{i=1}^N a_i(t) \hat{\sigma}_+^{(i)} |G\rangle |0\rangle + \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(t) |G\rangle \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle \right) \left(\sum_{j=1}^N a_j^*(t) \langle 0| \langle G| \hat{\sigma}_-^{(j)} + \sum_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'}^*(t) \langle G| \langle 0| \hat{b}_{\mathbf{k}'} \right)$$

Nous avons en tout 4 termes :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{tot} &= \sum_{i,j} a_i(t) a_j^*(t) \hat{\sigma}_+^{(i)} |G\rangle\langle G| \hat{\sigma}_-^{(j)} |0\rangle\langle 0| + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}}(t) c_{\mathbf{k}'}^*(t) |G\rangle\langle G| \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle\langle 0| \hat{b}_{\mathbf{k}'}, \\ &+ \sum_{i, \mathbf{k}'} a_i(t) c_{\mathbf{k}'}^*(t) \hat{\sigma}_+^{(i)} |G\rangle\langle G| |0\rangle\langle 0| \hat{b}_{\mathbf{k}'} + \sum_{j, \mathbf{k}} a_j^*(t) c_{\mathbf{k}}(t) |G\rangle\langle G| \hat{\sigma}_-^{(j)} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle\langle 0| \end{aligned}$$

Nous devons ensuite effectuer la trace partielle sur les degrés de liberté de l'environnement E (champ de la cavité) afin d'obtenir l'opérateur densité du système atomique : $\hat{\rho} = \text{Tr}_E [\hat{\rho}_{tot}]$. Comme le nombre d'excitation du champ de la cavité est limité à 1, nous pouvons écrire la trace partielle $\text{Tr}_E [\cdot]$ comme :

$$\text{Tr}_E [\cdot] = \langle 0| \cdot |0\rangle + \sum_{\mathbf{k}''} \langle 0| \hat{b}_{\mathbf{k}''} \cdot \hat{b}_{\mathbf{k}''}^\dagger |0\rangle$$

En utilisant les relations de commutation bosonique, nous obtenons :

$$\hat{\rho} = \text{Tr}_E [\hat{\rho}_{tot}] = \sum_{i,j=1}^N a_i(t) a_j^*(t) \hat{\sigma}_+^{(i)} |G\rangle\langle G| \hat{\sigma}_-^{(j)} + \sum_{\mathbf{k}} |c_{\mathbf{k}}(t)|^2 |G\rangle\langle G| \quad (4.17)$$

L'étape suivante consiste à injecter cette expression pour $\hat{\rho}$ dans l'équation maîtresse super-radiante, dont nous rappelons la forme :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = D(\hat{\rho}) = \sum_{i,j=1}^N \gamma_{ij}(t) \left(\hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(j)} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\rho} - \frac{1}{2} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \right), \quad \gamma_{ii}(t) = \gamma_0(t), \gamma_{i \neq j}(t) = \gamma(t)$$

Le dissipateur se lit alors :

$$\begin{aligned} D(\hat{\rho}) &= \sum_{i,j=1}^N \gamma_{ij}(t) \hat{\sigma}_-^{(i)} \left(\sum_{i',j'=1}^N a_{i'}(t) a_{j'}^*(t) \hat{\sigma}_+^{(i')} |G\rangle\langle G| \hat{\sigma}_-^{(j')} + \sum_{\mathbf{k}} |c_{\mathbf{k}}(t)|^2 |G\rangle\langle G| \right) \hat{\sigma}_+^{(j)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \gamma_{ij}(t) \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \left(\sum_{i',j'=1}^N a_{i'}(t) a_{j'}^*(t) \hat{\sigma}_+^{(i')} |G\rangle\langle G| \hat{\sigma}_-^{(j')} + \sum_{\mathbf{k}} |c_{\mathbf{k}}(t)|^2 |G\rangle\langle G| \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \gamma_{ij}(t) \left(\sum_{i',j'=1}^N a_{i'}(t) a_{j'}^*(t) \hat{\sigma}_+^{(i')} |G\rangle\langle G| \hat{\sigma}_-^{(j')} + \sum_{\mathbf{k}} |c_{\mathbf{k}}(t)|^2 |G\rangle\langle G| \right) \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)} \end{aligned}$$

En utilisant la relation d'anticommutation $\hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{\sigma}_+^{(j)} + \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(i)} = \delta_{ij}$, nous pouvons simplifier cette dernière expression comme :

$$D(\hat{\rho}) = \sum_{i,j=1}^N \gamma_{ij}(t) a_i(t) a_j^*(t) |G\rangle\langle G| + \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j,j'=1}^N \gamma_{ij}(t) a_i(t) a_{j'}^*(t) \hat{\sigma}_+^{(j)} |G\rangle\langle G| \hat{\sigma}_-^{(j')} + \text{h.c.} \right) \quad (4.18)$$

où h.c. désigne l'hermitien conjugué. Nous écrivons maintenant le dissipateur pour $\gamma_{ii}(t) = \gamma_0(t)$ ainsi que la dérivée de $\hat{\rho}$:

$$\begin{aligned} D(\hat{\rho}) &= \gamma_0(t) \sum_{i=1}^N |a_i(t)|^2 |G\rangle\langle G| + \left(-\frac{1}{2} \gamma_0(t) \sum_{i,j,j'=1}^N a_i(t) a_{j'}^*(t) \hat{\sigma}_+^{(i)} |G\rangle\langle G| \hat{\sigma}_-^{(j')} + \text{h.c.} \right) \\ \frac{d}{dt}\hat{\rho} &= \sum_{i,j=1}^N \frac{d}{dt} [a_i(t) a_j^*(t)] \hat{\sigma}_+^{(i)} |G\rangle\langle G| \hat{\sigma}_-^{(j)} + \sum_{\mathbf{k}} \frac{d}{dt} [|c_{\mathbf{k}}(t)|^2] |G\rangle\langle G| \end{aligned}$$

Nous effectuons ensuite les deux projections suivantes de l'équation maîtresse : $\langle G| \cdot |G\rangle$ et $\langle G| \hat{\sigma}_-^{(n)} \cdot \hat{\sigma}_+^{(n')} |G\rangle$ ($n, n' = 1, \dots, N$), ce qui donne :

$$\begin{cases} \sum_{\mathbf{k}} \frac{d}{dt} [|c_{\mathbf{k}}(t)|^2] = \gamma_0(t) \sum_{i=1}^N |a_i(t)|^2 \\ \frac{d}{dt} [a_n(t) a_{n'}^*(t)] = -\gamma_0(t) a_n(t) a_{n'}^*(t) \end{cases}$$

Ces deux équations ne sont pas indépendantes : en utilisant la condition de normalisation $\sum_{\mathbf{k}} |c_{\mathbf{k}}(t)|^2 = 1 - \sum_{i=1}^N |a_i(t)|^2$ dans la première équation en posant $n = n'$ puis sommant sur n , ($n = 1, \dots, N$) dans la seconde, nous arrivons à la même équation.

Nous reprenons la même démarche pour $\gamma_{i \neq j}(t) = \gamma(t)$. Le dissipateur est donné dans ce cas par :

$$D(\hat{\rho}) = \gamma(t) \sum_{i \neq j=1}^N a_i(t) a_j^*(t) |G\rangle\langle G| + \left(-\frac{1}{2} \gamma(t) \sum_{i \neq j, j'=1}^N a_i(t) a_{j'}^*(t) \hat{\sigma}_+^{(j)} |G\rangle\langle G| \hat{\sigma}_-^{(j')} + \text{h.c.} \right)$$

La projection de l'équation maîtresse sur les états à 0 et 1 excitation aboutit à :

$$\begin{cases} \sum_{\mathbf{k}} \frac{d}{dt} [|\mathbf{c}_{\mathbf{k}}(t)|^2] = \gamma(t) \sum_{i \neq j=1}^N a_i(t) a_j^*(t) \\ \frac{d}{dt} [a_n(t) a_{n'}^*(t)] = -\frac{1}{2} \gamma(t) \left(a_{n'}^*(t) \sum_{i=1}^N a_i(t) + a_n(t) \sum_{i=1}^N a_i^*(t) \right) \end{cases}$$

La première équation peut de nouveau être déduite de la seconde. Nous remarquons clairement que les taux $\gamma_0(t)$ et $\gamma(t)$ ne sont pas indépendants. De plus, la connaissance de l'opérateur densité du système atomique $\hat{\rho}$ ne dépend de la connaissance que d'un seul des deux taux ($\gamma_0(t)$ par exemple). En résumé, les taux $\gamma_0(t)$ et $\gamma(t)$ sont donc donnés formellement par les expressions suivantes en fonction des amplitudes de probabilité :

$$\gamma_0(t) = -\frac{\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} [|a_i(t)|^2]}{\sum_{i=1}^N |a_i(t)|^2}, \quad \gamma(t) = \gamma_0(t) \frac{\sum_{i=1}^N |a_i(t)|^2}{\sum_{i \neq j=1}^N a_i(t) a_j^*(t)} \quad (4.19)$$

Il est également intéressant d'écrire la solution de l'équation maîtresse en fonction de $\gamma_0(t)$. Nous appelons pour simplifier $P_G(t)$ la population de l'état $|G\rangle$: $P_G(t) = 1 - \sum_{i=1}^N |a_i(t)|^2$ avec $P_G(0) = 0$ et nous gardons la notation $a_i(t) a_j^*(t)$ ($i, j = 1, \dots, N$) pour les éléments de matrice de $\hat{\rho}$ à une excitation. Nous avons :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P_G(t) = \gamma_0(t) (1 - P_G(t)) \\ \frac{d}{dt} [a_i(t) a_j^*(t)] = -\gamma_0(t) a_i(t) a_j^*(t) \quad (i, j = 1, \dots, N) \end{cases}$$

Les solutions de ces deux équations sont immédiates et s'écrivent :

$$P_G(t) = \exp \left\{ - \int_0^t dt' \gamma_0(t') \right\} \int_0^t dt' \gamma_0(t') \exp \left\{ - \int_0^{t'} dt'' \gamma_0(t'') \right\} \quad (4.20)$$

$$a_i(t) a_j^*(t) = \exp \left\{ - \int_0^t dt' \gamma_0(t') \right\} a_i(0) a_j^*(0) \quad (i, j = 1, \dots, N) \quad (4.21)$$

Nous illustrons par la suite le résultat de cette section pour des conditions initiales particulières : un état initial symétrique à N atomes où $a_i(0) = \frac{1}{\sqrt{N}}$ ($i = 1, \dots, N$) et un état initial à 2 atomes où $a_1(0) = 1, a_2(0) = 0$.

III.2 Illustration pour un état initial symétrique à N atomes

Lorsque $a_i(0) = \frac{1}{\sqrt{N}}$ ($i = 1, \dots, N$), l'amplitude de probabilité à l'instant t est réelle et est donnée par $a_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}G(t)$ ($i = 1, \dots, N$) avec $G(t)$ la fonction de dissipation. Nous déduisons alors :

$$\gamma_0(t) = -\frac{\frac{d}{dt}[G^2(t)]}{G^2(t)} = -\frac{2\dot{G}(t)}{G(t)} = \frac{\lambda R_N^2}{1 + \delta_N \coth\left(\delta_N \frac{\lambda t}{2}\right)}, \quad \left(a_i(0) = \frac{1}{\sqrt{N}}, (i = 1, \dots, N)\right) \quad (4.22)$$

Nous avons pour le taux $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) = \gamma_0(t) \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} G^2(t)}{\sum_{i \neq j=1}^N \frac{1}{N} G^2(t)} = \frac{\gamma_0(t)}{(N-1)}, \quad \left(a_i(0) = \frac{1}{\sqrt{N}}, (i = 1, \dots, N)\right) \quad (4.23)$$

Dans le régime de couplage faible $R_N < 1$, $\gamma_0(t)$ évolue de manière monotone croissante depuis une valeur nulle vers une valeur asymptotique positive $\frac{\lambda R_N^2}{1+\delta_N} = \lambda(1 - \delta_N)$. Dans le régime de couplage fort $R_N > 1$, la cotangente hyperbolique devient une simple cotangente : $\gamma_0(t)$ est alors périodique, prend des valeurs négatives pendant certains intervalles de temps (suivant le signe du dénominateur de $\gamma_0(t)$) et diverge même à certains instants.

Nous pourrions nous inquiéter du caractère physiquement admissible (positivité complète de $\hat{\rho}$) d'une telle équation maîtresse avec des taux négatifs. En effet, le théorème de Lindblad dans sa version étendue s'applique uniquement pour une équation maîtresse avec des taux positifs à chaque instant. Toutefois, nous sommes partis d'une solution exacte (en termes d'amplitudes de probabilité) et avons déterminé à posteriori les taux $\gamma_0(t)$ et $\gamma(t)$ de l'équation maîtresse (en fonction de ces amplitudes $a_i(t)$), sans faire aucune autre approximation. Les dynamiques résultantes de l'approche système fermé ($|\psi(t)\rangle$) et système ouvert ($\hat{\rho}(t)$) sont donc identiques et nous pouvons écrire de manière légitime l'équation maîtresse avec ces taux négatifs (sauf en toute rigueur où ceux-ci divergent à certains instants particuliers).

Nous constatons sur l'expression de $\gamma(t)$ que ce dernier est proportionnel à $\gamma_0(t)$ avec un coefficient de proportionnalité $\frac{1}{(N-1)}$: il est trivialement non défini pour $N = 1$, $\gamma_0(t) = \gamma(t)$ pour $N = 2$ et varie en $\frac{\gamma_0(t)}{N}$ pour N grand ($N \gg 1$). Nous traçons le profil des taux $\gamma_0(t)$ et $\gamma(t)$ aux figures 4.3 et 4.4.

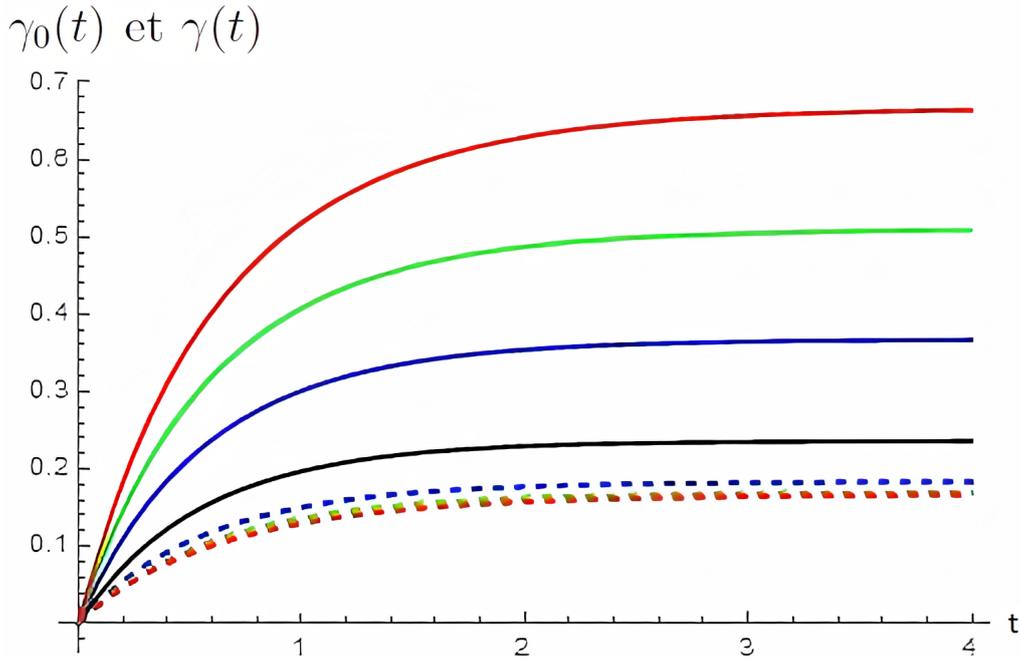


FIGURE 4.3 – Evolution temporelle des taux $\gamma_0(t)$ et $\gamma(t)$ pour les conditions initiales $a_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}$, ($i = 1, \dots, N$) en **couplage faible** ($R_N < 1$) avec $\lambda = 2, g = \frac{1}{3}$ pour différentes valeurs du nombre d'atomes : $N = 2$ en noir , $N = 3$ en bleu, $N = 4$ en vert et $N = 5$ en rouge. $\gamma_0(t)$ est représenté en trait plein et $\gamma(t)$ en trait pointillé. Pour $N = 2$, les courbes $\gamma_0(t)$ et $\gamma(t)$ sont confondues et les courbes $\gamma(t)$ sont fort proches étant donné le facteur $\frac{1}{(N-1)}$.

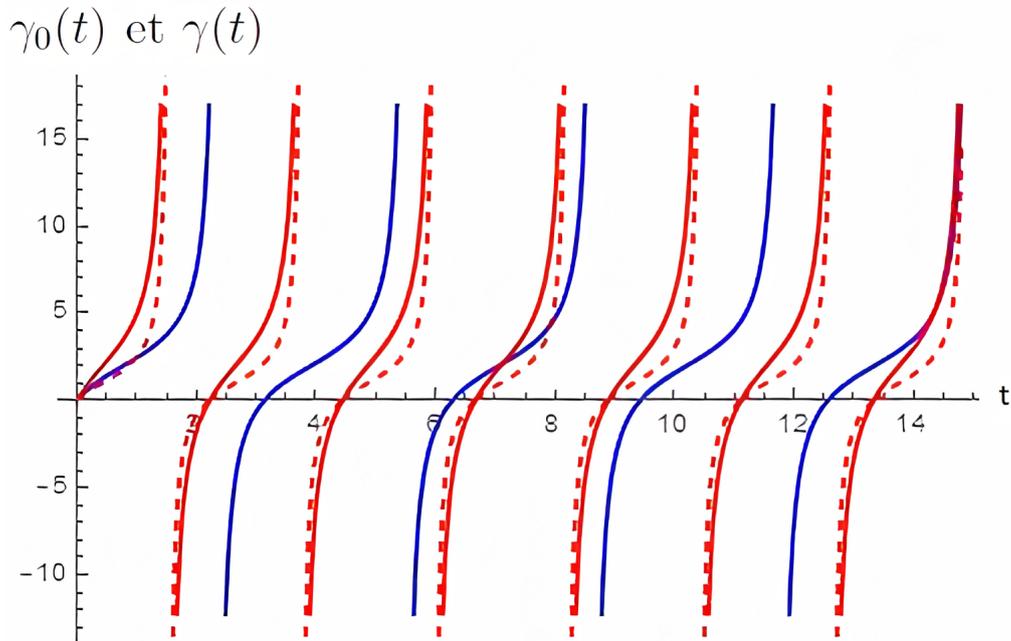


FIGURE 4.4 – Evolution temporelle des taux $\gamma_0(t)$ et $\gamma(t)$ pour les conditions initiales $a_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}$, ($i = 1, \dots, N$) en **couplage fort** ($R_N > 1$) avec $\lambda = 2, g = 1$ pour 2 atomes (en bleu) et 3 atomes (en rouge, où $\gamma_0(t)$ est représenté en trait plein et $\gamma(t)$ en trait pointillé). La période de la courbe rouge ($N = 3$) est plus petite que celle de la courbe bleue ($N = 2$) comme la fréquence intervenant dans l'argument de la cotangente est proportionnelle à \sqrt{N} .

En couplage fort ($R_N > 1$), les taux $\gamma_0(t)$ et $\gamma(t)$ prennent des valeurs négatives pendant certains intervalles de temps. Cependant, ils interviennent dans l'expression de la solution $P_G(t)$ et $a_i(t)a_j^*(t)$ ($i, j = 1, \dots, N$) sous la forme de leur intégrale temporelle, cette dernière étant positive $\forall t \geq 0$:

$$I_{\gamma_0}(t) \equiv \int_0^t dt' \gamma_0(t') = \lambda t + \ln \left\{ \left\{ \cosh \left(\delta_N \frac{\lambda t}{2} \right) + \frac{1}{\delta_N} \sinh \left(\delta_N \frac{\lambda t}{2} \right) \right\}^{-2} \right\}, \quad \left(a_i(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \right) \quad (4.24)$$

Nous portons sur un même graphique (figure 4.5) $\gamma_0(t)$ et son intégrale $I_{\gamma_0}(t)$ en couplage fort ($R_N > 1$) ainsi que $\exp\{-I_{\gamma_0}(t)\}$ dans les deux types de régime aux figures 4.6 et 4.7, la quantité $\exp\{-I_{\gamma_0}(t)\}$ intervenant explicitement dans l'évolution de la matrice densité.

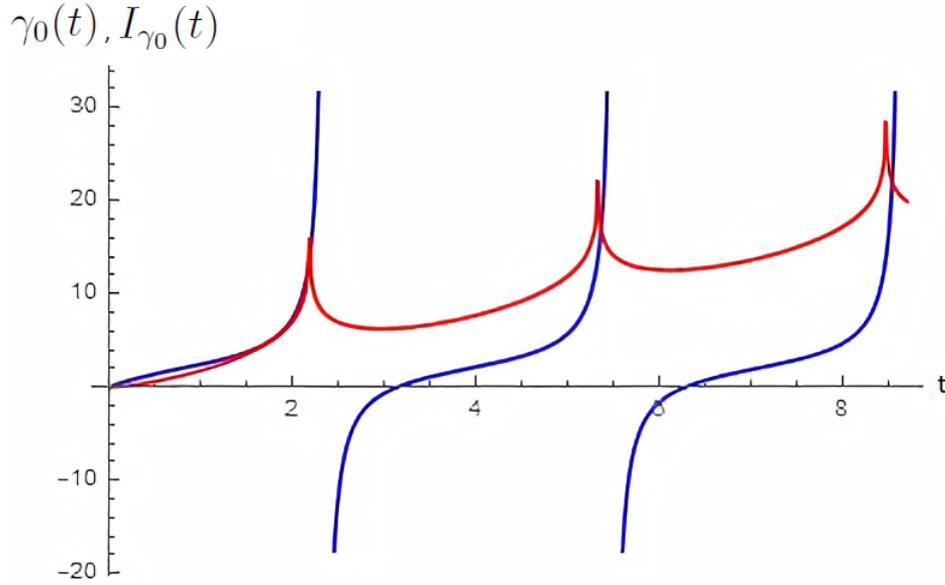


FIGURE 4.5 – Evolution temporelle du taux $\gamma_0(t)$ (en bleu) et de son intégrale $I_{\gamma_0}(t)$ (en rouge) pour les conditions initiales $a_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}$, ($i = 1, \dots, N$) en **couplage fort** ($R_N > 1$) avec $\lambda = 2, g = 1$ pour 2 atomes. Nous constatons que la courbe rouge est positive $\forall t \geq 0$.

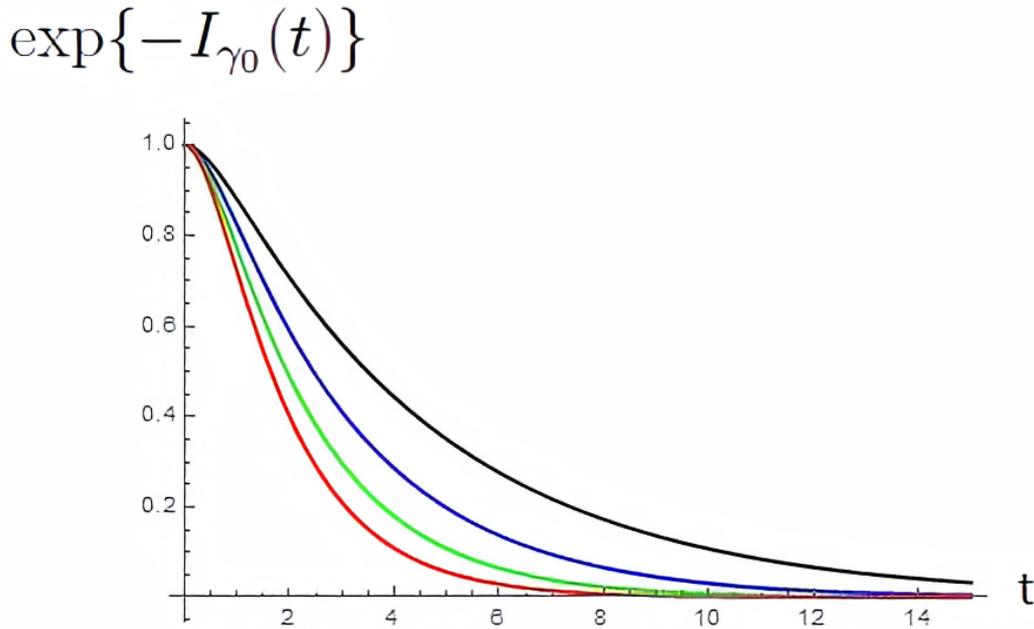


FIGURE 4.6 – Evolution temporelle de $\exp\left\{-\int_0^t dt' \gamma_0(t')\right\} \equiv \exp\{-I_{\gamma_0}(t)\}$ pour les conditions initiales $a_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}$, ($i = 1, \dots, N$), en **couplage faible** ($R_N < 1$) avec $\lambda = 2, g = \frac{1}{3}$ et pour différentes valeurs du nombre d'atomes : $N = 2$ en noir , $N = 3$ en bleu, $N = 4$ en vert et $N = 5$ en rouge. Plus N est grand, plus la courbe tend rapidement vers 0.

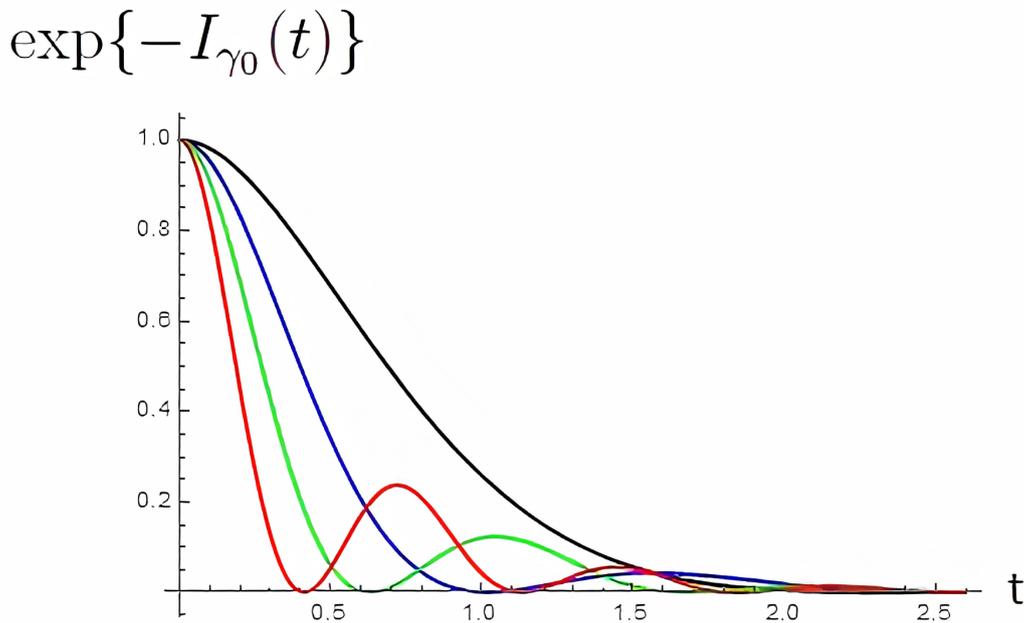


FIGURE 4.7 – Evolution temporelle de $\exp\left\{-\int_0^t dt' \gamma_0(t')\right\} \equiv \exp\{-I_{\gamma_0}(t)\}$ pour les conditions initiales $a_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}$, ($i = 1, \dots, N$), en **couplage fort** ($R_N > 1$) avec $\lambda = 2, g = 1$ et pour différentes valeurs du nombre d'atomes : $N = 2$ en noir , $N = 5$ en bleu, $N = 10$ en vert et $N = 20$ en rouge. Plus N est grand, plus la valeur des maxima est grande.

III.3 Illustration pour un état initial à 2 atomes

Nous proposons d'évaluer également les taux $\gamma_0(t)$ et $\gamma(t)$ pour 2 atomes où initialement un des deux atomes (l'atome 1) est dans l'état excité : $a_1(0) = 1$ et $a_2(0) = 0$. Nous avons dans ce cas :

$$a_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}G(t), \quad a_2(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}G(t)$$

et les taux $\gamma_0^{(2)}(t)$ et $\gamma^{(2)}(t)$ (indice supérieur 2 pour deux atomes) ont pour expression, en utilisant la notation $R_{N=2} = R_2$ et $\delta_{N=2} = \delta_2$:

$$\gamma_0^{(2)}(t) = -\frac{G(t)\dot{G}(t)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}G^2(t)} = \frac{\lambda R_2^2 \left(\cosh(\lambda\delta_2 t) + \delta_2 \sinh(\lambda\delta_2 t) - 1 \right)}{2\delta_2^2 e^{\lambda t} + (1 + \delta_2^2) \cosh(\lambda\delta_2 t) + 2\delta_2 \sinh(\lambda\delta_2 t) - R_2^2} \quad (4.25)$$

$$\gamma^{(2)}(t) = \gamma_0^{(2)}(t) \frac{G^2(t) + 1}{G^2(t) - 1} \quad (4.26)$$

Le coefficient de proportionnalité $\frac{G^2(t)+1}{G^2(t)-1}$ entre $\gamma_0^{(2)}(t)$ et $\gamma^{(2)}(t)$ est dépendant du temps. Ce dernier n'est pas défini en $t = 0$ comme $G(0) = 1$ (le dénominateur s'annule) et est négatif $\forall t \geq 0$. En effet, comme $G(t)$ est borné ($|G(t)| \leq 1$), nous avons $\frac{G^2(t)+1}{G^2(t)-1} \leq -1$. La fonction $\frac{G^2(t)+1}{G^2(t)-1}$ part donc de $-\infty$ et tend asymptotiquement vers -1 en restant à chaque instant négative quel que soit le type de régime (couplage faible ou fort). Nous pouvons montrer en calculant la limite que $\gamma^{(2)}(0^+)$ diverge également. Nous portons en graphique l'évolution de $\gamma_0^{(2)}(t)$ (figures 4.9 et 4.10) et $\gamma^{(2)}(t)$ (figure 4.8).

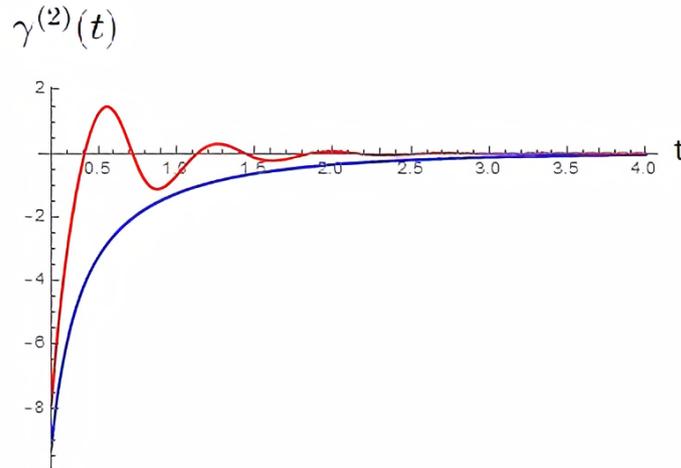


FIGURE 4.8 – Evolution temporelle de $\gamma^{(2)}(t)$ pour les conditions initiales $a_1(0) = 1$ et $a_2(0) = 0$ avec $\lambda = 2$. Nous avons le **couplage faible en bleu** ($R_2^2 = \frac{3}{4}$) et le **couplage fort en rouge** $R_2^2 = 20$. En couplage faible, $\gamma^{(2)}(t) \leq 0 \forall t \geq 0$ comme $\gamma_0^{(2)}(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ et $\frac{G^2(t)+1}{G^2(t)-1} \leq -1$. En couplage fort, les portions positives de $\gamma^{(2)}(t)$ correspondent aux portions négatives de $\gamma_0^{(2)}(t)$ et inversement.

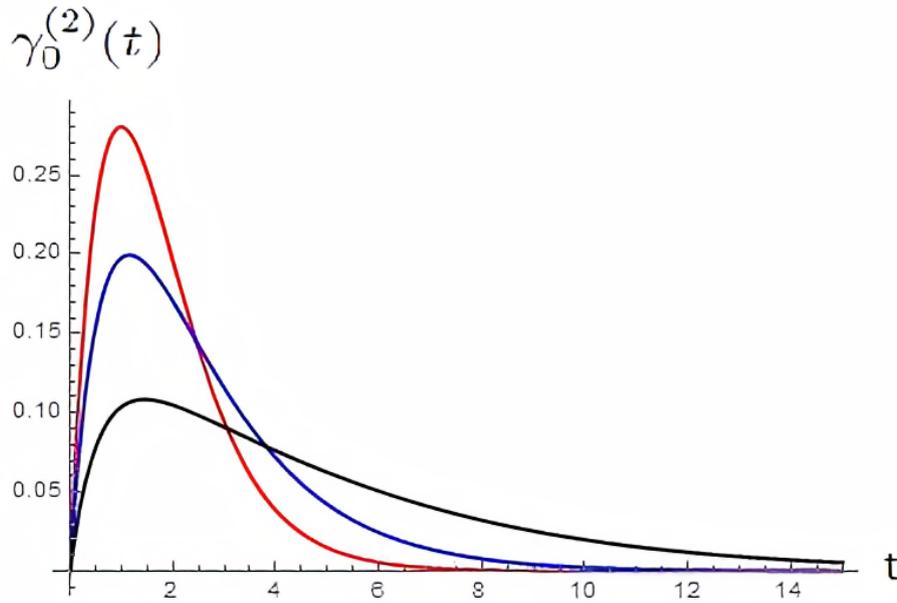


FIGURE 4.9 – Evolution temporelle de $\gamma_0^{(2)}(t)$ pour les conditions initiales $a_1(0) = 1$ et $a_2(0) = 0$, en **couplage faible** ($R_2 < 1$) avec $\lambda = 2$ et pour différentes valeurs du paramètre R_2^2 : $R_2^2 = \frac{1}{4}$ en noir , $R_2^2 = \frac{1}{2}$ en bleu et $R_2^2 = \frac{3}{4}$ en rouge. Nous observons un maximum d'autant plus prononcé que le couplage est important (R_2^2 proche de 1), avant que $\gamma_0^{(2)}(t)$ tende asymptotiquement vers une valeur nulle.

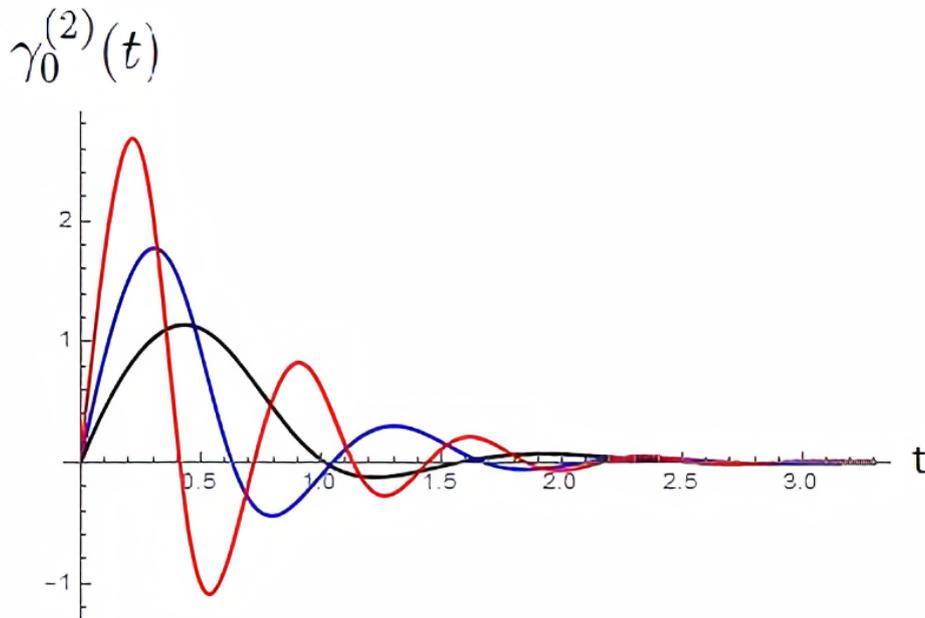


FIGURE 4.10 – Evolution temporelle de $\gamma_0^{(2)}(t)$ pour les conditions initiales $a_1(0) = 1$ et $a_2(0) = 0$, en **couplage fort** ($R_2 > 1$) avec $\lambda = 2$ et pour différentes valeurs du paramètre R_2^2 : $R_2^2 = 5$ en noir , $R_2^2 = 10$ en bleu et $R_2^2 = 20$ en rouge. $\gamma_0^{(2)}(t)$ est oscillant amorti et la valeur de premier maximum est d'autant plus grande que le couplage est grand (comme en couplage faible).

III.4 Discussion des résultats

Dans le cas d'un état initial symétrique à N atomes, les taux $\gamma_0(t)$ et $\gamma(t)$ sont positifs à chaque instant $t \geq 0$ en couplage faible. Ces derniers évoluent asymptotiquement vers une valeur (markovienne) positive. En couplage fort, les taux sont périodiques et divergent à certains instants. Ces divergences à certains instants sont probablement liées au fait que le transformation Φ_t qui fait évoluer l'opérateur densité via $\hat{\rho}(t) = \Phi_t \hat{\rho}(0)$ n'admet pas d'inverse Φ_t^{-1} (perte de la divisibilité) à ces instants en question. Nous remarquons également que les taux prennent des valeurs négatives mais que leur intégrale $I_{\gamma_0}(t)$ reste bien positive à chaque instant. Ce constat recoupe le résultat établi pour un atome énoncé au chapitre 2 où la positivité complète de Φ_t est garantie si et seulement si l'intégrale du taux est positive. Notons également que les taux démarre d'une valeur nulle dans les deux types de régime : $\gamma_0(0) = \gamma(0) = 0$, ce qui est lié à une absence de dissipation à temps très courts (*Quantum Zeno Effect*).

Nous avons également tracé le profil des taux $\gamma_0(t)$ et $\gamma(t)$ dans le cas de deux atomes où un des 2 atomes est initialement excité : $a_1(0) = 1$ et $a_2(0) = 0$. Dans ce cas, les taux ont des comportements relativement différents par rapport au cas précédent d'un état initial symétrique. Le taux diagonal $\gamma_0^{(2)}(t)$ part de 0 et tend vers 0, en affichant un unique maximum en couplage faible et des oscillations amorties en couplage fort. Nous remarquons encore que l'intégrale de $\gamma_0^{(2)}(t)$ reste bien positive à chaque instant. Le taux non-diagonal $\gamma^{(2)}(t)$ a un comportement relativement pathologique : il part de $-\infty$ et tend vers 0 en restant négatif à chaque instant en couplage faible et en oscillant en couplage fort, devenant positif pendant certains intervalles de temps. Son intégrale n'est clairement pas positive ! Cependant, souvenons-nous du théorème de Linblad : ce qui compte, c'est que la matrice des taux soit positive, c'est-à-dire, que ses valeurs propres doivent être positives. Par analogie, nous pouvons tester si l'intégrale des valeurs propres est bien positive à chaque instant. Pour 2 atomes, les valeurs propres sont simplement données par $\gamma_{\pm}^{(2)}(t) = \gamma_0^{(2)}(t) \pm \gamma^{(2)}(t)$. L'intégrale de $\gamma_{-}^{(2)}(t)$ est bien positive à chaque instant :

$$\int_0^t \gamma_{-}^{(2)}(t') dt' = \int_0^t \frac{2\gamma_0^{(2)}(t')}{1 - G^2(t')} dt' \geq 0 \quad \forall t \geq 0$$

Par contre, ce n'est pas le cas pour $\gamma_{+}^{(2)}(t) = \gamma_0^{(2)}(t) \frac{2G^2(t)}{G^2(t)-1}$. Le taux $\gamma_{+}^{(2)}(t)$, à l'instar du taux $\gamma^{(2)}(t)$, part de $-\infty$, devient positif lorsque $\gamma_0^{(2)}(t)$ est négatif et tend asymptotiquement vers 0. Nous pouvons même montrer que l'intégrale des taux $\gamma_{+}^{(2)}(t)$ et $\gamma^{(2)}(t)$ est négative à chaque instant. Cet exemple montre donc que la dynamique peut être physiquement valide bien que l'intégrale d'une des valeurs propres de la matrice des taux ne soit pas positive à chaque instant.

En résumé, dans cette section, nous avons déterminé l'expression des taux de l'équation maîtresse superradiante en fonction des amplitudes de probabilité. Nous avons évalué ces taux $\gamma_0(t)$ et $\gamma(t)$ dans deux cas simples de conditions initiales. Ces deux exemples ont montré que les taux peuvent prendre des valeurs négatives pendant certains intervalles de temps (et même être négatif à chaque instant pour $\gamma^{(2)}(t)$ en couplage faible), tout en gardant l'assurance que la dynamique reste physique (complètement positive) comme le modèle étudié est exact.

IV Intensité rayonnée par le système de N atomes

Nous étudions dans cette section l'intensité rayonnée par le système atomique avec pour état initial l'état symétrique $a_i(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} (i = 1, \dots, N)$. L'intensité rayonnée $I(t)$ est définie comme étant le taux de variation par unité de temps de la valeur moyenne de l'énergie du système atomique (au signe près) :

$$I(t) = -\frac{d}{dt} \text{Tr} \left[\hat{H} \hat{\rho}(t) \right]$$

où \hat{H} et $\hat{\rho}(t)$ sont l'hamiltonien et l'opérateur densité du système atomique, donnés par :

$$\hat{H} = \omega_0 \sum_{l=1}^N \hat{\sigma}_+^{(l)} \hat{\sigma}_-^{(l)} \quad , \quad \hat{\rho}(t) = \sum_{i,j=1}^N a_i(t) a_j^*(t) \hat{\sigma}_+^{(i)} |G\rangle\langle G| \hat{\sigma}_-^{(j)} + \left(1 - \sum_{i=1}^N |a_i(t)|^2 \right) |G\rangle\langle G|$$

Etant donné le choix des conditions initiales, nous avons :

$$a_i(t) a_j^*(t) = |a_i(t)|^2 = \frac{1}{N} G^2(t) \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

En laissant tomber le terme constant (dans l'optique de prendre la dérivée par après), nous avons pour $\hat{H} \hat{\rho}(t)$:

$$\hat{H} \hat{\rho}(t) = \omega_0 \frac{1}{N} G^2(t) \sum_{i,j,l=1}^N \hat{\sigma}_+^{(l)} \hat{\sigma}_-^{(l)} \hat{\sigma}_+^{(i)} |G\rangle\langle G| \hat{\sigma}_-^{(j)} - \omega_0 G^2(t) \sum_{l=1}^N \hat{\sigma}_+^{(l)} \hat{\sigma}_-^{(l)} |G\rangle\langle G|$$

Le deuxième terme s'annule et en utilisant de nouveau les relations d'anticommutation sur les opérateurs de Pauli, nous obtenons :

$$\hat{H} \hat{\rho}(t) = \omega_0 \frac{1}{N} G^2(t) \sum_{i,j=1}^N \hat{\sigma}_+^{(i)} |G\rangle\langle G| \hat{\sigma}_-^{(j)}$$

La trace sur les degrés de liberté du système de N atomes à une excitation se lit $\text{Tr}[\cdot] = \langle G| \cdot |G\rangle + \sum_{n=1}^N \langle G| \hat{\sigma}_-^{(n)} \cdot \hat{\sigma}_+^{(n)} |G\rangle$ ($n = 1, \dots, N$), ce qui donne :

$$\text{Tr} \left[\hat{H} \hat{\rho}(t) \right] = \omega_0 \frac{1}{N} G^2(t) \sum_{i,j,n=1}^N \langle G| \hat{\sigma}_-^{(n)} \hat{\sigma}_+^{(i)} |G\rangle\langle G| \hat{\sigma}_-^{(j)} \hat{\sigma}_+^{(n)} |G\rangle = \omega_0 \frac{1}{N} G^2(t) \sum_{n=1}^N \langle G|G\rangle \langle G|G\rangle = \omega_0 G^2(t)$$

L'intensité $I(t)$ est alors simplement donnée par :

$$I(t) = -\omega_0 \frac{d}{dt} [G^2(t)] = \omega_0 \frac{\lambda}{2} \frac{R_N^2}{1 - R_N^2} e^{-\lambda t} \left(\cosh(\lambda \delta_N t) + \delta_N \sinh(\lambda \delta_N t) - 1 \right) \quad (4.27)$$

Il est également intéressant de calculer le maximum de $I(t)$, noté I_{max} , en fonction du paramètre R_N . En couplage fort ($R_N > 1$), étant donné les oscillations amorties, I_{max} correspond au premier maximum de $I(t)$. En évaluant $\frac{dI(t)}{dt} = 0$, nous obtenons :

$$\lambda t_{max} = \frac{\text{acosh}\left(\frac{1}{R_N^2}\right)}{\sqrt{1 - R_N^2}} \implies I_{max} = \omega_0 \frac{\lambda}{2} \left(1 + \sqrt{1 + R_N^2} \right) \exp \left[-\frac{\text{asech}(R_N^2)}{\sqrt{1 - R_N^2}} \right] \quad (4.28)$$

où $I(t_{max}) \equiv I_{max}$, $\text{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$ et $\text{acosh}(x)$, $\text{asech}(x)$ désigne les fonctions hyperboliques inverses.

Nous portons en graphique $I(t)$ pour différentes valeurs de R_N^2 aux figures 4.12 et 4.13. Comme $R_N = \sqrt{N} \frac{g}{(\lambda/2)}$, nous pouvons imaginer g et λ fixés et le nombre d'atomes N variable. Nous traçons également $I_{max}(R_N^2)$ à la figure 4.11.

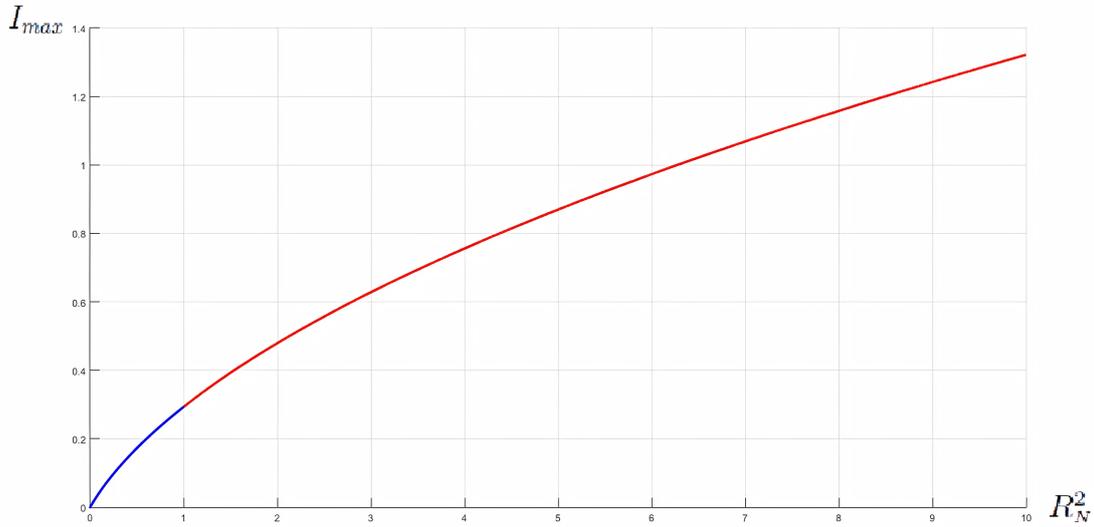


FIGURE 4.11 – Premier maximum I_{max} en fonction de R_N^2 pour $\omega_0 = \lambda = 1$. L'abscisse R_N^2 varie de 0.1 à 10. La partie de la courbe en bleu (resp. rouge) correspond à $R_N < 1$ (resp. $R_N > 1$).

A partir de ces différents graphiques, nous pouvons faire les commentaires suivants. En couplage faible ($R_N < 1$), $I(t)$ est positive $\forall t$. De plus, pour des valeurs de R_N proche de 0, $I(t)$ est quasiment constant. Au contraire, pour un R_N proche de 1, nous avons un pic d'intensité. Le paramètre R_N permet donc de contrôler le profil de $I(t)$ (selon l'application souhaitée par exemple). En couplage fort ($R_N > 1$), $I(t)$ oscille et est négatif pendant certains intervalles de temps (énergie renvoyée du champ de la cavité vers le système atomique). $I_{max}(R_N^2)$ est monotone croissante et nous pouvons faire les développements limités pour $R_N \ll 1$ (en 0) et $R_N \gg 1$ (en $+\infty$) :

$$R_N^2 \ll 1 : I_{max} \simeq \omega_0 \frac{\lambda}{2} \left(R_N^2 + \mathcal{O}(R_N^3) \right) \implies I_{max} \propto \omega_0 \frac{g^2}{\lambda} N$$

$$R_N^2 \gg 1 : I_{max} \simeq \omega_0 \frac{\lambda}{2} \left(\left(1 - \frac{\pi}{2} \right) + R_N + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R_N}\right) \right) \implies I_{max} \propto cte + \omega_0 g \sqrt{N}$$

I_{max} est proportionnel à N en couplage très faible ($R_N^2 \ll 1$). En couplage très fort ($R_N^2 \gg 1$), I_{max} est plutôt proportionnel à \sqrt{N} et ne dépend plus de la largeur spectrale λ .

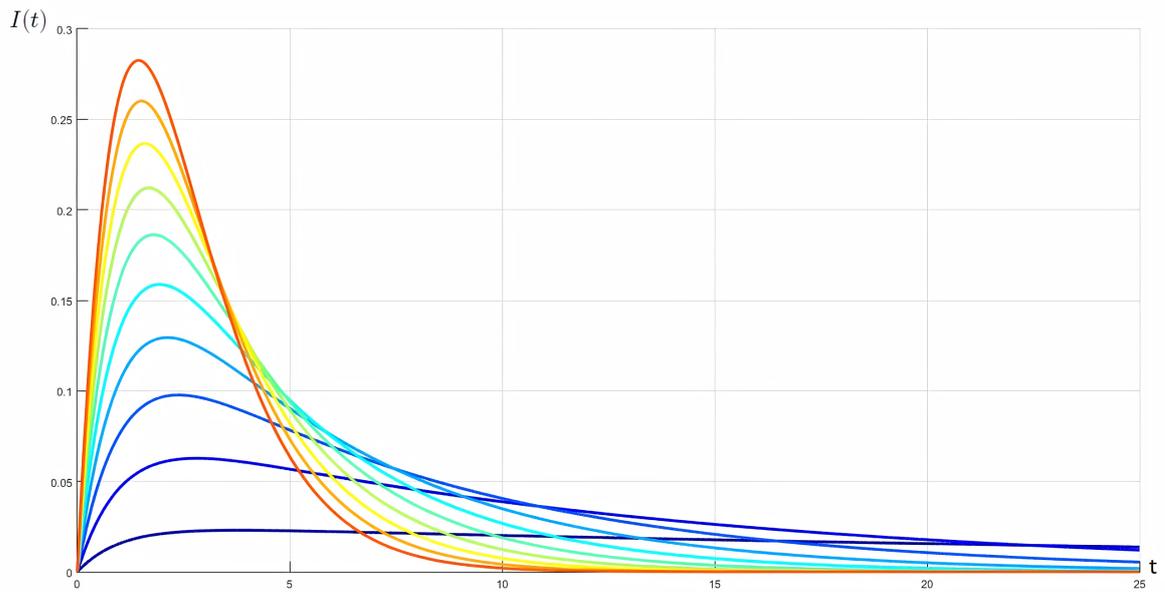


FIGURE 4.12 – Evolution temporelle de l'intensité rayonnée $I(t)$ en **couplage faible** ($R_N < 1$) pour $\omega_0 = \lambda = 1$. R_N^2 varie de 0.05 (courbe plate bleu foncée) jusqu'à 0.95 (courbe rouge) par pas de 0.1.

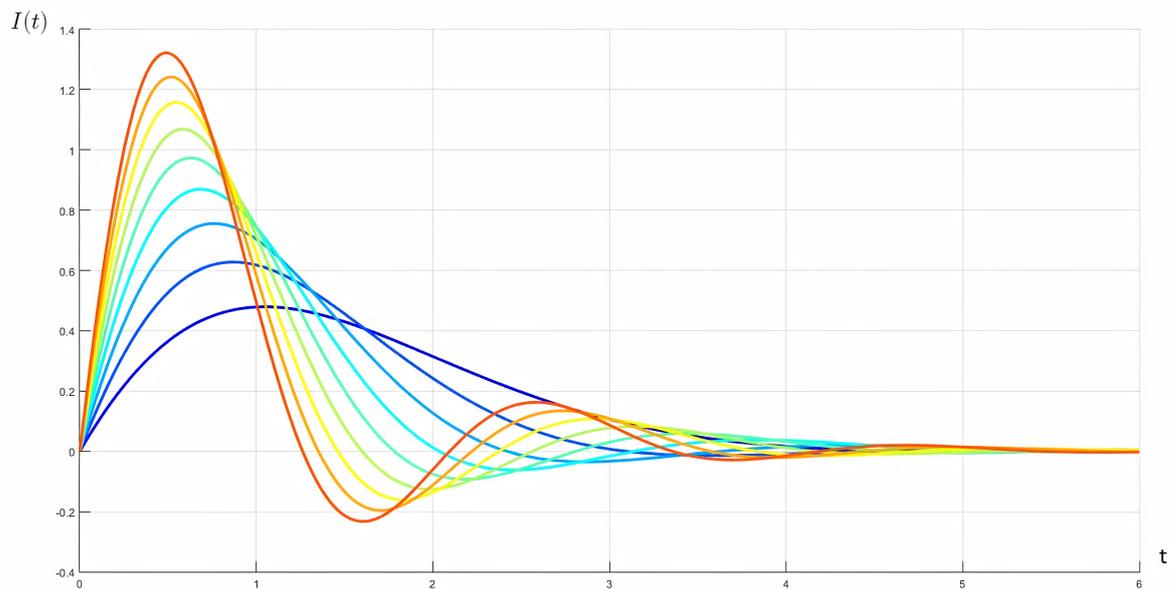


FIGURE 4.13 – Evolution temporelle de l'intensité rayonnée $I(t)$ en **couplage fort** ($R_N > 1$) pour $\omega_0 = \lambda = 1$. R_N^2 varie de 2 (courbe bleu foncée) jusqu'à 10 (courbe rouge) par pas de 1.

V Etude du cas à deux atomes

Dans cette section, nous particularisons le résultat obtenu pour N atomes (résultat restreint au sous-espace à une excitation et dans le régime superradiant) au cas de 2 atomes. Nous étudions l'évolution de la matrice densité ρ (populations et cohérence) et évaluons l'intrication au cours du temps via la concurrence de Wootters.

V.1 Populations et cohérence

Nous reprenons en premier lieu l'expression de l'opérateur densité $\hat{\rho}$ et l'écrivons explicitement dans la base $\{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$:

$$\hat{\rho}(t) = \text{Tr}_E [|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |a_1(t)|^2 & a_1^*(t)a_2(t) & 0 \\ 0 & a_1(t)a_2^*(t) & |a_2(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - |a_1(t)|^2 - |a_2(t)|^2 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Nous supposons par simplicité des amplitudes initiales $a_1(0)$ et $a_2(0)$ réelles et nous étudions en premier lieu le comportement asymptotique des éléments de la matrice densité $\hat{\rho}(t)$. En définissant les amplitudes des états symétriques et anti-symétriques comme $a_{\pm}(t) = \frac{1}{2}(a_1(t) \pm a_2(t))$, nous avons les expressions suivantes pour les amplitudes de probabilité à l'instant t :

$$a_+(t) = a_+(0)G(t), \quad a_-(t) = a_-(0)$$

$$a_1(t) = a_+(0)G(t) + a_-(0), \quad a_2(t) = a_+(0)G(t) - a_-(0)$$

L'état anti-symétrique n'évolue pas. Comme la fonction de dissipation $G(t)$ tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$, la population de l'état symétrique $(a_+(t))^2$ tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$ et les valeurs asymptotiques des populations $(a_1(t))^2$, $(a_2(t))^2$ et de la cohérence $a_1(t)a_2(t)$ sont données par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (a_1(t))^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} (a_2(t))^2 = (a_-(0))^2 = \frac{1}{4}(1 - 2a_1(0)a_2(0))$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_1(t)a_2(t) = -(a_-(0))^2 = -\frac{1}{4}(1 - 2a_1(0)a_2(0))$$

Nous constatons que ces valeurs asymptotiques dépendent de la population initiale de l'état anti-symétrique. Nous notons également que la valeur asymptotique de la cohérence $a_1(t)a_2(t)$ dépend linéairement de sa valeur initiale $a_1(0)a_2(0)$. Comme $a_i(0) \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$), nous utilisons dans la suite la paramétrisation $a_1(0) = \cos(\theta)$ et $a_2(0) = \sin(\theta)$ où $\theta \in [0, 2\pi]$. En effet,

$$(a_1(0))^2 + (a_2(0))^2 = 1 \implies (\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1$$

Nous représentons à la figure 4.14 les populations asymptotiques $(a_i(\infty))^2$ ($i = 1, 2$). Aux figures 4.15 et 4.16 sont représentés les éléments de la matrice densité $\hat{\rho}(t)$.

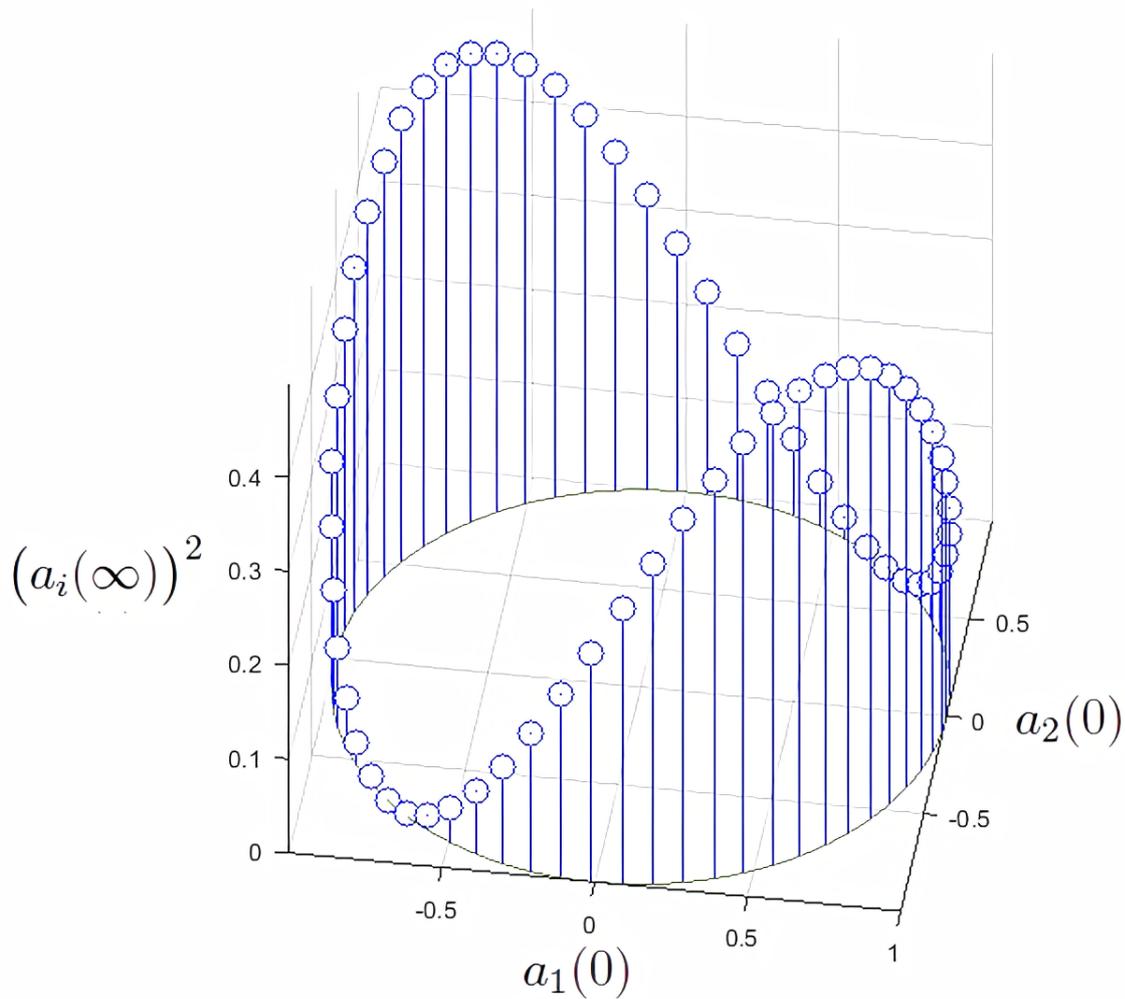


FIGURE 4.14 – Représentation en 3 dimensions des populations asymptotiques $(a_1(\infty))^2 = (a_2(\infty))^2$. Dans le plan horizontal est représenté le cercle unité $(a_1(0))^2 + (a_2(0))^2 = 1$ où $a_1(0)$ et $a_2(0)$ varient tous deux de -1 à 1 . L'axe vertical correspond à la valeur asymptotique $(a_i(\infty))^2$ ($i = 1, 2$), qui prend des valeurs entre 0 et $\frac{1}{2}$. L'état initialement symétrique $\{a_1(0), a_2(0)\} = \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ mène à $(a_i(\infty))^2 = 0$ ($i = 1, 2$). L'état initialement anti-symétrique $\{a_1(0), a_2(0)\} = \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ mène à $(a_i(\infty))^2 = (a_i(t))^2 = \frac{1}{2} \forall t \geq 0$, ($i = 1, 2$).

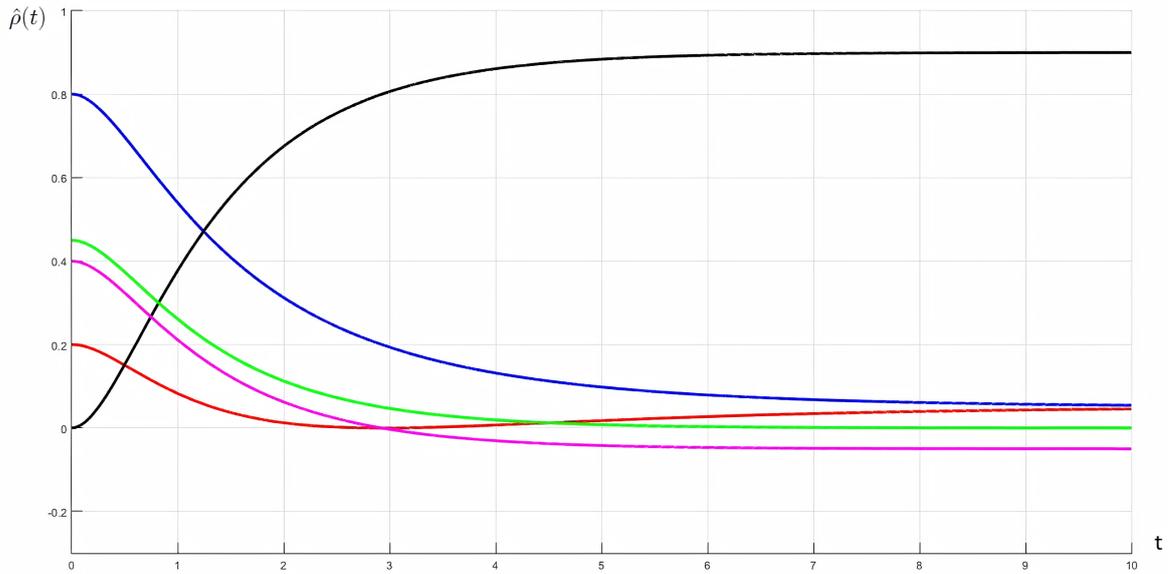


FIGURE 4.15 – Evolution temporelle des différents éléments de la matrice densité $\hat{\rho}(t)$ en **couplage faible** ($R_2^2 = 0.5$) avec $\lambda = 3$ et pour la condition initiale $\left\{a_1(0) = \sqrt{\frac{8}{10}}, a_2(0) = \sqrt{\frac{2}{10}}\right\}$. Nous avons respectivement en bleu, rouge et noir les populations $(a_1(t))^2$, $(a_2(t))^2$ et $1 - (a_1(t))^2 - (a_2(t))^2$. Nous avons également représenté la population de l'état symétrique $(a_+(t))^2$ en vert et la cohérence $a_1(t)a_2(t)$ en violet.

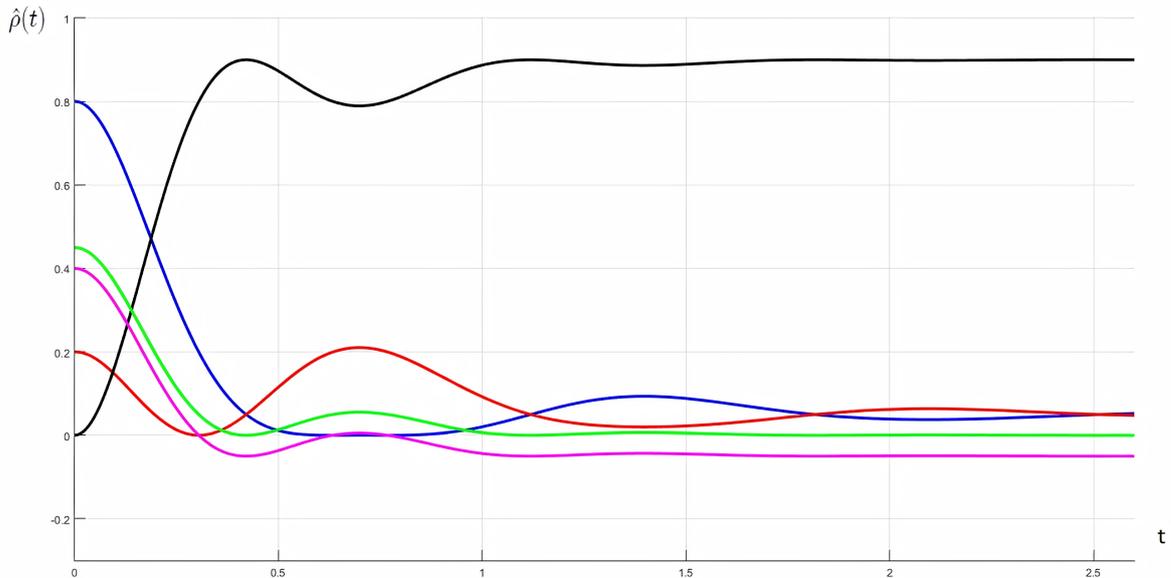


FIGURE 4.16 – Evolution temporelle des différents éléments de la matrice densité $\hat{\rho}(t)$ en **couplage fort** ($R_2^2 = 10$) avec $\lambda = 3$ et pour la condition initiale $\left\{a_1(0) = \sqrt{\frac{8}{10}}, a_2(0) = \sqrt{\frac{2}{10}}\right\}$. Nous avons respectivement en bleu, rouge et noir les populations $(a_1(t))^2$, $(a_2(t))^2$ et $1 - (a_1(t))^2 - (a_2(t))^2$. En vert et violet sont respectivement tracées la population de l'état symétrique $(a_+(t))^2$ et la cohérence $a_1(t)a_2(t)$.

V.2 Intensité rayonnée pour 2 atomes

Dans cette sous-section, nous analysons l'effet des conditions initiales $a_i(0) \in \mathbb{R} (i = 1, 2)$ sur l'intensité rayonnée $I(t)$ par le système de 2 atomes. Nous exprimons explicitement les opérateurs dans la base $\{|ee\rangle, |eg\rangle, |ge\rangle, |gg\rangle\}$. Nous avons pour $\hat{H}\hat{\rho}(t)$ (en posant $\omega_0 = 1$ dans la suite) :

$$\hat{H}\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^2(t) & a_1(t)a_2(t) & 0 \\ 0 & a_1(t)a_2(t) & a_2^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a_1^2(t) - a_2^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'intensité $I(t)$ est donnée par :

$$I(t) = -\frac{d}{dt} \text{Tr} [\hat{H}\hat{\rho}(t)] = -\frac{d}{dt} [a_1^2(t) + a_2^2(t)] = -2(a_1(t)\dot{a}_1(t) + a_2(t)\dot{a}_2(t))$$

Comme $\dot{a}_1(t) = \dot{a}_2(t) = a_+(0)\dot{G}(t)$, il vient que :

$$I(t) = -2a_+(0)\dot{G}(t)(a_1(t) + a_2(t)) = -4a_+(0)\dot{G}(t)a_+(t) = -(a_1(0) + a_2(0))^2 \dot{G}(t)G(t)$$

En utilisant la paramétrisation initiale (en fonction de θ) définie précédemment, nous obtenons au final :

$$I(t) = -(1 + \sin(2\theta))\dot{G}(t)G(t) = (1 + \sin(2\theta))\frac{\lambda}{4}\frac{R_2^2}{1 - R_2^2}e^{-\lambda t}(\cosh(\lambda\delta_2 t) + \delta_2 \sinh(\lambda\delta_2 t) - 1) \quad (4.30)$$

Cette dernière expression est similaire à celle obtenue pour la situation à N atomes avec un état initial symétrique $a_i(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} (i = 1, \dots, N)$. La différence réside dans les conditions initiales au travers du facteur $(1 + \sin(2\theta))$. Ce dernier s'annule pour $\theta = -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ (état initial anti-symétrique qualifié de *dark state*) et est maximum pour $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ (état initial symétrique qualifié de superradiant). Dans le cas particulier où un seul atome est initialement excité (et non plus deux atomes avec une seule excitation), $\theta = 0$ et son sinus s'annule mais la dépendance temporelle de $I(t)$ est identique au cas de deux atomes. Nous illustrons le comportement de l'intensité rayonnée $I(t)$ vis-à-vis des conditions initiales aux figures 4.17 et 4.18.

Sur ces graphiques, nous constatons comme dans la section précédente que le premier pic d'intensité est plus grand en couplage fort qu'en couplage faible et que la dynamique est plus rapide en couplage fort. Par exemple, pour des applications visant une intensité rayonnée très grande pendant un temps très bref, il est préférable de se placer dans le régime de couplage très fort $R_2 \gg 1$ avec un état initial symétrique (superradiant). Cependant, si l'application en question nécessite un pic d'intensité mais avec la contrainte $I(t) \geq 0, \forall t \geq 0$, il faut ajuster finement le paramètre de contrôle R_2 pour qu'il soit proche mais inférieur à l'unité. Si au contraire le but visé est une intensité faible oscillante, il faut plutôt préparer le système atomique dans un état sous-radiant (proche d'un *dark state*) avec $R_2 > 1$.

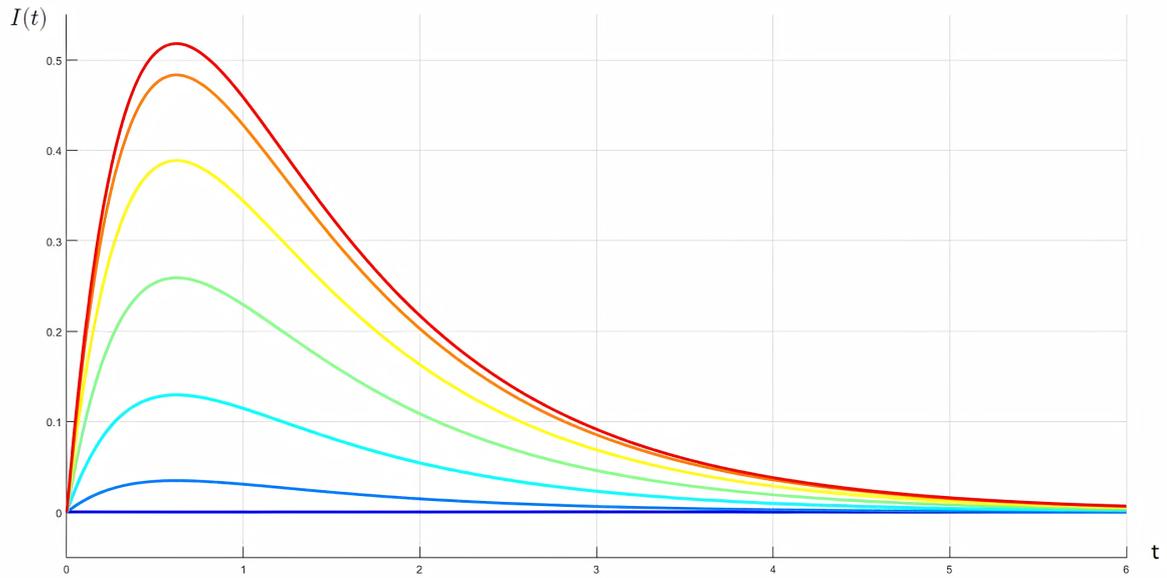


FIGURE 4.17 – Evolution temporelle de l'intensité $I(t)$ pour 2 atomes en **couplage faible** ($R_2^2 = 0.5$) avec $\lambda = 3$ pour différentes conditions initiales : θ varie de $\frac{3\pi}{4}$ (courbe bleue à 0) par pas de $\frac{\pi}{12}$ jusqu'à $\theta = \frac{5\pi}{4}$ (courbe rouge). La courbe rouge (resp. bleue) correspond à un état initial symétrique (resp. antisymétrique), d'où le qualificatif d'état superradiant (resp. *dark state*).

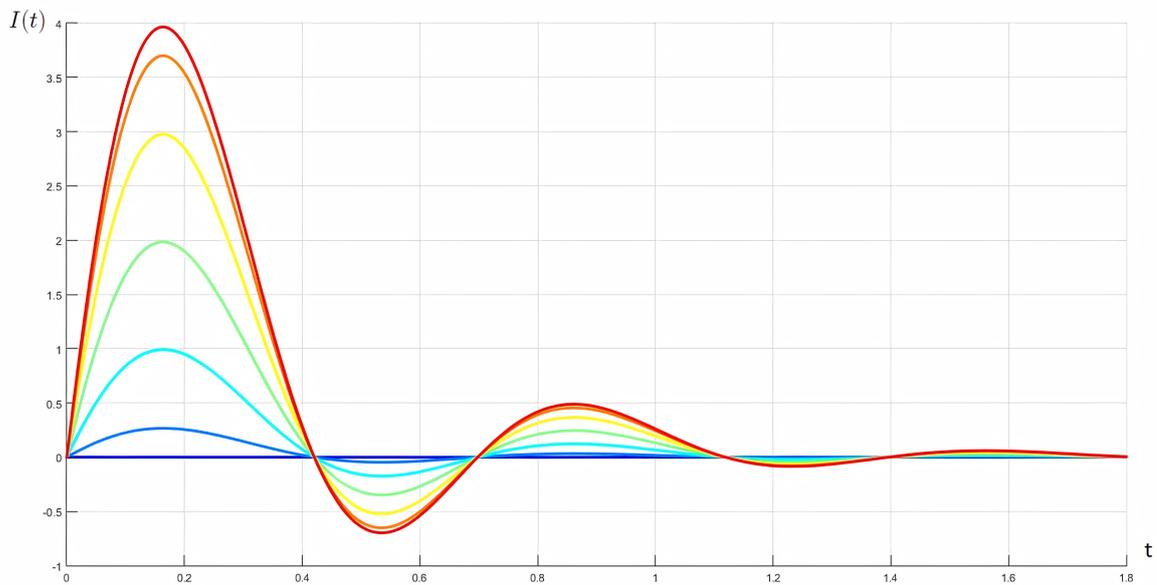


FIGURE 4.18 – Evolution temporelle de l'intensité $I(t)$ pour 2 atomes en **couplage fort** ($R_2^2 = 10$) avec $\lambda = 3$ pour différentes conditions initiales : θ varie de $\frac{3\pi}{4}$ (courbe bleue à 0) par pas de $\frac{\pi}{12}$ jusqu'à $\theta = \frac{5\pi}{4}$ (courbe rouge).

V.3 Mesure d'intrication par la concurrence de Wootters

Nous évaluons dans cette sous-section l'intrication entre les deux atomes au cours du temps. Pour un système de deux qubits (deux atomes à deux niveaux dans notre cas), une manière simple pour quantifier l'intrication entre les deux qubits est donnée par la concurrence de Wootters $C(t)$ [10, 24]. Cette dernière est définie comme

$$C(t) = \max\left\{0, \sqrt{\alpha_1(t)} - \sqrt{\alpha_2(t)} - \sqrt{\alpha_3(t)} - \sqrt{\alpha_4(t)}\right\}$$

où les $\alpha_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) sont les valeurs propres rangées dans l'ordre décroissant de la matrice

$$\zeta(t) = \rho(t)(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(t)(\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Lorsque la concurrence $C(t)$ est nulle, l'état du système $\rho(t)$ est non-intriqué (séparable) et $C(t) = 1$ correspond à un état maximalelement intriqué. En travaillant toujours dans l'hypothèse où les amplitudes de probabilité sont réelles ($\rho(t) = \rho^*(t)$), la matrice $\zeta(t)$ a la forme suivante :

$$\zeta(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_1^2(t)a_2^2(t) & 2a_1^3(t)a_2(t) & 0 \\ 0 & 2a_1(t)a_2^3(t) & 2a_1^2(t)a_2^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Parmi les valeurs propres de $\zeta(t)$, trois sont nulles et une est égale à $4a_1^2(t)a_2^2(t)$. Comme $4a_1^2(t)a_2^2(t) \geq 0$, $C(t)$ est donnée plus simplement par :

$$C(t) = 2\sqrt{a_1^2(t)a_2^2(t)} = 2\sqrt{\left(a_+(0)G(t) + a_-(0)\right)^2 \left(a_+(0)G(t) - a_-(0)\right)^2} \quad (4.31)$$

Nous représentons aux figures 4.19 et 4.20 l'évolution de la concurrence de Wootters au cours du temps en couplage faible et fort. A la figure 4.21, nous proposons également une représentation 3D $C(t, \theta)$ en couplage fort pour un paramètre $R_2^2 = 100$. A la figure 4.22, toujours pour $R_2^2 = 100$, nous mettons davantage en évidence les extrema locaux de $C(t)$. Nous pouvons faire les commentaires suivants à propos des figures 4.19 et 4.20.

La concurrence $C(t)$ pour l'état initialement anti-symétrique (en bleu foncé) reste égal à 1 $\forall t \geq 0$. Pour l'état symétrique (en rouge), $C(t)$ part de 1 et tend asymptotiquement vers 0 de manière :

- monotone en couplage faible ($R_2^2 = 0.5$)
- oscillante en couplage fort ($R_2^2 = 10$) en passant à certains instants t_0 par 0 tels que la dérivée $\frac{dC}{dt}\big|_{t=t_0}$ reste bien définie (points non anguleux).

Pour des états initiaux proches de l'état anti-symétrique (les courbes bleue moyen et bleue clair), $C(t)$ croît globalement au cours du temps. Pour des états initiaux proches de l'état symétrique (les courbes jaune et orange), nous observons que :

- en couplage faible ($R_2^2 = 0.5$), $C(t)$ décroît en passant à un instant unique par 0 (point anguleux) avant de croître vers une valeur non nulle
- en couplage fort ($R_2^2 = 10$), $C(t)$ affiche un comportement de type *cycloïde* : $C(t)$ passe à plusieurs instants par 0 (points anguleux). La courbe orange passe par exemple trois fois par 0.

Enfin, lorsqu'un des deux atomes est initialement excité (courbe verte), $C(t)$ démarre de 0 pour évoluer vers une valeur non nulle.

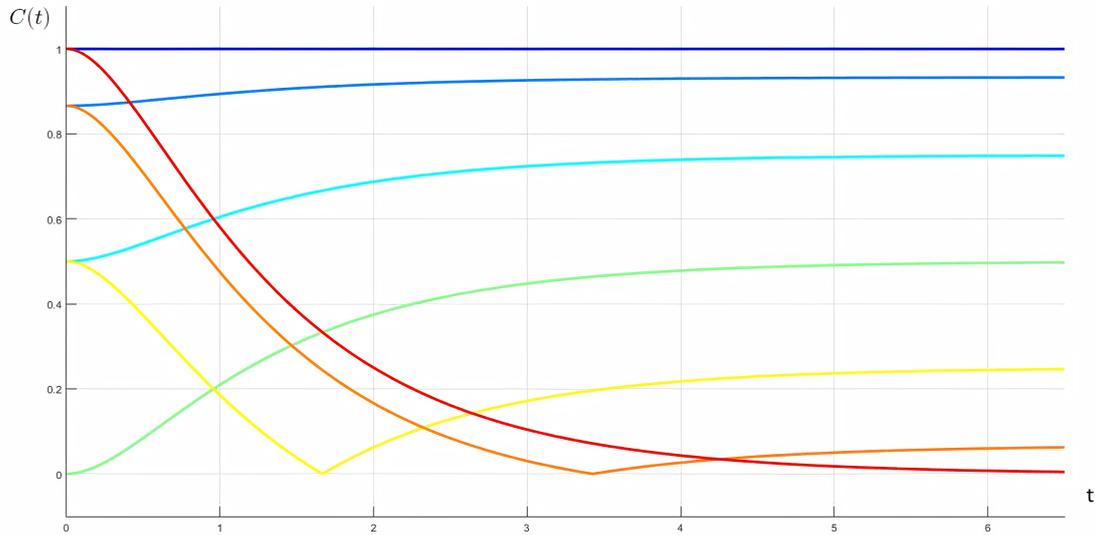


FIGURE 4.19 – Evolution temporelle de l'intrication $C(t)$ entre les 2 atomes en **couplage faible** ($R_2^2 = 0.5$) avec $\lambda = 3$ pour différentes conditions initiales : $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (bleu foncé), $\theta = \frac{5\pi}{6}$ (bleu moyen), $\theta = \frac{11\pi}{12}$ (bleu clair), $\theta = \pi$ (vert), $\theta = \frac{13\pi}{12}$ (jaune), $\theta = \frac{7\pi}{6}$ (orange) et $\theta = \frac{5\pi}{4}$ (rouge) .

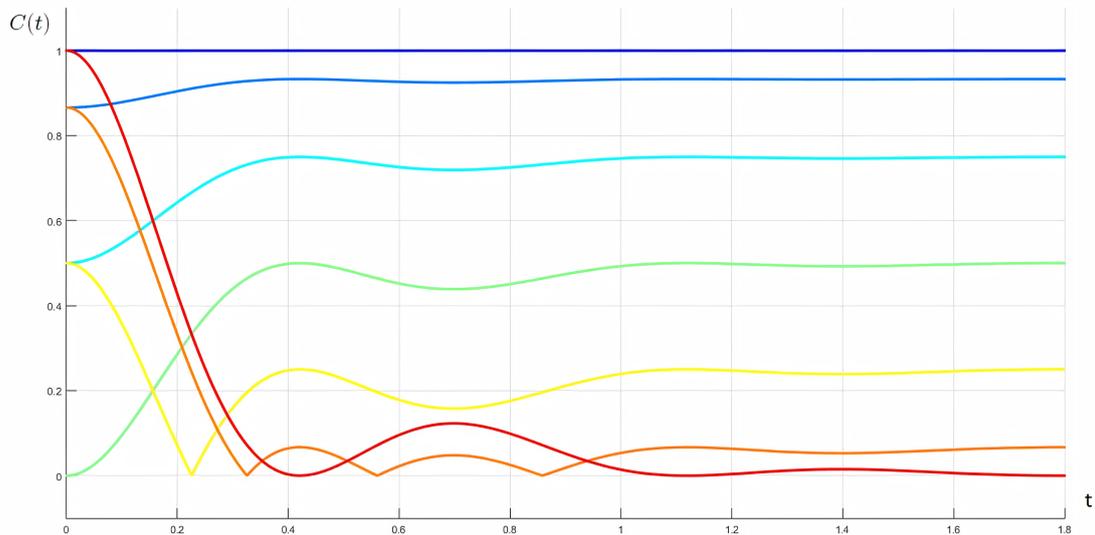


FIGURE 4.20 – Evolution temporelle de l'intrication $C(t)$ entre les 2 atomes en **couplage fort** ($R_2^2 = 10$) avec $\lambda = 3$ pour différentes conditions initiales : $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (bleu foncé), $\theta = \frac{5\pi}{6}$ (bleu moyen), $\theta = \frac{11\pi}{12}$ (bleu clair), $\theta = \pi$ (vert), $\theta = \frac{13\pi}{12}$ (jaune), $\theta = \frac{7\pi}{6}$ (orange) et $\theta = \frac{5\pi}{4}$ (rouge).

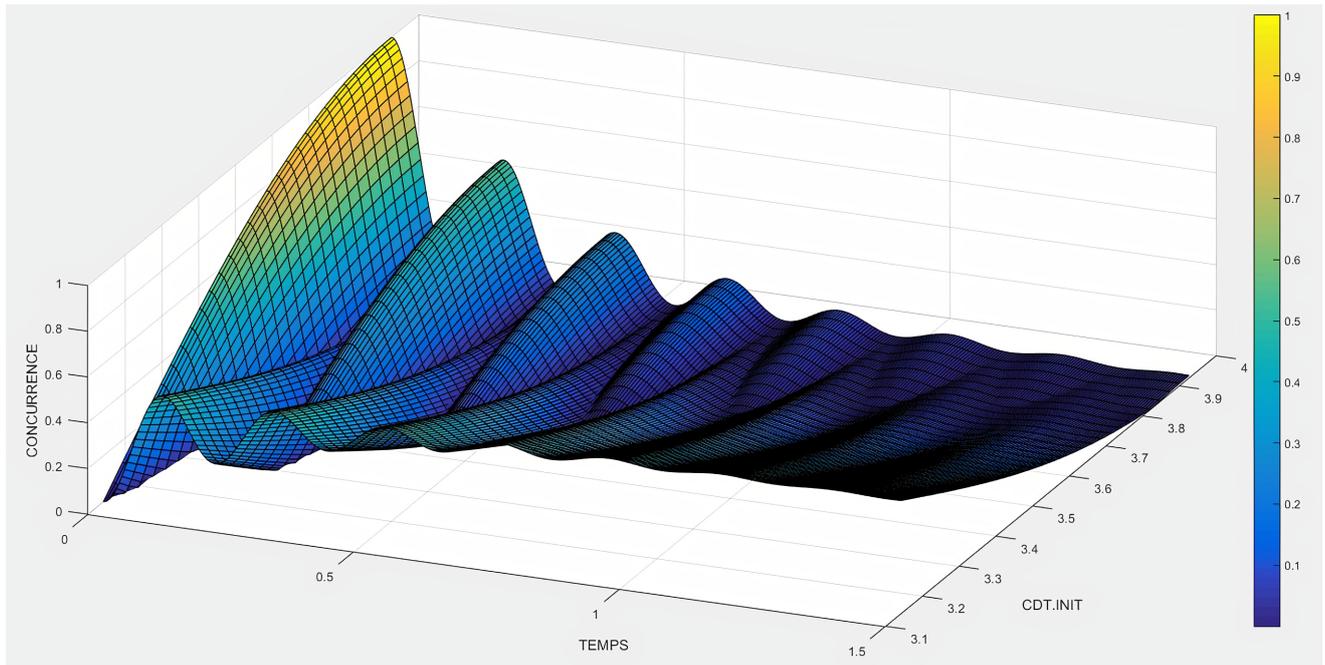


FIGURE 4.21 – Concurrence de Wootters (axe vertical) en fonction du temps et des conditions initiales (axe rentrant dans la page) en **couplage fort** ($R_2^2 = 100$) avec $\lambda = 3$. Les conditions initiales varient de $\theta = \pi$ (état initialement non-intriqué) jusqu'à $\theta = \frac{5\pi}{4}$ (état symétrique initialement maximalement intriqué).

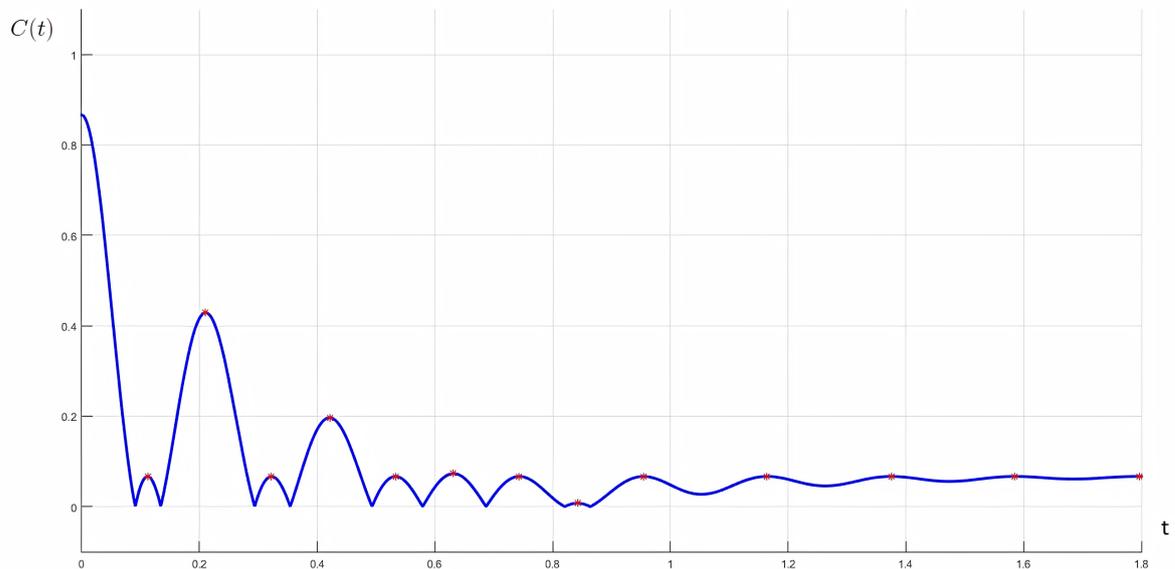


FIGURE 4.22 – Concurrence de Wootters en fonction du temps en **couplage fort** ($R_2^2 = 100$) avec $\lambda = 3$ et pour la condition initiale $\theta = \frac{7\pi}{6}$ (proche de l'état symétrique). Les symboles * en rouge indiquent les maxima locaux (au nombre de 13 sur le graphique). Cette figure illustre la structure des maxima ainsi que des minima anguleux à 0 de $C(t)$.

VI Modulation du système atomes + champ de la cavité

Dans cette section, nous étudions des effets liés à une modulation temporelle périodique du système atomes + champ de la cavité. Nous considérons en premier lieu une modulation des forces de couplage $g_{\mathbf{k}}$, affichant alors une dépendance temporelle $g_{\mathbf{k}}(t)$. Cette situation correspond typiquement à une action externe modulante (par exemple un miroir extérieur oscillant [17]). En deuxième lieu, nous étudions le cas où la modulation agit sur les modes ω_k , qui deviennent dès lors des fonctions du temps $\omega_k(t)$. La modulation des modes de la cavité est typiquement rencontrée lorsque la cavité est elle-même modulée : par exemple, un système piézoélectrique vient faire vibrer une paroi de la cavité. La longueur de la cavité L entre la paroi fixe et la paroi vibrante devient alors une fonction périodique du temps $L(t)$. Enfin, dans la troisième sous-section, nous étudions brièvement l'effet combiné d'une modulation des forces de couplage $g_{\mathbf{k}}(t)$ et des modes $\omega_k(t)$, tous deux étant des fonctions périodiques du temps [40, 41].

VI.1 Modulation des forces couplage

Nous considérons dans cette sous-section que la modulation affecte uniquement les forces de couplage $g_{\mathbf{k}}$ entre le mode \mathbf{k} du champ de la cavité et les atomes. Cette modulation des forces de couplages est par exemple rencontrée dans la situation suivante. Les atomes sont situés au sein d'une cavité dont les parois sont fixes. A l'extérieur de cette cavité fixe, nous avons par exemple un miroir oscillant (à la fréquence ω_M) ou bien une autre cavité (externe) englobant la cavité contenant les atomes (interne) dont les parois (ou une des parois) oscillent (à la fréquence ω_M). Nous supposons, de manière intuitive, que cette modulation externe agit (linéairement) sur les forces de couplage $g_{\mathbf{k}}(t)$ et les modes $\omega_k(t)$, qui deviennent des fonctions du temps à la fréquence de modulation ω_M . Dans cette sous-section, nous faisons l'hypothèse que seuls les $g_{\mathbf{k}}(t)$ sont affectés et que les modes ω_k n'ont pas acquis de dépendance temporelle suite à l'action externe modulante. La fonction de structure du réservoir $\delta(\omega - \omega_k)|g(\omega_k, t)|^2$, constitué par la cavité fixe + le miroir oscillant, prend alors la forme suivante :

$$\delta(\omega - \omega_k)|g(\omega_k, t)|^2 = \frac{g^2(t)}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (\omega_k - \omega_0)^2}, \quad g(t) = g_0(1 + \varepsilon m(t)) \quad (4.32)$$

où $m(t)$ est la fonction modulante (nous illustrerons dans la suite avec $m(t) = \sin(\omega_M t)$) avec $m(0) = 0$ de telle sorte que $g(0) = g_0$. Nous avons également introduit le paramètre ε que nous supposons petit ($\varepsilon \ll 1$) afin de pousser le développement analytique. Nous reprenons le système d'équations différentielles pour les amplitudes de probabilité $a_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) et $c_{\mathbf{k}}(t)$ dans le régime superradiant ($\mathbf{r}_i = 0, i = 1, \dots, N$) :

$$\begin{cases} \dot{a}_j(t) = -i \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(t) g_{\mathbf{k}}(t) e^{-i(\omega_k - \omega_0)t} & (j = 1, \dots, N) \\ \dot{c}_{\mathbf{k}}(t) = -i g_{\mathbf{k}}^*(t) e^{i(\omega_k - \omega_0)t} a_S(t), & a_S(t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \end{cases}$$

Comme précédemment, en intégrant l'équation sur $c_{\mathbf{k}}(t)$ et en sommant ensuite la première équation sur $j = 1, \dots, N$, nous obtenons une équation intégro-différentielle pour $a_S(t)$:

$$\dot{a}_S(t) = -N \int_0^t dt' \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(t) g_{\mathbf{k}}^*(t') e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)(t-t')} a_S(t')$$

Nous prenons de nouveau la limite d'un continuum de modes :

$$\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(t) g_{\mathbf{k}}^*(t') e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)(t-t')} \longrightarrow \frac{g(t)g(t')}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\lambda}{\lambda^2 + (\omega - \omega_0)^2} e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')} = g(t)g(t') e^{-\lambda(t-t')}$$

permettant alors d'écrire en remplaçant $g(t)$ par son expression :

$$\dot{a}_S(t) = -Ng_0^2 (1 + \varepsilon m(t)) \int_0^t dt' e^{-\lambda(t-t')} (1 + \varepsilon m(t')) a_S(t') \quad (4.33)$$

Nous faisons maintenant l'hypothèse que $\varepsilon \ll 1$. L'effet de la modulation externe est alors un effet perturbatif, où nous pouvons écrire la forme de la solution $a_S(t)$ comme :

$$a_S(t) = a_S^{(0)}(t) + \varepsilon a_S^{(1)}(t) + \varepsilon^2 a_S^{(2)}(t) + \dots \quad (4.34)$$

Comme l'effet de la modulation est absent à l'instant initial $t = 0$, nous avons $a_S(0) = a_S^{(0)}(0)$. Nous nous limitons dans la suite au premier ordre $\varepsilon a_S^{(1)}(t)$. En insérant cette forme pour $a_S(t)$, nous aboutissons aux deux équations suivantes :

$$\dot{a}_S^{(0)}(t) = -Ng_0^2 \int_0^t dt' e^{-\lambda(t-t')} a_S^{(0)}(t') \quad (4.35)$$

$$\dot{a}_S^{(1)}(t) = -Ng_0^2 \int_0^t dt' e^{-\lambda(t-t')} a_S^{(1)}(t') - Ng_0^2 e^{-\lambda t} \left[m(t) \int_0^t dt' e^{\lambda t'} a_S^{(0)}(t') + \int_0^t dt' e^{\lambda t'} m(t') a_S^{(0)}(t') \right] \quad (4.36)$$

Nous connaissons déjà la solution pour l'ordre zéro $a_S^{(0)}(t)$. Elle est donnée par $a_S^{(0)}(t) = a_S^{(0)}(0)G(t)$ avec $G(t)$ la fonction de dissipation. Par conséquent, le second terme du membre de droite de l'équation sur $a_S^{(1)}(t)$ est connu. De la même manière qu'auparavant, en prenant la dérivée par rapport à t de l'équation portant sur $a_S^{(1)}(t)$, nous arrivons à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre :

$$\ddot{a}_S^{(1)}(t) + \lambda \dot{a}_S^{(1)}(t) + Ng_0^2 a_S^{(1)}(t) = u(t), \quad \dot{a}_S^{(1)}(0) = a_S^{(1)}(0) = 0 \quad (4.37)$$

où $u(t)$ est une fonction du temps connue. La solution de l'équation homogène ($u(t) = 0$) étant connue, une solution particulière de l'équation non homogène (avec $u(t)$) est par exemple donnée par la méthode de la *variation de la constante*. Nous pouvons également remettre cette équation du second ordre sous la forme de deux équations du premier ordre :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_S^{(1)}(t) \\ \dot{a}_S^{(1)}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Ng_0^2 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \end{pmatrix}$$

et résoudre via *l'exponentielle de matrice* :

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t dt' e^{A(t-t')} \mathbf{b}(t')$$

Nous donnons l'expression de $u(t)$ et de la correction au premier ordre $a_S^{(1)}(t)$ pour une modulation sinusoïdale $m(t) = \sin(\omega_M t)$:

$$u(t) = 2 \sin(\omega_M t) G(t) + \frac{2\omega_M}{\lambda\delta_N} \cos(\omega_M t) e^{-\frac{\lambda t}{2}} \sinh\left(\delta_N \frac{\lambda t}{2}\right) \quad (4.38)$$

$$a_S^{(1)}(t) = a_S(0) C (\xi_+(t) + \xi_-(t)) \quad \text{où } C = \frac{\lambda(\delta_N^2 - 1)}{2\delta_N^3 \lambda^2 \omega_M + 2\delta_N \omega_M^3} \quad (4.39)$$

et

$$\xi_{\pm}(t) = e^{-\frac{\lambda t}{2}(1 \pm \delta_N)} \left\{ \lambda^2 \delta_N (1 \mp \delta_N) \sin^2(\omega_M t) \mp \omega_M^2 \sin^2(\omega_M t) \pm \lambda \omega_M \sin(\omega_M t) \cos(\omega_M t) \right\} \quad (4.40)$$

Au premier ordre, nous constatons que la correction $a_S^{(1)}(t)$ contient dans son spectre des contributions en $2\omega_M$. Nous représentons aux figures 4.23 et 4.24 la correction $a_S^{(1)}(t)$ pour différentes fréquences de modulation.

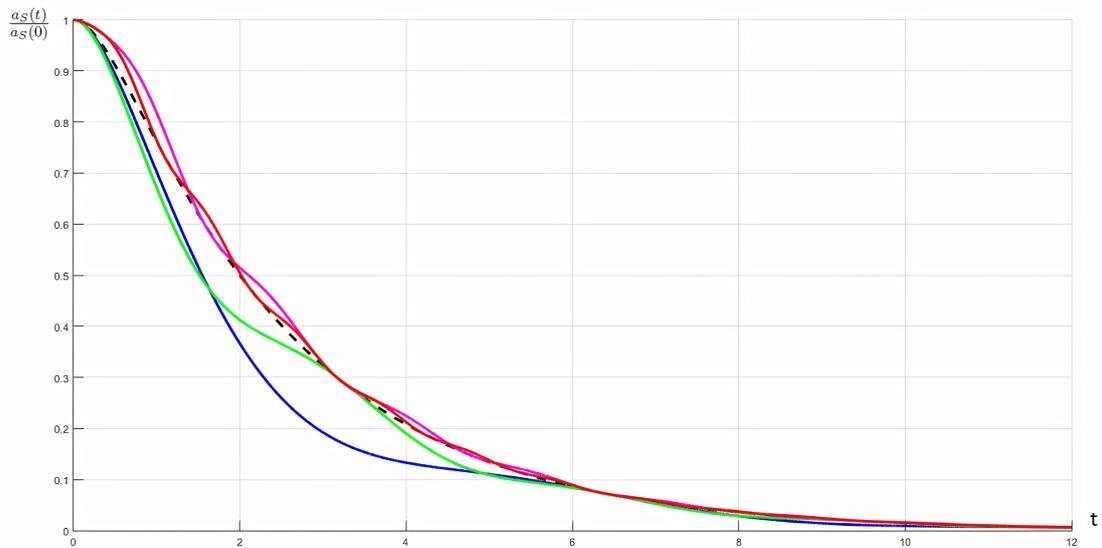


FIGURE 4.23 – Evolution temporelle de $\frac{a_S(t)}{a_S(0)} = G(t) + \varepsilon a_S^{(1)}(t)$ en **couplage faible** ($R_N = 0.5$) avec $\lambda = 3$. La courbe pointillée noire correspond à $\varepsilon = 0$ (pas de correction). Les courbes bleue et verte sont tracées avec $\varepsilon = 0.1$ et correspondent resp. à $\omega_M = 0.5$ et $\omega_M = 1$. Les courbes mauve et rouge sont tracées avec $\varepsilon = -0.1$ et correspondent resp. à $\omega_M = 2$ et $\omega_M = 3$. Nous constatons que plus la fréquence de modulation est grande, plus l'écart par rapport à la référence ($\varepsilon = 0$) est faible.

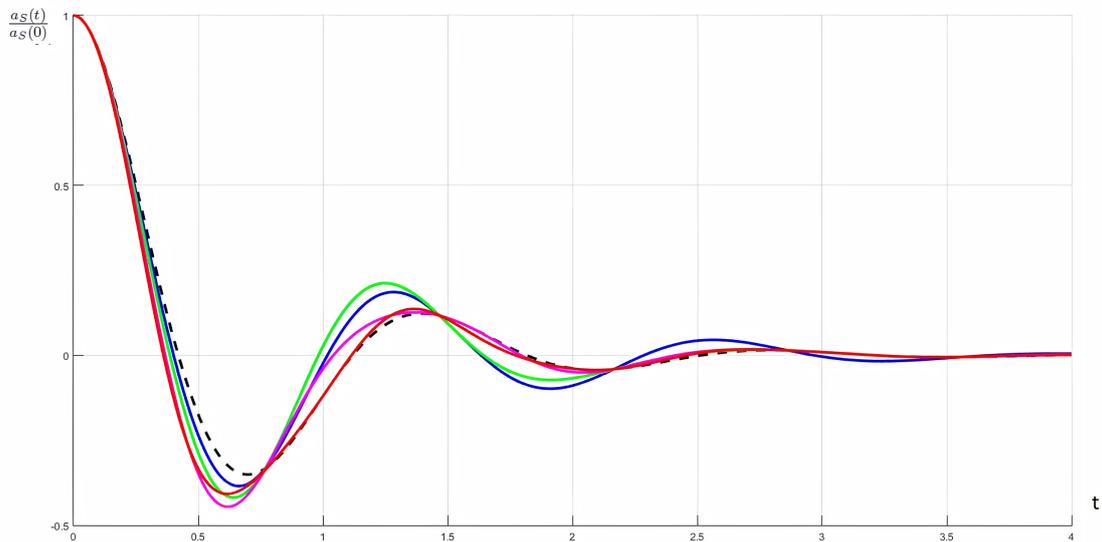


FIGURE 4.24 – Evolution temporelle de $\frac{a_S(t)}{a_S(0)} = G(t) + \varepsilon a_S^{(1)}(t)$ en **couplage fort** ($R_N = 10$) avec $\lambda = 3$. La courbe pointillée noire correspond à $\varepsilon = 0$ (pas de correction). Les autres courbes sont tracées avec $\varepsilon = 0.1$. Les courbes bleue, verte, mauve et rouge correspondent resp. à $\omega_M = 0.5$, $\omega_M = 1$, $\omega_M = 2$ et $\omega_M = 3$. Contrairement à la figure 4.23 où les courbes bleue et verte sont clairement distinguables pendant un certain intervalle de temps (plus ou moins entre $t = 2$ et $t = 4$), ces dernières restent relativement proches en couplage fort.

VI.2 Modulation des modes de la cavité

Dans cette sous-section, nous analysons une situation différente par rapport à la sous-section précédente. Nous considérons le cas où les forces de couplage $g_{\mathbf{k}}$ restent fixes dans le temps et la modulation intervient au niveau des modes $\omega_k(t)$ du champ [36, 5, 32, 27]. Typiquement, une telle dépendance temporelle des modes $\omega_k(t)$ se manifeste lorsque les parois (ou une paroi) de la cavité (dans laquelle sont situés les atomes) elle-même oscillent (à la fréquence ω_M). A la figure 4.25, nous expliquons schématiquement cette modulation des parois de la cavité, en prenant une modulation sinusoïdale $\omega_k(t) = \omega_k(0) + \omega_A \sin(\omega_M t)$ où ω_A est l'amplitude de modulation et ω_M est la fréquence de modulation (à laquelle les parois de la cavité oscillent).

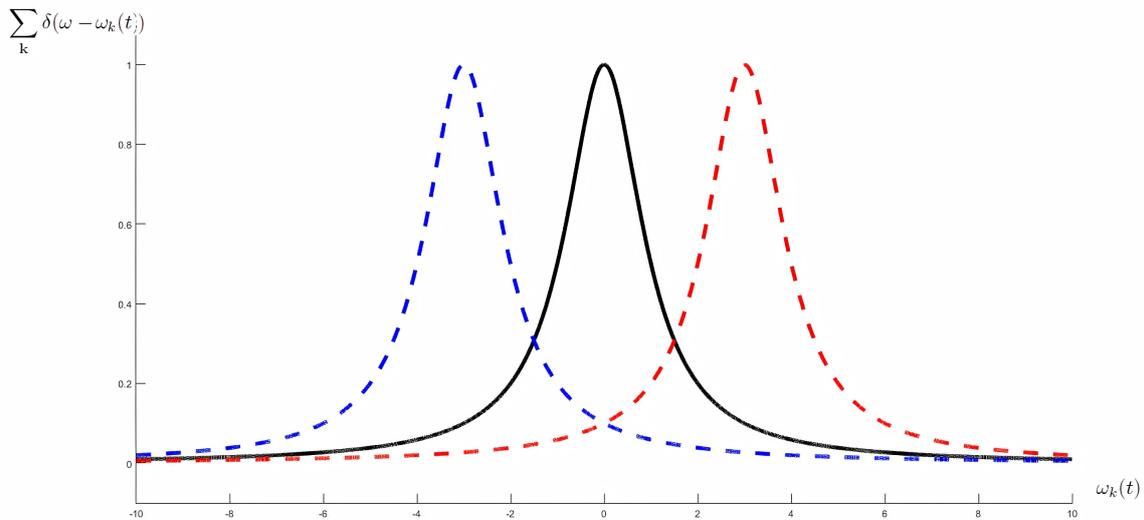


FIGURE 4.25 – Représentation schématique de la modulation des modes $\omega_k(t)$ de la cavité. La lorentzienne en noir, centrée à la transition atomique ω_0 , représente les forces de couplage $g(\omega_k)$ qui restent fixes dans le temps (d'où l'utilisation d'un trait plein). Les parois de la cavité commencent à osciller en $t = 0$. Les modes $\omega_k(t = 0)$ sous-tendent donc la lorentzienne noire. En $t > 0$, nous supposons que tous les modes $\omega_k(t)$ suivent de manière adiabatique (pour autant que $\omega_0 \gg \omega_M$) l'évolution sinusoïdale imprimée aux parois de la cavité : $\omega_k(t) = \omega_k(0) + \omega_A \sin(\omega_M t)$. Il en résulte de manière effective une translation horizontale de la lorentzienne noire, qui évolue donc au cours du temps. Nous avons représenté en trait pointillé deux instants particuliers. Par exemple, la courbe en pointillé rouge (resp. bleu) correspond à l'instant $\omega_M t_{max} = \frac{\pi}{2}$ (resp. $\omega_M t_{min} = \frac{3\pi}{2}$) et la lorentzienne est centrée en $\omega_k(0) + \omega_A$ (resp. $\omega_k(0) - \omega_A$).

Comme l'illustre la figure 4.25, la modulation des modes $\omega_k(t)$ est équivalente à un désaccord dynamique $\Delta(t)$ entre la fréquence de transition atomique ω_0 et la fréquence centrale de la cavité $\omega_c(t)$: $\Delta(t) = \omega_c(t) - \omega_0 = \omega_A \sin(\omega_M t)$. Afin de prendre en compte cette dépendance temporelle des modes $\omega_k(t)$, nous devons repartir de l'hamiltonien d'interaction \hat{H}_{int} et effectuer la substitution suivante pour les phases $\omega_k t$ apparaissant dans les exponentielles $e^{\pm i\omega_k t}$:

$$\omega_k t \longrightarrow \int_0^t dt' \omega_k(t')$$

Le développement qui suit est alors similaire à celui réalisé précédemment. Nous arrivons à

une équation pour l'amplitude $a_S(t)$ qui s'écrit :

$$\dot{a}_S(t) = -Ng^2 \int_0^t dt' K(t, t') a_S(t')$$

où $K(t, t')$ est le noyau de cette équation intégral-différentielle qui est maintenant donné par :

$$K(t, t') = e^{-\lambda(t-t')} \exp\left\{-i \int_0^t dt'' m(t'')\right\} \exp\left\{i \int_0^{t'} dt'' m(t'')\right\} = e^{-\lambda(t-t')} \exp\left\{-i \int_{t'}^t dt'' m(t'')\right\} \quad (4.41)$$

où nous avons adopté des notations similaires à la sous-section précédente pour la fonction de modulation $m(t)$. Nous illustrerons par après avec une modulation sinusoïdale $m(t) = \omega_A \sin(\omega_M t)$. Pour une fonction de modulation constante, nous retombons bien sur un noyau exponentiel $K(\tau) = e^{-\lambda\tau}$. Comme $m(t)$ est périodique (de période $T_M = \frac{2\pi}{\omega_M}$), nous pouvons effectuer une décomposition en série de Fourier :

$$\exp\left\{-i \int_0^t dt'' m(t'')\right\} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{in\omega_M t}, \quad \text{où } c_n = \frac{1}{T_M} \int_0^{T_M} \exp\left\{-i \int_0^t dt'' m(t'')\right\} e^{-in\omega_M t}$$

Le facteur exponentiel dépendant de $m(t)$ apparaissant dans le noyau $K(t, t')$ peut alors s'écrire :

$$\exp\left\{-i \int_{t'}^t dt'' m(t'')\right\} = \sum_{n, n'} c_n c_{n'}^* e^{i\omega_M(n t - n' t')} = \sum_n |c_n|^2 e^{in\omega_M(t-t')} + \sum_{n \neq n'} c_n c_{n'}^* e^{i\omega_M(n t - n' t')}$$

Afin de poursuivre le développement, nous faisons une hypothèse supplémentaire : nous négligeons le second terme où la somme court sur les deux indices $n \neq n'$ par rapport au premier (simple somme sur n). Nous ne considérons dans la suite que le premier terme :

$$\exp\left\{-i \int_{t'}^t dt'' m(t'')\right\} \simeq \sum_n |c_n|^2 e^{in\omega_M(t-t')} \quad (4.42)$$

L'avantage de cette dernière expression est qu'elle ne dépend que de la différence $t - t' = \tau$. Nous nous permettons alors de remplacer l'intégrale de t' jusqu'à t par l'intégrale de 0 jusqu'à τ :

$$\exp\left\{-i \int_{t'}^t dt'' m(t'')\right\} \longrightarrow \exp\left\{-i \int_0^\tau dt'' m(t'')\right\} \quad (4.43)$$

Nous particularisons maintenant cette dernière expression dans le cas $m(t) = \omega_A \sin(\omega_M t)$:

$$\exp\left\{-i \int_0^\tau dt'' \omega_A \sin(\omega_M t'')\right\} = e^{i \frac{\omega_A}{\omega_M} (\cos(\omega_M \tau) - 1)} \quad (4.44)$$

La décomposition en série de Fourier de ce dernier terme s'écrit [1] :

$$e^{i \frac{\omega_A}{\omega_M} (\cos(\omega_M \tau) - 1)} = e^{-i \frac{\omega_A}{\omega_M}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\omega_A/\omega_M) e^{in\omega_M \tau}$$

où J_n est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n . Dans l'approximation réalisée, le noyau $K(t, t')$ ne dépend plus que de $t - t'$ et s'écrit :

$$K(t - t') = e^{-i\frac{\omega_A}{\omega_M}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\omega_A/\omega_M) e^{(-\lambda + in\omega_M)(t-t')} \quad (4.45)$$

Notons qu'en l'absence de modulation ($\omega_A = 0$), comme $J_0(0) = 1$ et $J_n(0) = 0 \forall n \neq 0$, nous retrouvons bien $K(t - t') = e^{-\lambda(t-t')}$. Nous constatons également que lorsque $\omega_M \gg \omega_A$, seule la fonction $J_0(\omega_A/\omega_M) \simeq 1$ contribue et nous retombons également sur un noyau exponentiel $e^{-\lambda(t-t')}$. De manière pratique, pour une valeur donnée du rapport $\frac{\omega_A}{\omega_M}$, uniquement un nombre fini de fonctions de Bessel $J_n(\omega_A/\omega_M)$ vont contribuer de manière significative au noyau $K(t-t')$. Nous pouvons alors tronquer la série suivant un seuil ε fixé en négligeant les $J_n(\omega_A/\omega_M)$ tels que $J_n(\omega_A/\omega_M) < \varepsilon$. Nous réécrivons dans un premier temps l'équation intégral-différentielle à résoudre :

$$\dot{a}_S(t) = -Ng^2 e^{-i\frac{\omega_A}{\omega_M}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\omega_A/\omega_M) \int_0^t dt' e^{(-\lambda + in\omega_M)(t-t')} a_S(t')$$

Au lieu de différencier cette dernière équation, nous appliquons la transformée de Laplace \mathcal{L} aux deux membres (nous rappelons quelques propriétés de la transformée de Laplace dans l'annexe B). En effet, nous avons au membre de droite un produit de convolution, qui se transforme en une simple multiplication dans l'espace de Laplace (variable $p \in \mathbb{C}$). En notant $\mathcal{L}[a_S(t)] = \tilde{a}_S(p)$, nous aboutissons à l'équation algébrique suivante :

$$p\tilde{a}_S(p) - a_S(0) = -Ng^2 e^{-i\frac{\omega_A}{\omega_M}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\omega_A/\omega_M) \frac{1}{p - (-\lambda + in\omega_M)} \tilde{a}_S(p)$$

En isolant $\tilde{a}_S(p)$ nous obtenons :

$$\tilde{a}_S(p) = \frac{a_S(0)}{p + Ng^2 e^{-i\frac{\omega_A}{\omega_M}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\omega_A/\omega_M) \frac{1}{p - (-\lambda + in\omega_M)}} \quad (4.46)$$

Afin de résoudre pour $a_S(t)$, nous devons écrire $\tilde{a}_S(p)$ sous la forme d'une fraction rationnelle : un polynôme $P_n^{\alpha-1}(p)$ de degré $\alpha - 1$ au numérateur et un polynôme $P_d^\alpha(p)$ de degré α au dénominateur. Après avoir trouvé les pôles (supposés simples) p_i ($i = 1, \dots, \alpha$) de $\tilde{a}_S(p)$, nous pouvons évaluer la transformée de Laplace inverse \mathcal{L}^{-1} par la théorie des résidus :

$$a_S(t) = a_S(0) \sum_{i=1}^{\alpha} \lim_{p \rightarrow p_i} (p - p_i) \frac{P_n^{\alpha-1}(p)}{P_d^\alpha(p)} e^{p_i t} \quad (4.47)$$

Nous illustrons dans la suite avec $\frac{\omega_A}{\omega_M} = \frac{\pi}{2}$ et fixons $\varepsilon = 0.02$. Dans ce cas de figure, nous retenons les 7 fonctions de Bessel $J_n(\pi/2)$, $n = -3, \dots, 3$ que nous traçons à la figure 4.26. Pour cet exemple, nous avons 8 pôles ($\alpha = 8$), que nous représentons dans le plan complexe aux figures 4.27 et 4.28. Nous représentons enfin aux figures 4.29 et 4.30 la partie réelle de l'amplitude $a_S(t)$ pour différentes valeurs de la fréquence de modulation ω_M . Nous pouvons faire les constatations suivantes à propos de ces figures.

En couplage faible ($R_N < 1$), nous observons des oscillations pour l'amplitude de probabilité $a_S(t)$ à partir d'une certaine valeur de ω_M (courbes verte, orange et rouge de la figure 4.29). L'amplitude de ces oscillations est d'autant plus grande que ω_M est grand. En couplage fort ($R_N > 1$), $a_S(t)$ oscille pour toutes les valeurs de ω_M testées. Ces oscillations sont davantage marquées lorsque ω_M est grand (voir la courbe rouge de la figure 4.30). La dynamique dépend de la position des pôles. Par rapport au cas $\omega_M = 0$, la dynamique est davantage oscillante car plus ω_M est grand, plus les pôles ont une partie imaginaire importante. Nous observons également que la dynamique est plus rapide avec modulation : sur la figure 4.28, 5 pôles sur 8 ont une partie réelle proche de -20 alors qu'en l'absence de modulation (4.27), les deux pôles ont une partie réelle de l'ordre de -10 .

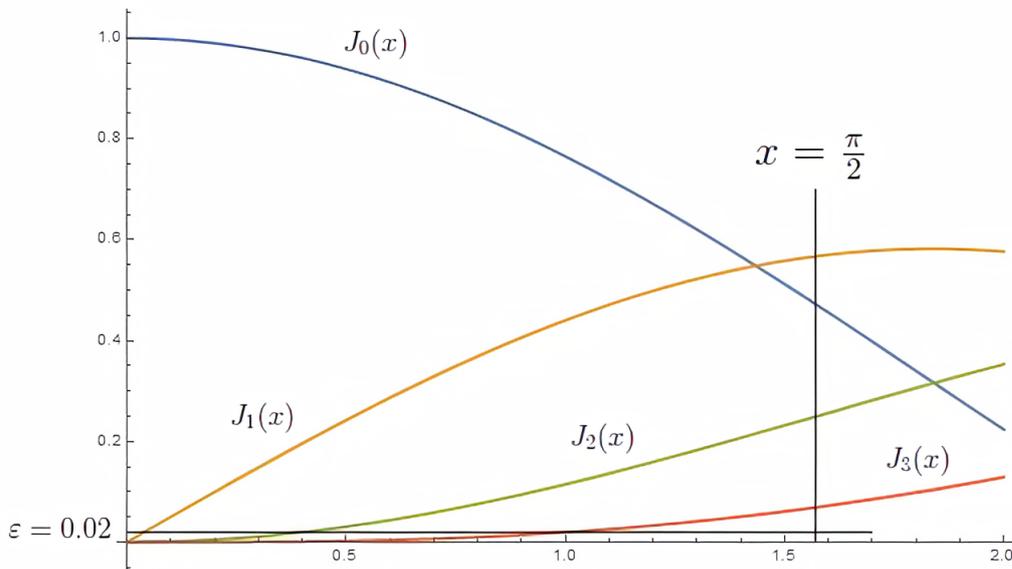


FIGURE 4.26 – Fonctions de Bessel $J_0(x)$ (bleu), $J_1(x)$ (orange), $J_2(x)$ (vert) et $J_3(x)$ (rouge) pour x variant de 0 à 2. La ligne verticale en $x = \frac{\pi}{2}$ correspond à l'argument des fonctions de Bessel que nous considérons. La ligne horizontale en $y = 0.02$ correspond au seuil $\varepsilon = 0.02$ que nous nous sommes fixés ($J_4(\pi/2) < 0.02$).

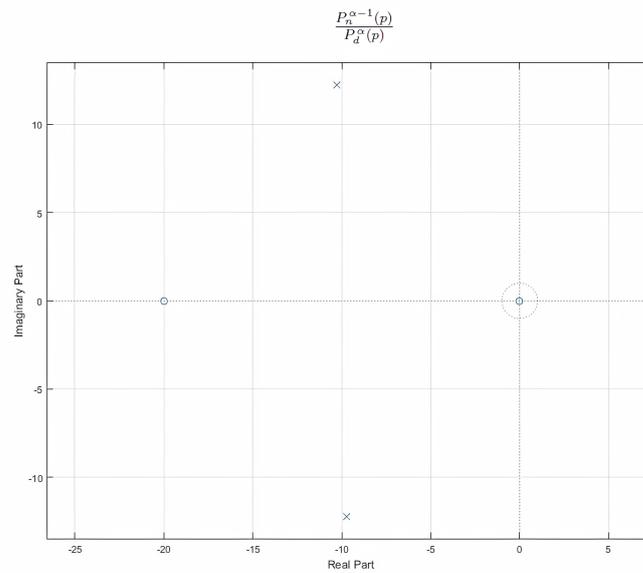


FIGURE 4.27 – Partie réelle et imaginaire des zéros (cercles) et des pôles (croix) de la fraction $\frac{P_n^{\alpha-1}(p)}{P_d^\alpha(p)}$ en l'absence de modulation ($\omega_M = 0$). Nous sommes ici en **couplage fort** ($\lambda = 20, g = 5, N = 10$). Les 2 pôles ont une partie réelle proche de -10 et une partie imaginaire proche de 12 (en valeur absolue).

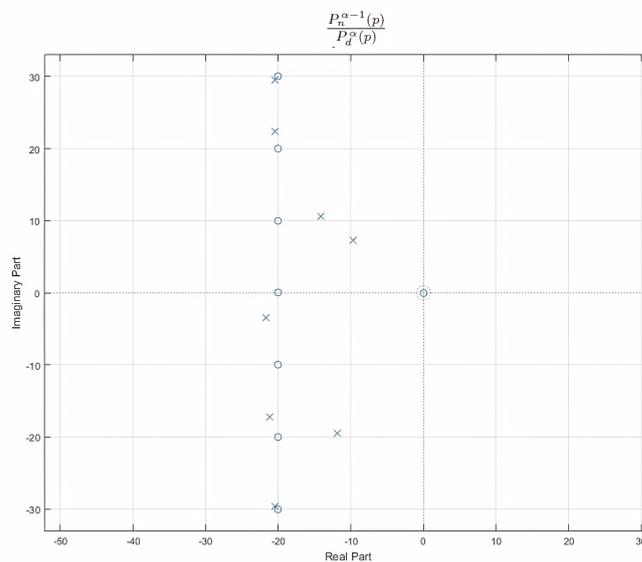


FIGURE 4.28 – Partie réelle et imaginaire des zéros (cercles) et des pôles (croix) de la fraction $\frac{P_n^{\alpha-1}(p)}{P_d^\alpha(p)}$ avec modulation ($\omega_M = 10$) en **couplage fort** ($\lambda = 20, g = 5, N = 10$). Les 8 pôles ont des parties réelles comprises entre plus ou moins -20 et -10 et leur partie imaginaire s'étend jusqu'à 30 (en valeur absolue).

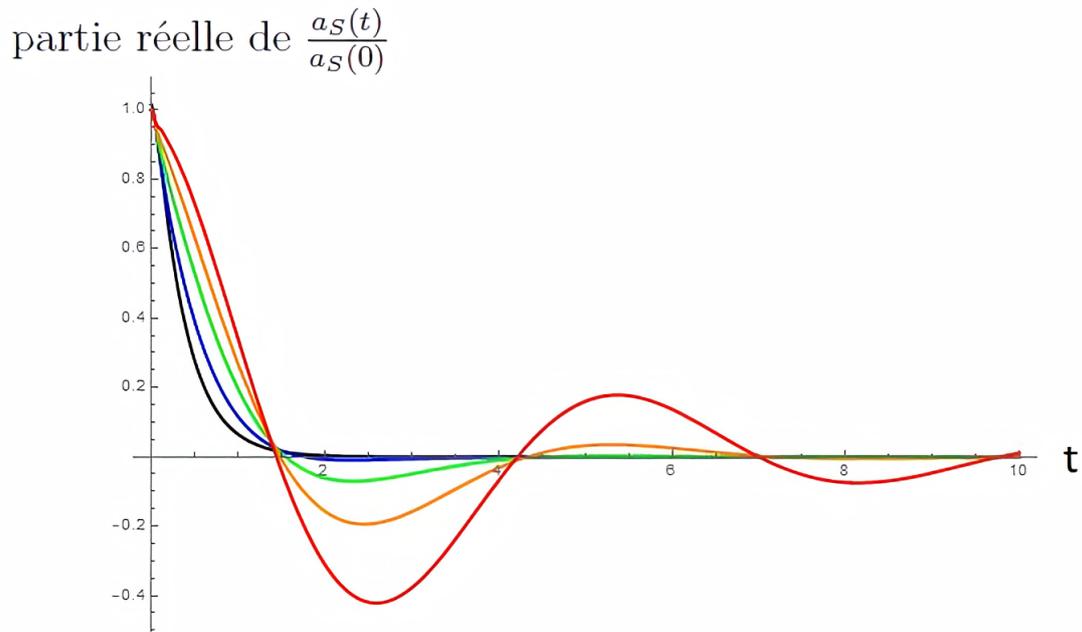


FIGURE 4.29 – Evolution temporelle de la partie réelle de $\frac{a_S(t)}{a_S(0)}$ en **couplage faible** ($\lambda = 20, g = 5, N = 2$) avec $\frac{\omega_A}{\omega_M} = \frac{\pi}{2}$ pour différentes valeurs de ω_M : 0.01(noir), 15(bleu), 25(vert), 35(orange) et 50(rouge).

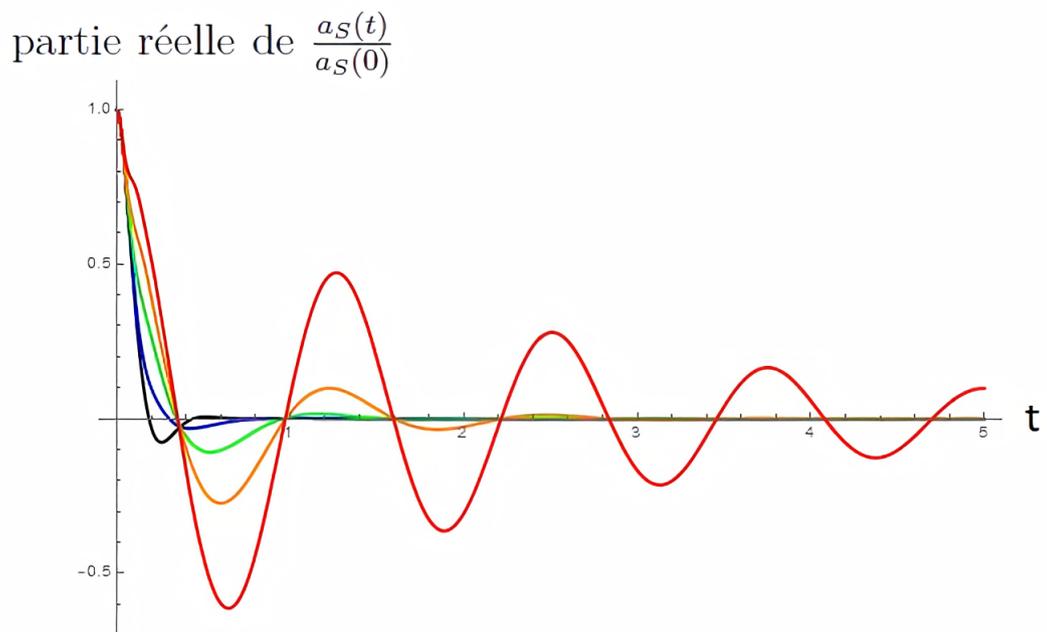


FIGURE 4.30 – Evolution temporelle de la partie réelle de $\frac{a_S(t)}{a_S(0)}$ en **couplage fort** ($\lambda = 20, g = 5, N = 10$) avec $\frac{\omega_A}{\omega_M} = \frac{\pi}{2}$ pour différentes valeurs de ω_M : 0.01(noir), 15(bleu), 25(vert), 35(orange) et 50(rouge).

VI.3 Modulation des forces de couplage et des modes de la cavité

Dans la section précédente, nous avons considéré que les modes $\omega_k(t)$ sont modulés et que les forces de couplage g_k restent fixes dans le temps. Dans cette sous-section, les modes $\omega_k(t)$ varient dans le temps et les forces de couplage s'adaptent à cette variation des modes $\omega_k(t)$, acquérant ainsi une dépendance implicite $g(\omega_k(t))$. Nous supposons que les forces de couplage $g(\omega_k(t))$ n'ont pas de dépendance explicite par rapport au temps (donc pas de la forme $g(\omega_k(t), t)$). Comme dans la première sous-section, cette situation est typiquement rencontrée lorsque la cavité interne contenant les atomes reste fixe, en dehors de laquelle un miroir oscille. Nous représentons schématiquement cette dépendance à la figure 4.31.

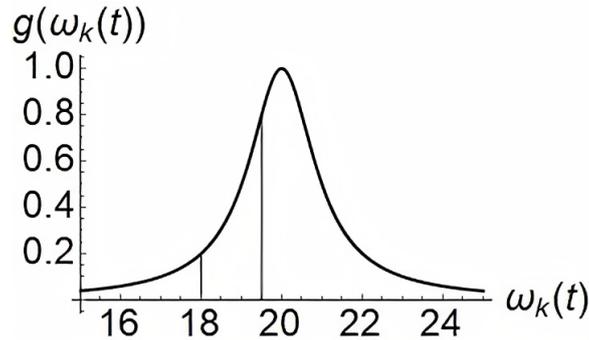


FIGURE 4.31 – Représentation de la dépendance des forces de couplage $g(\omega_k(t))$. La densité de modes $\delta(\omega - \omega_k)$ reste globalement fixe dans le temps : la lorentzienne (centrée en $\omega_c = 20$ sur le schéma) est fixe. Les modes $\omega_k(t)$ varient dans le temps et les forces de couplage $g(\omega_k(t))$ s'adaptent à cette variation. Nous avons représenté par les 2 lignes verticales $\omega_k(t)$ à deux instants $\omega_k(t_1) = 18$ et $\omega_k(t_2) = 19.5$ ainsi que la valeur correspondante $g(\omega_k(t_1))$ et $g(\omega_k(t_2))$.

Dans cette sous-section, nous discutons de la forme du noyau $K(t, t')$ de l'équation intégrodifférentielle. Nous adoptons la même forme pour la fonction modulante : $\omega_k(t) = \omega_k(0) + m(t)$ avec $m(t) = \omega_A \sin(\omega_M t)$. Le noyau $K(t, t')$, à l'instar de la sous-section précédente, contient le facteur exponentiel oscillant $\exp\left\{-i \int_{t'}^t dt'' m(t'')\right\}$ mais va afficher en plus une dépendance temporelle provenant de $\delta(\omega - \omega_k) |g(\omega_k(t))|^2$. Sans perte de généralité, nous choisissons des $g(\omega_k(t))$ réels de manière à pouvoir écrire le produit suivant aux instants t et t' comme :

$$\delta(\omega - \omega_k) g(\omega_k(t)) g(\omega_k(t')) = \frac{g^2 \lambda}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + (\omega_k(t) - \omega_0)^2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + (\omega_k(t') - \omega_0)^2}}$$

Le noyau $K(t, t')$ prend alors la forme générale suivante :

$$K(t, t') = \frac{\lambda}{\pi} \exp\left\{-i \int_{t'}^t dt'' m(t'')\right\} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i(\omega - \omega_0)(t - t')}}{\sqrt{[\lambda^2 + (\omega - \omega_0 + m(t))^2] [\lambda^2 + (\omega - \omega_0 + m(t'))^2]}} \quad (4.48)$$

Nous nous plaçons dans un régime de faible modulation où celle-ci peut être vue comme une perturbation. Nous introduisons le paramètre perturbatif $\varepsilon \ll 1$ et développons en série la racine présente au dénominateur. En ne gardant que les termes de premier ordre en ε , nous aboutissons à :

$$(\lambda^2 + \omega^2) \sqrt{1 + \frac{2\omega}{\lambda^2 + \omega^2} (m(t) + m(t')) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} \simeq (\lambda^2 + \omega^2) \left[1 + \frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2} (m(t) + m(t')) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right]$$

Après le changement de variable $\omega - \omega_0 \rightarrow \omega$, nous écrivons alors $K(t, t')$ comme :

$$K(t, t') = \frac{\lambda}{\pi} \exp \left\{ -i\varepsilon \int_{t'}^t dt'' m(t'') \right\} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 + \omega(m(t) + m(t')) \varepsilon + \lambda^2}$$

Les pôles sont légèrement déplacés suite à la perturbation et sont situés en :

$$\omega_{\pm} = -\frac{\varepsilon}{2} (m(t) + m(t')) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 (m(t) + m(t'))^2 - 4\lambda^2} \simeq -\frac{\varepsilon}{2} (m(t) + m(t')) \pm i\lambda$$

Après intégration sur ω , $K(t, t')$ est finalement donné par :

$$K(t, t') = \exp \left\{ -i\varepsilon \int_{t'}^t dt'' m(t'') \right\} \exp \left\{ \left[-\lambda + i\frac{\varepsilon}{2} (m(t) + m(t')) \right] (t - t') \right\}$$

Pour une modulation sinusoïdale $m(t) = \omega_A \sin(\omega_M t)$, $K(t, t')$ est donné par :

$$K(t, t') = e^{-\lambda(t-t')} \exp \left\{ i\varepsilon \left[\frac{\omega_A}{\omega_M} (\cos(\omega_M t) - \cos(\omega_M t')) + \frac{\omega_A(t-t')}{2} (\sin(\omega_M t) + \sin(\omega_M t')) \right] \right\} \quad (4.49)$$

La correction au premier ordre en ε du noyau $K(t, t')$ fait intervenir un désaccord évoluant dans le temps à la même fréquence que la modulation imprimée au système atomes + champ de la cavité. Nous représentons à la figure 4.32 la partie réelle du noyau $K(t, t' = 0)$ pour différentes fréquences de modulation ω_M .

Partie réelle de $K(t, t' = 0)$

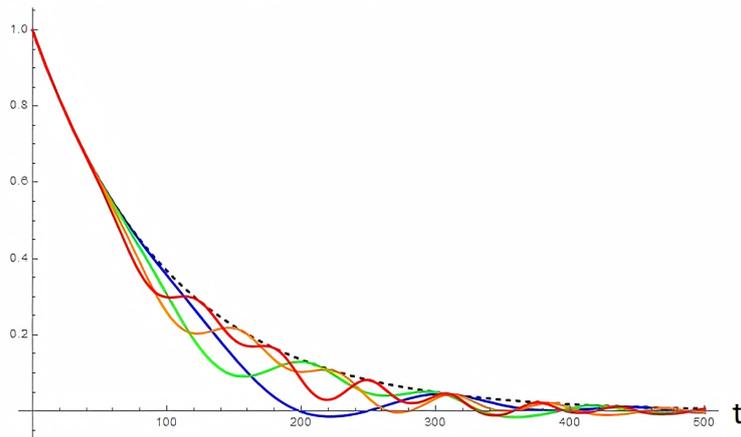


FIGURE 4.32 – Partie réelle de $K(t, t' = 0)$ avec $\lambda = 0.01$, $\varepsilon\omega_A = 0.01$ pour différents ω_M . En noir pointillé, $K(t, t' = 0) = e^{-\lambda t}$ (pas de modulation) et $\omega_M = 0.02$ en bleu, 0.03 en vert, 0.04 en orange et 0.05 en rouge.

VII Effet de la distance entre atomes

Le but de cette section est d'évaluer l'effet de la distance r_{ij} ($i, j = 1, \dots, N$) entre atomes. En effet, dans les sections précédentes, nous nous sommes placés dans le régime superradiant $r_{ij} \ll \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$ ($i, j = 1, \dots, N$). Dans cette section, nous tentons d'aller au-delà de cette approximation du régime superradiant.

Nous repartons de l'équation pour l'amplitude de probabilité $a_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) en prenant d'ores et déjà la limite d'un continuum de modes :

$$\dot{a}_j(t) = - \int_0^t dt' \sum_{i=1}^N a_i(t') \int d^3k |g(\omega_k)|^2 e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t-t')} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ij}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ij} = \frac{\omega_k}{c} r_{ij} \cos(\mathbf{k}, \mathbf{r}_{ij})$$

De manière générale, l'intégration fait intervenir $\cos(\mathbf{k}, \mathbf{r}_{ij}) \equiv \cos(\beta_{ij}(\mathbf{k}))$ où $\beta_{ij}(\mathbf{k})$ est l'angle entre le mode \mathbf{k} et le vecteur $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ joignant l'atome i et j . Nous faisons l'approximation que cet angle $\beta_{ij}(\mathbf{k})$ ne dépend pas de i et j ($i, j = 1, \dots, N$). Cette approximation revient à négliger les effets liés à la configuration spatiale du système de N atomes, en particulier les angles α_{ij} entre les différents atomes. Nous posons alors $\beta_{ij}(\mathbf{k}) \simeq \theta_k$ et nous choisissons un système de coordonnées approprié de telle sorte que θ_k corresponde à l'angle polaire habituel. L'intégration sur ω_k fait intervenir en toute rigueur le jacobien ω_k^2 . Nous pouvons simplement absorber cette contribution dans la définition de la densité spectrale lorentzienne de modes de la cavité $J(\omega)$:

$$\frac{g^2}{2\pi} J(\omega) \equiv \sum_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_k) \omega_k^2 |g_{\mathbf{k}}|^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\omega J(\omega) = \pi$$

où nous avons encore supposé $\omega_0 \gg \lambda$ afin d'inclure les fréquences négatives et où nous avons ajouté un facteur $\frac{1}{2}$ dans la définition. L'intégration sur l'angle azimutal φ_k donne simplement une constante que nous pouvons également absorber dans la définition de $J(\omega)$. Nous pouvons alors écrire dans l'approximation $\beta_{ij}(\mathbf{k}) \simeq \theta_k$, en laissant tomber l'indice k :

$$\dot{a}_j(t) = - \frac{g^2}{2\pi} \int_0^t dt' \sum_{i=1}^N a_i(t') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega J(\omega) e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')} \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) e^{-i\omega \tau_{ij} \cos(\theta)}$$

où nous avons introduit $\tau_{ij} = \frac{r_{ij}}{c}$ le temps de parcours d'un photon entre les atomes i et j . L'intégration sur θ est aisée et donne :

$$\int_0^\pi d\theta \sin(\theta) e^{-i\omega \tau_{ij} \cos(\theta)} = \int_{-1}^1 d(\cos(\theta)) e^{-i\omega \tau_{ij} \cos(\theta)} = 2 \frac{\sin(\omega \tau_{ij})}{\omega \tau_{ij}} \equiv 2 \operatorname{sinc}(\omega \tau_{ij})$$

où $\operatorname{sinc}(x)$ est la fonction sinus cardinal. Le facteur $\frac{1}{2}$ préalablement introduit se simplifie avec le facteur 2 provenant de l'intégration polaire. La fonction $\operatorname{sinc}(\omega \tau_{ij})$ est analytique et n'introduit donc pas de pôles supplémentaires dans l'évaluation de l'intégrale sur ω par le théorème des résidus. Nous pouvons dès lors écrire directement :

$$f_{ij}(t - t') = e^{-\lambda(t-t')} \operatorname{sinc}((\omega_0 - i\lambda)\tau_{ij})$$

où $f_{ij}(t-t')$ est la fonction de corrélation à deux atomes (entre l'atome i et j). Néanmoins, comme nous travaillons dans l'hypothèse $\omega_0 \gg \lambda$, nous devons nous limiter à des valeurs $\frac{\lambda}{\omega_0} \ll 1$:

$$\text{sinc}(\omega_0\tau_{ij}(1 - i\lambda/\omega_0)) \simeq \text{sinc}(\omega_0\tau_{ij}) + i(\text{sinc}(\omega_0\tau_{ij}) - \cos(\omega_0\tau_{ij}))\frac{\lambda}{\omega_0} + \mathcal{O}((\lambda/\omega_0)^2)$$

Dans la suite, nous ne considérons pas la correction au premier ordre en λ/ω_0 et ne gardons que le facteur $\text{sinc}(\omega_0\tau_{ij})$. De ce fait, nous retrouvons bien la fonction de corrélation à un atome $f(t-t')$ dans la limite superradiante $\omega_0\tau_{ij} \ll 1$ et $f_{ij}(t-t') \rightarrow 0$ ($i \neq j$) pour des atomes distants ($\omega_0\tau_{ij} \gg 1$). Insistons toutefois sur le point suivant. Etant donné l'approximation $\beta_{ij}(\mathbf{k}) \simeq \theta_k$, nous aboutissons à une fonction de corrélation à deux atomes très simple faisant intervenir un facteur sinus cardinal par rapport à la fonction de corrélation à un atome. Nous pourrions imaginer des fonctions de corrélation $f_{ij}(t-t')$ ($i \neq j$) plus complexes tant qu'elles satisfont aux conditions aux limites :

$$\lim_{r_{ij} \rightarrow 0} f_{ij}(t-t') = f(t-t') \quad \text{et} \quad \lim_{r_{ij} \rightarrow \infty} f_{ij}(t-t') = 0$$

L'équation pour l'amplitude de probabilité $a_j(t)$ ($j = 1, \dots, N$) s'écrit alors :

$$\dot{a}_j(t) = -g^2 \sum_{i=1}^N \int_0^t dt' f_{ij}(t-t') a_i(t') \simeq -g^2 \sum_{i=1}^N \text{sinc}(\omega_0\tau_{ij}) \int_0^t dt' e^{-\lambda(t-t')} a_i(t') \quad (j = 1, \dots, N)$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation précédente, nous avons :

$$p\tilde{a}_j(p) - a_j(0) = -g^2 \sum_{i=1}^N \tilde{f}_{ij}(p)\tilde{a}_i(p) \iff p\tilde{a}_j(p) + g^2 \sum_{i=1}^N \tilde{f}_{ij}(p)\tilde{a}_i(p) = a_j(0) \quad (j = 1, \dots, N)$$

Nous avons un système d'équations algébriques dans l'espace de Laplace, que nous pouvons écrire la sous forme matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} p + g^2\tilde{f}(p) & g^2\tilde{f}_{12}(p) & g^2\tilde{f}_{13}(p) & \cdots & g^2\tilde{f}_{1N}(p) \\ g^2\tilde{f}_{12}(p) & p + g^2\tilde{f}(p) & g^2\tilde{f}_{23}(p) & \cdots & g^2\tilde{f}_{2N}(p) \\ g^2\tilde{f}_{13}(p) & g^2\tilde{f}_{23}(p) & p + g^2\tilde{f}(p) & \cdots & g^2\tilde{f}_{3N}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g^2\tilde{f}_{1N}(p) & g^2\tilde{f}_{2N}(p) & g^2\tilde{f}_{3N}(p) & \cdots & p + g^2\tilde{f}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1(p) \\ \tilde{a}_2(p) \\ \tilde{a}_3(p) \\ \vdots \\ \tilde{a}_N(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \\ a_3(0) \\ \vdots \\ a_N(0) \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Le problème revient donc à calculer l'inverse A^{-1} , l'appliquer au vecteur de conditions initiales \mathbf{b} et revenir dans le domaine temporel par transformée de Laplace inverse. Nous illustrons maintenant pour le cas de 2 atomes avec $f_{ij}(t-t') = e^{-\lambda(t-t')} \text{sinc}(\omega_0\tau_{ij})$. Nous donnons

la solution pour les amplitudes de probabilité des états symétriques $a_+(t)$ et anti-symétriques $a_-(t)$:

$$a_{\pm}(t) = a_{\pm}(0) e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left[\cosh \left(\frac{\lambda t}{2} \sqrt{1 - R_1^2 (1 \pm \text{sinc}(\omega_0 \tau_{12}))} \right) + \frac{\sinh \left(\frac{\lambda t}{2} \sqrt{1 - R_1^2 (1 \pm \text{sinc}(\omega_0 \tau_{12}))} \right)}{\sqrt{1 - R_1^2 (1 \pm \text{sinc}(\omega_0 \tau_{12}))}} \right] \quad (4.51)$$

où R_1 est le paramètre de contrôle à un atome ($R_1 = 2g/\lambda$). Nous constatons que l'état anti-symétrique évolue au cours du temps lorsque $r_{12} \neq 0$. Nous représentons l'évolution de $a_+(t)$ aux figures 4.33 et 4.34 ainsi que $a_-(t)$ aux figures 4.35 et 4.36 pour différentes valeurs de $\omega_0 \tau_{12}$.

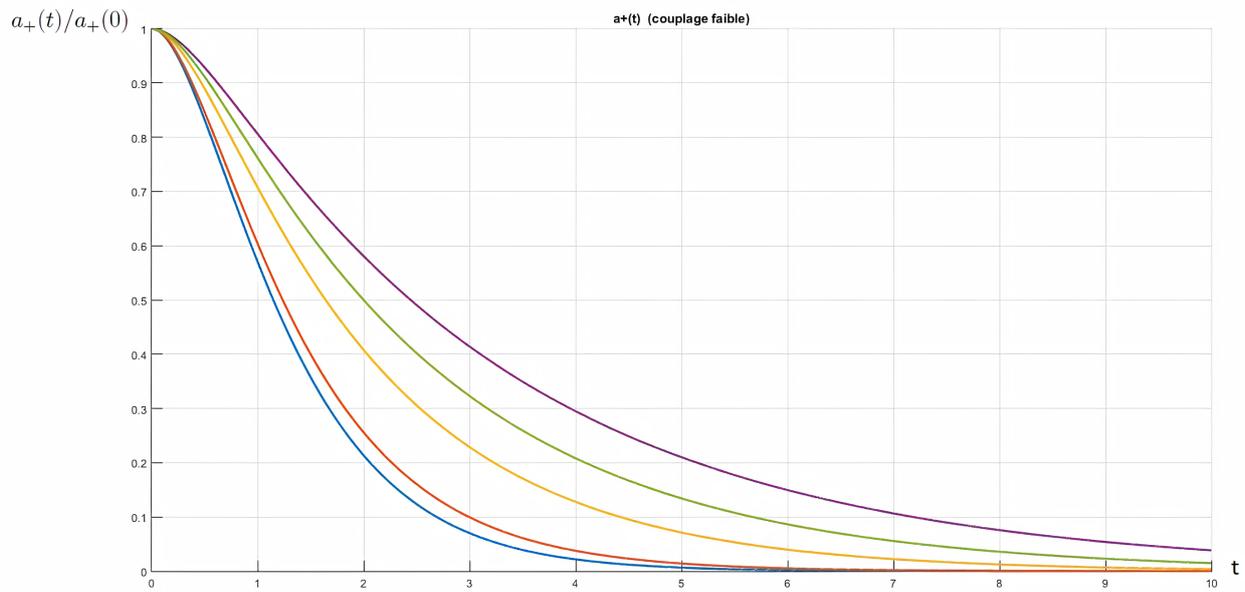


FIGURE 4.33 – Evolution temporelle de $a_+(t)/a_+(0)$ en **couplage faible** ($R_1^2 = 0.5$) avec $\lambda = 3$ pour différentes valeurs de $\omega_0\tau_{12}$: $\omega_0\tau_{12} = \frac{\pi}{16}$ en bleu (régime superradiant), $\frac{\pi}{8}$ (rouge), $\frac{\pi}{4}$ (jaune), $\frac{\pi}{2}$ (vert) et $\omega_0\tau_{12} = 100$ en mauve (atomes distants).

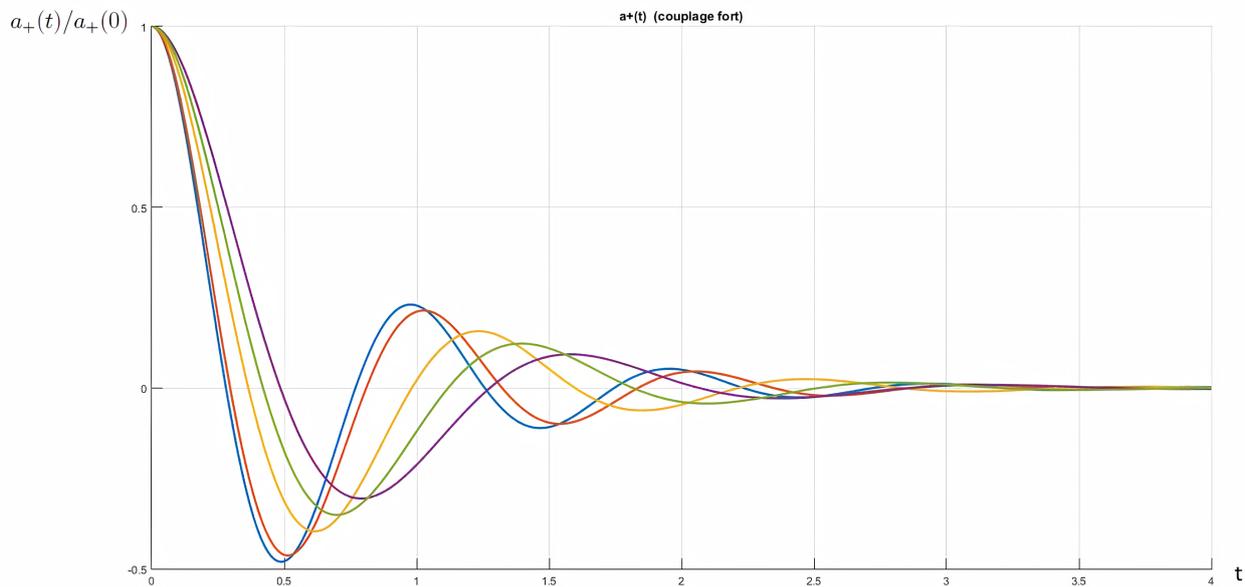


FIGURE 4.34 – Evolution temporelle de $a_+(t)/a_+(0)$ en **couplage fort** ($R_1^2 = 10$) avec $\lambda = 3$ pour différentes valeurs de $\omega_0\tau_{12}$: $\omega_0\tau_{12} = \frac{\pi}{16}$ en bleu (régime superradiant), $\frac{\pi}{8}$ (rouge), $\frac{\pi}{4}$ (jaune), $\frac{\pi}{2}$ (vert) et $\omega_0\tau_{12} = 100$ en mauve (atomes distants).

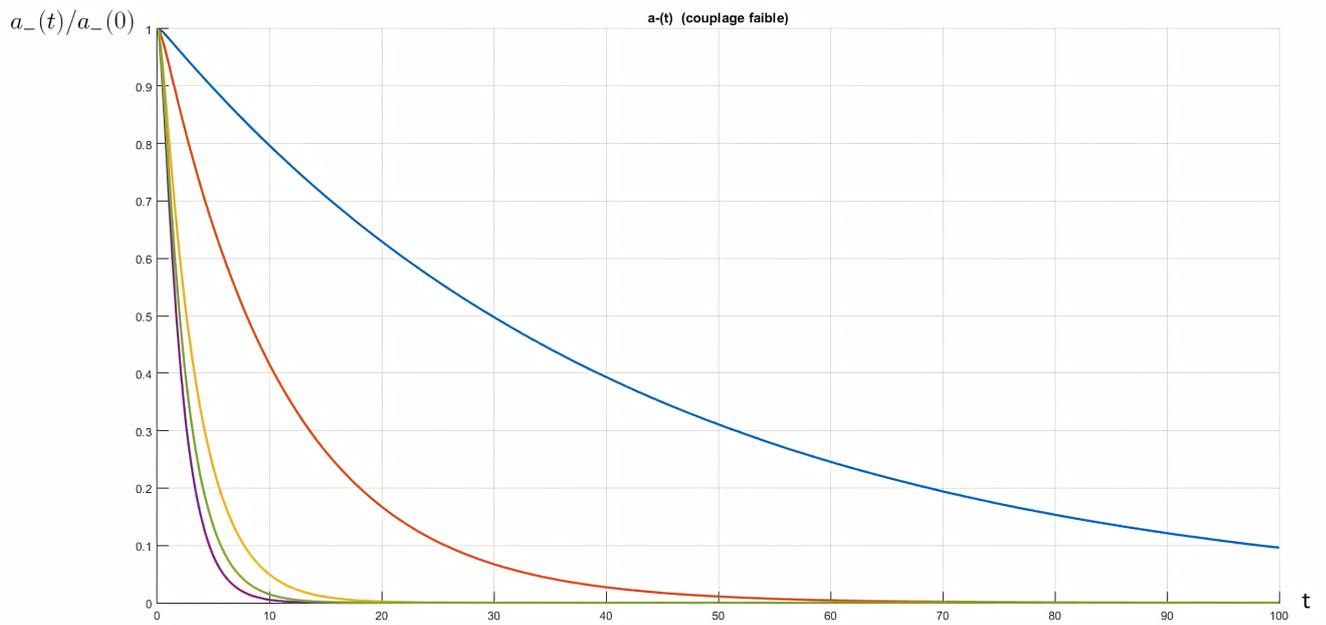


FIGURE 4.35 – Evolution temporelle de $a_-(t)/a_-(0)$ en **couplage faible** ($R_1^2 = 0.5$) avec $\lambda = 3$ pour différentes valeurs de $\omega_0\tau_{12}$: $\omega_0\tau_{12} = \frac{\pi}{16}$ en bleu (régime superradiant), $\frac{\pi}{8}$ (rouge), $\frac{\pi}{4}$ (jaune), $\frac{\pi}{2}$ (vert) et $\omega_0\tau_{12} = 100$ en mauve (atomes distants). $a_-(t)$ tend très lentement vers 0 dans le régime superradiant (échelle de temps varie de 0 à 100).

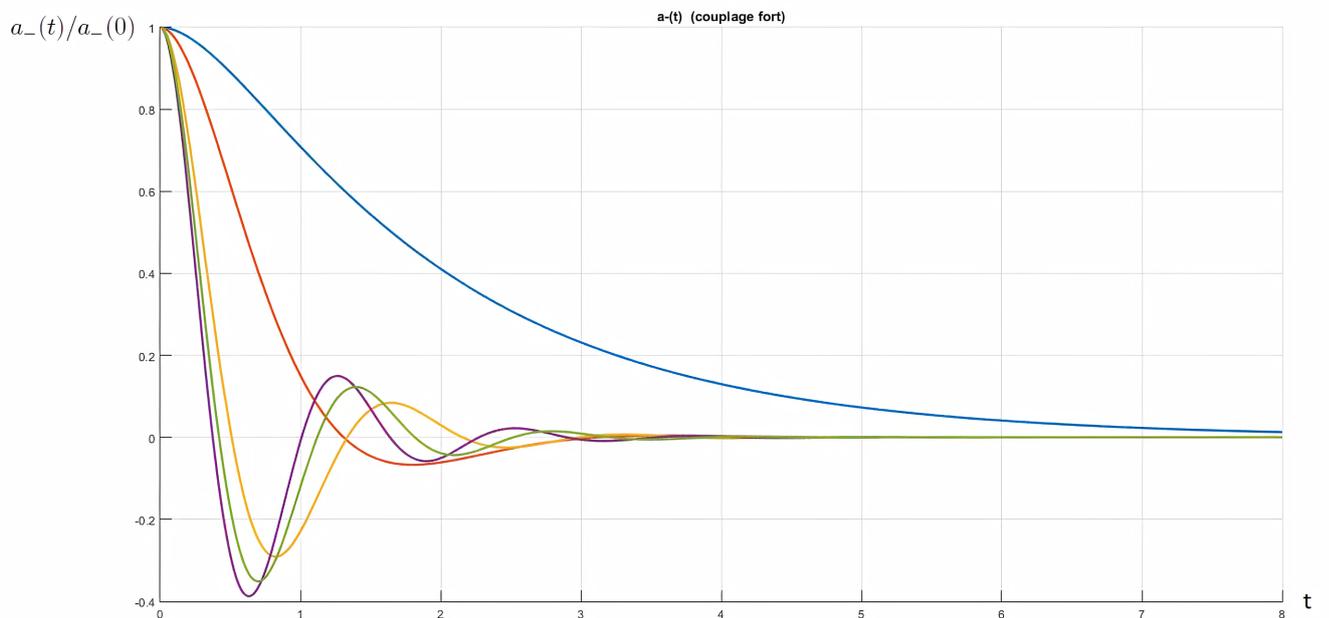


FIGURE 4.36 – Evolution temporelle de $a_-(t)/a_-(0)$ en **couplage fort** ($R_1^2 = 10$) avec $\lambda = 3$ pour différentes valeurs de $\omega_0\tau_{12}$: $\omega_0\tau_{12} = \frac{\pi}{16}$ en bleu (régime superradiant), $\frac{\pi}{8}$ (rouge), $\frac{\pi}{4}$ (jaune), $\frac{\pi}{2}$ (vert) et $\omega_0\tau_{12} = 100$ en mauve (atomes distants). $a_-(t)$ tend lentement vers 0 (échelle de temps varie de 0 à 8) dans le régime superradiant et n'affiche pas d'oscillations.

Chapitre 5

Au-delà d'une seule excitation

I Description de l'approche

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la dynamique d'un système N atomes où nous nous sommes restreints au sous-espace à une excitation. L'objectif de ce chapitre est de tenter d'aller au-delà de cette restriction en considérant que tous les atomes sont initialement dans l'état excité $|e, \dots, e\rangle$ et le champ de la cavité est initialement dans l'état du vide $|0_c\rangle$ (l'indice c référant à la cavité). Le nombre total d'excitations dans le système global atomes + champ de la cavité, que nous supposons conservé, vaut donc N . Etant donné que l'état initial $|e, \dots, e\rangle$ est symétrique (par rapport à des permutations des atomes), l'évolution du système atomique est restreinte au sous-espace symétrique. Pour 2 atomes, le sous-espace symétrique est sous-tendu par les 3 vecteurs $|2\rangle = |ee\rangle, |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle + |ge\rangle), |0\rangle = |gg\rangle$. Pour 3 atomes, il s'agit des 4 vecteurs $|3\rangle = |eee\rangle, |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|eeg\rangle + |ege\rangle + |gee\rangle), |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|gge\rangle + |geg\rangle + |egg\rangle), |0\rangle = |ggg\rangle$. Pour N atomes, le sous-espace symétrique est sous-tendu par les $N + 1$ vecteurs $\{|n\rangle, n = 0, \dots, N\}$ où n désigne le nombre d'excitations.

Il est très difficile de trouver une solution analytique pour les amplitudes de probabilité (approche système fermé avec un vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$) lorsque l'on considère plus d'une excitation dans le système atomes + champ de la cavité. Toutefois, il a été démontré [23, 8, 25, 26] qu'il est possible d'écrire une *équation maîtresse markovienne exacte* pour le système plus grand *atomes + pseudomode de la cavité* (markovienne dans le sens que les paramètres intervenant dans celle-ci ne dépendent pas du temps). On parle de *pseudomode* car la cavité supporte un mode à la fréquence ω_c avec une *largeur* λ . Dans la limite d'une cavité sans perte $\lambda \rightarrow 0$, nous avons une densité spectrale $\delta(\omega - \omega_c)$ et retrouvons un unique mode physique à la fréquence ω_c . Il s'agit de ce fait d'une description *effective*, s'appuyant fortement sur les pôles de la densité spectrale $J(\omega)$ de l'environnement. Pour une cavité, nous avons un seul pôle en $\omega_c - i\lambda$ donc un seul pseudomode mais la théorie générale peut s'étendre à plusieurs pôles donc plusieurs pseudomodes. L'idée de cette approche est de résoudre l'équation maîtresse pour l'opérateur densité $\hat{\rho}_{sc}$ (s pour le système atomique et c pour le pseudomode de la cavité) et puis d'effectuer la trace partielle sur le pseudomode afin d'accéder à l'opérateur densité $\hat{\rho}_s$ du système atomique : $\hat{\rho}_s = \text{Tr}_c[\hat{\rho}_{sc}]$. L'équation maîtresse pour $\hat{\rho}_{sc}$ se lit [25] :

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{sc} = -i\left[\hat{H}, \hat{\rho}_{sc}\right] + 2\lambda\left(\hat{a}_c\hat{\rho}_{sc}\hat{a}_c^\dagger - \frac{1}{2}\hat{a}_c^\dagger\hat{a}_c\hat{\rho}_{sc} - \frac{1}{2}\hat{\rho}_{sc}\hat{a}_c^\dagger\hat{a}_c\right) \quad (5.1)$$

où $\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_c + \hat{V}$ avec \hat{H}_s l'hamiltonien du système atomique, $\hat{H}_c = \omega_c\hat{a}_c^\dagger\hat{a}_c$ l'hamiltonien

du pseudomode, \hat{a}_c^\dagger et \hat{a}_c sont les opérateurs de création et d'annihilation du pseudomode et \hat{V} décrit l'interaction entre le système atomique et le pseudomode. Pour 2 atomes, \hat{V} est donné par [24]

$$\hat{V} = \sqrt{2}g \left(|+\rangle\langle 0| \hat{a}_c + |2\rangle\langle +| \hat{a}_c + |0\rangle\langle +| \hat{a}_c^\dagger + |+\rangle\langle 2| \hat{a}_c^\dagger \right) \quad (5.2)$$

où nous avons implicitement supposé le régime superradiant (l'état anti-symétrique $|-\rangle$ n'apparaît pas dans l'interaction \hat{V}), g est la force de couplage préalablement introduite et le facteur $\sqrt{2}$ rend compte du sous-espace symétrique pour 2 atomes. Cette équation maîtresse pour $\hat{\rho}_{sc}$ est sous la forme de Lindblad et décrit l'interaction cohérente entre le système atomique et le pseudomode de la cavité (\hat{V}) en présence de la dissipation du pseudomode (deuxième terme avec λ) dans un réservoir markovien. Dans l'annexe C, nous détaillons davantage les idées de base de l'approche pseudomodes.

Nous débutons par étudier le cas de deux atomes pour ensuite généraliser à plus de deux atomes.

II Deux atomes

Comme nous supposons un état initial symétrique et une conservation du nombre d'excitations, l'opérateur densité $\hat{\rho}_{sc}$ du système de deux atomes + pseudomode va évoluer dans la base des 3 vecteurs $|2_s, 0_c\rangle, |1_s, 1_c\rangle, |0_s, 2_c\rangle$ où le premier élément (respectivement second élément) du vecteur fait référence au nombre d'excitations du système de 2 atomes (respectivement du pseudomode). Dans cette situation, la trace partielle est immédiate et les éléments de matrice de $\hat{\rho}_s$ dans la base $\{|2_s\rangle, |1_s\rangle, |0_s\rangle\}$ sont identiques à ceux de $\hat{\rho}_{sc}$ dans la base $\{|2_s, 0_c\rangle, |1_s, 1_c\rangle, |0_s, 2_c\rangle\}$. Par exemple, l'hamiltonien d'interaction \hat{V} entre les deux atomes et le pseudomode est donné par :

$$\hat{V} = \begin{array}{c} \langle 2_s, 0_c| \\ \langle 1_s, 1_c| \\ \langle 0_s, 1_c| \end{array} \begin{array}{ccc} |2_s, 0_c\rangle & |1_s, 1_c\rangle & |0_s, 2_c\rangle \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & \sqrt{2}g & 0 \\ \sqrt{2}g & 0 & 2g \\ 0 & 2g & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Nous étudions les valeurs propres du Liouvillien $\mathcal{L}(\hat{\rho}_s)$. Comme $\hat{\rho}_s$ est une matrice 3 par 3 (ou un vecteur colonne de 9 composantes en vectorisant cette matrice), le Liouvillien a 9 valeurs propres. Cinq d'entre elles sont données par : $0, -2\lambda, -\lambda, \frac{1}{2}(-5\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 24g^2})$ et les 4 restantes sont données par les racines d'un polynôme de degré 4 que nous appelons P_4 . Nous définissons ensuite notre paramètre de contrôle R_2 de telle sorte à avoir $\sqrt{\lambda^2 - 24g^2} = \lambda\sqrt{1 - R_2^2}$. Il est ainsi possible d'exprimer les racines de P_4 uniquement en fonction de R_2 . Nous sommes davantage intéressés par la forme de ces racines (réelles ou en paire complexes conjugués) et calculons le discriminant de P_4 que l'on appelle $\Delta(R_2)$. Ce discriminant $\Delta(R_2)$ est lui-même un polynôme de degré 12 en R_2 et admet deux racines en $R_2 \simeq 0.518$ et $R_2 \simeq 1.838$. Nous représentons $\Delta(R_2)$ à la figure 5.1. Au final, les 9 valeurs propres de \mathcal{L} ont la forme suivante en fonction de R_2 :

- $0 \leq R_2 \leq 0.518$: toutes 9 réelles
- $0.518 \leq R_2 \leq 1$: 7 réelles et une paire complexes conjugués
- $1 \leq R_2 \leq 1.838$: 5 réelles et 2 paires complexes conjugués

— $R_2 \geq 1.838$: 3 réelles et 3 paires complexes conjugués

Globalement, le Liouvillien a davantage de valeurs propres en paire complexes conjugués et avec des parties imaginaires importantes lorsque R_2 est grand. Il en résulte un comportement davantage oscillant lorsque R_2 est grand. Nous illustrons ce comportement oscillant pour les populations à la figure 5.2.

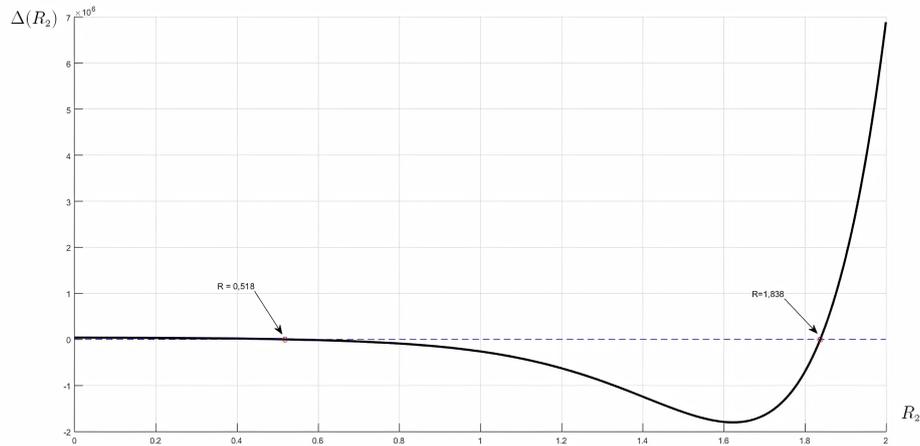


FIGURE 5.1 – Discriminant $\Delta(R_2)$ du polynôme P_4 . $\Delta(R_2)$ est positif jusqu'à $R_2 \simeq 0.518$ (4 racines réelles), est négatif pour $0.518 \leq R_2 \leq 1.838$ (2 racines réelles et une paire complexes conjugués) et redevient positif pour $R_2 \geq 1.838$ (2 paires complexes conjugués).

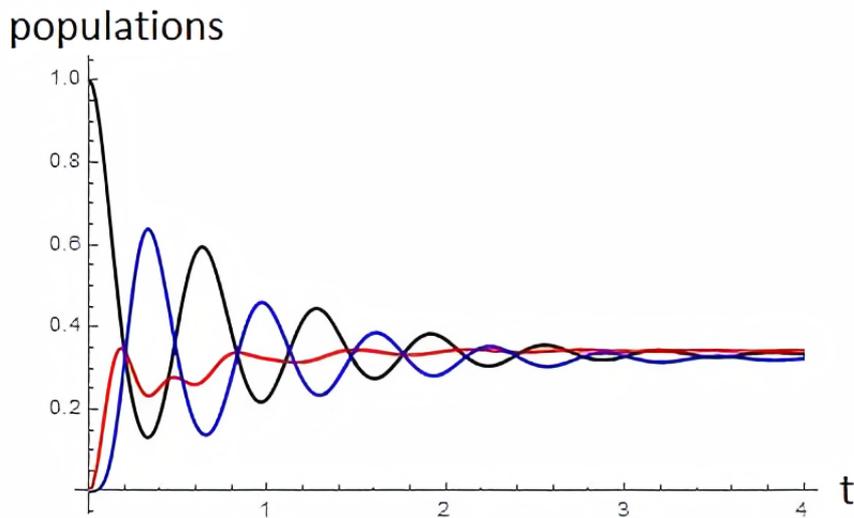


FIGURE 5.2 – Evolution des populations pour deux atomes avec $R_2 = 20$ et $\lambda = 1$. Nous avons la population $\rho_{22}(t)$ en noir, $\rho_{++}(t)$ en rouge et $\rho_{00}(t)$ en bleu.

III N atomes et intensité rayonnée

Nous considérons maintenant la même équation maîtresse pour le système de N atomes + le pseudomode de la cavité. La différence par rapport au cas de 2 atomes réside dans la forme de l'interaction \hat{V} . Le facteur $\sqrt{2}$ devient \sqrt{N} et nous devons considérer les N sauts entre les états $|n-1\rangle$ et $|n\rangle$:

$$\hat{V} = \sqrt{N}g \sum_{i=1}^N \left(\hat{L}_i^\dagger \hat{a}_c + \hat{L}_i \hat{a}_c^\dagger \right) \quad (5.3)$$

où \hat{L}_i fait passer le système atomique de l'état $|i\rangle$ à l'état $|i-1\rangle$ et \hat{L}_i^\dagger de l'état $|i-1\rangle$ à l'état $|i\rangle$ ($i = 1, \dots, N$). Dans cette section, nous évaluons numériquement l'intensité rayonnée $I(t)$ en fonction du nombre d'atomes N , avec la condition initiale $\langle N_s, 0_c | \hat{\rho}_{sc}(0) | N_s, 0_c \rangle = 1$. Nous portons en graphique aux figures 5.4 et 5.5 l'intensité $I(t)$ pour différents nombres d'atomes N et pour 2 valeurs de la force de couplage g . Nous mettons également en évidence le comportement linéaire de I_{max} en fonction de N à la figure 5.3. Nous donnons dans l'annexe D le code *Mathematica* relatif à l'approche pseudomodes que nous avons développé dans ce chapitre.

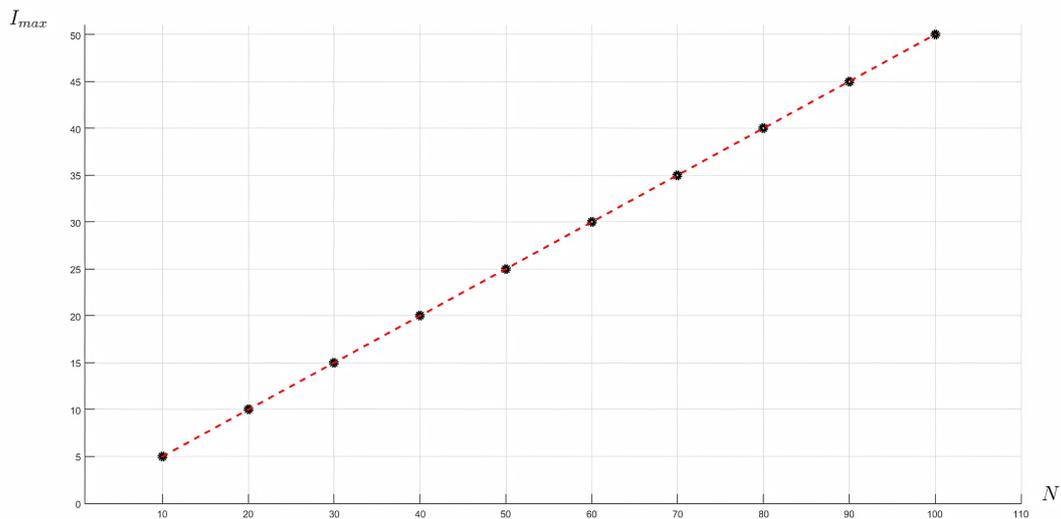


FIGURE 5.3 – I_{max} (premier maximum de $I(t)$) en fonction de N (variant de 10 à 100) avec $\lambda = 1$ et $g = 1$. Le modèle étudié conduit à un comportement linéaire de I_{max} en fonction du nombre N d'atomes.

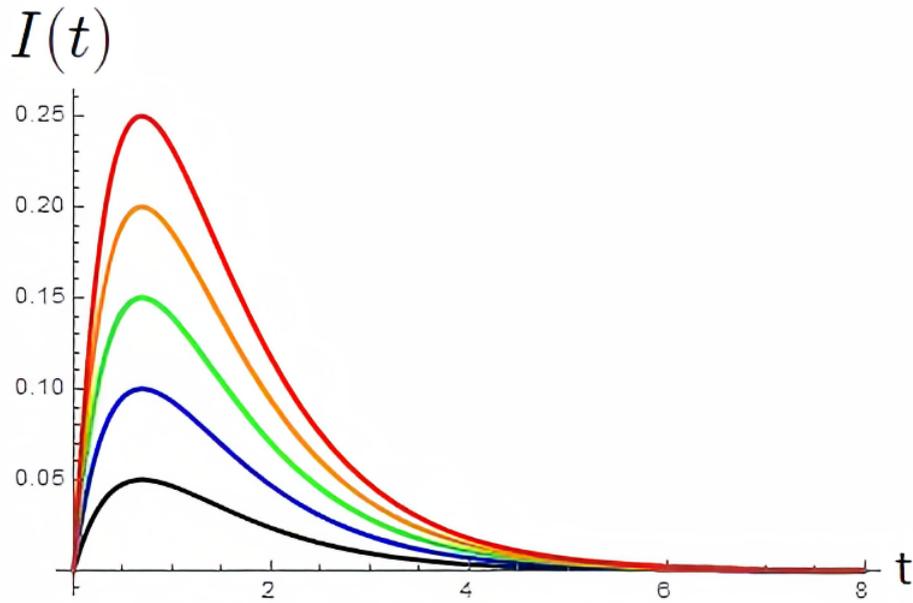


FIGURE 5.4 – Intensité rayonnée $I(t)$ avec $\lambda = 1$ et $g = 0.1$ pour différents nombre d'atomes : $N = 10$ en noir, $N = 20$ en bleu, $N = 30$ en vert, $N = 40$ en orange et $N = 50$ en rouge.

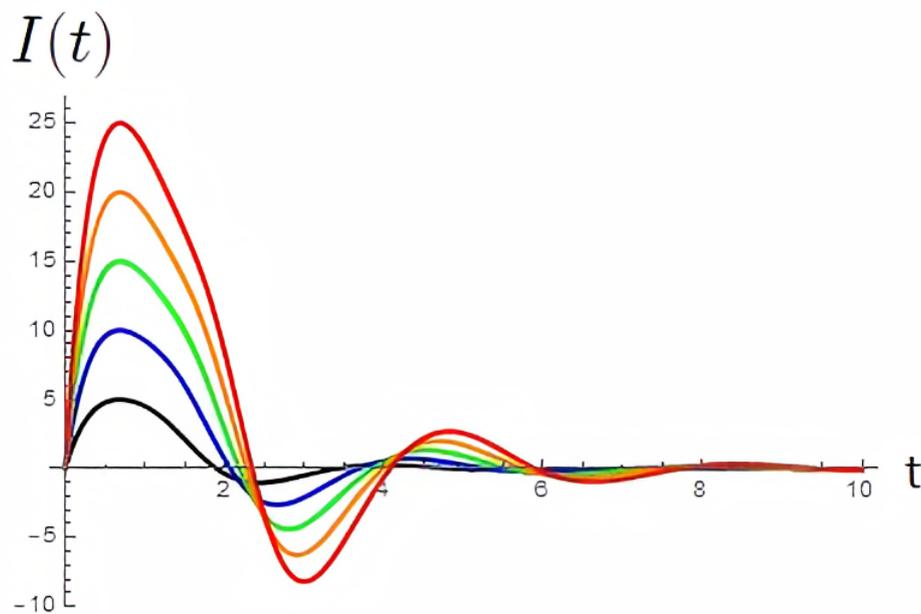


FIGURE 5.5 – Intensité rayonnée $I(t)$ avec $\lambda = 1$ et $g = 1$ pour différents nombre d'atomes : $N = 10$ en noir, $N = 20$ en bleu, $N = 30$ en vert, $N = 40$ en orange et $N = 50$ en rouge.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons apporté quelques résultats dans l'étude de la dynamique dissipative non-markovienne d'un ensemble d'atomes interagissant avec le champ électromagnétique. De manière générale, nous nous sommes efforcés de pousser le traitement analytique le plus possible pour ensuite illustrer le résultat obtenu dans des cas particuliers.

Au chapitre 1, nous avons introduit l'opérateur densité ainsi que l'opération de trace partielle, des outils essentiels dans l'étude des systèmes quantiques ouverts.

Au chapitre 2, nous avons introduit un type d'équations d'évolution pour l'opérateur densité réduit du système : les équations maîtresses. Nous avons insisté sur le point qu'une équation maîtresse non-markovienne avec des taux prenant des valeurs négatives peut mener à une dynamique complètement positive, donc physiquement valable. Nous avons également présenté une dérivation de l'équation maîtresse superradiante à N atomes avec taux dépendant du temps.

Au chapitre 3, nous avons résolu formellement l'équation maîtresse superradiante pour deux taux arbitraires $\gamma_0(t)$ et $\gamma(t)$ dans le cas de 2 et 3 atomes. Nous avons notamment illustré cette solution avec un taux $\gamma(t)$ oscillant et avons constaté que ce comportement oscillant se répercute dans l'évolution de la matrice densité du système.

Au chapitre 4, nous avons étudié de manière exacte la dynamique dissipative d'atomes en cavité. Ce modèle a été largement étudié dans la littérature dans le cas d'un atome ou de deux atomes avec une seule excitation [2]. Nous avons généralisé cette étude dans le cas de N atomes restreints au sous-espace à une excitation. Nous avons déterminé l'expression des taux apparaissant dans l'équation maîtresse et avons mis en évidence que ceux-ci peuvent prendre des valeurs négatives. Nous avons également évalué l'intensité rayonnée $I(t)$ et déterminé la loi reliant le premier maximum d'intensité I_{max} au paramètre de contrôle R_N . Nous avons quantifié l'intrication entre deux atomes au cours du temps et avons observé un comportement relativement inédit (points anguleux à certains instants), analogue toutefois à certains résultats dans la littérature [42]. Nous avons considéré une modulation du système atomes + champ de la cavité dans 3 cas différents et avons obtenu des résultats principalement perturbatifs. Nous avons finalement relaxé la condition de régime superradiant et discuté de l'effet de la distance entre atomes.

Enfin, au chapitre 5, nous avons proposé une approche permettant d'aller au-delà d'une seule excitation. Cette approche est basée sur une équation maîtresse markovienne pour le système

étendu atomes + pseudomode de la cavité. Les résultats de cette approche semblent recouper ceux du chapitre 4 au niveau de l'existence de deux types de régime : couplage faible et fort.

Dans ce travail, nous visualisons plusieurs perspectives. Le chapitre 5 est un début de piste pour étudier l'effet de plusieurs excitations et il convient de développer davantage cette piste de manière numérique. Nous n'avons pas considéré l'interaction dipôle-dipôle entre atomes [29] (terme de la forme $\hat{\sigma}_+^{(i)}\hat{\sigma}_-^{(j)}$ $i \neq j$). En effet, nous nous sommes concentrés sur le dissipateur et avons mis de côté l'hamiltonien de déplacement de Lamb $H_{LS}(t)$. Il serait intéressant d'étudier l'effet de ces *shifts* dépendant du temps $\chi_{ij}(t)$ sur la dynamique du système atomique. Nous n'avons également pas considéré de termes d'absorption (de la forme $\hat{\sigma}_+^{(i)}\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_-^{(j)}$) intervenant par exemple lorsque les atomes interagissent avec un champ laser externe. Au chapitre 3, nous avons résolu formellement l'équation maîtresse superradiante pour 2 et 3 atomes. Une démonstration dans le cas général à N atomes, prouvant que le processus de résolution reste identique, est évidemment souhaitable. Finalement, nous avons étudié une interaction dissipative et un travail ultérieur serait de reprendre la même démarche pour une interaction purement décohérente. Des expressions générales pour les taux de décohérence ont déjà été établies [18, 3] et il convient de les particulariser pour différents types d'environnement non-markovien, par exemple une densité spectrale lorentzienne pour le cas d'atomes en cavité.

Annexes

Annexe A : Résolution d'une équation différentielle du premier ordre

Dans cette annexe nous donnons les étapes de la solution d'une équation du type $\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$. Nous partons de la solution lorsque $b(t) = 0$ (solution homogène), qui est donnée par

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) \longrightarrow x(t) = \exp\left\{\int_0^t dt' a(t')\right\}x(0)$$

Afin de résoudre pour un $b(t) \neq 0$, nous proposons de multiplier l'équation par $\exp\left\{-\int_0^t dt' a(t')\right\}$:

$$\exp\left\{-\int_0^t dt' a(t')\right\}\dot{x}(t) = \exp\left\{-\int_0^t dt' a(t')\right\}a(t)x(t) + \exp\left\{-\int_0^t dt' a(t')\right\}b(t)$$

$$\iff \exp\left\{-\int_0^t dt' a(t')\right\}\dot{x}(t) - \exp\left\{-\int_0^t dt' a(t')\right\}a(t)x(t) = \exp\left\{-\int_0^t dt' a(t')\right\}b(t)$$

Nous exploitons la formule de Leibniz qui s'écrit de manière générale :

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} dy \varphi(y, t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} dy \frac{\partial \varphi(y, t)}{\partial t} + \frac{d\beta(t)}{dt} \varphi(\beta(t), t) - \frac{d\alpha(t)}{dt} \varphi(\alpha(t), t)$$

En renommant les variables, nous pouvons simplifier le membre de gauche et réécrire l'équation comme

$$\frac{d}{dt'} \left\{ \exp\left[-\int_0^{t'} dt'' a(t'')\right] x(t') \right\} = \exp\left\{-\int_0^{t'} dt'' a(t'')\right\} b(t')$$

Nous intégrons ensuite sur la variable t' de 0 jusqu'à t :

$$\int_0^t dt' \frac{d}{dt'} \left\{ \exp\left[-\int_0^{t'} dt'' a(t'')\right] x(t') \right\} = \int_0^t dt' \exp\left\{-\int_0^{t'} dt'' a(t'')\right\} b(t')$$

Le membre de gauche est l'intégrale d'une dérivée et est évaluée par le théorème fondamental de l'analyse :

$$\exp\left[-\int_0^t dt'' a(t'')\right]x(t) - \exp\left[-\int_0^0 dt'' a(t'')\right]x(0) = \int_0^t dt' \exp\left\{-\int_0^{t'} dt'' a(t'')\right\}b(t')$$

$$\iff \exp\left[-\int_0^t dt' a(t')\right]x(t) = x(0) + \int_0^t dt' \exp\left\{-\int_0^{t'} dt'' a(t'')\right\}b(t')$$

En multipliant l'équation par $\exp\left[\int_0^t dt' a(t')\right]$, nous obtenons la solution

$$x(t) = \exp\left[\int_0^t dt' a(t')\right]x(0) + \exp\left[\int_0^t dt' a(t')\right] \int_0^t dt' \exp\left[-\int_0^{t'} dt'' a(t'')\right]b(t')$$

Cette solution peut être facilement généralisée au cas vectoriel $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$ où la matrice A est indépendante du temps :

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t dt' e^{A(t-t')} \mathbf{b}(t')$$

Il faut alors évaluer l'exponentielle de matrice e^{At} , qui peut toujours être calculée via la décomposition de A en ses blocs de Jordan. Lorsque la matrice $A(t)$ dépend du temps, une solution sous la forme d'exponentielle de matrice n'est en général plus possible mais nous avons toujours l'existence et l'unicité de la solution (problème de Cauchy). Pour le système homogène $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$, toute solution $\mathbf{x}(t)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de vecteurs $\mathbf{g}_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$)

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{g}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{g}_n(t) \iff \mathbf{x}(t) = W(t)\mathbf{C}$$

où $W(t)$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\mathbf{g}_1(t) \dots \mathbf{g}_n(t)$ et est appelée *Wronskien* du système et \mathbf{C} un vecteur colonne contenant les coefficients c_i . La solution du système non homogène $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$ est alors formellement donnée par

$$\mathbf{x}(t) = W(t)W^{-1}(0)\mathbf{x}(0) + \int_0^t dt' W(t)W^{-1}(t')\mathbf{b}(t') = R(t,0)\mathbf{x}(0) + \int_0^t dt' R(t,t')\mathbf{b}(t')$$

où le "noyau" $R(t_1, t_2) = W(t_1)W^{-1}(t_2)$ satisfait à $R(t, t) = \mathbf{1}$, $R(t_1, t_2)R(t_2, t_3) = R(t_1, t_3)$ et $R^{-1}(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$.

Annexe B : Transformée de Laplace

Nous rappelons dans cette annexe les principales propriétés de la transformée de Laplace que nous avons utilisées dans ce travail.

La transformée de Laplace (unilatéral) \mathcal{L} d'une fonction $f(t)$ est définie par

$$\tilde{f}(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} dt f(t) e^{-pt}, \quad p \in \mathbb{C}$$

La transformée de Laplace inverse \mathcal{L}^{-1} est définie par

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} dp \tilde{f}(p) e^{pt}$$

En choisissant $\sigma \in \mathbb{R}$ de telle sorte à ce que tous les pôles de $\tilde{f}(p)$ soient à gauche de la droite $\text{Re}[p] = \sigma$, nous pouvons évaluer la transformée de Laplace inverse via le théorème des résidus

$$f(t) = \sum_{k \text{ pôles de } \tilde{f}(p)} \text{Res}_k[\tilde{f}(p)] e^{p_k t}$$

en supposant que l'intégrale sur l'arc de cercle s'annule (lemme de Jordan). Nous définissons les opérations de dérivée D , d'intégrale I et de produit de convolution \star :

$$Df = \frac{df}{dt}, \quad If = \int_0^t du f(u), \quad (f \star g)(t) = \int_0^t dt' f(t-t')g(t')$$

Nous avons les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] &= \tilde{f}(p - \alpha) \\ \mathcal{L}[D^n f] &= p^n \tilde{f}(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} Df(0^+) - \dots - D^{n-1} f(0^+) \\ \mathcal{L}[I^n f] &= \frac{1}{p^n} \tilde{f}(p) \\ \mathcal{L}[(f \star g)(t)] &= \tilde{f}(p) \tilde{g}(p) \\ \mathcal{L}[e^{\alpha t}] &= \frac{1}{p - \alpha}, \quad \mathcal{L}[\cosh(\alpha t)] = \frac{p}{p^2 - \alpha^2}, \quad \mathcal{L}[\sinh(\alpha t)] = \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2} \end{aligned}$$

Résolution de l'équation intégrro-différentielle avec un noyau exponentiel

Nous utilisons la transformée de Laplace afin de résoudre l'équation

$$\dot{a}_S(t) = -Ng^2 \int_0^t dt' e^{-\lambda(t-t')} a_S(t')$$

Nous avons un produit de convolution à droite et l'application de la transformée de Laplace aux deux membres donne

$$p\tilde{a}_S(p) - a_S(0) = -Ng^2 \frac{1}{p+\lambda} \tilde{a}_S(p) \iff \tilde{a}_S(p) = \frac{a_S(0)}{p + \frac{Ng^2}{p+\lambda}} = \frac{a_S(0)(p+\lambda)}{p^2 + p\lambda + Ng^2}$$

Méthode des résidus

Les pôles de $\tilde{a}_S(p)$ sont en $p_{\pm} = -\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4Ng^2}$, ce qui donne immédiatement

$$a_S(t) = a_S(0) \left[\frac{p_+ + \lambda}{(p_+ - p_-)} e^{p_+ t} + \frac{p_- + \lambda}{(p_- - p_+)} e^{p_- t} \right]$$

Méthode par identification

Nous proposons un autre moyen d'évaluer la transformée de Laplace inverse. Nous mettons $\tilde{a}_S(p)$ sous une forme permettant d'identifier des transformées de Laplace usuelles. Nous "complétons le carré" au dénominateur :

$$\frac{\tilde{a}_S(p)}{a_S(0)} = \frac{p}{\left(p + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4Ng^2}}{2}\right)^2} + \frac{\lambda}{\left(p + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4Ng^2}}{2}\right)^2}$$

Nous reconnaissons presque les transformées de Laplace des fonctions hyperboliques (à un *shift* près de $-\frac{\lambda}{2}$). Nous faisons alors les manipulations nécessaires afin de retrouver les formes standards de ces transformées de Laplace. En définissant alors

$$\delta_N = \sqrt{1 - R_N^2} \quad \text{avec} \quad R_N = \sqrt{N} \frac{g}{(\lambda/2)}$$

Nous avons

$$\frac{\tilde{a}_S(p)}{a_S(0)} = \frac{p + \frac{\lambda}{2}}{\left(p + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left(\frac{\lambda\delta_N}{2}\right)^2} + \frac{1}{\delta_N} \frac{\left(\frac{\lambda\delta_N}{2}\right)}{\left(p + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left(\frac{\lambda\delta_N}{2}\right)^2}$$

En exploitant alors $\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = \tilde{f}(p - \alpha)$, nous aboutissons à la solution

$$a_S(t) = a_S(0) e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left\{ \cosh\left(\delta_N \frac{\lambda t}{2}\right) + \frac{1}{\delta_N} \sinh\left(\delta_N \frac{\lambda t}{2}\right) \right\}$$

Annexe C : Approche pseudomodes

Dans cette annexe, nous suivons [26] et donnons les étapes et les équations de base de l'approche pseudomodes.

L'idée de l'approche pseudomodes est de remplacer l'environnement (bosonique) E par un environnement auxiliaire E' . Cet environnement auxiliaire E' est composé de 2 sous-systèmes : un ensemble fini de modes discrets (pseudomodes) M et un ensemble de réservoirs R . Chaque pseudomode M_i de M est couplé de manière markovienne à son propre réservoir R_i de R (voir figure 5.6). Les pseudomodes sont des variables auxiliaires et sont définies à partir des pôles de la densité spectrale $J(\omega)$ de l'environnement E .

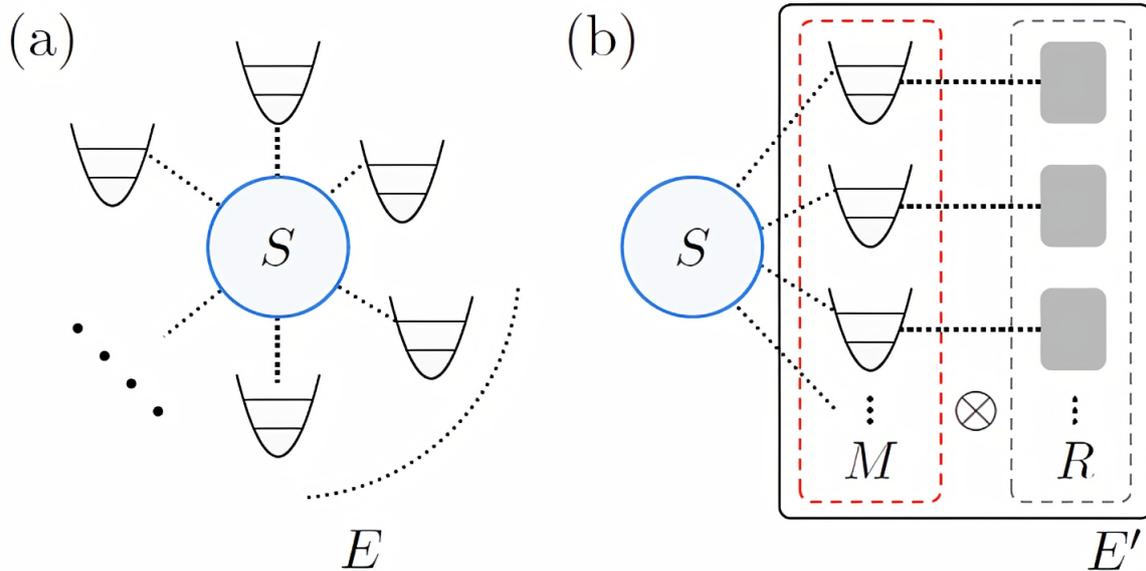


FIGURE 5.6 – Représentation schématique des deux modèles. A gauche (a), le modèle physique où le système d'intérêt S est couplé à son environnement bosonique E . A droite (b), le même système S couplé à l'environnement auxiliaire $E' = M \otimes R$ composé d'un nombre fini de modes discrets M (pseudomodes) couplés à des réservoirs markoviens indépendants R .

L'approche pseudomode est basée sur le théorème suivant [31].

Théorème (équivalence des dynamiques réduites) : Soient 2 environnements bosoniques E et E' couplés au système S par les hamiltoniens d'interaction

$$\hat{H}_I = \sum_j (\hat{c}_j^\dagger \otimes \hat{B}_j + \hat{c}_j \otimes \hat{B}_j^\dagger), \quad \hat{H}'_I = \sum_j (\hat{c}'_j \otimes \hat{B}'_j + \hat{c}'_j \otimes \hat{B}'_j{}^\dagger)$$

Alors, avec les conditions initiales $\hat{\rho}_{SE}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes |0\rangle\langle 0|_E$ et $\hat{\rho}_{SE'}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes |0\rangle\langle 0|_{E'}$ et \hat{B}_j, \hat{B}'_j linéaires en les opérateurs d'annihilation, nous avons

$$\left\langle \hat{B}_j(t + \tau) \hat{B}_k^\dagger(t) \right\rangle_E = \left\langle \hat{B}'_j(t + \tau) \hat{B}'_k{}^\dagger(t) \right\rangle_{E'} \Rightarrow \hat{\rho}_S = \hat{\rho}'_S \quad \forall j, k, t, \tau$$

Ce théorème nous dit que si les fonctions de corrélations des deux environnements E et E' sont égales, alors les opérateurs densité réduits $\hat{\rho}_S = \text{Tr}_E[\hat{\rho}_{SE}]$ et $\hat{\rho}'_S = \text{Tr}_{E'}[\hat{\rho}_{SE'}]$ sont égaux (les dynamiques réduites sont alors indiscernables).

Modèle physique

L'hamiltonien du modèle physique est donné par

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_S(t) + \hat{H}_E + \hat{H}_I, \quad \hat{H}_E = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}}, \quad \hat{H}_I = \sum_{j, \mathbf{k}} (g_{j, \mathbf{k}} \hat{c}_j^\dagger \otimes \hat{b}_{\mathbf{k}} + \text{h.c.}) \equiv \sum_j (\hat{c}_j^\dagger \otimes \hat{B}_j + \text{h.c.})$$

où $\hat{H}_S(t)$ est l'hamiltonien du système, $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ et $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ sont les opérateurs de création et d'annihilation du mode \mathbf{k} de E , \hat{c}_j^\dagger est un opérateur de saut pour S ($j^{\text{ème}}$ transition) et $g_{j, \mathbf{k}}$ sont les couplages entre le mode \mathbf{k} de E et la $j^{\text{ème}}$ transition de S . Les fonctions de corrélation de E sont données par

$$f_{ij}(\tau) = \left\langle \hat{B}_i(t + \tau) \hat{B}_j^\dagger(t) \right\rangle_E = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}, i} g_{\mathbf{k}, j}^* e^{-i\omega_{\mathbf{k}}\tau}$$

La densité spectrale $J(\omega)$ de l'environnement E est définie par

$$\frac{g_j^2}{2\pi} J(\omega) = \sum_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) |g_{j, \mathbf{k}}|^2 \quad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\omega J(\omega) = 2\pi$$

et est supposée méromorphe (holomorphe sauf sur un ensemble de points isolés) dans la partie inférieure du plan complexe. La densité spectrale a des pôles $z_l = \omega_l - i\lambda_l$ de résidus r_l , permettant de réécrire la fonction de corrélation $f_{ij}(\tau)$ par le théorème des résidus comme

$$f_{ij}(\tau) = -\frac{g_i g_j}{2\pi} \oint_C d\omega J(\omega) e^{-i\omega\tau} = -i g_i g_j \sum_l r_l e^{-i z_l \tau}$$

Modèle auxiliaire

L'hamiltonien du modèle auxiliaire est donné par

$$\hat{H}'(t) = \hat{H}_S(t) + \hat{H}'_E + \hat{H}'_I \quad \text{avec} \quad \hat{H}'_E = \hat{H}_M + \hat{H}_R + \hat{H}_{MR}$$

et

$$\hat{H}_M = \sum_l \omega_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l, \quad \hat{H}_R = \sum_l \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \hat{a}_{R_l}^\dagger(\omega) \hat{a}_{R_l}(\omega), \quad \hat{H}_{MR} = \sum_l \sqrt{\frac{\lambda_l}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (\hat{a}_l^\dagger \otimes \hat{a}_{R_l}(\omega) + \text{h.c.})$$

$$\hat{H}'_I = \sum_{j,l} g_j \sqrt{-ir_l} (\hat{c}_j^\dagger \otimes \hat{a}_l + \text{h.c.}) \equiv \sum_j (\hat{c}_j^\dagger \otimes \hat{B}'_j + \text{h.c.})$$

où \hat{a}_l et $\hat{a}_{R_l}(\omega)$ sont respectivement les opérateurs d'annihilation du pseudomode M_l et du réservoir R_l . Nous définissons les opérateurs densité réduits :

$$\hat{\rho}_S(t) = \text{Tr}_E[\hat{\rho}_{SE}(t)] \quad \text{et} \quad \hat{\rho}'_S(t) = \text{Tr}_{MR}[\hat{\rho}_{SMR}(t)]$$

Les fonctions de corrélation de l'environnement auxiliaire $E' = M \otimes R$ sont données par

$$\langle \hat{B}'_i(t) \hat{B}'_j(t') \rangle_{MR} = -i g_i g_j \sum_{\alpha,\beta} \sqrt{r_\alpha r_\beta} e^{-i(\omega_\alpha t - \omega_\beta t')} \langle \hat{a}_\alpha(t) \hat{a}_\beta^\dagger(t') \rangle_{MR} = \dots = -i g_i g_j \sum_l r_l e^{-iz_l(t-t')}$$

Cette dernière expression correspond précisément aux fonctions de corrélation de l'environnement physique E :

$$-i g_i g_j \sum_l r_l e^{-iz_l(t-t')} = \langle \hat{B}_i(t) \hat{B}_j^\dagger(t') \rangle_E \equiv f_{ij}(t-t')$$

Les fonctions de corrélation de E et E' sont identiques et via le théorème d'équivalence mentionné plus haut, les dynamiques réduites entre les deux modèles sont identiques ($\hat{\rho}_S(t) = \hat{\rho}'_S(t)$). Ce résultat permet, en continuant la dérivation (voir [26] pour les détails), d'aboutir à une équation maîtresse *markovienne exacte* pour le système étendu SM :

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{SM}(t) = -i [\hat{H}'(t), \hat{\rho}_{SM}(t)] + \sum_l 2\lambda_l \left(\hat{a}_l \hat{\rho}_{SM}(t) \hat{a}_l^\dagger - \frac{1}{2} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l \hat{\rho}_{SM}(t) - \frac{1}{2} \hat{\rho}_{SM}(t) \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l \right)$$

avec $\hat{H}'(t) = \hat{H}_S(t) + \hat{H}'_E + \hat{H}'_I$ défini ci-avant. Le second terme du membre de droite de cette équation maîtresse (dissipateur) décrit la dissipation des pseudomodes M_l dans des réservoirs (markoviens) R_l , avec des taux de dissipation ($2\lambda_l$) liés aux parties imaginaires des pôles de la densité spectrale $J(\omega)$ de E (pôles en $z_l = \omega_l - i\lambda_l$). C'est en ce sens que cette approche *pseudomodes* repose fortement sur la structure spectrale de l'environnement. Pour un environnement E possédant un nombre limité de pôles, l'approche *pseudomodes* semble être une bonne manière afin de décrire la dynamique du système. Si au contraire l'environnement E possède un grand nombre de pôles (voire un nombre infini), cette approche perd son intérêt et il convient de travailler directement sur l'équation maîtresse non-markovienne pour $\hat{\rho}_S(t)$.

L'équation maîtresse déduite de l'approche *pseudomodes* est markovienne mais porte sur l'opérateur densité $\hat{\rho}_{SM}(t)$ du système étendu SM . Il est donc nécessaire d'effectuer la trace partielle sur les pseudomodes M afin d'accéder à l'opérateur densité du système physique S : $\hat{\rho}_S(t) = \text{Tr}_M[\hat{\rho}_{SM}(t)]$.

Dans le chapitre 5, la densité spectrale de l'environnement possède un seul pôle en $\omega_0 - i\lambda$: l'équation maîtresse comporte alors un seul pseudomode.

Annexe D : Code Mathematica pour l'approche pseudomode

Nous donnons dans cette annexe le code *Mathematica* relatif à l'approche pseudomode du chapitre 5.

Nous rappelons les diverses hypothèses employées dans la réalisation de ce code. Nous nous plaçons dans le régime superradiant (pas d'effet de distance entre les atomes). L'état initial est symétrique : tous les atomes sont dans l'état excité et il n'y a pas d'excitation dans le pseudomode de la cavité : $\rho_{sc}(0) = |N_s, 0_c\rangle\langle N_s, 0_c|$. Nous supposons que le nombre total d'excitations est conservé (RWA). Nous restreignons donc l'évolution de la matrice densité du système atomes + pseudomode au sous-espace symétrique sous-tendu par les $n + 1$ vecteurs $|N_s, 0_c\rangle, |(N - 1)_s, 1_c\rangle, |(N - 2)_s, 2_c\rangle, \dots, |1_s, (N - 1)_c\rangle$ et $|0_s, N_c\rangle$.

La première partie du code contient la définition des différents opérateurs (opérateurs d'échelle et hamiltoniens) et du Liouvillien de l'équation maîtresse. La seconde partie consiste en sa résolution au moyen du solveur numérique de *Mathematica*. Nous y évaluons également l'évolution des populations et de l'intensité.

In[]:=

Définition de l'équation maîtresse;

(* Natomes = nombre d'atomes *)

Natomes = 3;

(* n = nombre d'états de base symétriques *)

n = Natomes + 1;

(* états de base $|N_s, 0_c\rangle, |(N-1)_s, 1_c\rangle, \dots, |1_s, (N-1)_c\rangle, |0_s, N_c\rangle$ *)

$\psi = \text{SparseArray@Table}[\text{KroneckerDelta}[i-1, n-j], \{i, n\}, \{j, n\}];$
[tableau clairs... [table [delta de Kronecker

(*opérateur de saut pour le système atomique. $L : |n\rangle \rightarrow |n-1\rangle$ *)

$L = \text{SparseArray@Table}[\sqrt{n-j} \text{KroneckerProduct}[\psi[[j]], \psi[[j+1]]], \{j, n-1\}];$
[tableau clairs... [table [produit Kronecker

(*opérateur de création du pseudomode de la cavité *)

$\text{acdagger} = \text{SparseArray@Sum}[L[[i]], \{i, n-1\}];$
[tableau clairs... [somme

(*opérateur d'annihilation du pseudomode de la cavité *)

$\text{ac} = \text{ConjugateTranspose}[\text{acdagger}];$
[transposé conjugué

(* matrice densité système atomique + cavité *)

$\text{rho} = \text{Table}[\text{Subscript}[\rho, \{i, j\}][t], \{i, n\}, \{j, n\}];$
[table [sous-indice

(* matrice densité vectorisée *)

$\text{vrho} = \text{Flatten}[\text{rho}];$
[aplatis

$\omega_\theta = 1;$ (* fréquence de la transition atomique *)

$\omega_c = \omega_\theta;$ (* fréquence centrale de la cavité *)

(* hamiltonien du système atomique *)

$\text{Hs} = \omega_\theta \text{SparseArray@Table}[(n-i) \text{KroneckerDelta}[i, j], \{i, n\}, \{j, n\}];$
[tableau clairs... [table [delta de Kronecker

(* hamiltonien du pseudomode de la cavité *)

$\text{Hc} = \omega_c \text{acdagger}.\text{ac};$

(* hamiltonien d'interaction entre le système atomique et le pseudomode*)

$\text{V} = \text{Sqrt}[\text{Natomes}] g (\text{ac} + \text{acdagger});$
[racine carrée

(*g = force de couplage atomes-champ de la cavité *)

$\text{H} = \text{Hs} + \text{Hc} + \text{V};$

(* Liouvillien appliqué à la matrice densité rho, $\lambda =$ largeur de la cavité *)

$\text{Lrho} =$

$$-\dot{\rho} (\text{H}.\text{rho} - \text{rho}.\text{H}) + 2\lambda \left(\text{ac}.\text{rho}.\text{acdagger} - \frac{1}{2} \text{acdagger}.\text{ac}.\text{rho} - \frac{1}{2} \text{rho}.\text{acdagger}.\text{ac} \right);$$

$\text{vLrho} = \text{Flatten}[\text{Lrho}];$ (*Lrho vectorisé*)

[aplatis

In[]:= Solution numérique, populations et intensité;

```

tmax = 4;
parametres = {g → 1, λ → 1};

(* conditions initiales :
   tous les atomes excités et pas d'excitation dans le champ de la cavité *)
conditionsInitiales = Table[(vrho[[i]] /. t → 0) == KroneckerDelta[i, 1],
                             {i, 1, Length[vrho]}];

(*équation maîtresse*)
equations = Table[D[vrho[[i]], t] == vLrho[[i]] /. parametres, {i, 1, Length[vrho]}];

(*solution numérique*)
sol = NDSolve[equations ~ Join ~ conditionsInitiales,
              vrho, {t, 0, tmax}, MaxSteps → 10000000];

rhosol = Flatten[rho /. sol, 1];
pops = Diagonal[rhosol]; (*populations*)

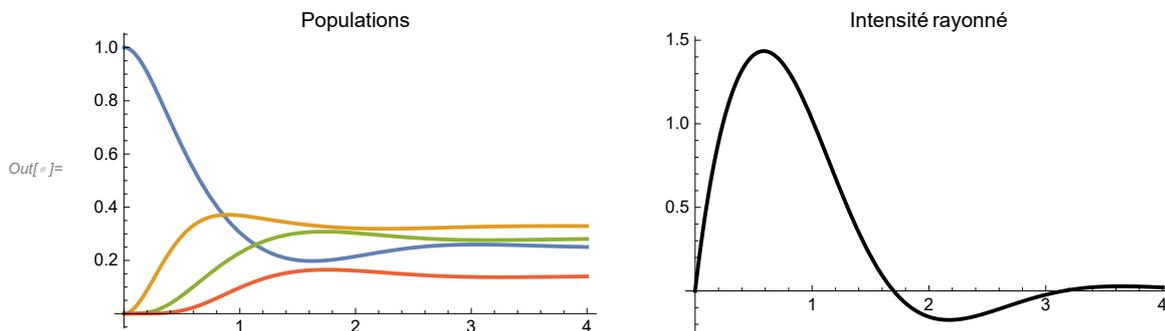
plotpops = Plot[pops, {t, 0, tmax},
                PlotRange → All, PlotStyle → {Thick}, PlotLabel → Populations ];

Int[t] = -D[Tr[Hs.rhosol], t]; (*intensité*)

plotint = Plot[Evaluate[Int[t]], {t, 0, tmax}, PlotRange → All,
               PlotStyle → {Black, Thick}, PlotLabel → Intensité rayonné ];

GraphicsRow[{plotpops, plotint}]

```



Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ et I.A. STEGUN : *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, 1972.
- [2] C. ADDIS, B. BYLICKA, D. CHRUSCINSKI et S. MANISCALCO : *Phys. Rev. A*, **90**, 052103, 2014.
- [3] C. ADDIS, P. HAIKKA, S. MCENDOO, C. MACHIAVELLO et S. MANISCALCO : *Phys. Rev. A*, **87** 052109, 2013.
- [4] G. ADESSO, M. CIANCIARUSO et S. MANISCALCO : *Phys. Rev. A*, **96**, 012105, 2017.
- [5] G. AGARWAL : *Phys. Rev. A*, **61** 013809, 1999.
- [6] G. AMATO, H.P. BREUER et B. VACCHINI : *Phys. Rev. A*, **99**, 030102, 2019.
- [7] R. BACH, H. BATELAAN, S.H. LIU et D. POPE : *New J. Phys.*, **15**(3), 033018, 2013.
- [8] S.M. BARNETT, B.J. DALTON et B.M. GARRAWAY : *Phys. Rev. A*, **64**, 053813, 2001.
- [9] T. BASTIN, J. MARTIN et P. SCHLAGHECK : *Mécanique quantique avancée*. Notes de cours, Université de Liège, 2018-2019.
- [10] B. BELLOMO, R. LO FRANCO et G. COMPAGNO : *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 160502, 2007.
- [11] K.M. BIRNBAUM, A. BOCA, A.D. BOOZER, H.J. KIMBLE, T.E. NORTHUP et R. MILLER : *J. Phys. B*, **38** S551, 2005.
- [12] H.P. BREUER, E.M. LAINE, J. PILO et B. VACCHINI : *Rep. Prog. Phys.*, **77**, 094001, 2014.
- [13] C.M. CAVES et G.J. MILBURN : *Phys. Rev. A*, **36** 5543, 1987.
- [14] M.D. CHOI : *Completely positive linear maps on complex matrices*. Université de Californie, Berkeley, 1975.
- [15] J.R.K. CLINE, M.A. NORCIA, J.K. THOMPSON et M.N. WINCHESTER : *Sci. Adv.*, **2**(10), e1601231, 2016.
- [16] F. DEMANET : *Dynamique quantique dissipative et superradiance*. Travail de fin d'études, Université de Liège, 2011-2012.
- [17] M. DOMINA, A. FERRERI, R. PASSANTE et L. RIZZUTO : *Symmetry*, **11**, 1384, 2019.
- [18] A.K. EKERT, G.M. PALMA et K.A. SUOMINEM : *Royal Society*, 452 (1946), 1996.
- [19] B.H Liu et AL. : *Nature Phys.*, **7**, 931, 2011.
- [20] B.H Liu et AL. : *EPL*, **114**, (10005), 2016.
- [21] N.K. Bernardes et AL. : *Sci. Rep.*, **5**, 17520, 2015.
- [22] Y. Dong et AL. : *npj Quantum Information*, **4**, (3), 2018.

- [23] B.M. GARRAWAY : *Phys. Rev. A*, **55**, 2290, 1997.
- [24] B.M. GARRAWAY, S. MANISCALCO, L. MAZZOLA, J. PILO et K.A. SUOMINEN : *Phys. Rev. Lett. A*, **79**, 042302, 2009.
- [25] B.M. GARRAWAY, S. MANISCALCO, L. MAZZOLA, J. PILO et K.A. SUOMINEN : *Phys. Rev. A*, **80**, 012104, 2009.
- [26] B.M. GARRAWAY, F. PETRUCCIONE et G. PLEASANCE : *arXiv :2002.09739*, 2020.
- [27] B.M. GARRAWAY et N.V. VITANOV : *Phys. Rev. A*, **55** 4418, 1997.
- [28] V. GORINI, A. KOSSAKOWSKI et E.C.G. SUDARSHAN : *J. Math. Phys.*, **17**, 821, 1976.
- [29] H. GUO, Y. LI et J. ZHOU : *Phys. Rev. A*, **79** 012309, 2009.
- [30] C.J. HOOD, H.J. KIMBLE et J. YE : *Phys. Rev. A*, **64** 033804, 2001.
- [31] S.F. HUELGA, M.B. PLENIO, A. SMIRNE et D. TAMASCELLI : *Phys. Rev. A*, **120** 030402, 2018.
- [32] M. JANOWICZ : *Phys. Rev. A*, **61** 025802, 2000.
- [33] K. KRAUS : *States, Effects, and Operations, Lectures notes in Physics*. Springer, Berlin, 1983.
- [34] E.M. LAINE, K. LUOMA et J.PILO : *J. Phys. B*, **45**, 154004, 2012.
- [35] J. LANKINEN, H. LYYRA, S. MANISCALCO, B. SOKOLOV, J. TEITTINEN et B. ZIAEI : *Phys. Rev. A*, **93** 052103, 2016.
- [36] C. LAW, S.Y. ZHU et M. ZUBAIRY : *Phys. Rev. A*, **52** 4095, 1995.
- [37] L. LI, M.J.W. HALL et H.M. WISEMAN : *Rev. Mod. Phys.*, **88**, 021002, 2016.
- [38] D.A. LIDAR : *arXiv :1902.00967*, 2019.
- [39] G. LINDBLAD : *Commun. Math. Phys.*, **48** 119, 1976.
- [40] I.E. LININGTON et B.M. GARRAWAY : *J. Phys. B*, **39**, 16, 2006.
- [41] I.E. LININGTON et B.M. GARRAWAY : *Phys. Rev. Lett. A*, **77**, 033831, 2008.
- [42] L. MAZZOLA, S. MANISCALCO, J. PILO et K.A. SUOMINEN : *J. Phys. B*, **43**,8, 2010.
- [43] C.H.R. OOI et A.S. SIZHUK : *Annals of Phys.*, **360**, 2015.
- [44] T. OSBORNE : *Theory of quantum noise and decoherence*. (youtube video lectures).
- [45] R.R. PURI : *Mathematical Methods of Quantum Optics*. Springer, 2001.
- [46] A. RIVAS, S.F. HUELGA et M.B. PLENIO : *Phys. Rep.*, **759**, 2018.
- [47] P. SCHLAGHECK : *Atomes ultrafroids et condensats de Bose-Einstein*. Notes de cours, Université de Liège, 2019-2020.
- [48] B. SHAO, J.G. LI et J. ZHOU : *Phys. Rev. A*, **81**, 062124, 2010.
- [49] W.F. STINESPRING : *Proc. Am. Math. Soc.*, **6** 211, 1955.
- [50] A. THILAGAM : *J. Chem. Phys.*, **138**, 175102, 2013.
- [51] G.Y. WANG, N. TANG, H.S. ZENG et Y.P. ZHENG : *Phys. Rev. A*, **84**, 032118, 2011.
- [52] W. H. ZUREH : *Rev. Mod. Phys.*, **75**, 715, 2003.