

## Mémoire

**Auteur :** Leboutte, Antoine

**Promoteur(s) :** Mathonet, Pierre

**Faculté :** Faculté des Sciences

**Diplôme :** Master en sciences mathématiques, à finalité didactique

**Année académique :** 2021-2022

**URI/URL :** <http://hdl.handle.net/2268.2/15888>

---

### Avertissement à l'attention des usagers :

*Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.*

*Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.*

---



FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

---

# Géométrie hyperbolique : pourquoi Euclide a eu raison d'admettre son cinquième postulat

---

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de  
*Master en Sciences Mathématiques, à finalité didactique*

Année académique 2021-2022

*Auteur :*  
Antoine LEBOUTTE

*Promoteur :*  
Pierre MATHONET

*Co-Promoteur :*  
Naïm ZENAÏDI

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les origines de la géométrie non euclidienne</b>	<b>6</b>
1.1	Le cinquième postulat d'Euclide . . . . .	6
1.2	Les précurseurs de la géométrie non-euclidienne . . . . .	12
1.2.1	Gerolamo Saccheri (1667-1733) . . . . .	12
1.2.2	Johann Heinrich Lambert (1728-1777) . . . . .	13
1.2.3	La géométrie en France à la fin du 18ème siècle . . . . .	17
1.3	Les premières fondations de la géométrie non euclidienne . . . . .	20
1.3.1	Carl Gauss . . . . .	20
1.3.2	Nikolaï Lobatchevski . . . . .	21
1.3.3	János Bolyai . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Le travail de Gerolamo Saccheri</b>	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>Éléments de géométrie riemannienne</b>	<b>45</b>
3.1	Introduction . . . . .	45
3.2	Éléments de théorie des surfaces . . . . .	47
3.3	Courbures et seconde forme fondamentale . . . . .	50
3.3.1	Courbure normale à une surface . . . . .	51
3.3.2	La courbure géodésique . . . . .	57
3.4	Coefficients de Christoffel et géodésiques . . . . .	60
3.5	Équations de compatibilité et courbure de Gauss . . . . .	64
3.6	Courbure géodésique et équation des géodésiques . . . . .	67
3.7	Courbure et géodésiques dans un cadre plus général . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Modèles de géométrie hyperbolique</b>	<b>70</b>
4.1	Cinq modèles de géométrie hyperbolique . . . . .	70
4.2	Géodésiques du plan de Lobatchevski . . . . .	75
4.3	Comment définit-on les géodésiques dans le modèle de Beltrami? . . . .	79
4.4	Projection stéréographique . . . . .	81
4.5	Disque de Poincaré . . . . .	83
4.6	Modèle de Beltrami-Klein . . . . .	84
4.6.1	Isométries dans le disque de Klein . . . . .	85
4.6.2	Distance dans le disque de Klein . . . . .	87
4.7	Le modèle de Beltrami vérifie-t-il les quatre premiers postulats? . . . .	89
<b>A</b>	<b>Propriétés des <i>Éléments</i></b>	<b>94</b>

<b>B</b>	<b>Notions de géométrie riemannienne</b>	<b>96</b>
B.1	Variétés . . . . .	96
B.2	Variétés riemanniennes . . . . .	100
B.3	Pull-back d'un tenseur covariant . . . . .	102

# Remerciements

Je tiens à remercier mon promoteur Pierre Mathonet et mon co-promoteur Naïm Zenaïdi pour l'aide et le soutien qu'ils m'ont apportés tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Je tiens également à remercier ma famille, et en particulier mes parents qui m'ont permis de suivre mes études en mathématiques.

Et enfin, je tiens à remercier toutes les personnes que j'ai pu côtoyer durant mes études. Je pense en particulier aux membres du CSM, mais aussi et surtout à Benjamin, Guillaume, Savinien et Thinh.

# Introduction

De nombreux mathématiciens se sont penchés au cours du temps sur les *Éléments d'Euclide*, et nombreux sont ceux qui se sont intéressés plus particulièrement à son cinquième postulat,

*"Si une droite coupe deux droites de manière à ce que les angles intérieurs du même côté soient plus petits que deux angles droits, alors les deux lignes droites, prolongées à l'infini, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux angles droits."*,

appelé de nos jours le postulat des parallèles, au vu de sa formulation par Playfair

*"Par un point extérieur à une droite passe une seule parallèle à cette droite."*

Ils avaient essentiellement pour but de montrer que ce dernier pouvait être déduit des quatre premiers postulats de la géométrie euclidienne.

Les tentatives infructueuses dans cette direction se sont succédées pendant près de 20 siècles et ont culminé avec les travaux de Saccheri, Lambert et Legendre pour ne citer que les plus influents. Nous en passons quelques-unes en revue dans le premier chapitre de ce travail.

L'impossibilité d'obtenir une démonstration du cinquième postulat a progressivement amené les mathématiciens à remettre en question du système euclidien. Nous nous intéressons également dans ce chapitre aux premières réflexions à propos d'une géométrie dans laquelle il serait possible d'obtenir plusieurs parallèles à une droite passant par un même point. Ces travaux mèneront plus tard à la géométrie hyperbolique.

Dans le deuxième chapitre, nous revenons en profondeur sur l'ouvrage fondateur de Gerolamo Saccheri : *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Dans ce travail, Saccheri se donne pour but, comme le titre l'annonce, de laver [le travail d'] Euclide de toute tache. Il se propose de procéder par l'absurde : il admet les quatre premiers postulats et leurs conséquences et suppose que le cinquième postulat est faux, avec l'espoir de trouver une contradiction. Nous présentons alors les différents résultats obtenus par Saccheri, qui le conduisent à trois types de géométrie, celle dite de l'*angle droit*, qui correspond à celle d'Euclide, celle dite de l'*angle aigu* et celle de l'*angle obtus*. Saccheri arrive à réfuter l'hypothèse de l'angle obtus. Il lui reste à réfuter celle de l'angle aigu, dans laquelle il obtient des résultats, mais pas de contradiction. Il obtient ainsi, en précurseur, les premiers résultats de géométrie hyperbolique. Nous mettons en avant tant les preuves que les imprécisions et les erreurs propres à ce travail, en particulier, les résultats utilisés implicitement dans les preuves, et non démontrés.

Nous avons aujourd'hui que Saccheri n'aurait pas pu trouver une contradiction. Bolyai et Lobatchevski ont en effet construit indépendamment une géométrie où l'hypothèse de l'angle aigu est valide, ainsi que les quatre premiers postulats. Leurs constructions

théoriques ne convainquaient cependant pas, à leur époque, toute la communauté mathématique. Il faudra attendre l'avènement de la géométrie riemannienne et les travaux de Beltrami pour obtenir un modèle concret de géométrie où les quatre premiers axiomes sont valides et où on peut trouver plusieurs parallèles à une droite donnée passant par un point. La présentation de ce modèle, ainsi que de plusieurs modèles isométriques occupe la fin de ce mémoire.

Nous commençons par l'introduction, dans le troisième chapitre, de notions de géométrie riemannienne, comme la courbure, les symboles de Christoffel et finalement les géodésiques, dans le cadre de surfaces plongées dans un espace de dimension trois, munie de la métrique riemannienne induite par cette espace. Nous montrons alors comment ces notions s'étendent pour une surface plongée dont la métrique n'est pas induite.

Nous introduisons les modèles que sont le demi-plan de Lobatchevski, le disque de Poincaré et le modèle de Beltrami-Klein dans le disque et montrons des isométries entre ces modèles. Nous calculons ensuite explicitement les géodésiques du demi-plan de Lobatchevski et nous utilisons les isométries décrites plus tôt pour montrer que les géodésiques, c'est-à-dire les droites du modèle de Beltrami-Klein sont des segments de droite au sens usuel. Cela nous permet de vérifier dans ces modèles la validité des premiers postulats, et de constater que le cinquième y est mis en défaut.

# Chapitre 1

## Les origines de la géométrie non euclidienne

### 1.1 Le cinquième postulat d'Euclide

Tous les domaines mathématiques reposent sur des assertions qui sont considérées comme vraies a priori. Ces assertions sont appelées axiomes ou postulats selon le contexte et sont nécessaires pour établir la théorie.

Dans leur livre sur la géométrie plane à destination des enseignants [6], Dalle et Dewaele marquent la différence entre les axiomes et les postulats de la manière suivante :

*"Un axiome est une vérité évidente par elle-même. Un postulat est une vérité indémontrable, qu'on admet comme évidente (Le postulat supplée en quelque sorte à la définition de l'objet)."*

Cependant, si cet ouvrage, classique au sein de l'enseignement des mathématiques en Belgique jusque dans les années 1970, marque la différence entre les deux notions, les termes "axiome" et "postulat" semblent se mélanger dans l'inconscient collectif. Par exemple, si dans la traduction des *Éléments* d'Euclide [18, page 5], les affirmations de base de la géométrie euclidienne sont partagées entre les "demandes" (ou "postulats", même si le terme n'apparaît pas directement dans les *Éléments*) et les "notions communes ou axiomes", il ne semble à l'inverse y avoir la moindre différenciation entre celles-ci dans le travail d'Hilbert, qui les appelle toutes "axiomes" [10, chapitre 2].

Pour rajouter à la confusion, il est à noter que dans une autre traduction par Peyrard [17], ce dernier mentionne six postulats, quand dans son autre traduction déjà évoquée, ceux-ci sont au nombre de trois. Cependant, il précise au sein de [18] que deux des axiomes mentionnés sont parfois assimilés aux "demandes", ce qui correspond bien à ce que l'on retrouve dans la traduction de 1814 (mais n'explique pas pour autant le changement de catégorie de l'affirmation "*Deux droites ne renferment point un espace*").

Il vient à notre tour de poser un choix : les cinq affirmations d'Euclide qui vont nous intéresser dans la suite, à savoir les six demandes de [17] auquel nous retirons l'affirmation mentionnée dans le paragraphe précédent, seront qualifiées de "postulats d'Euclide" pour le reste de ce travail.



Aux alentours de l'an 300 avant notre ère, Euclide rassemble dans ses *Éléments de géométrie* tout le savoir mathématique de l'époque [8, page 26]. Les quatre premiers livres de ce que nous allons simplement appeler "*Les Éléments*" traitent principalement de ce que Pythagore et ses successeurs ont étudié. Et c'est dans ces livres que l'on retrouve l'étude de la géométrie plane.

Le premier livre comprend un total de 35 définitions, 5 postulats, 10 axiomes et 48 propriétés<sup>1</sup>. Nous allons en priorité nous concentrer sur les définitions et les postulats.

Voici quelques exemples de définitions données par Euclide. À chacune d'elles est associé le numéro correspondant dans les *Éléments* :

**Définition 1.** Le point est ce qui n'a aucune partie.

**Définition 2.** La ligne est une longueur sans largeur.

**Définition 4.** La ligne droite est celle qui est toute également interposée entre ses points.

**Définition 10.** Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait les angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit. La droite tombante est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle tombe.

**Définition 35.** Les parallèles sont les droites qui, étant placées dans le même plan, et qui étant prolongées de part et d'autre à l'infini, ne se rencontrent nulle part.

Au vu des définitions, on peut se questionner sur le sens des expressions employées. Que veut-on dire lorsque l'on déclare qu'un point "n'a aucune partie" ? Que signifie le fait d'être "tout également interposé" dans le cas de la ligne droite ?

Mais ce qui nous intéresse le plus, ce sont bien les postulats d'Euclide. Ceux-ci sont, comme indiqué précédemment, au nombre de cinq :

**Postulat 1.** Par deux points distincts passe une droite.

**Postulat 2.** On peut toujours prolonger un segment rectiligne.

**Postulat 3.** Il n'existe qu'une circonférence avec un centre et un diamètre donnés.

**Postulat 4.** Tous les angles droits sont égaux.

**Postulat 5.** Si une droite coupe deux droites de manière à ce que les angles intérieurs du même côté soient plus petits que deux angles droits, alors les deux lignes droites, prolongées à l'infini, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux angles droits.

Parmi ces cinq postulats, le dernier est celui qui permet de poser les différentes propriétés liées à deux droites parallèles. Mais plus que ce qu'il permet d'obtenir, c'est bien ce qui le différencie des précédents postulats qui le rend particulier.

L'énoncé du cinquième postulat diffère de ceux des autres, notamment parce que contrairement à eux, il n'est ni aussi clair, ni aussi intuitif. L'axiome ressemble en réalité dans sa conception plus à une propriété qu'à une évidence qu'il ne serait pas nécessaire de démontrer.

---

1. La traduction des définitions et des postulats d'Euclide ainsi que la numérotation des définitions sont tirées de [18]. Les nombres associés à chacune des classes (à l'exception des postulats et axiomes, pour une raison déjà mentionnée) sont tirés de [17].

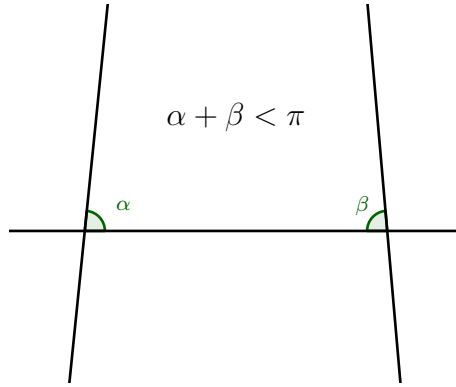


FIGURE 1.1 – Illustration du cinquième postulat

Cette idée est renforcée par le fait qu'Euclide ne se sert du cinquième postulat qu'après avoir énoncé la vingt-neuvième propriété :

*La somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.*

Cette propriété s'avère d'ailleurs être équivalente au cinquième postulat<sup>2</sup>, ce qui vient renforcer chez certains l'idée selon laquelle Euclide souhaitait à la base démontrer ce qu'il a posé comme un postulat.

Ce dernier, et la propriété précédente, possèdent bien d'autres équivalents dans les *Éléments* d'Euclide. On peut notamment mentionner les deux propriétés suivantes :

- Le "postulat des parallèles" du mathématicien écossais John Playfair : "*Par un point extérieur à une droite passe une seule parallèle à cette droite.*"
- Le postulat d'Alhazen<sup>3</sup> : "*Deux droites qui se coupent ne peuvent être parallèles à une même troisième.*"

Nous allons, à titre d'illustration, présenter les justifications qui nous permettent de prouver les équivalences entre les postulats présentés. Cependant, il s'agit dans le cas présent d'une démonstration intuitive : aucun cadre théorique n'est posé au préalable, et les résultats nécessaires à la preuve sont considérés comme vrais.

**Proposition 1.1.1.** *Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *Le postulat d'Euclide ;*
2. *Le postulat d'Alhazen ;*
3. *Le postulat de Playfair.*

*Démonstration.* Dans cette démonstration, nous allons avant tout montrer l'équivalence entre le postulat d'Euclide et celui d'Alhazen, avant de passer à celle entre Alhazen et Playfair. Nous aurons ainsi obtenu en même temps l'équivalence entre Euclide et Playfair.

Commençons par supposer que le postulat d'Euclide est vrai, et montrons que celui d'Alhazen l'est également dans ce cas. Pour cela, nous allons nous servir de la proposition 30 des *Éléments* d'Euclide [17, page 51] :

2. Voir le chapitre 2 pour plus d'informations concernant cette équivalence.

3. Aussi connu sous le nom de Ibn al-Haytham.

"Les droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles."

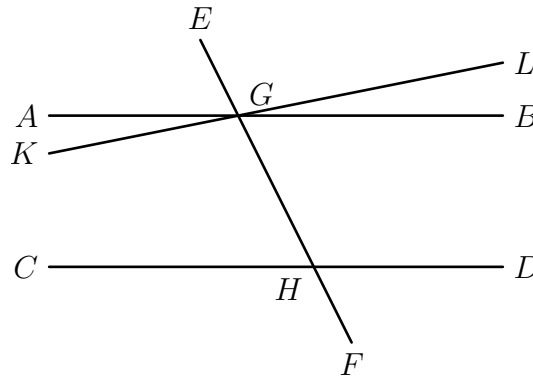
Cela nous permet de conclure : en effet, supposons avoir deux droites sécantes qui possèderaient une parallèle commune. Euclide nous permet d'affirmer que nos sécantes doivent être parallèles entre elles, ce qui est évidemment contradictoire. La seule possibilité est donc que deux droites sécantes n'ont jamais de parallèle commune, ce qui est une autre manière de présenter le postulat d'Alhazen.

Nous allons à présent montrer que le postulat d'Euclide est vérifié lorsque celui d'Alhazen est supposé vrai. Et assez ironiquement, cette partie de la démonstration est tirée de la référence [19], à savoir les *Elements of Geometry* de... John Playfair.

En effet, ce dernier a fait au début de son ouvrage le choix de remplacer le cinquième postulat par la formulation d'Alhazen, et est parvenu à obtenir des résultats similaires à Euclide. Parmi ces résultats, nous retrouvons le théorème XXIX ([19, page 28]) :

"Soit une droite  $EF$  qui rencontre deux droites  $AB$  et  $CD$ . Si  $AB$  et  $CD$  sont parallèles, alors :

- Les angles alternes-internes formés par les intersections des parallèles avec  $EF$  sont égaux deux à deux ;
- Les angles extérieurs sont égaux aux angles intérieurs opposés ;
- La somme des angles intérieurs situés d'un même côté de la première droite est égale à 2 angles droits."



Supposons dès lors avoir la droite  $KL$  telle que  $KL$  et  $CD$  forment avec la droite  $EF$  des angles  $\widehat{KGH}$  et  $\widehat{GHC}$  dont la somme est strictement inférieure à deux angles droits. Le théorème ci-dessus implique que ces deux droites ne sont pas parallèles : elles sont donc sécantes.

Leur intersection peut se trouver soit du côté de  $EF$  qui contient  $K$  et  $C$ , ou du côté qui contient  $L$  et  $D$ . Or, si c'était effectivement de ce deuxième côté que les droites se rencontreraient, alors nous aurions affaire à un triangle qui a notamment pour angles  $\widehat{LGH}$  et  $\widehat{GHD}$ , dont la somme devrait dès lors être strictement inférieure à deux angles droits par la propriété XVII de Playfair (voir l'énoncé A.7). Cependant, la propriété XIII de Playfair (voir l'énoncé A.4) nous permet d'affirmer que

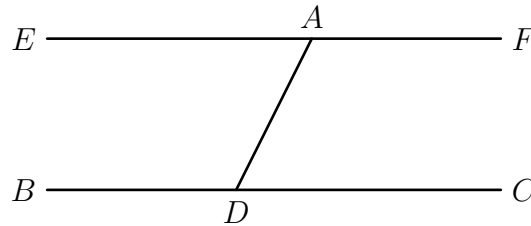
$$\widehat{KGH} + \widehat{LGH} + \widehat{GHC} + \widehat{GHD} = 4 \text{ angles droits},$$

et l'hypothèse sur la somme de  $\widehat{KGH}$  et  $\widehat{GHC}$  nous mène à une contradiction.

Ainsi, la seule possibilité est que  $KL$  et  $CD$  possèdent un point commun du côté de  $EF$  qui contient  $K$  et  $C$ , c'est-à-dire du côté où la somme des angles associés est inférieure à deux angles droits. Le postulat d'Euclide est donc démontré.

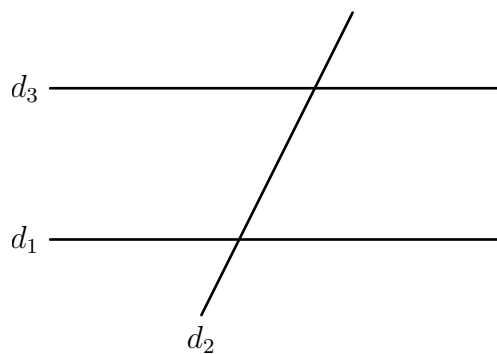
Il nous faut à présent montrer l'équivalence entre les postulats d'Alhazen et de Playfair. Commençons par supposer que le premier est vrai, et montrons qu'il est possible d'obtenir une parallèle à une droite passant par un point extérieur à cette droite. Cette partie de la démonstration est elle aussi tirée de [19, page 29].

Soit une droite  $BC$  et un point  $A$  qui lui est extérieur. Nous traçons le segment  $[AD]$  où  $D$  est un point quelconque de  $BC$ .



En nous servant de la proposition XXIII de Playfair [19, page 24] qui lui permet d'obtenir un angle égal à un autre angle donné à partir d'un segment, nous construisons l'angle  $\widehat{EAD}$  puis la droite  $EF$ . Étant donné que  $\widehat{EAD}$  et  $\widehat{CDA}$  sont des angles alternes-internes égaux, la proposition XXVII de Playfair (voir l'énoncé A.13) nous permet d'affirmer que  $BC$  et  $EF$  sont parallèles.

Il ne nous reste donc plus qu'une implication à démontrer. Considérons à présent que le postulat de Playfair est vrai et essayons d'obtenir celui d'Alhazen. Soient deux droites  $d_1$  et  $d_2$  sécantes et une troisième droite  $d_3$ , passant par un point extérieur à  $d_1$  et parallèle à cette même droite. Le postulat de Playfair nous permet d'affirmer que  $d_3$  existe.



Le postulat de Playfair implique également que  $d_2$  et  $d_3$  sont sécants, car l'inverse impliquerait que  $d_3$  posséderait deux parallèles qui passent par un même point, à savoir l'intersection des deux droites mentionnées. Ainsi, deux droites sécantes ne sont jamais simultanément parallèles à une même troisième, ce qui nous permet d'affirmer que le postulat de Playfair implique donc celui d'Alhazen.  $\square$

Depuis l'époque d'Euclide, de nombreux mathématiciens se sont penchés sur ce fameux cinquième postulat et maintenaient qu'il n'était pas suffisamment évident pour pouvoir être considéré comme tel. La majorité de ces mathématiciens étaient persuadés de pouvoir le démontrer à l'aide des autres postulats, et s'essayèrent à transformer le postulat en théorème.

On retrouve par exemple dans le *Commentaire sur le premier livre d'Euclide*<sup>4</sup> de Proclus (410-485) une remarque sur le fait qu'un certain Posidonius proposait de redéfinir des droites parallèles comme étant coplanaires et équidistantes. Cependant, les deux définitions (celle d'Euclide et celle de Posidonius) correspondent à des faits qui peuvent tout à fait apparaître séparément<sup>5</sup>. De plus, pour montrer que si deux droites coplanaires qui ne se rencontrent pas sont équidistantes, les quatre premiers postulats ne nous suffisent pas.

Pour revenir à Proclus, celui-ci a aussi tenté de démontrer le postulat des parallèles. Et s'il y est certes parvenu, son raisonnement se base sur une propriété qu'il juge évidente :

*"La distance entre deux points sur deux droites sécantes peut être rendue aussi grande qu'on le souhaite, en prolongeant suffisamment les deux droites."*

En somme, Proclus a remplacé un postulat par un autre postulat.

Le mathématicien arabe Nasîr-Eddin (1201-1274) tenta de démontrer le postulat, à partir de l'hypothèse suivante :

*Si deux droites  $r$  et  $s$  sont respectivement perpendiculaire et oblique au segment  $[AB]$ , les perpendiculaires dessinées de  $s$  sur  $r$  sont moins que  $|AB|$  du côté duquel  $s$  forme un angle aigu avec  $[AB]$ , et plus que  $|AB|$  du côté duquel  $s$  forme un angle obtus avec  $[AB]$ .*

À partir de ce résultat, Nasîr-Eddin parvient à déduire que la somme des angles d'un triangle vaut deux angles droits, et surtout à démontrer le postulat des parallèles. Mais à nouveau, tout ceci se base sur une supposition que l'on admet par avance et qui ne découle pas des postulats et des propriétés précédentes.

Les différentes versions des *Éléments*, qu'elles proviennent du monde arabe ou qu'elles soient basées sur les textes Grecs, contenaient peu de notes par rapport au cinquième postulat. Cette absence de remarques fut critiquée aux 16ème et 17ème siècle, en bonne partie à cause de l'influence du *Commentaire de Proclus*, imprimé pour la première fois à Bâle en 1533.

Certains chercheurs, ayant commenté les *Éléments*, se mirent aussi à chercher une manière de justifier le postulat des parallèles. Par exemple, Federico Commandino (1509-1575) décida de simplement ajouter la notion d'équidistance à la définition de droites parallèles.

Christophorus Clavius (1538-1612) réalisa une édition commentée des *Éléments* en 1584 tout en y ajoutant des propriétés, ce qui porta leur nombre à 1234. C'est cette édition qui servira de base pour les recherches de Saccheri et Descartes. Clavius proposa lui aussi une démonstration du cinquième postulat, en se servant de l'argument suivant :

*"Une ligne équidistante d'une ligne droite distincte est une droite".*

---

4. Les références à ce livre proviennent de [4], qui tire ses citations d'un livre de G. Friedlein.

5. Voir dernière partie à ajouter pour une justification.

Parmi les mathématiciens italiens qui ont travaillé sur le sujet, on peut également citer Pietro Cataldi, premier mathématicien moderne à publier un travail exclusivement consacré à la théorie des parallèles. Pour prouver l'existence de droites équidistantes, il pose l'hypothèse suivante :

*"Des lignes droites qui ne sont pas équidistantes convergent dans une direction et divergent dans l'autre."*

John Wallis (1616-1703), professeur de l'université d'Oxford et pionnier du calcul moderne, démontra

*"Étant donné un triangle quelconque, il est toujours possible de construire des triangles avec des angles égaux et des côtés proportionnels"<sup>6</sup>*

Il s'agit d'un énoncé équivalent au cinquième postulat qui raisonne sur les triangles et met de côté l'équidistance, qui était utilisée jusqu'à présent sans succès par ses prédécesseurs.

Jusqu'à présent, tous les arguments présentés finissent par être soit des dérivés, soit des équivalents du cinquième postulat, car les hypothèses qui ont été faites ne sont jamais démontrables à partir des quatre premiers postulats d'Euclide.

## 1.2 Les précurseurs de la géométrie non-euclidienne

### 1.2.1 Gerolamo Saccheri (1667-1733)

Cette sous-section se base sur [4] et [21].

Dans son ouvrage *Euclides ab omni naevo vindicatus* [22], Gerolamo Saccheri tente de démontrer le postulat des parallèles à l'aide de la démonstration par l'absurde. Il décide de considérer les 26 premières propositions d'Euclide comme vraies et souhaite montrer que si le cinquième postulat est faux, alors il arrive à une contradiction.

Dans cette section, nous nous intéressons au travail de Saccheri sans pour autant entrer dans les détails. Le développement des différents résultats et de leurs démonstrations sont à retrouver dans le chapitre 2.

La méthode employée par Saccheri pour atteindre son objectif se base en majeure partie sur des quadrilatères  $ABCD$  dont les côtés  $[AB]$  et  $[DC]$  sont de même longueur et les angles en  $A$  et  $D$  sont droits [4, p.23], que Saccheri qualifie de "quadrilatères isocèles à deux angles droits"<sup>7</sup>.

Il démontre le lemme suivant :

**Lemme 1.2.1.** *Si un quadrilatère  $ABCD$  a ses angles consécutifs  $A$  et  $B$  égaux à des angles droits et ses côtés  $AD$  et  $BC$  égaux, alors les angles  $C$  et  $D$  sont égaux.*

Le fait est qu'en géométrie euclidienne, les angles  $C$  et  $D$  sont des angles droits dans le cas où  $AD$  et  $BC$  sont égaux. Ainsi, si nous supposons que dans cette situation, les angles sont obtus, ou aigus, le cinquième postulat est censé être bel et bien faux. Trois possibilités s'offrent alors à Saccheri :

---

6. Citation tirée de [8].

7. Traduction littérale du terme anglais "two right-angled isosceles quadrilateral", issu de [4]. De nos jours, ces quadrilatères sont appelés "quadrilatères de Saccheri".

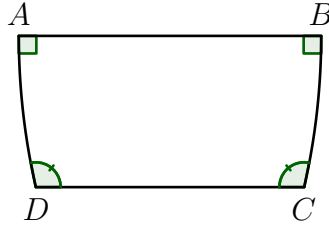
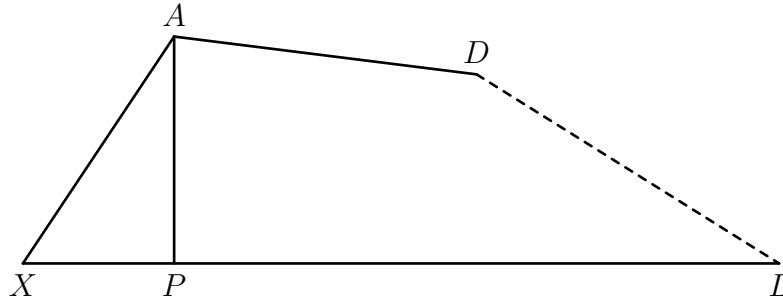


FIGURE 1.2 – Un quadrilatère de Saccheri

1. Les angles en  $C$  et  $D$  sont droits (hypothèse de l'angle droit) ;
2. Ils sont obtus (hypothèse de l'angle obtus) ;
3. Ils sont aigus (hypothèse de l'angle aigu).

S'ensuivent des propositions portant sur ces hypothèses, que nous ne présenterons pas dans ce chapitre. Mettons tout de même en avant l'un des résultats importants obtenus dans *Euclides Vindicatus* par Saccheri :

**Proposition 1.2.2.** *Soit la droite  $XA$  qui rencontre les droites  $AD$  et  $XL$  et forme avec ces deux droites des angles intérieurs  $\widehat{XAD}$  et  $\widehat{LXA}$  dont la somme est strictement inférieure à deux angles droits. Dans l'hypothèse de l'angle droit et dans l'hypothèse de l'angle obtus,  $AD$  et  $XL$  se rencontrent en un point du côté de  $AX$  où  $\widehat{XAD}$  et  $\widehat{LXA}$  vérifient la condition déjà énoncée.*



En somme, nous obtenons le fait que le cinquième postulat doit être vrai dans l'hypothèse de l'angle obtus, ce qui permet à Saccheri d'invalider cette hypothèse, car nous nous retrouvons dans une situation qui doit à la fois vérifier l'hypothèse et les propriétés de la géométrie euclidienne.

Il ne reste donc plus qu'à démontrer que l'hypothèse de l'angle aigu se contredit elle-même. Cependant, aucune des propriétés que Saccheri développe ne lui permet d'aboutir à cette conclusion.

## 1.2.2 Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

Les éléments de cette partie sont à la fois tirés de [16] et de [4].

S'il est difficile de juger l'influence de Saccheri sur les travaux mathématiques du 18ème siècle, il est fort probable que le mathématicien suisse Johann Lambert soit au courant des recherches de l'Italien : selon [4, page 44], Lambert cite dans sa *Théorie des parallèles*

(ou *Theorie der Parallelinien* dans sa version originale) un article de Georg Simon Klügel (1739-1812) dans lequel ce dernier analyse le travail de Saccheri. De plus, selon [16, page 9], le manque de références historiques dans la *Théorie des parallèles* pourrait être dû au fait que la version connue de nos jours n'était pas censée être la forme définitive du manuscrit.

La première partie de son travail est consacrée à un rappel des nombreux problèmes que suscitent le principe de parallélisme en géométrie. En réalité, les conclusions de Lambert rejoignent des remarques que Proclus avait déjà formulées en son temps : le problème viendrait du cinquième postulat<sup>8</sup>, celui-ci pourrait être une proposition, la nécessité d'étendre les parallèles indéfiniment rend le postulat encore moins intuitif, et cætera.

Certaines sections de cette première partie consistent en une critique de l'approche de la théorie des parallèles par Christian Wolff (1679-1754), un disciple de Gottfried Leibniz. En effet, dans son ouvrage *Anfangsgründe aller Mathematischen Wissenschaften* sorti en 1710 [24], Wolff décide de définir les parallèles comme des droites coplanaires et équidistantes, une définition déjà adoptée par d'autres mathématiciens avant lui et qui sera reprise par plusieurs auteurs suite à cela<sup>9</sup>[16, page 10]. Mais c'est justement sur ce point que Lambert émet la plupart de ses critiques : pour lui, Wolff considère qu'il suffit de changer de définition pour résoudre le problème<sup>10</sup>.

Selon Lambert, il existe deux possibilités pour résoudre les difficultés liées au cinquième postulat :

1. Le déduire des autres axiomes et postulats ;
2. Le remplacer par un postulat (voire plusieurs) plus simple qu'il faudra alors démontrer.

Il décide d'emprunter la première voie, et affirme alors ceci :

*Je n'ai aucun doute qu'Euclide avait aussi pensé à inclure son onzième axiome parmi les théorèmes.*[16, page 10]

Avant de s'atteler au problème, l'auteur commence par présenter une série de résultats qui sont vrais en géométrie absolue, c'est-à-dire dans une géométrie où tous les postulats d'Euclide sont considérés comme vrais à l'exception du cinquième qui, pour sa part, n'est pas censé être vrai ou faux. C'est à cette occasion qu'il rend compte de l'équivalence de ce postulat avec des propriétés qui suivent la propriété 29. On peut citer par exemple le fait que la somme des angles d'un triangle est égal à deux angles droits, mais également une propriété non tirée des *Éléments* :

*Deux droites s'intersectent si et seulement si toute parallèle à la première intersecte la seconde.*<sup>11</sup>

Là où Saccheri prenait appui sur des quadrilatères à deux angles droits, ceux que Lambert emploie en possèdent trois : il qualifie par ailleurs ces quadrilatères de "triectangu-

---

8. Dans [16], les auteurs parlent majoritairement du postulat des parallèles en le nommant "axiome 11".

9. Il faut dire que Wolff était assez influent à l'époque, car il était vu comme le successeur de Leibniz. Ses idées ont ainsi eu un grand impact dans la communauté mathématique.

10. Il est également à mentionner que déjà avant Wolff, définir les parallèles à partir de l'équidistance n'avait pas mené à grand-chose de plus qu'avec la définition originelle d'Euclide.

11. Cette phrase est en fait une reformulation du postulat d'Alhazen.



lares"<sup>12</sup>. Trois hypothèses sont alors proposées concernant l'amplitude du quatrième et dernier angle : ces hypothèses sont nommées de manière semblable à celles de Saccheri<sup>13</sup>. La première d'entre elles nous amène au système euclidien<sup>14</sup>. Voici comment Lambert réfute l'hypothèse de l'angle obtus<sup>15</sup> :

**Proposition 1.2.3.** *Soient deux droites  $a$  et  $b$  toutes deux perpendiculaires à un segment  $[AB]$ , les points  $A$  et  $B$  se trouvant respectivement sur  $a$  et  $b$ . Nous choisissons une suite de points  $B_1, B_2, B_3, \dots$  ordonnés sur  $b$  de sorte que  $B$  se trouve avant la suite sur la droite. Et à chaque point  $B_i$ , nous associons le point  $A_i$  sur  $a$  qui est tel que le segment  $A_iB_i$  est perpendiculaire à  $b$ .*

1. *Pour tout  $i$ , la longueur du segment  $[A_iB_i]$  est plus grande que celle du segment  $[A_{i+1}B_{i+1}]$  :*

$$|AB| > |A_1B_1| > |A_2B_2| > |A_3B_3| > \dots$$

2. *Pour tout  $i$ , la différence de longueur entre  $[A_iB_i]$  et  $[A_{i+1}B_{i+1}]$  est plus grande que celle entre  $[A_{i+1}B_{i+1}]$  et  $[A_{i+2}B_{i+2}]$  :*

$$|AB| - |A_1B_1| > |A_1B_1| - |A_2B_2| > |A_2B_2| - |A_3B_3| > \dots$$

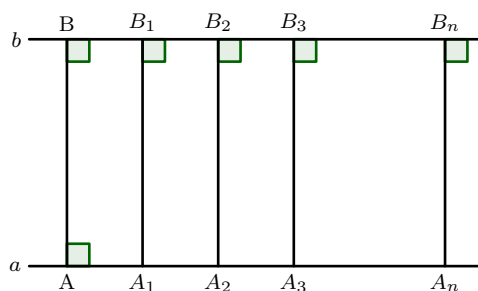


FIGURE 1.3 – Quadrilatères de Lambert  $ABB_iA_i$

Ces deux résultats impliquent que pour tout  $n$ ,

$$|AB| - |A_nB_n| > n(|AB| - |A_1B_1|).$$

Cependant, le fait est que le premier membre est toujours inférieur à la longueur de  $[AB]$ , tandis qu'il suffit de prendre  $n$  suffisamment grand pour que le deuxième membre devienne aussi grand qu'on le souhaite. Cette contradiction fait que Lambert rejette l'hypothèse de l'angle obtus.

Il s'attaque alors à l'hypothèse de l'angle aigu, en se servant d'une approche similaire à celle employée dans le cas de l'angle obtus. Il arrive aux conclusions suivantes :

12. Tout comme les quadrilatères dont se servait Saccheri ont été nommés en son honneur, ces formes géométriques sont appelées "quadrilatères de Lambert" ou "quadrilatères de Ibn al-Haytam-Lambert" (cf. [16]).

13. Le lien entre les hypothèses de Saccheri et celles de Lambert peut s'effectuer à l'aide du corollaire 2.4.

14. Voir le chapitre 2 et plus particulièrement la proposition 2.18 pour plus d'informations sur le sujet.

15. Les démonstrations qui suivent sont tirées de [4]. Cependant, aucune différence de notation n'est faite entre un segment et sa longueur dans cette référence. Les symboles de norme qui apparaissent dans les explications sont donc un choix personnel.

1. Pour tout  $i$ , la longueur du segment  $[A_{i+1}B_{i+1}]$  est plus grande que celle du segment  $[A_iB_i]$  :

$$|AB| < |A_1B_1| < |A_2B_2| < |A_3B_3| < \dots$$

2. Pour tout  $i$ , la différence de longueur entre  $[A_{i+1}B_{i+1}]$  et  $[A_iB_i]$  est plus petite que celle entre  $[A_{i+2}B_{i+2}]$  et  $[A_{i+1}B_{i+1}]$  :

$$|A_1B_1| - |AB| < |A_2B_2| - |A_1B_1| < |A_3B_3| - |A_2B_2| < \dots$$

Néanmoins, à l'inverse du cas précédent, ces constatations ne lui permettent pas de conclure que l'hypothèse de l'angle aigu est contradictoire. De plus, il formule lors de ces essais les résultats suivants :

1. La somme des angles d'un triangle est strictement inférieure à deux angles droits ;
2. L'aire  $\mathcal{A}(T)$  d'un triangle  $T$  est proportionnelle à son défaut d'angle, c'est-à-dire la différence entre deux angles droits et la somme des amplitudes des angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  du triangle :

$$\mathcal{A}(T) = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma);$$

3. Il existe deux droites coplanaires, disjointes et possédant une perpendiculaire commune qui divergent de part et d'autre de la perpendiculaire ;
4. Soient deux droites coplanaires  $d_1$  et  $d_2$  possédant une perpendiculaire commune, il nous est possible de trouver une droite  $d_3$  perpendiculaire à  $d_1$  et telle que  $d_3$  soit suffisamment éloigné du pied de la perpendiculaire commune pour que  $d_2$  ne rencontre pas  $d_3$  ;
5. Dans la figure 1.2, l'amplitude de l'angle en  $A_i$  du quadrilatère  $ABB_iA_i$  est supérieur à l'amplitude de l'angle en  $A_{i+1}$  du quadrilatère  $ABB_{i+1}A_{i+1}$  :

$$\widehat{B_1A_1A} > \widehat{B_2A_2A} > \widehat{B_3A_3A} > \dots$$

6. Il existe des mesures canoniques pour les longueurs et les aires (voir ci-dessous).

Il semble important d'apporter quelques informations sur certains de ces points. Commençons par le résultat (3). Lorsque Lambert évoque la notion de "divergence", il fait en réalité mention à la longueur des segments perpendiculaires à l'une de nos deux droites de départ et dont la deuxième extrémité se situe sur la seconde droite. Cette longueur, comme expliqué ci-dessus, augmente lorsque le pied de la nouvelle perpendiculaire est choisi "plus loin" du pied de la perpendiculaire commune. C'est cela que Lambert vaut indiquer lorsqu'il parle de "divergence".

Quant à la notion de "mesures canoniques" évoquée dans le point (6), il nous faut commencer à partir de la notion d'angle. Les propriétés de géométrie absolue nous permettent d'affirmer que l'angle total en chaque point de l'espace est équivalent à quatre angles droits. Nous pouvons ainsi définir une mesure absolue pour les angles : par exemple, nous pouvons choisir comme unité le degré, le radian, ou encore l'angle droit.

La manière dont Lambert établit un lien entre les angles, les longueurs et les aires est basée sur les quadrilatères de Saccheri, obtenus en "collant" deux quadrilatères de Lambert. Étant donné le point 5, si nous considérons un quadrilatère de la forme de celui en 1.4, alors nous pouvons associer n'importe quel angle  $\alpha$  compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  au quadrilatère de

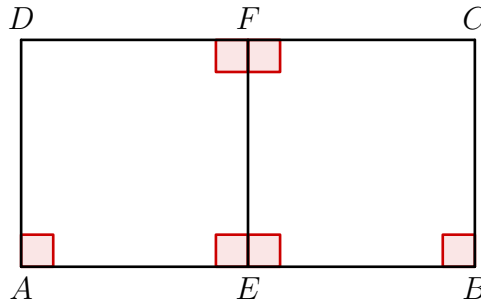


FIGURE 1.4 – Un quadrilatère de Saccheri recréé à partir de ceux de Lambert

base de longueur égale à  $|AB|$  dont les angles en  $C$  et  $D$  sont égaux à  $\alpha$ . Les quadrilatères étant donc définis par cet angle  $\alpha$ , nous pouvons considérer la hauteur  $|EF|$  (donc une longueur) et l'aire du quadrilatère comme des fonctions de  $\alpha$ .

La fin de la *Théorie des parallèles* constitue en des tentatives d'obtenir une contradiction que Lambert ne trouve finalement jamais.

Suite aux travaux de Saccheri et Lambert, les géomètres étaient de plus en plus convaincus à partir de la moitié du 18ème siècle de la nécessité d'admettre le cinquième postulat ou n'importe lequel de ces équivalents, et ce sans preuve. Mais il faudra attendre 50 ans entre les travaux de Saccheri et Lambert et ceux de Lobatchevski et Bolyai pour qu'apparaisse une forme de géométrie prenant appui sur l'hypothèse de l'angle aigu.

### 1.2.3 La géométrie en France à la fin du 18ème siècle

À la fin du 18ème siècle et au début du 19ème, les mathématiciens français s'intéressent eux aussi à cette question de la théorie des parallèles. Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) écrit alors dans un de ces articles :

*"La définition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale des éléments de Géométrie."*<sup>16</sup>

D'Alembert propose alors de définir une parallèle à une droite comme une droite coplanaire qui passe par deux points situés du même côté de la droite donnée et équidistants de celle-ci. Il reste alors à montrer que les deux droites sont équidistantes, ce que d'Alembert a proposé comme défi à ses contemporains.

Si certains mathématiciens de l'époque semblent se contenter de pointer les difficultés de la démonstration ou de donner leur opinion sur la question<sup>17</sup>, ce n'est pas le cas d'Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Contrairement à ses confrères, Legendre essaie à son tour de transformer le cinquième postulat en théorème. Repartant d'une idée similaire à celle de Saccheri<sup>18</sup>, il tente alors de prouver que la somme des angles d'un triangle est obligatoirement égale à deux angles droits. Et tout comme le mathématicien italien avant

16. Remarque tirée de *Mélanges de Littérature, d'Histoire et de Philosophie*, cité dans [4].

17. Bonola cite notamment Lagrange, Laplace, Carnot et Fourier dans [4, pages 52 à 55].

18. Dans [13], il ne considère pas les mêmes postulats de départ que Saccheri (et qu'Euclide). Cependant, [4] semble discuter d'un autre ouvrage de Legendre lorsqu'il fait cette remarque.

lui, il finit par mettre de côté l'hypothèse de l'angle obtus, grâce à une méthode qui diffère de son prédécesseur<sup>19</sup>.

**Proposition 1.2.4.** *La somme des angles d'un triangle est inférieure ou égale à deux angles droits.*

*Démonstration.* Soient des segments  $[A_1A_2], [A_2A_3], [A_3A_4], \dots, [A_nA_{n+1}]$ , tous de longueur égale et tels que les points  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  sont alignés. Nous construisons à partir de ces segments des triangles  $A_1B_1A_2, A_2B_2A_3, A_3B_3A_4, \dots, A_nB_nA_{n+1}$ , tous isométriques et situés du même côté de la droite.

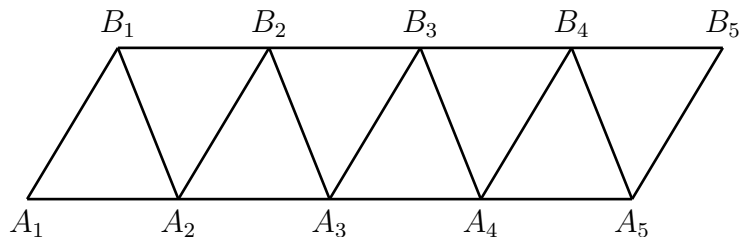


FIGURE 1.5 – Représentation des triangles tels que décrits par Legendre

Selon Legendre, les points  $B_i$  ainsi définis sont tous alignés<sup>20</sup>. Nous pouvons construire les segments  $[B_1B_2], [B_2B_3], \dots, [B_{n-1}B_n]$ . Ces segments sont tous de longueur égale, à nouveau selon Legendre. Nous considérons à présent les triangles  $B_1A_2B_2, \dots, B_{n-1}A_nB_n$ , en plus de construire le triangle  $B_nA_{n+1}B_{n+1}$  isométrique à ceux énoncés juste avant.

Soient  $\alpha$  l'angle  $\widehat{B_1A_2B_2}$  et  $\beta$  l'angle  $\widehat{A_1B_1A_2}$ . Alors nous avons  $\beta \leq \alpha$ .

En effet, supposons  $\beta > \alpha$ . Étant donné le fait que  $B_1A_2B_2$  et  $A_1B_1A_2$  ont deux côtés de longueur égale, la propriété A.1 indique que

$$|A_1A_2| > |B_1B_2|.$$

De plus, la ligne brisée  $[A_1B_1B_2 \dots B_{n+1}A_{n+1}]$  est de plus grande longueur que le segment  $[A_1A_{n+1}]$ . Nous obtenons ainsi l'inégalité

$$\begin{aligned} |A_1B_1| + n|B_1B_2| + |A_{n+1}B_{n+1}| &> n|A_1A_2| \\ \Leftrightarrow 2|A_1B_1| &> n(|A_1A_2| - |B_1B_2|). \end{aligned}$$

Cette inégalité devient fausse lorsque  $n$  est choisi suffisamment grand. Ainsi, par l'absurde, nous avons bel et bien  $\beta \leq \alpha$ . De cette constatation s'ensuit le fait que la somme des angles d'un triangle est inférieure ou égale à deux angles droits. En effet, les angles  $\widehat{A_1A_2B_1}, \widehat{B_1A_2B_2}$  et  $\widehat{B_2A_2A_3}$  (qui est égal à l'angle  $\widehat{B_1A_1A_2}$ ) sont tels que leur somme vaut deux angles droits, et l'inégalité obtenue nous permet de conclure.  $\square$

19. Tout comme précédemment, il a été choisi de noter les longueurs à l'aide d'une norme pour les différencier des segments correspondants.

20. La précision "selon Legendre" est importante.

Si cette conclusion a été appelée par la suite *Premier Théorème de Legendre*, il faut noter que c'est bien Saccheri qui l'avait démontré en premier, et ce un siècle auparavant. Il en va de même pour le *Second Théorème de Legendre*, que Saccheri avait aussi obtenu :

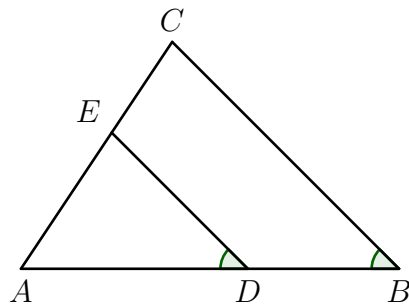
"Si la somme des angles d'un triangle est inférieure ou égale à deux angles droits, alors la somme des angles de n'importe quel triangle est respectivement inférieure ou égale à deux angles droits."

Nous n'allons pas redémontrer ce théorème car nous l'avons déjà fait lorsque nous avons parlé de Saccheri. Nous allons à la place nous intéresser à la façon dont Legendre démontre que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.

**Proposition 1.2.5.** *La somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.*

*Démonstration.* Soit un triangle  $ABC$ . Supposons que la somme de ces angles est strictement inférieure à deux angles droits. Nous considérons le triangle  $ADE$  construit de la manière suivante :

- $D$  est situé sur le segment  $AB$  ;
- $E$  est situé sur le segment  $AC$  ;
- L'angle  $\widehat{ADE}$  est égal à l'angle  $\widehat{ABC}$ .



Étant donné le second théorème, nous pouvons déduire le fait que la somme des angles du quadrilatère  $DBCE$  est strictement inférieure à 4 angles droits.

Nous obtenons que l'angle  $\widehat{AED}$  est strictement inférieur à l'angle  $\widehat{ACB}$ . Legendre arrive alors à la conclusion que la longueur  $|AE|$  est entièrement définie par l'angle  $\widehat{AED}$ . Et c'est arrivé à ce stade que Legendre rejette la possibilité que la somme des angles d'un triangle soit strictement inférieure à deux angles droits.  $\square$

En effet, il considère que l'idée de longueur n'a de sens que s'il a été fait mention de celle-ci auparavant. Or, il n'est jamais question d'unité de longueur dans l'énoncé, ce qui pousse Legendre à rejeter l'hypothèse de l'angle aigu. Finalement, la démonstration de Legendre se base, tout comme pour Lambert, sur l'idée selon laquelle il n'existe pas d'unité de longueur absolue.

Malgré le fait que Legendre pensait avoir résolu les problèmes que posaient les fondations de la géométrie, il n'a finalement eu comme mérite que de réécrire de manière élégante ce que d'autres avaient démontré avant lui.

## 1.3 Les premières fondations de la géométrie non euclidienne

Plus de deux mille ans de recherches infructueuses d'une démonstration du postulat d'Euclide finissent par convaincre les géomètres du 19ème siècle de l'impossibilité de le transformer en théorème. Cependant, tous les efforts fournis jusqu'à présent ne sont pas devenus inutiles : en effet, étant donné que l'hypothèse de l'angle aigu n'est pas réfutable en l'état, pourquoi ne pas essayer de construire une géométrie où cette hypothèse remplacerait le cinquième postulat ?

### 1.3.1 Carl Gauss

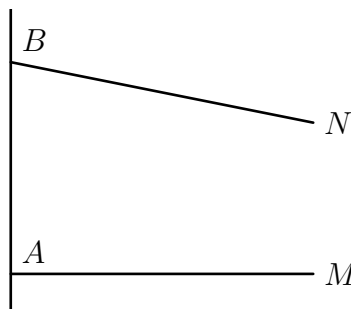
Selon [4], Carl Gauss (1777-1855) est le premier mathématicien à avoir une idée claire d'une forme de géométrie indépendante du cinquième postulat, et ce plus ou moins trente ans avant de dévoiler cette idée<sup>21</sup>.

Suite à une première phase de recherche durant laquelle il essaie à son tour de trouver une contradiction à partir de l'hypothèse de l'angle aigu, Gauss commence à développer les idées d'une géométrie se basant sur cette même hypothèse, géométrie à laquelle il donne plusieurs noms au fil du temps : d'abord anti-euclidienne dans une lettre adressée à Friedrich Wachter, puis astrale lorsqu'il s'adresse à Ferdinand Schweikart, pour finalement aboutir à la dénomination de géométrie non euclidienne ([4, page 67]).

Cependant, à l'exception de quelques personnes, Gauss décide de ne parler à personne de sa théorie, de peur d'être incompris. Quand les circonstances le contraignent à en discuter avec Franz Taurinus, il demande à ce dernier de ne pas en discuter avec qui que ce soit.

Voici la manière dont Gauss définit les parallèles dans l'hypothèse de l'angle aigu [4, page 67] :

**Définition 1.3.1.** Si deux droites coplanaires  $AM$ ,  $BN$  ne s'intersectent pas, tandis que toutes les demi-droites intérieures à l'angle  $\widehat{MAB}$  intersectent  $BN$ , alors  $AM$  est dite parallèle à  $BN$ .



Ainsi, dans cette définition, Gauss considère une seule et unique droite, à savoir celle qui sépare les droites passant par  $A$  en deux groupes : celui des droites qui intersectent  $BN$ , et celui comprenant les autres.

---

21. Ce sont les publications de Lobatchevski et Bolyai qui ont motivé Gauss à discuter de ses réflexions de manière publique.

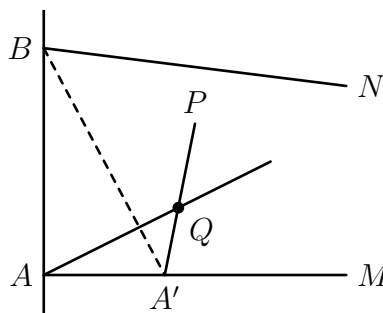
Il s'agit ainsi d'une définition des parallèles différente de celle d'Euclide, qui considère comme parallèles deux droites qui ne s'intersectent pas. Ainsi, avec la définition d'Euclide, si nous rejetons le cinquième postulat, nous pourrions potentiellement obtenir plusieurs parallèles à une droite passant par un même point.

Il nous est possible de montrer que la notion de parallèle de Gauss est indépendante des points choisis sur les droites :

**Proposition 1.3.2.** *Le fait que  $AM$  soit parallèle à  $BN$  est indépendant du choix des points  $A$  et  $B$  sur les droites correspondantes.*

*Démonstration.* Étant donné que la définition dépend avant tout de la droite  $AM$ , il est évident que la notion ne dépend pas du choix du point  $B$  sur  $BN$ . Montrons qu'il en est de même pour  $A$ <sup>22</sup> :

Soit  $A'$  un point de  $AM$  qui se trouve du même côté de  $AB$  que  $M$ . Considérons une demi-droite  $A'P$  intérieure à l'angle  $\widehat{BA'M}$  et prenons un point  $Q$  sur le segment  $[A'P]$ .



Par définition de Gauss du parallélisme,  $AQ$  est d'intersection non vide avec  $BN$ . La droite  $QP$  a donc aussi un point en commun avec  $BN$ <sup>23</sup>.  $A'M$  est ainsi la première droite passant par  $A'$  qui n'intersecte pas  $BN$ , et la définition nous permet d'affirmer qu'il s'agit de la parallèle à  $BN$ .

Choisissons à présent un point  $A'$  sur  $AM$  qui se trouve de l'autre côté de  $AB$  (celui qui ne contient pas  $M$ ). Traçons une demi-droite  $A'P$  tel que le segment  $[A'P]$  compris dans l'angle  $\widehat{BA'A}$ , et choisissons un point  $Q$  sur cette droite tel que  $A'$  soit compris entre  $P$  et  $Q$ .

Tout comme dans le cas précédent, la droite  $QA$  intersecte  $BN$  par hypothèse, et il en va de même pour  $A'P$ <sup>24</sup>. Nous obtenons au final la même conclusion par un raisonnement identique.  $\square$

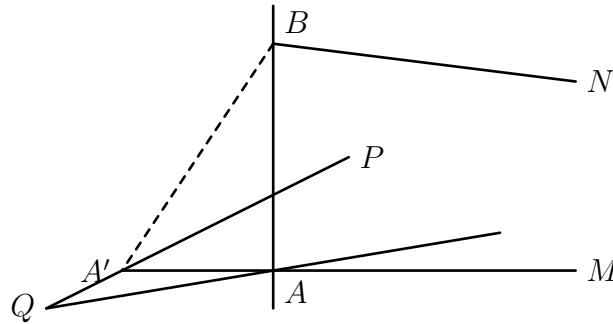
### 1.3.2 Nikolaï Lobatchevski

*"Il est bien connu qu'en géométrie, la théorie des droites parallèles est restée à ce jour incomplète. Les efforts inutiles, fournis pendant deux mille ans depuis Euclide, m'ont*

22. Démonstration tirée de [4, pages 68 à 70].

23. La justification donnée par [4, page 69] indique qu'il est "évident que  $A'P$  doit aussi intersecter  $BN$ ", sans donner plus d'informations à ce sujet.

24. [4] ne fournit pas plus d'information que dans le cas précédent.



amené à douter que les concepts ne comportent pas la vérité que nous cherchons à prouver mais que, comme pour d'autres lois physiques, ils ne peuvent être vérifiés qu'expérimentalement, au travers d'observations astronomiques par exemple. Enfin, convaincu de la validité de mes conjectures et considérant que ce problème difficile est complètement résolu, j'ai exposé mon raisonnement en 1826."

Nikolaï Lobatchevski, *Les Nouveaux Éléments de géométrie*<sup>25</sup>

Si Gauss est le premier à avoir théorisé la géométrie non euclidienne, ce sont deux autres mathématiciens qui ont publié les premiers travaux sur le sujet. Le premier est Nikolaï Lobatchevski (1792-1856), mathématicien russe ayant étudié à l'Université de Kazan, où il est devenu assistant puis professeur. On retrouve parmi ces travaux des tentatives de démonstrations du cinquième postulat, écrites entre 1815 et 1817. Et en 1823, son attention se tourne vers ce qu'il appelle la "géométrie imaginaire"<sup>26</sup>.

C'est le 23 février 1826, lors d'une journée organisée à l'Université de Kazan, que Nikolaï Lobatchevski présente une lecture de l'*Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles*. Durant cet exposé, il présente des résultats que nous avons déjà pu observer chez Saccheri et Lambert dans le cas de l'hypothèse de l'angle aigu.

Voici la manière dont Lobatchevski définit le parallélisme [15, point 16, page 11] :

**Définition 1.3.3.** Toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent se distribuer, par rapport à une même droite donnée dans ce plan, en deux classes, à savoir : en droites qui coupent la droite donnée, et en droites qui ne la coupent pas. La droite qui forme la limite commune de ces deux classes est dite parallèle à la droite donnée.

La définition de Lobatchevski rejoint celle de Gauss dans le choix de ne définir qu'une seule parallèle. Là où le Russe s'éloigne de ce qu'a pu faire Gauss, c'est dans le fait d'ajouter une notion d'angle de parallélisme :

**Définition 1.3.4.** Soit une perpendiculaire  $AD$  à une droite  $BC$ , avec  $A$  un point extérieur à cette droite, et soit  $AE$  la perpendiculaire à  $AD$  passant par  $A$ . Il existe deux possibilités :

25. Traduction de la citation tirée de [8].

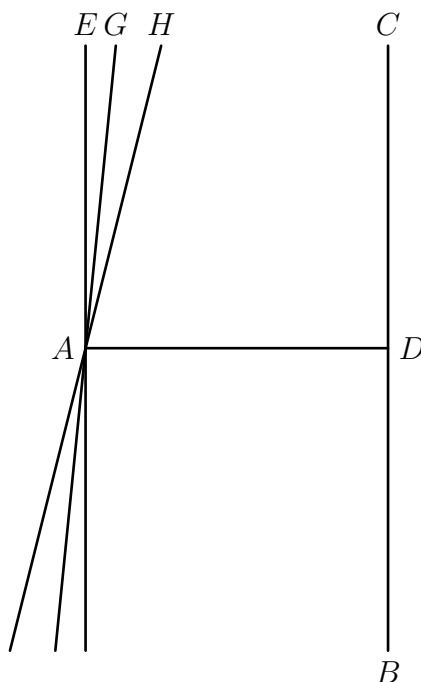
26. Selon [4], il est possible de trouver des traces de cette idée dans le manuscrit d'un livre de Lobatchevski sur la géométrie élémentaire, qui n'a jamais été imprimé et qui a été retrouvé dans les archives de l'Université de Kazan en 1898.



- Toutes les demi-droites intérieures à l'angle  $\widehat{DAE}$  (et donc les droites associées) rencontrent  $BC$  ;
- Il existe des demi-droites intérieures à l'angle  $\widehat{DAE}$  qui ne rencontrent pas  $BC$ .

Si nous supposons l'existence de demi-droites  $[AG)$  intérieures à  $\widehat{DAE}$  (et donc de droites  $AG$ ) d'intersection vide avec  $BC$ , alors il existe une droite  $AH$  (liée à la demi-droite  $[AH)$ ) parallèle à  $BC$ .

L'angle  $\widehat{DAH}$  compris entre la parallèle  $AH$  et la perpendiculaire  $AD$  est l'angle de parallélisme, et nous le désignons par  $\Pi(p)$ ,  $p$  représentant la distance  $|AD|$ .



Lobatchevski marque alors la différence entre le cas où cet angle  $\Pi(p)$  est droit, et celui où il est aigu. Chacune de ses possibilités correspond respectivement à l'hypothèse de l'angle droit et à celle de l'angle aigu, telles que décrites par Saccheri.

Dans [15], il est à noter que si Lobatchevski laisse de côté l'hypothèse de l'angle obtus (propriété 19 : *Dans tout triangle rectiligne, la somme des trois angles ne peut surpasser deux angles droits.*), il ne semble pas privilégier l'un des deux cas restants.

### 1.3.3 János Bolyai

La deuxième personne à avoir publié ses recherches sur la géométrie hyperbolique est le Hongrois János Bolyai (1802-1860). Sa carrière est très différente de celle de Lobatchevski : en effet, Bolyai n'est pas mathématicien de formation, mais officier de cavalerie. Cependant, et s'il n'a effectivement publié qu'un seul travail mathématique de son vivant, ce sont plus de 20 000 pages manuscrites traitant de mathématiques et signées de sa main que l'on retrouve après sa mort. Et c'est dans un annexe de 24 pages du livre *Essai d'introduction des éléments de mathématiques pures pour les jeunes étudiants* que János Bolyai présente ses réflexions autour de la géométrie hyperbolique.

Voici une traduction de la première proposition<sup>27</sup> employée par Bolyai dans ce fameux annexe [3, page 75] :

**Proposition 1.3.5.** *Si la demi-droite  $[AM)$  ne rencontre pas  $[BN)$  et rencontre  $[BP)$  pour tout point  $P$  tel que l'angle  $\widehat{ABP}$  est inférieur à l'angle  $\widehat{ABN}$ , alors nous avons  $BN \parallel AM$ , ce que nous notons  $BN \parallel AM$ .*

*Pour tout point  $B$  extérieur à  $AM$ , il existe une et une seule demi-droite  $[BN)$  telle que  $BN \parallel AM$ . De plus, la somme des angles  $\widehat{BAM}$  et  $\widehat{ABN}$  est inférieure ou égale à deux angles droits.*

*Lorsque la demi-droite  $[BC)$  effectue une rotation autour de  $B$ , de manière à ce que la somme de  $\widehat{BAM}$  et  $\widehat{ABN}$  soit inférieure à deux angles droits, nous finissons par obtenir une demi-droite  $[BC)$  qui n'intersecte pas  $[AM)$ . Nous avons à ce moment-là  $BC \parallel AM$ .*

*Pour tout  $E$  situé sur  $AM$ , nous avons  $BN \parallel EM$ , lorsque  $|AM| > |AE|$ .*

*Enfin, soient  $C$  et  $D$  des points de  $AM$  tel que  $|CD| = |CB|$ . Nous avons  $\widehat{CDB} = \widehat{CBD} < \widehat{NBC}$ . En considérant des points  $C$  de plus en plus "éloignés" de  $A$ , nous obtenons  $\widehat{NBC} \rightarrow 0$ . Cela implique  $\widehat{ADB} \rightarrow 0$ .*

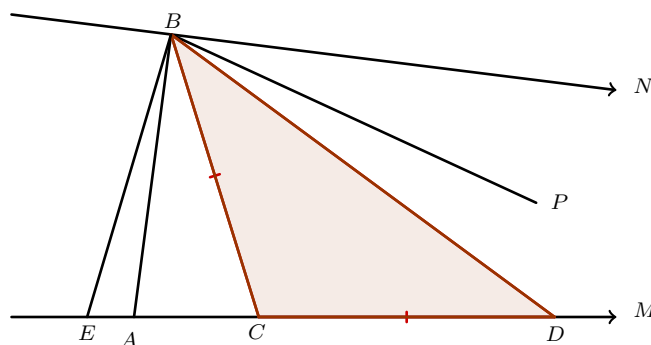


FIGURE 1.6 – La figure associée à la proposition, redessinée à partir d'une figure de [3].

Concernant cette définition, nous pouvons remarquer que contrairement à Gauss et Lobatchevski, Bolyai définit le parallélisme à l'aide des demi-droites<sup>28</sup> et que le fait que  $AB$  est parallèle à  $BN$  est défini de manière "inversée", dans le sens où là où les deux mathématiciens précédents discutaient des droites qui intersectent  $BN$ , le Hongrois se base sur les intersections de  $[AB)$  avec les demi-droites  $[BP)$ . Cependant, au-delà de cette définition, les résultats obtenus par les trois mathématiciens sont très similaires.

Gauss, Lobatchevski et Bolyai ont posé à cette époque les bases de ce qui allait devenir la géométrie hyperbolique, dans laquelle il existe plusieurs parallèles à une droite (au sens d'Euclide) passant par un même point extérieur à cette droite. Il ne restait plus qu'à établir des modèles correspondant à cette géométrie.

27. Même quand il s'agit d'une définition, Bolyai la qualifie de proposition.

28. Plus exactement, Bolyai mentionne directement les demi-droites, là où Gauss et Lobatchevski parle de "droites" tout en se servant majoritairement des demi-droites dans leur raisonnement.

## Chapitre 2

# Le travail de Gerolamo Saccheri

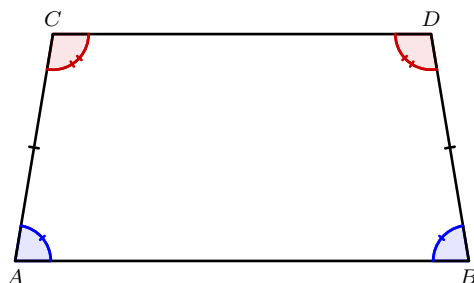
Comme expliqué précédemment, l'objectif de Saccheri était de démontrer que le cinquième postulat d'Euclide est une conséquence des quatre premiers postulats.

Nous allons dans cette partie énoncer les seize premières propriétés de *Euclides ab omni naevo vindicatus* [22]. Leur traduction est une réinterprétation d'une traduction anglaise fournie par [21]. Étant donné que cette dernière se voulait le plus proche possible du texte original, le choix a été fait de retranscrire les propositions avec un langage mathématique plus actuel.

Dans ces propositions, nous faisons régulièrement référence aux *Éléments* d'Euclide, dont certaines propriétés (celles qui nous sont utiles pour les démonstrations qui suivent) sont disponibles dans l'annexe A, page 94.

Enfin, s'il s'agit en majorité d'une retranscription des propositions, celles-ci seront aussi agrémentées de remarques, elles aussi tirées de [21], portant sur les justifications de Gerolamo Saccheri. En effet, il est arrivé à ce dernier de se servir de résultats de géométrie euclidienne pour justifier des résultats dans ce que nous allons appeler "l'hypothèse de l'angle obtus", quand bien même elles ne sont pas vraies sous cette hypothèse.

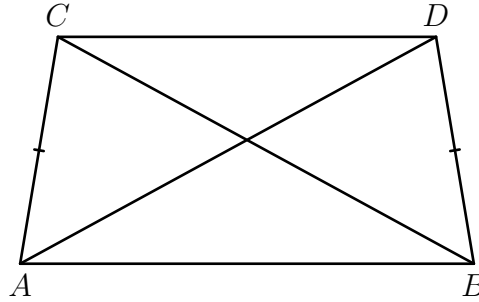
**Proposition 2.1.** *Si deux segments  $[AC]$  et  $[BD]$  de longueur égale forment des angles égaux avec le segment  $[AB]$ , alors les angles formés par ces mêmes segments avec  $[CD]$  sont aussi égaux entre eux.*



*Démonstration.* Soient  $[AD]$  et  $[BC]$  les diagonales du quadrilatère  $ABDC$ . Étant donné que :

—  $\widehat{CAB} = \widehat{ABD}$  par hypothèse ;

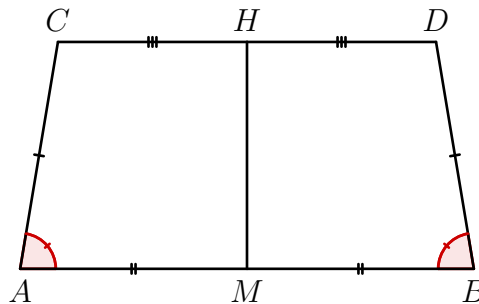
- $|AC| = |BD|$  par hypothèse ;
- $|AB| = |BA|$  par définition de la longueur entre deux points,



les deux triangles sont isométriques par la propriété A.1. Nous en déduisons que les diagonales du quadrilatère sont de même longueur.

Considérons à présent les triangles  $ACD$  et  $BDC$ . Comme leurs trois côtés sont de même longueur chacun à chacun, la propriété A.3 implique que ces triangles sont isométriques. En particulier, les angles  $\widehat{DCA}$  et  $\widehat{BDC}$  sont égaux.  $\square$

**Proposition 2.2.** *Soit un quadrilatère  $ABCD$  dont les angles  $\widehat{A}$  et  $\widehat{B}$  sont égaux et les côtés  $[AC]$  et  $[BD]$  sont de même longueur. Si  $M$  et  $H$  sont les milieux respectifs de  $[AB]$  et  $[CD]$ , alors  $MH$  est perpendiculaire à  $AB$  et à  $CD$ .*

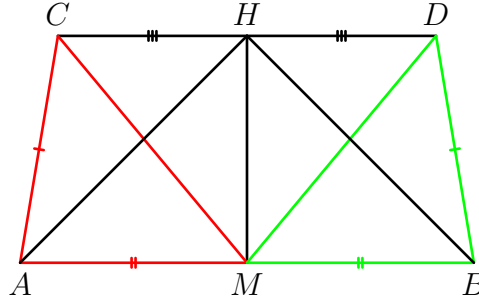


*Démonstration.* Au vu de ce que nous supposons, la proposition 2.1 implique que les angles  $\widehat{DCA}$  et  $\widehat{BDC}$  sont égaux.

Considérons les segments  $[AH]$ ,  $[BH]$ ,  $[CM]$  et  $[DM]$ . Soient les triangles  $CAM$  et  $DBM$ . Nous avons :

- $\widehat{CAM} = \widehat{MBD}$  par hypothèse ;
- $|AC| = |BD|$  par hypothèse ;
- $|AM| = |MB|$  par définition de  $M$ .

La propriété A.1 implique que ces triangles sont isométriques, et donc en particulier que les segments  $[CM]$  et  $[DM]$  sont de même longueur.

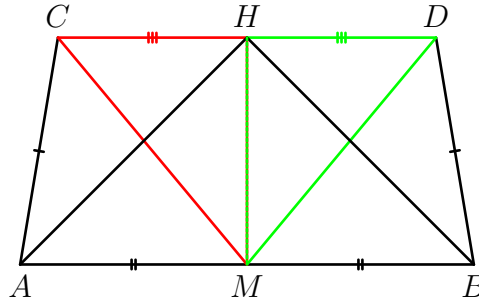


C'est cette même propriété appliquée aux triangles  $ACH$  et  $BDH$  qui nous permet d'affirmer que les segments  $[AH]$  et  $[BH]$  sont de même longueur.

Maintenant, prenons en compte les triangles  $CHM$  et  $DHM$ .

- $|MH|$  est égal à lui-même ;
- $|CH| = |DH|$  par définition de  $H$  ;
- $|CM| = |DM|$  au vu de ce que nous avons déduit précédemment.

Ainsi, par la proposition A.3, ils sont isométriques, ce qui signifie que les angles  $\widehat{MHC}$  et  $\widehat{MHD}$  sont égaux et donc droits, par définition. La même logique permet de déduire que  $\widehat{HMA}$  et  $\widehat{HMB}$  sont eux aussi droits.



Au vu de la définition des angles droits, la droite  $MH$  est donc bien perpendiculaire à  $AB$  et  $CD$ .  $\square$

Il est à noter qu'en l'absence d'hypothèse sur l'amplitude des angles en  $A$  et  $B$  dans les deux premières propositions, rien ne nous garantit l'unicité du segment  $[CD]$  en géométrie sphérique. Cependant, Saccheri semble considérer qu'il n'existe qu'une seule droite joignant deux points, et suppose (au moins implicitement) l'unicité du segment entre deux points.

Pour effectivement avoir une unicité, il nous faut ajouter une nouvelle hypothèse : les angles intérieurs au quadrilatère doivent être inférieurs à  $\pi$  en  $C$  et  $D$ . Mais il nous faut préciser que les deux théorèmes restent vrais, indépendamment de l'amplitude de ces angles.

C'est à partir de la troisième proposition que Saccheri se sert de ce que l'on appellerait de nos jours des "quadrilatères de Saccheri" : il s'agit de quadrilatères  $ABDC$  possédant deux côtés opposés  $[AC]$  et  $[BD]$  de longueur égale et deux angles  $\widehat{BAC}$  et  $\widehat{DBA}$  droits.

**Proposition 2.3.** *Soit un quadrilatère  $ABDC$  tel que les angles en  $A$  et  $B$  sont droits, et les côtés  $[AC]$  et  $[BD]$  sont de même longueur.*

- Si les angles en  $C$  et  $D$  sont droits, alors  $|CD| = |AB|$  ;
- S'ils sont obtus, alors  $|CD| < |AB|$  ;
- S'ils sont aigus, alors  $|CD| > |AB|$ .



*Démonstration.* Il va de soi, au vu de la proposition 2.1 et de l'hypothèse, que les angles en  $C$  et  $D$  sont égaux. Supposons en premier lieu que ces mêmes angles sont droits. Nous allons montrer que  $|CD| = |AB|$  par l'absurde.

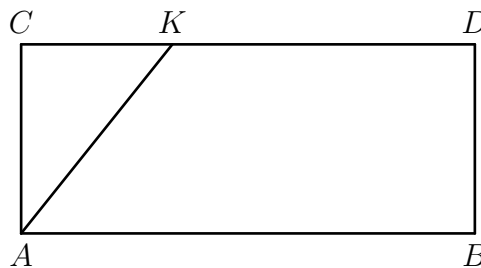
Supposons que  $|CD| > |AB|$ . Alors il nous est possible de trouver un point  $K$  sur le segment  $[CD]$  tel que  $|DK| = |AB|$ . Étant donné que :

- $|DK| = |AB|$  par définition de  $K$  ;
- $BD$  est perpendiculaire à  $AB$  et  $DK$  par hypothèse,

la proposition 2.1 implique que les angles  $\widehat{BAK}$  et  $\widehat{AKD}$  sont égaux. Cette dernière affirmation est absurde car

- Par construction, l'angle  $\widehat{BAK}$  est aigu car plus petit que l'angle droit  $\widehat{BAC}$  ;
- L'angle  $\widehat{AKD}$  est obtus car plus grand que l'angle droit  $\widehat{ACD}$ , par la proposition A.6 et le fait que  $\widehat{AKD}$  est un angle extérieur au triangle et opposé à  $\widehat{ACD}$ .

Ainsi, nous ne pouvons pas avoir  $|CD| > |AB|$ , et une logique similaire nous permet d'exclure le cas où  $|CD| < |AB|$ . Ainsi, lorsque les angles en  $C$  et  $D$  sont droits, nous avons  $|CD| = |AB|$ .



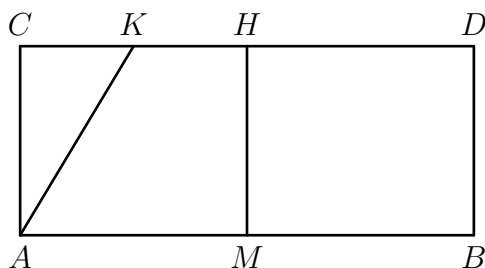
Supposons à présent être dans le cas où les angles en  $C$  et  $D$  sont obtus. Considérons le segment joignant les points  $M$  et  $H$ , milieux respectifs de  $[AB]$  et  $[CD]$ . Nous savons grâce à la proposition 2.2 que  $MH$  est perpendiculaire à  $AB$  et à  $CD$ . En particulier, le segment  $[MH]$  est perpendiculaire aux segments  $[AM]$  et  $[CH]$ .

Nous ne pouvons pas avoir  $|AM| = |CH|$ , car sinon les angles en  $A$  et  $C$  devraient être égaux par la proposition 2.1, ce qui contredirait l'hypothèse. Nous ne pouvons pas non plus avoir  $|CH| > |AM|$ .

En effet, supposons avoir  $|CH| > |AM|$ . Nous pouvons trouver  $K$  sur le segment  $|CH|$  tel que  $|AM| = |KH|$ , ce qui, par la proposition 2.1, nous donne  $\widehat{MAK} = \widehat{AKH}$ . Cette dernière affirmation est contradictoire avec notre hypothèse. En effet,

- Par construction, l'angle  $\widehat{MAK}$  est aigu car plus petit que l'angle droit  $\widehat{MAC}$  ;
- L'angle  $\widehat{AKH}$  est obtus car plus grand que l'angle obtus  $\widehat{ACH}$ , par la proposition A.6 et le fait que  $\widehat{AKH}$  est un angle extérieur au triangle et opposé à  $\widehat{ACH}$ . (Voir la remarque 2.7 page 30 pour plus d'informations par rapport à ce passage.)

Ainsi, lorsque l'angle en  $C$  est obtus, nous avons  $|CH| < |AM|$ . Nous pouvons donc affirmer que lorsque les angles en  $C$  et  $D$  sont obtus, nous avons  $|CD| = 2|CH| < 2|AM| = |AB|$ .

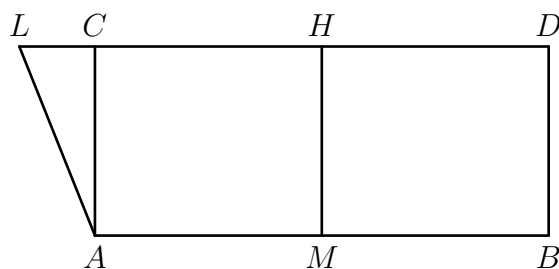


Il ne nous reste plus qu'à considérer le cas où les angles en  $C$  et  $D$  sont aigus. Nous reprenons les milieux  $M$  et  $H$  des segments tels que définis dans le cas précédent. Le même raisonnement logique nous permet d'affirmer que  $|AM| \neq |CH|$ .

Supposons que  $|AM| > |CH|$ , et tentons d'aboutir à une contradiction. Soit un point  $L$  sur la droite  $CH$  tel que  $|LH| = |AM|$ . La proposition 2.1 implique que  $\widehat{MAL} = \widehat{ALH}$ , ce qui n'est pas possible car

- Par construction, l'angle  $\widehat{MAL}$  est obtus car plus grand que l'angle droit  $\widehat{MAC}$  ;
- L'angle  $\widehat{ALH}$  est aigu car plus petit que l'angle aigu  $\widehat{ACH}$ , par la proposition A.6 et le fait que  $\widehat{ACH}$  est un angle extérieur au triangle et opposé à  $\widehat{ALH}$ .

La seule possibilité restante est donc que  $|CH| > |AM|$ . Ainsi, si les angles en  $\widehat{C}$  et  $\widehat{D}$  sont aigus, alors  $|CD| > |AB|$ .



□

**Corollaire 2.4.** *Soit un quadrilatère  $ABDC$  dont les angles en  $A$ ,  $B$  et  $D$  sont droits, et dont l'angle  $C$  est obtus (respectivement aigu). Alors les côtés adjacents à  $C$  sont plus petits (respectivement plus grands) que les côtés qui leur sont opposés.*

On remarque dans ce corollaire l'utilisation des quadrilatères de Lambert. Concernant sa démonstration, des justifications possibles sont employées dans la démonstration de la proposition 2.3.

Nous allons dès à présent démontrer la réciproque de la proposition précédente.

**Proposition 2.5.** *Soit un quadrilatère  $ABDC$  tel que les angles en  $A$  et  $B$  sont droits, et les côtés  $[AC]$  et  $[BD]$  sont de même longueur.*

- Si  $|CD| = |AB|$ , alors les angles en  $C$  et  $D$  sont droits ;
- Si  $|CD| < |AB|$ , alors ils sont obtus ;
- Si  $|CD| > |AB|$ , alors ils sont aigus.

*Démonstration.* Supposons avoir  $|CD| = |AB|$ . Alors nous avons obligatoirement les angles en  $C$  et  $D$  droits, car si ce n'était pas le cas, la proposition 2.3 nous amènerait à une contradiction.

Il en va de même pour les deux autres cas, où la proposition 2.3 nous permet de justifier les résultats.  $\square$

**Définition 2.6.** Soit un quadrilatère  $ABDC$  dont les angles en  $A$  et  $B$  sont droits, et les côtés  $[AC]$  et  $[BD]$  sont de même longueur. Les angles en  $C$  et  $D$  sont égaux par la proposition 2.1. Il existe trois hypothèses possibles sur l'amplitude de ces angles. Nous allons les appeler **hypothèse de l'angle droit**, **hypothèse de l'angle obtus** et **hypothèse de l'angle aigu**, chacune correspondant à l'un des cas énoncés dans la propriété 2.3.

**Remarque 2.7.** Le problème de la démonstration de la proposition 2.3 provient d'un passage de la partie où nous considérons des angles obtus en  $C$  et  $D$ . En effet, Saccheri se sert du théorème A.6 pour justifier son résultat. Or, le théorème de l'angle extérieur n'est pas toujours vrai dans l'hypothèse de l'angle obtus. Ainsi, la proposition 2.3 telle que présentée ici est fausse.

L'erreur de Saccheri vient peut-être du fait que ce dernier ne semble prendre en compte dans ses démonstrations que des polygones convexes. La représentation prend ainsi une place importante de tentative de démonstration.

Si nous voulons utiliser la proposition A.6 dans la démonstration sans être confrontés à un quelconque problème, il nous faut alors préciser l'un des éléments suivants dans notre hypothèse de départ [21, page 258] :

- Nous ne considérons que des polygones convexes ;
- La propriété est considérée comme étant simplement localement vraie, c'est-à-dire que les quadrilatères considérés sont suffisamment petits ;
- l'espace n'est pas enfermé entre deux droites, et donc que dans l'hypothèse de l'angle obtus, la structure topologique de l'espace est celle d'un plan projectif.

L'erreur de Saccheri va avoir des répercussions sur d'autres propositions, à savoir celles qui se servent (directement ou au travers de résultats les précédant) de la proposition A.6 :

- La proposition 2.9, qui se sert de A.6 ;



- La proposition 2.12, qui se sert de 2.3 ;
- La proposition 2.13, qui se sert de 2.12 ;
- La proposition 2.16, qui se sert de A.6.

Les trois résultats qui suivent sont également appelés *théorème de Saccheri*<sup>1</sup>. Il consiste à montrer que les trois hypothèses déjà énoncées sont mutuellement exhaustives et exclusives.

Dans le cas présent, Saccheri tente de démontrer le fait que chaque hypothèse est conservée par changement de base et de hauteur du quadrilatère. Les invariances par isométries (rotations et translations) sont quant à elles considérées comme vraies.

**Proposition 2.8.** *Si l'hypothèse de l'angle droit est vérifiée dans le cas d'un quadrilatère tel que décrit dans les propositions 2.3 et 2.5, alors elle est vérifiée pour n'importe lequel de ces quadrilatères.*

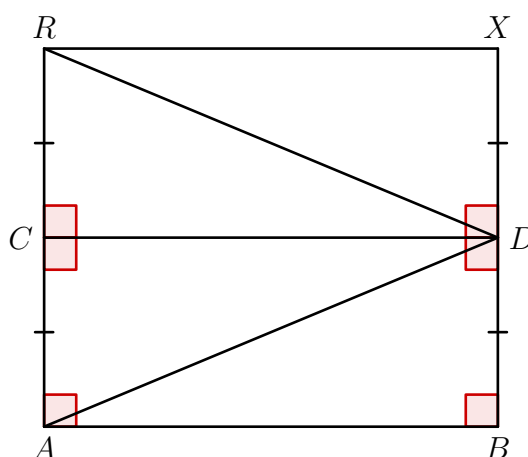
*Démonstration.* Soit un quadrilatère  $ABDC$  dont tous les angles sont droits, et dont les côtés  $[AC]$  et  $[BD]$  sont de même longueur. La propriété 2.3 nous indique que  $|AB| = |CD|$ .

Nous prolongeons les segments  $[AC]$  et  $[BD]$  de manière à obtenir un quadrilatère  $ABXR$  convexe, dont les côtés  $[AR]$  et  $[BX]$  sont de longueur égale au double de celle des segments  $[AC]$  et  $[BD]$ . Il nous est possible de montrer deux choses :

- $|RX| = |AB|$  ;
- Les angles en  $R$  et  $X$  sont droits.

Pour cela, nous allons considérer les triangles  $ACD$  et  $RCD$ . Ceux-ci sont isométriques par la propriété A.1. En effet,

- Par hypothèse,  $|AC| = |CR|$  ;
- Les deux triangles ont en commun  $[CD]$  ;
- L'angle en  $C$  est droit dans les deux triangles, et compris entre deux des côtés cités précédemment.



Nous en concluons que

---

1. "Théorème" au singulier, car les trois résultats sont considérés comme faisant partie d'un tout.

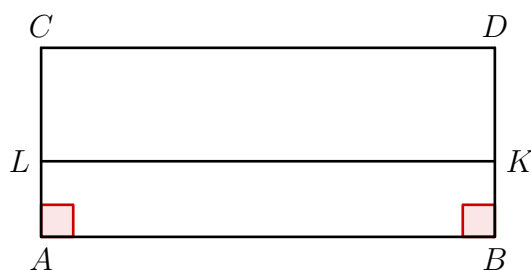
- Les segments  $[AD]$  et  $[RD]$  sont de même longueur ;
- Les angles  $\widehat{CDA}$  et  $\widehat{RCD}$  sont égaux ;
- Les angles  $\widehat{ADB}$  et  $\widehat{CDR}$  sont égaux, par égalité de somme d'angles.

La propriété A.1 nous permet de justifier le fait que les triangles  $ADB$  et  $RDX$  sont isométriques, et donc que les segments  $[AB]$  et  $[RX]$  sont de même longueur. Ainsi, dans le quadrilatère  $CDXR$ ,

- les angles en  $C$  et  $D$  sont droits ;
- les côtés  $[CR]$  et  $[DX]$  sont de même longueur ;
- les côtés  $[CD]$  et  $[RX]$  sont de même longueur.

La propriété 2.5 implique donc que les angles en  $R$  et  $X$  sont droits.

L'hypothèse est donc vérifiée pour tous les quadrilatères dont la hauteur est un multiple entier de celle de  $ABDC$  (le raisonnement ci-dessus pouvant être appliqué pour chaque quadrilatère isométrique à  $ABDC$  que l'on aurait "superposé"). Ne reste plus qu'à montrer ce résultat pour des quadrilatères d'une hauteur inférieure à celle de  $ABDC$ . Cela nous permettra ainsi de vérifier l'hypothèse pour n'importe quel multiple de la hauteur de  $ABDC$ . Soient  $L$  et  $K$  des points situés respectivement sur  $[AC]$  et  $[BD]$ , tels que  $|AL| = |BK|$ .



Ainsi, dans le quadrilatère  $ABKL$ , les angles en  $L$  et  $K$  sont égaux par la propriété 2.1. Cependant, rien ne nous indique pour l'instant qu'ils sont droits.

La propriété A.4 nous indique qu'il existe deux cas possibles :

- Soit les angles  $\widehat{ALK}$  et  $\widehat{LKB}$  sont droits, de même que  $\widehat{KLC}$  et  $\widehat{DKL}$  ;
- Soit la somme des angles  $\widehat{ALK}$  et  $\widehat{KLC}$  (respectivement  $\widehat{LKB}$  et  $\widehat{DKL}$ ) est égale à deux angles droits, mais aucun des deux angles n'est droit.

Supposons être dans le deuxième cas, avec  $\widehat{ALK}$  et  $\widehat{LKB}$  égaux et obtus, tandis que  $\widehat{KLC}$  et  $\widehat{DKL}$  sont égaux et aigus. Comme il est évident que  $|LC| = |KD|$  par définition de  $L$  et  $K$ , la proposition 2.1 implique

$$|CD| < |LK| < |AB|,$$

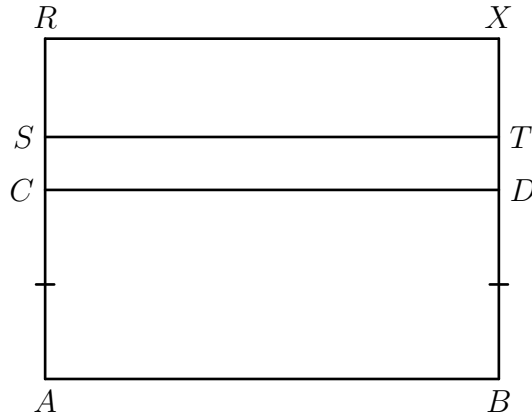
ce qui contredit l'égalité de longueur entre  $[AB]$  et  $[CD]$ . Ainsi, la seule possibilité est que les angles en  $L$  et  $K$  sont tous droits.

Ainsi, si l'hypothèse de l'angle droit est vérifiée dans un cas, elle est toujours vérifiée.  $\square$

**Proposition 2.9.** *Si l'hypothèse de l'angle obtus est vérifiée dans le cas d'un quadrilatère tel que décrit dans les propositions 2.3 et 2.5, alors elle est vérifiée pour n'importe lequel de ces quadrilatères.*

*Démonstration.* Nous allons nous servir pour cette démonstration du même quadrilatère  $ABDC$  que celui employé dans la preuve de la proposition 2.8, à l'exception près que cette fois-ci, les angles en  $C$  et  $D$  sont obtus. La proposition 2.3 implique donc que  $|CD| < |AB|$ .

Nous choisissons des points  $R$  et  $X$  sur les droites  $AC$  et  $BD$  respectivement, de manière à ce que  $|CR| = |DX|$ . Les angles  $\widehat{DCR}$  et  $\widehat{XDC}$  étant égaux, la propriété 2.1 nous permet d'affirmer que les angles en  $R$  et  $X$  sont égaux. Ces deux angles ne sont pas droits, car sinon nous aurions un quadrilatère  $ABXR$  respectant l'hypothèse de l'angle droit, et nous obtiendrions une absurdité par la propriété 2.8.



Supposons que les angles en  $R$  et  $X$  soient aigus. Nous avons alors  $|RX| > |AB|$  par la propriété 2.3, et donc  $|RX| > |CD|$ . Soient des points  $S$  et  $T$  sur les segments  $[CR]$  et  $[DX]$  respectivement, tels que  $|CS| = |DT|$ . Nous avons

$$|CD| < |ST| < |RX|.$$

Cela signifie qu'il nous est possible de trouver des points  $S$  et  $T$  tels que  $|ST| = |AB|$ . Or, cela contredit le fait que l'on a un quadrilatère dans l'hypothèse de l'angle obtus, par les propriétés 2.5 et 2.8. Les angles en  $R$  et  $X$  sont donc bel et bien obtus.

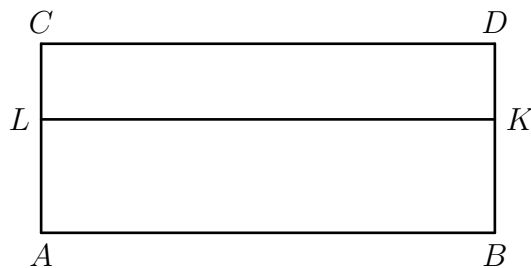
Désormais, considérons des points  $L$  et  $K$  sur les segments  $[AC]$  et  $[BD]$  respectivement, tels que  $|AL| = |BK| < |AC|$ . Les angles  $\widehat{ALK}$  et  $\widehat{LKB}$  ne peuvent pas être droits, car sinon nous aurions un quadrilatère qui vérifie l'hypothèse de l'angle droit, et la propriété 2.8 impliquerait que cette hypothèse serait vérifiée dans tous les cas, ce qui n'est pas vrai étant donné le choix du quadrilatère  $ABDC$ .

Supposons que les angles  $\widehat{ALK}$  et  $\widehat{LKB}$  sont aigus. La propriété 2.3 nous donne alors l'inégalité suivante :

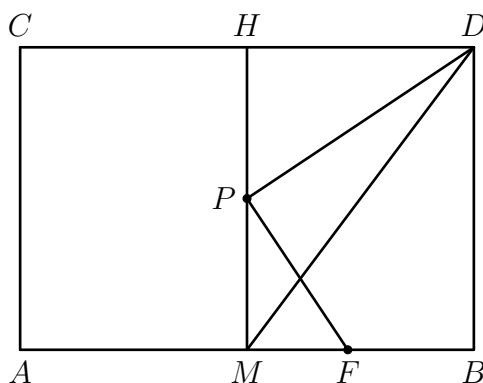
$$|LK| > |AB| > |CD|,$$

ce qui signifie qu'il nous est possible de trouver un segment  $[MN]$  tel que  $M$  et  $N$  sont des points de  $[LC]$  et  $[KD]$  respectivement,  $|LM| = |KN|$  et  $|AB| = |MN|$ . En particulier,

le quadrilatère vérifierait l'hypothèse de l'angle droit, ce qui n'est pas possible pour les raisons évoquées précédemment. La seule possibilité restante est que les angles  $\widehat{ALK}$  et  $\widehat{LKB}$  sont obtus.



Maintenant que nous avons montré que l'hypothèse est vérifiée pour tout quadrilatère dont la base est de longueur égale à  $|AB|$ , il nous faut le montrer pour des quadrilatères de base de longueur quelconque. Soient  $M$  et  $H$  les milieux respectifs de  $[AB]$  et  $[CD]$ . La proposition 2.2 nous permet d'affirmer que  $HM$  est perpendiculaire à ces deux segments.



Soit  $P$  un point sur le segment  $[MH]$  tel que l'angle  $\widehat{PDB}$  est un angle droit. Nous avons alors

$$\widehat{MDB} < \widehat{PDB} < \widehat{HDB}.$$

En effet, le premier est aigu par la proposition A.7, et le troisième est obtus par hypothèse.

Le quadrilatère  $DBMP$  possède trois angles droits (en  $D$ ,  $B$  et  $M$ ), tandis que le dernier angle (en  $P$ ) est obtus, par la proposition A.6 et le fait que  $\widehat{PHD}$  est droit (voir remarque 2.7 page 30 pour plus d'informations par rapport à ce passage). Le corollaire 2.4 nous donne alors l'inégalité

$$|DP| < |BM|.$$

Soit  $F$  un point du segment  $[BM]$  tel que  $|BF| = |DP|$ . La proposition 2.1 implique que les angles  $\widehat{BFP}$  et  $\widehat{FPD}$  sont égaux, étant donné que les angles en  $D$  et  $B$  du quadrilatère  $BDPF$  sont supposés droits donc égaux. De plus, l'angle  $\widehat{FPD}$  est obtus, par la proposition A.6 et le fait que l'angle  $\widehat{FMP}$  du triangle  $FMP$  est droit.

Ainsi, quelle que soit la longueur de la base  $BD$ , le quadrilatère  $BDPF$  vérifie l'hypothèse de l'angle obtus.  $\square$

**Proposition 2.10.** *Si l'hypothèse de l'angle aigu est vérifiée dans le cas d'un quadrilatère tel que décrit dans les propositions 2.3 et 2.5, alors elle est vérifiée pour n'importe lequel de ces quadrilatères.*

*Démonstration.* Soit un quadrilatère  $ABCD$  qui vérifie l'hypothèse de l'angle aigu. Si nous pouvions trouver un autre quadrilatère qui vérifie l'une des deux autres hypothèses, alors au vu des propositions 2.8 et 2.9, n'importe quel autre quadrilatère correspondant aux critères (et en particulier  $ABCD$ ) devrait également vérifier cette autre hypothèse. Or, ces hypothèses sont mutuellement exclusives, et cela contredirait donc notre choix de départ. Ainsi, tous les quadrilatères se doivent de vérifier l'hypothèse de l'angle aigu.  $\square$

**Remarque 2.11.** Une démonstration similaire de ses trois résultats a été fournie par Legendre [21, page 259]. Ce dernier l'avait formulé de la sorte :

*Si la somme des angles d'un triangle est égale (respectivement strictement supérieure, strictement inférieure) à deux angles droits, alors c'est également le cas de la somme des angles de n'importe quel autre triangle.<sup>2</sup>*

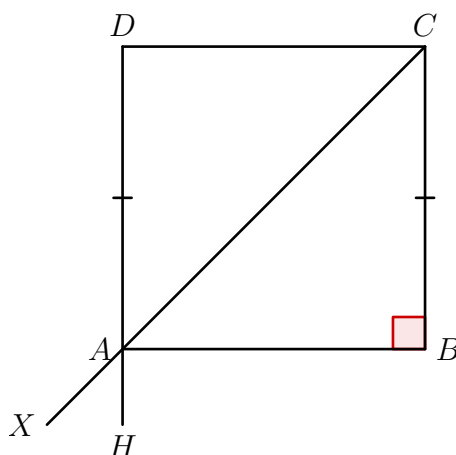
Ce théorème s'obtient facilement à l'aide des propositions 2.13 et 2.22.

Les propositions 2.12, 2.13 et 2.16 sont surtout utiles pour pouvoir démontrer les propositions 2.18 et 2.19.

**Proposition 2.12.** *Soit un triangle  $ABC$  rectangle en  $B$ . Si l'on prolonge le segment  $[AC]$  du côté de  $A$  jusqu'à un certain point  $X$ , et si l'on choisit  $H$  sur la perpendiculaire à  $[AB]$  passant par  $A$ , de manière à ce que  $H$  se trouve dans le même demi-plan défini par  $XC$  que  $B$ , alors*

1. *Nous sommes dans l'hypothèse de l'angle droit si et seulement si  $\widehat{XAH} = \widehat{ACB}$ ,*
2. *Nous sommes dans l'hypothèse de l'angle obtus si et seulement si  $\widehat{XAH} < \widehat{ACB}$ ,*
3. *Nous sommes dans l'hypothèse de l'angle aigu si et seulement si  $\widehat{XAH} > \widehat{ACB}$ .*

*Démonstration.* Soit  $D$  un point de  $AH$  situé dans le demi-plan défini par  $XC$  opposé à  $H$ , et tel que  $|AD| = |BC|$ . Commençons par montrer les conditions suffisantes.




---

2. Reformulation du second théorème de Legendre fourni par [21, p.259].

1. L'hypothèse de l'angle droit et la proposition 2.3 impliquent que  $|CD| = |AB|$ . La proposition A.3 nous permet d'affirmer que  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{ADC}$  sont des triangles isométriques, et qu'en particulier les angles  $\widehat{ACB}$  et  $\widehat{CAD}$  sont égaux. L'égalité entre deux angles opposés par le sommet étant donnée par la proposition A.5, nous obtenons bien l'égalité  $\widehat{XAH} = \widehat{ACB}$ .
2. L'hypothèse de l'angle obtus et la proposition 2.3 impliquent que  $|CD| < |AB|$ . Les triangles  $ABC$  et  $ADC$  ayant deux côtés de longueur égale, et  $|CD|$  étant plus petit que  $|AB|$ , la proposition A.11 nous permet d'affirmer que  $\widehat{CAD} < \widehat{ACB}$ , et donc que  $\widehat{XAH} < \widehat{ACB}$  par la proposition A.5.
3. L'hypothèse de l'angle aigu et la proposition 2.3 impliquent que  $|CD| > |AB|$ . Les triangles  $ABC$  et  $ADC$  ayant deux côtés de longueur égale, et  $|CD|$  étant plus grand que  $|AB|$ , la proposition A.11 nous permet d'affirmer que  $\widehat{CAD} > \widehat{ACB}$ , et donc que  $\widehat{XAH} > \widehat{ACB}$  par la proposition A.5.

Passons maintenant aux conditions nécessaires.

1. Supposons avoir  $\widehat{XAH} = \widehat{ACB}$ . Étant donné que  $\widehat{XAH}$  et  $\widehat{CAD}$  sont opposés par le sommet, la proposition A.5 nous indique que  $\widehat{CAD} = \widehat{ACB}$ . Ces angles sont compris entre des côtés de longueur égale un à un, et la proposition A.1 nous permet d'affirmer que les triangles  $ACD$  et  $CAB$  sont isométriques. En particulier,  $|CD| = |AB|$ , et l'hypothèse de l'angle droit est vérifiée par la proposition 2.5.
2. Supposons avoir  $\widehat{XAH} < \widehat{ACB}$ . Étant donné que  $\widehat{XAH}$  et  $\widehat{CAD}$  sont opposés par le sommet, la proposition A.5 nous indique que  $\widehat{CAD} < \widehat{ACB}$ . La proposition A.10 nous permet d'affirmer que  $|CD| < |AB|$ , ce qui nous amène à l'hypothèse de l'angle obtus par la proposition 2.5.
3. Supposons avoir  $\widehat{XAH} > \widehat{ACB}$ . Étant donné que  $\widehat{XAH}$  et  $\widehat{CAD}$  sont opposés par le sommet, la proposition A.5 nous indique que  $\widehat{CAD} > \widehat{ACB}$ . La proposition A.10 nous permet d'affirmer que  $|CD| > |AB|$ , ce qui nous amène à l'hypothèse de l'angle aigu par la proposition 2.5.

□

**Proposition 2.13.** *Soit un triangle  $ABC$  rectangle en  $B$ . La somme des deux autres angles du triangle dépend de l'hypothèse considérée :*

1. *Si nous sommes dans l'hypothèse de l'angle droit, la somme vaut un angle droit.*
2. *Si nous sommes dans l'hypothèse de l'angle obtus, la somme est supérieure à un angle droit.*
3. *Si nous sommes dans l'hypothèse de l'angle aigu, la somme est inférieure à un angle droit.*

*Démonstration.* Nous allons à nouveau nous servir de la figure utilisée dans la démonstration de la proposition 2.12.

1. Dans l'hypothèse de l'angle droit, nous savons que les angles  $\widehat{XAH}$  et  $\widehat{ACB}$  sont égaux. La proposition A.4 nous permet d'affirmer que la somme des angles  $\widehat{ACB}$  et  $\widehat{HAC}$  est égale à deux angles droits. De plus, l'angle  $\widehat{HAC}$  est la somme de  $\widehat{HAB}$ ,

qui est droit, et de  $\widehat{BAC}$ . Nous pouvons conclure en disant que la somme de  $\widehat{ACB}$  et  $\widehat{BAC}$  vaut un angle droit.

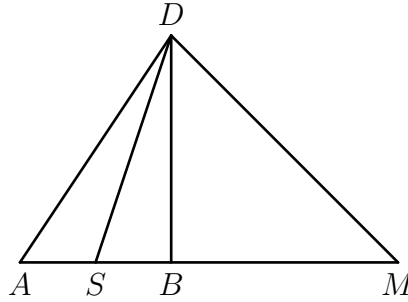
2. Étant donné que dans l'hypothèse de l'angle obtus, nous avons  $\widehat{XAH} < \widehat{ACB}$ , le fait que la somme  $\widehat{XAH}$  et  $\widehat{HAC}$  vaut deux angles droits nous permet d'affirmer que la somme de  $\widehat{ACB}$  et  $\widehat{HAC}$  est supérieure à deux angles droits. Il suffit de retirer la valeur de  $\widehat{HAB}$  pour obtenir l'inégalité souhaitée.
3. Le cas de l'hypothèse de l'angle aigu se résout de manière similaire au cas de l'hypothèse de l'angle obtus.

□

**Remarque 2.14.** Il nous est possible de généraliser cette propriété à l'ensemble des triangles, en considérant la décomposition de chacun d'entre eux en deux triangles rectangles. Ainsi, selon l'hypothèse employée, la somme des angles intérieurs d'un triangle (tous conviennent étant donné 2.8, 2.9 et 2.10) est égale, strictement supérieure ou strictement inférieure à deux angles droits. Nous avons ainsi la réciproque de la proposition 2.22.

**Remarque 2.15.** Dans l'énoncé original de 2.13 et dans la démonstration 2.21, Saccheri part du principe que dans un triangle rectangle, les deux angles non droits sont forcément aigus, comme énoncé dans la proposition A.7. Ainsi, il suppose que dans l'hypothèse de l'angle obtus, la somme de deux angles d'un triangle est strictement inférieure à deux angles droits, tandis que la somme des trois angles leur est strictement supérieure. La borne supérieure de cette dernière somme devrait donc être de  $\frac{3\pi}{2}$ , alors qu'elle est en réalité de  $3\pi$  [21, page 261].

**Proposition 2.16.** Soient deux segments  $[AM]$  et  $[BD]$  perpendiculaires l'un à l'autre, avec  $B$  un point de  $[AM]$ . La longueur de  $[DM]$  est plus grande que celle de  $[DA]$  si et seulement si la longueur de  $[BM]$  est plus grande que celle de  $[BA]$ .



*Démonstration.* Commençons par supposer que  $|DM| > |DA|$ . Le fait est que si  $|BM| = |BA|$ , alors la propriété A.1 implique que  $|DM| = |DA|$ . Donc  $|BM|$  et  $|BA|$  ne sont pas égaux.

Supposons que  $|BM| < |BA|$ . Soit  $S$  un point du segment  $[AB]$  tel que  $|BS| = |BM|$ . Les triangles  $SBD$  et  $MBD$  sont donc isométriques par la proposition A.1, et les angles  $\widehat{BSD}$  et  $\widehat{DMB}$  sont égaux. Or, la propriété A.6 implique que  $\widehat{BSD} > \widehat{BAD}$  (car  $\widehat{BSD}$  est un angle extérieur au triangle  $DAS$ ), et nous obtenons donc  $\widehat{DMB} > \widehat{BAD}$ . Nous arrivons donc à une contradiction : en effet, par la proposition A.8, le côté opposé à  $\widehat{BAD}$

dans le triangle  $DMA$  (à savoir  $[DM]$ ) est censé être de plus grande longueur que celui associé à  $\widehat{DMB}$  (donc  $[DA]$ ), ce qui est faux par hypothèse.

Ainsi, la seule possibilité est que  $|BA| < |BM|$ .

Il nous faut désormais montrer la condition suffisante. Supposons que  $|BA| > |BM|$ , et considérons le même point  $S$ . Nous avons alors  $|BS| = |BM|$  et l'isométrie des triangles  $BSD$  et  $BMD$  donnée par la proposition A.1 nous assure que  $|DS| = |DM|$ .

La proposition A.6 nous permet d'affirmer que  $\widehat{DSA}$  est plus grand que  $\widehat{DBA}$ , et est donc obtus, tandis que  $\widehat{SAD}$  doit être aigu par la proposition A.7 appliquée au triangle  $ABD$ . La proposition A.9<sup>3</sup> nous donne alors  $|DA| > |DS|$ , et donc  $|DA| > |DM|$ .  $\square$

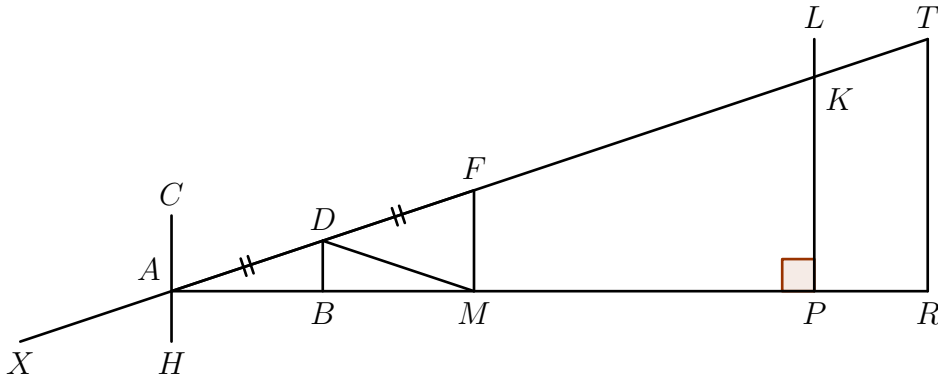
Les trois propositions suivantes sont celles qui permettent à Saccheri de déduire le fait que le cinquième postulat est vrai dans l'hypothèse de l'angle droit et celle de l'angle obtus.

**Proposition 2.17.** *Soient une droite  $AP$ ,  $PL$  une perpendiculaire à  $AP$  et  $AD$  une droite qui forme un angle aigu avec  $AP$ . Dans l'hypothèse de l'angle droit, les droites  $AD$  et  $PL$  s'intersectent du côté de  $AP$  où ils forment avec cette droite des angles dont la somme est inférieure à deux angles droits.*

*Démonstration.* Quitte à remplacer  $D$  ou  $L$  par un autre point des droites qu'ils définissent respectivement, nous pouvons les supposer sur le même demi-plan défini par  $AP$ .

Nous prolongeons en premier lieu le segment  $[AD]$  du côté de  $A$ , la nouvelle extrémité de ce segment est nommée  $X$ . Nous prenons également en compte la perpendiculaire  $HC$  à  $AP$  passant par  $A$ , avec  $H$  intérieur à l'angle  $\widehat{XAP}$ .

Nous considérons les segments  $[AD]$  et  $[DF]$  sur  $AD$ , où  $F$  est tel que  $|AD| = |DF|$ , et les droites  $BD$  et  $FM$  perpendiculaires à  $AP$ , où  $B$  et  $M$  sont des points de la demi-droite  $[AP)$ .



Nous souhaitons montrer l'égalité de longueur entre  $|DF|$  (ou  $|DA|$ ) et  $|DM|$ .

Supposons avoir  $|DM| > |DF|$ . Nous trouvons alors  $\widehat{FMD} < \widehat{DFM} = \widehat{XAH} = \widehat{DAC}$  par les propositions A.8, 2.12 et A.5. Les angles  $\widehat{MAC}$  et  $\widehat{FMA}$  étant droits et donc égaux par le quatrième postulat d'Euclide<sup>4</sup>, nous obtenons l'inégalité  $\widehat{DMA} > \widehat{MAD}$ , ce

3. Saccheri utilise effectivement ce théorème, mais c'est la proposition A.8 qu'il cite à l'origine.

4. Il s'agit de l'une des rares applications du quatrième postulat par Saccheri.



qui nous amène à une contradiction. En effet, par la propriété A.8, ce que nous venons de conclure entre en conflit avec notre hypothèse, à savoir  $|DM| > |DF| = |DA|$ .

Supposons à présent avoir  $|DM| > |DF|$ . Nous trouvons alors  $\widehat{FMD} > \widehat{DFM} = \widehat{XAH} = \widehat{DAC}$  pour des raisons similaires à celles vues dans le cas précédent. Les angles  $\widehat{MAC}$  et  $\widehat{FMA}$  étant droits, nous obtenons l'inégalité  $\widehat{DMA} < \widehat{MAD}$ , et cette conclusion vient elle aussi contredire notre hypothèse.

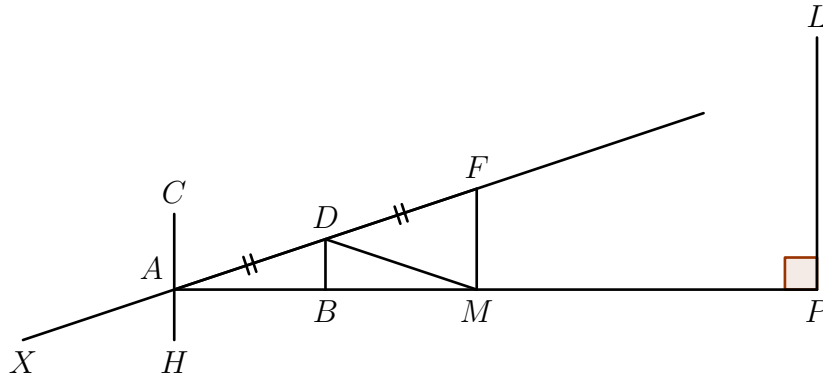
En résumé, nous avons bel et bien  $|DA| = |DF| = |DM|$ . Cela signifie qu'au vu de la proposition A.2, les angles  $\widehat{MAD}$  et  $\widehat{DMA}$  du triangle  $DAM$  sont égaux, et la propriété A.12 nous permet d'affirmer que  $|AB| = |BM|$ . En particulier, à partir du fait que  $|AF| = 2|AD|$ , nous pouvons déduire que  $|AM| = 2|AB|$ .

Cette "duplication" du segment  $[AD]$  peut être répétée autant de fois que nous le souhaitons, jusqu'à obtenir un segment  $[AT]$  telle que sa projection perpendiculaire  $[AR]$  sur  $AP$ , dont la longueur est un multiple de  $|AB|$ , est telle que  $|AR| > |AP|$ <sup>5</sup>.

Nous avons obligatoirement une intersection entre  $[AT]$  et  $PL$ . Si ce n'était pas le cas, alors la perpendiculaire  $TR$  rencontrerait la droite  $PL$  en un point  $K$ <sup>6</sup>. Nous nous retrouverions ainsi avec un triangle  $KPR$  possédant deux angles droits, un en  $P$  et un en  $K$ , ce qui contredit la proposition A.7.

Ainsi, nous pouvons conclure en affirmant qu'il existe bien une intersection entre  $AD$  et  $PL$ , et ce du côté de  $AP$  où ces deux droites forment des angles dont la somme est inférieure à deux angles droits.  $\square$

**Proposition 2.18.** *Soient une droite  $AP$ ,  $PL$  une perpendiculaire à  $AP$  et  $AD$  une droite qui forme un angle aigu avec  $AP$ . Dans l'hypothèse de l'angle obtus, les droites  $AD$  et  $PL$  s'intersectent du côté de  $AP$  où ils forment avec cette droite des angles dont la somme est inférieure à deux angles droits.*



*Démonstration.* Nous définissons les points  $X, H, C, F, B$  et  $M$  de la même manière que ce que nous avons fait dans la proposition 2.17. Ainsi, nous avons  $|AD| = |DF|$ .

5. Il nous est possible de trouver un tel  $[AR]$  par l'axiome d'Archimède.

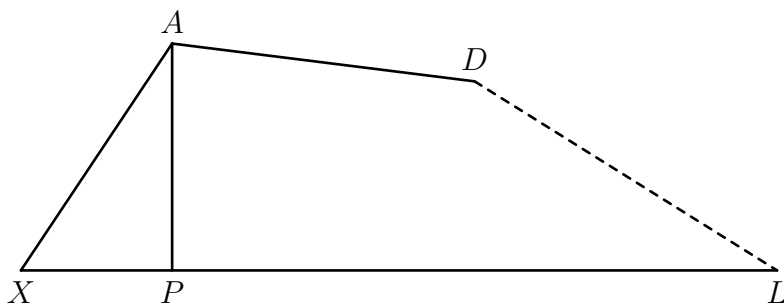
6. Il s'agit d'une conséquence de l'axiome de Pasch [21, page 264], qui est utilisé implicitement depuis Euclide : *Si une droite rencontre le côté d'un triangle, alors il rencontre un autre de ses côtés.* Dans le cas présent, nous appliquons l'axiome à la droite  $PL$  et au triangle  $ART$ . Il est à noter que Saccheri se sert lui aussi de cet axiome implicitement.

Nous voulons montrer que  $|DM| > |DF| = |AD|$ , ce qui nous permettra d'affirmer par la 2.16 que  $|BM| > |AB|$ .

Nous n'avons pas  $|DM| = |DF|$ . Sinon, cela signifierait que  $\widehat{FMD} = \widehat{DFM} > \widehat{XAH} = \widehat{CAF}$  par les propositions A.2, 2.12 et A.5 (voir remarque 2.7 page 30 pour plus d'informations). Comme les angles  $\widehat{BAC}$  et  $\widehat{FMB}$  sont supposés droits et donc égaux, nous obtenons  $\widehat{MAD} > \widehat{DMA}$ , ce qui amène à une contradiction par la propriété A.9 appliquée au triangle  $ADM$  et le fait que nous avons supposé  $|DM|$  égal à  $|DF|$ , et donc à  $|DA|$ . Nous n'avons pas non plus  $|DM| < |DF|$ . Sinon, nous aurions  $\widehat{FMD} > \widehat{DFM}$  par la propriété A.8, et  $\widehat{FMD} > \widehat{XAH} = \widehat{DAC}$  par les propositions 2.12 et A.5. Tout comme dans le cas précédent, nous trouvons  $\widehat{MAD} > \widehat{DMA}$ , qui s'avère être contradictoire avec notre hypothèse.

Ainsi, la seule possibilité restante est que  $|DM| > |DF| = |DA|$ , ce qui, comme énoncé précédemment, nous donne  $|BM| > |BA|$ . Nous pouvons dès lors considérer, comme dans la proposition 2.17, un segment  $[AR]$  sur  $AP$  qui sera une projection d'un segment  $[AT]$  sur  $AD$  qui rencontrera  $PL$ .  $\square$

**Proposition 2.19.** *Soit la droite  $XA$  qui rencontre les droites  $AD$  et  $XL$  et forme avec ces deux droites des angles intérieurs  $\widehat{XAD}$  et  $\widehat{LXA}$  dont la somme est strictement inférieure à deux angles droits. Dans l'hypothèse de l'angle droit et dans l'hypothèse de l'angle obtus,  $AD$  et  $XL$  se rencontrent en un point du côté de  $AX$  où  $\widehat{XAD}$  et  $\widehat{LXA}$  vérifient la condition déjà énoncée.*



*Démonstration.* Étant donné ce que nous supposons, il faut nécessairement que l'un des deux angles évoqués soit aigu. Nous supposons que  $\widehat{LXA}$  l'est.

Considérons la perpendiculaire  $AP$  à  $XL$  passant par  $A$  telle que  $[AP]$  soit intérieur à l'angle  $\widehat{LXA}$ <sup>7</sup>. Soit le triangle  $APX$  rectangle en  $P$  : nous savons par la proposition 2.13 que la somme des angles  $\widehat{PXA}$  et  $\widehat{XAP}$  n'est jamais strictement inférieure à un angle droit. Au vu de ce que nous avons supposé sur la somme de  $\widehat{XAD}$  et  $\widehat{LXA}$ , nous en déduisons que l'angle  $\widehat{PAD}$  (qui correspond au reste de cette somme lorsque l'on retire les angles  $\widehat{PXA}$  et  $\widehat{XAP}$ ) est aigu.

Ainsi, nous nous retrouvons avec :

- Une droite  $AP$  ;

---

7. Tout comme dans la proposition (à ajouter), il est possible qu'il existe une autre perpendiculaire, extérieure à l'angle mentionné.

- Une perpendiculaire  $PL$  à  $AP$  ;
- Une droite  $AD$  formant un angle aigu avec  $AP$ .

Il nous est donc permis de nous servir des propositions 2.17 et 2.18. La conclusion s'ensuit.  $\square$

**Remarque 2.20.** La démonstration du cinquième postulat semble légitime au vu de la formulation de ce dernier par Euclide : cependant, si l'on considère à la place le postulat des parallèles de Playfair, il s'avère que la conclusion de Saccheri est fausse.

**Proposition 2.21.** *L'hypothèse de l'angle obtus est absolument fausse car elle se détruit elle-même.*

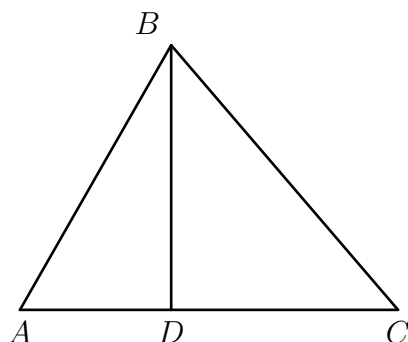
Le raisonnement de Saccheri n'étant pas explicité, nous allons baser notre démonstration sur les notes disponibles dans [21, page 266].

*Démonstration.* Étant donné la proposition 2.19, l'hypothèse de l'angle obtus nous permet de démontrer le cinquième postulat. Or, ce postulat implique la géométrie euclidienne, dans laquelle l'hypothèse de l'angle obtus est fausse. Ainsi, l'hypothèse se détruit elle-même.  $\square$

Il est cependant important de rappeler que Saccheri se sert de la proposition A.7 pour démontrer la contradiction de l'hypothèse de l'angle obtus, alors que cette proposition n'est pas vraie dans ce contexte.

**Proposition 2.22.** *Soit un triangle  $ABC$ .*

1. *Si la somme de ses angles vaut deux angles droits, alors nous sommes dans l'hypothèse de l'angle droit.*
2. *Si elle est strictement supérieure à deux angles droits, alors nous sommes dans l'hypothèse de l'angle obtus.*
3. *Si elle est strictement inférieure à deux angles droits, alors nous sommes dans l'hypothèse de l'angle aigu.*



*Démonstration.* La proposition A.7 nous permet de trouver deux angles aigus dans n'importe quel triangle. Supposons dans notre cas qu'il s'agit des angles en  $A$  et  $C$ . Considérons également la perpendiculaire  $BD$  à la droite  $AC$ , avec  $D$  qui est un point de cette droite.

1. Supposons avoir la somme des angles égale à deux angles droits. Alors, en ajoutant les angles  $\widehat{BDA}$  et  $\widehat{CDB}$  qui sont tous les deux droits par définition de  $D$ , nous obtenons une somme égal à quatre angles droits.

Si l'un de ses triangles est tel que la somme de ses angles est strictement inférieure à deux angles droits, alors celle des angles du deuxième triangle doit être strictement supérieure à deux angles droits, et inversement. Ainsi,

- l'hypothèse de l'angle obtus n'est pas possible car les deux triangles ne peuvent pas simultanément avoir la somme de leurs angles strictement supérieure à deux angles droits, ce qui contredirait la proposition 2.13 ;
- il en va de même pour l'hypothèse de l'angle aigu, étant donné que les deux triangles ne peuvent pas simultanément avoir la somme de leurs angles strictement inférieure à deux angles droits.

Ainsi, la seule hypothèse possible est celle de l'angle droit.

2. Supposons avoir la somme des angles strictement supérieure à deux droits, et donc la somme des angles de  $ABD$  et  $BCD$  strictement supérieure à quatre angles droits. Si l'un des deux triangles est tel que la somme de ses angles est inférieure ou égale à deux angles droits, alors le deuxième est tel que la somme de ses angles est strictement supérieure à deux angles droits.

- L'hypothèse de l'angle droit n'est pas possible, au vu de la proposition 2.13 et du deuxième triangle ;
- L'hypothèse de l'angle aigu n'est pas non plus envisageable pour les mêmes raisons.

La seule hypothèse possible est donc celle de l'angle obtus.

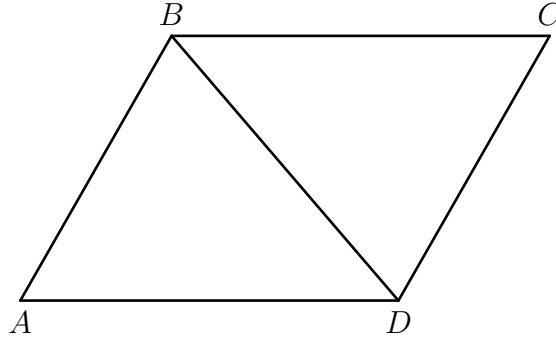
3. Supposons avoir la somme des angles strictement inférieure à deux droits, et donc la somme des angles de  $ABD$  et  $BCD$  strictement inférieure à quatre angles droits. Si l'un des deux triangles est tel que la somme de ses angles est supérieure ou égale à deux angles droits, alors le deuxième est tel que la somme de ses angles est strictement inférieure à deux angles droits.

Ainsi, en employant une logique similaire aux deux autres cas considérés, nous concluons que la seule hypothèse possible est celle de l'angle aigu.

□

**Proposition 2.23.** *Soit un quadrilatère  $ABCD$ .*

1. *Si la somme de ses angles vaut quatre angles droits, alors nous sommes dans l'hypothèse de l'angle droit.*
2. *Si elle est strictement supérieure à quatre angles droits, alors nous sommes dans l'hypothèse de l'angle obtus.*
3. *Si elle est strictement inférieure à quatre angles droits, alors nous sommes dans l'hypothèse de l'angle aigu.*



*Démonstration.* Grâce à la proposition 2.22, nous savons que la somme des angles du triangle  $ABD$  est égale (respectivement strictement supérieure, strictement inférieure) à deux angles droits si et seulement si celle des angles de  $BCD$  est égale (respectivement strictement supérieure, strictement inférieure) à deux angles droits.

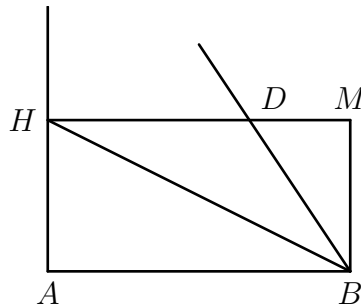
Donc si la somme des angles du quadrilatère  $ABCD$  est égale (respectivement strictement supérieure, strictement inférieure) à quatre angles droits, alors celle des angles de chacun des triangles est égale (respectivement strictement supérieure, strictement inférieure) à deux angles droits. La conclusion s'ensuit.  $\square$

Une fois l'hypothèse de l'angle obtus mise de côté, Saccheri tente d'obtenir la même conclusion pour l'hypothèse de l'angle aigu. Cependant, ces avancées ne lui permettent à aucun moment d'invalider ce cas. Nous pouvons d'ailleurs remarquer une différence fondamentale entre les hypothèses avec la proposition suivante.

**Proposition 2.24.** *Soit une droite  $AH$  perpendiculaire au segment  $[AB]$ , segment dont la longueur est arbitrairement petite. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, il existe des droites  $BD$  formant un angle aigu avec  $[AB]$  qui n'intersectent pas  $AH$ .*

*Démonstration.* Soit une droite  $BM$  perpendiculaire à  $[AB]$ . Quitte à choisir un autre point  $M'$  sur  $BM$ , nous supposons que  $M$  est le point de  $BM$  appartenant à la perpendiculaire à  $AK$  passant par  $H$ . Le fait que nous soyons dans l'hypothèse de l'angle aigu nous permet d'affirmer que :

- L'angle  $\widehat{BHM}$  est aigu ;
- L'angle  $\widehat{BMH}$  est aigu par la proposition 2.23.



Soit  $BD$  la perpendiculaire à  $HM$  en le point  $D$  et passant par  $B$ . L'angle en  $B$  du triangle  $BDH$  doit être aigu par la proposition A.7, ce qui signifie que  $D$  se trouve sur le segment  $[HM]$  et que par conséquent, l'angle  $\widehat{ABD}$  est aigu.

Nous concluons en affirmant que les droites  $AH$  et  $BD$  ne peuvent pas se rencontrer du côté de  $AB$  qui contient  $H$  et  $D$ . En effet, si elles se rencontraient en un point  $C$ , nous pourrions former un triangle  $CHD$  qui posséderait deux angles dont la somme serait égale à 2 angles droits, à savoir les angles en  $H$  et  $D$ . Or, cela va à l'encontre de la proposition A.7.

Ainsi, nous avons trouvé deux droites, l'une perpendiculaire à  $AB$ , l'autre formant avec ce même  $AB$  un angle aigu, qui ne se rencontrent pas.  $\square$

La suite du travail se compose de plusieurs autres propriétés, toutes étant présentées dans le but d'obtenir une quelconque contradiction dans l'hypothèse de l'angle aigu. Néanmoins, aucune des tentatives de Saccheri ne finit par lui donner raison. Dans ce qui semble être un aveu d'échec, le mathématicien finit par déclarer la proposition suivante [21, proposition 33, page 155] :

**Proposition 2.25.** *L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse parce qu'elle répugne à la nature de la droite.*

# Chapitre 3

## Éléments de géométrie riemannienne

Ce chapitre a pour but d'introduire les notions de géométrie riemannienne qui seront nécessaires pour obtenir les notions de droites, de distances et d'angles dans des contextes généraux. Après avoir rappelé deux propriétés fondamentales des (segments de) droites dans le plan euclidien, et fait quelques rappels sur les surfaces plongées, on étudie les courbures normales qui permettent de définir la courbure de Gauss, et la courbure géodésique, qui permet de définir les géodésiques sur une telle surface. On introduit les coefficients de Christoffel et on montre d'une part que la courbure de Gauss et les équations des géodésiques s'expriment en termes de ces coefficients et d'autre part que ceux-ci s'expriment en terme des coefficients de la métrique et de leurs dérivées. Cela nous permet de définir les géodésiques dans le cadre des variétés riemanniennes à partir des formules et équations obtenues dans le cas plongé.

Dans ce chapitre, nous tiendrons pour acquises les notions de base des cours de géométrie (voir [12]). Nous rappellerons les formules adéquates sans démonstration.

### 3.1 Introduction

Quand on considère un espace affine euclidien  $\mathcal{A}$ , les droites, paramétrées de manière usuelle (par exemple) par

$$\gamma(t) = (1 - t)A + tB \quad (A, B \in \mathcal{A}, t \in \mathbb{R}),$$

ont deux caractéristiques principales reprises dans les propositions suivantes.

**Proposition 3.1.1.** *La courbure en tout point d'une droite est nulle. Réciproquement, si  $(I, \gamma)$  est un arc régulier de courbe dont la courbure est nulle en tout point, alors  $\gamma(I)$  est inclus dans une droite.*

*Démonstration.* La courbure est donnée par

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}.$$

Mais  $\gamma'(t) = \overrightarrow{D_t \gamma(t)} = \overrightarrow{AB}$ , donc  $\gamma''(t) = 0$  et  $\kappa(t) = 0$ . Réciproquement, considérons un arc de courbe  $\gamma$  dont la courbure est nulle. On peut supposer que le paramétrage est

naturel et donc que

$$\kappa(s) = |\overrightarrow{D_s t(s)}| = |\overrightarrow{D_s^2 \gamma(s)}|.$$

Donc  $\overrightarrow{D_s^2 \gamma(s)} = 0$  pour tout  $s \in I$ . En primitivant, on obtient  $\gamma(s) = A + su$  pour tout  $s \in I$ , et où  $A$  et  $u$  sont fixes. On constate alors que  $\gamma(I)$  est inclus dans la droite contenant  $A$  et de vecteur directeur (normé)  $u$ .  $\square$

Passons à la deuxième caractérisation des droites (ou segments de droite), à savoir la minimisation de la distance. Nous allons considérer des arcs de courbe de classe  $C^1$  définis sur un intervalle  $I$  contenant  $[0, 1]$  et tels que  $\gamma(0) = A$  et  $\gamma(1) = B$ . Dans ce cas, la longueur est donnée par une formule intégrale.

**Proposition 3.1.2.** *Avec les conventions ci-dessus, pour tout arc  $\gamma$ , on a*

$$\int_0^1 |\overrightarrow{D_t \gamma(t)}| dt \geq |\overrightarrow{AB}|.$$

Le segment de droite  $\{A + t\overrightarrow{AB} : t \in [0, 1]\}$  minimise donc la longueur des courbes (de classe  $C^1$ ) allant de  $A$  à  $B$ . De plus, le minimum est atteint de manière unique.

*Démonstration.* On a

$$\int_0^1 |\overrightarrow{D_t \gamma(t)}| dt = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \int_0^1 |\overrightarrow{D_t \gamma(t)}| \cdot |\overrightarrow{AB}| dt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$\int_0^1 |\overrightarrow{D_t \gamma(t)}| dt \geq \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \int_0^1 \langle \overrightarrow{D_t \gamma(t)}, \overrightarrow{AB} \rangle dt.$$

L'intégrand est continu sur un intervalle contenant  $[0, 1]$  et se primitive directement par  $\langle \gamma(t), \overrightarrow{AB} \rangle$ . Nous avons donc

$$\int_0^1 |\overrightarrow{D_t \gamma(t)}| dt \geq \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \langle \gamma(1) - \gamma(0), \overrightarrow{AB} \rangle = |\overrightarrow{AB}|.$$

Bien sûr, le segment réalise cette distance, puisque pour  $\gamma(t) = A + t\overrightarrow{AB}$ , on a  $|\overrightarrow{D_t \gamma(t)}| = |\overrightarrow{AB}|$ . Enfin, si pour une courbe  $\gamma$ , il existe  $t_0 \in ]0, 1[$  tel que  $\gamma(t_0) \notin [A, B]$ , alors on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\overrightarrow{D_t \gamma(t)}| dt &= \int_0^{t_0} |\overrightarrow{D_t \gamma(t)}| dt + \int_{t_0}^1 |\overrightarrow{D_t \gamma(t)}| dt \\ &\geq |A\gamma(t_0)| + |\overrightarrow{\gamma(t_0)B}| \\ &> |\overrightarrow{AB}|, \end{aligned}$$

vu l'inégalité de Minkowski. Ceci montre que si  $\gamma$  réalise le minimum, on doit avoir  $\gamma(I) \subset [A, B]$ , puis par convexité,  $\gamma(I) = [A, B]$ .  $\square$



Lorsque l'on veut généraliser la notion de droite à d'autres espaces (courbes), on peut être tenté de généraliser l'une ou l'autre de ces propriétés.

Dans ce qui suit, nous allons d'abord étudier les géodésiques d'une surface plongée de dimension 3, puis nous montrerons les propriétés qui généralisent la définition à des variétés riemanniennes quelconques. Cette approche suit le développement naturel des questions qui mèneront aux définitions générales. Elle a le désavantage d'être basée sur une approche en coordonnées.

Nous suivrons le développement de la référence [14]. Les notations sont celles qui sont habituellement utilisées pour étudier les variétés plongées dans  $\mathbb{R}^n$  ou dans un espace affine.

## 3.2 Éléments de théorie des surfaces

On se place dans un espace affine  $\mathcal{A}$  de dimension 3 que l'on considérera euclidien et orienté. Nous pourrions à l'aide d'un repère l'identifier à  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , mais nous ne le ferons pas systématiquement.

L'introduction d'un repère permet de définir facilement les fonctions de classe  $C^k$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathcal{A}$  ou dans l'espace vectoriel sur lequel il est construit : ce sont celles dont l'expression en coordonnées/composantes sont de classe  $C^k$ . Les dérivées (partielles) se calculent sur chaque composante. La topologie sur  $\mathcal{A}$  est obtenue également en l'identifiant à  $\mathbb{R}^3$  à l'aide d'un repère. Elle est indépendante du choix de ce repère. Enfin, la topologie dont il sera question sur les sous-ensembles  $S$  de  $\mathcal{A}$  sera la topologie induite :  $\omega$  est un ouvert de  $S$  s'il existe un ouvert de  $\Omega$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $\omega = S \cap \Omega$ .

On peut aussi rappeler la définition d'un paramétrage et d'une surface régulière.

**Définition 3.2.1.** Un sous-ensemble  $S$  de  $\mathcal{A}$  est une surface régulière de classe  $C^k$  si pour tout  $p \in S$ , il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , un ouvert de  $\Omega$  de  $\mathcal{A}$  contenant  $p$  et une application  $\varphi : U \rightarrow \mathcal{A}$  tel que

1.  $\varphi$  est de classe  $C^k$  ;
2. Le rang de  $\varphi$  est 2 ;
3.  $\varphi$  est une bijection de  $U$  sur  $\Omega \cap S$  dont l'inverse  $\varphi^{-1} : \Omega \cap S \rightarrow U$  est continu.

Le couple  $(U, \varphi)$ , ou simplement l'application  $\varphi$ , est appelé paramétrage local au voisinage de  $p$ .

La condition 2) de la définition s'exprime en termes de dérivées partielles de  $\varphi$ . Cette condition s'exprime en effet par le fait que  $\partial_u \varphi(u, v)$  et  $\partial_v \varphi(u, v)$  sont linéairement indépendants en tout élément  $(u, v)$  de  $U$ .

Ces vecteurs sont en fait des vecteurs tangents à la surface en  $\varphi(u, v)$ . En effet, les courbes  $\gamma_u$  et  $\gamma_v$  décrites par

$$\begin{aligned}\gamma_u : ]-\varepsilon, \varepsilon[ &\rightarrow \mathcal{A} : t \mapsto \varphi(u, v + t) \\ \gamma_v : ]-\varepsilon', \varepsilon'[ &\rightarrow \mathcal{A} : t \mapsto \varphi(u + t, v)\end{aligned}$$

sont définies pour  $t$  suffisamment proche de 0 ( $|t| < \varepsilon$ ), on a

$$\gamma_u(0) = \gamma_v(0) = \varphi(u, v) \text{ et } D_t \gamma_u(t)|_{t=0} = \partial_v \varphi(u, v), \quad D_t \gamma_v(t)|_{t=0} = \partial_u \varphi(u, v).$$

On a donc bien des vecteurs tangents à des courbes tracées sur la surface. Ce sont des vecteurs tangents à la surface, par définition des espaces tangents.

**Exemple 3.2.2.** On considère la sphère  $S$  de rayon 1 centrée en un point  $C$  que l'on prendra comme origine d'un repère orthonormé. La sphère a donc dans ce repère l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Un paramétrage au voisinage de tout point de la sphère n'appartenant pas au méridien  $S \cap \pi_+$  où  $\pi_+ = \{P \in \mathcal{A} : y = 0, x \geq 0\}$  est donné par

$$\varphi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(v) \\ \sin(u) \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in ]0; 2\pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[.$$

On a alors

$$\partial_u \varphi = \begin{pmatrix} -\sin(u) \cos(v) \\ \cos(u) \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \partial_v \varphi = \begin{pmatrix} -\cos(u) \sin(v) \\ -\sin(u) \sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix}.$$

Dans le cas des surfaces plongées  $S$ , il est facile de définir le caractère  $C^k$  d'une courbe tracée sur la surface : c'est en fait une courbe de classe  $C^k$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathcal{A}$ , telle que  $\gamma(I) \subset S$ . Pour  $t_0 \in I$ , et  $(U, \varphi)$  un paramétrage au voisinage de  $\gamma(t_0)$ , par continuité de  $\gamma$ , il existe un ouvert  $I'$  contenant  $t_0$ , tel que  $\gamma(I') \subset \varphi(U)$ . L'expression locale de  $\gamma$  dans les coordonnées est

$$\varphi^{-1} \circ \gamma : I' \rightarrow U : t \mapsto \varphi^{-1} \circ \gamma(t) = (u(t), v(t)).$$

On a alors  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ .

On peut montrer que les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^k$  sur  $I'$  [14, page 157]. On a alors

$$\overrightarrow{D_t \gamma(t)} = \partial_u \varphi u'(t) + \partial_v \varphi v'(t).$$

Ce vecteur s'annule si et seulement si  $\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Dès lors,  $\gamma$  est régulière si et seulement si la courbe  $\varphi^{-1} \circ \gamma$  est régulière.

D'autre part, on voit bien que  $\partial_u \varphi$  et  $\partial_v \varphi$  forment une base de l'espace tangent. Il est à noter que ces vecteurs seront généralisés dans le cadre des variétés abstraites, voir B.1.13.

On poursuit directement avec la normale et la métrique riemannienne.

**Définition 3.2.3.** Si  $(U, \varphi)$  est un paramétrage de classe  $C^k$ , alors la normale à la surface en  $\varphi(u, v)$  associée à ce paramétrage est

$$\vec{N}(u, v) = \frac{\partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi}{|\partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi|}.$$

La normale est orthogonale au plan tangent. Elle dépend du choix du paramétrage (par son signe). Il est toujours possible de définir une normale en tout point de  $\varphi(U)$ , qui varie continûment. Ce n'est cependant pas toujours possible sur toute la surface, comme le montre l'exemple du ruban de Möbius.

L'espace dans lequel la surface est plongée est supposé euclidien. Le plan tangent à  $S$  en chaque point est un sous-espace de l'espace vectoriel  $\vec{\mathcal{A}}$  sous-jacent à  $\mathcal{A}$ . Il hérite donc du produit scalaire de celui-ci et devient lui-même un espace euclidien.

**Définition 3.2.4.** La métrique (riemannienne) en tout point  $p$  d'une surface  $S$  est l'application bilinéaire  $g_p$  définie par  $g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle$  pour tous vecteurs tangents  $X$  et  $Y$  au point  $P$ .

La métrique peut être exprimée dans la base associée à un paramétrage. On utilise des notations tensorielles définies à l'annexe B.

**Proposition 3.2.5.** On a, dans un paramétrage  $(U, \varphi)$ ,

$$g_{\varphi(u,v)} = Edu^2 + F(du \otimes dv + dv \otimes du) + Fdv^2$$

où les fonctions  $E, F, G$  sont définies par

$$E = \langle \partial_u \varphi, \partial_u \varphi \rangle, F = \langle \partial_u \varphi, \partial_v \varphi \rangle \text{ et } G = \langle \partial_v \varphi, \partial_v \varphi \rangle.$$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser la décomposition générale donnée en (???) et la définition de la métrique.  $\square$

**Remarque 3.2.6.** 1. La métrique, ou le triplet  $(E, F, G)$  est aussi appelée première forme fondamentale.

2. Elle peut aussi se représenter matriciellement :

$$g_{\varphi(u,v)}(X, Y) = (X_1 X_2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

si  $X = X_1 \partial_u \varphi + X_2 \partial_v \varphi$  et  $Y = Y_1 \partial_u \varphi + Y_2 \partial_v \varphi$ .

La matrice  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$  est la matrice de Gram définie par la métrique et la base  $(\partial_u \varphi, \partial_v \varphi)$  de  $T_{\varphi(u,v)}S$ .

3. On peut associer une forme quadratique à  $g$ , comme indiqué dans l'annexe B.2. Cette forme quadratique s'écrit

$$g_{\varphi(u,v)} = Edu^2 + 2Fdu dv + Fdv^2.$$

La métrique permet de calculer la longueur d'arc, pour les courbes  $(I, \gamma)$  telles que  $\gamma(I)$  soit inclus dans le domaine de coordonnées.

**Proposition 3.2.7.** Dans les conditions décrites ci-dessus, la longueur d'arc comprise entre  $\gamma(a)$  et  $\gamma(b)$  est donnée par

$$\int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2} dt.$$

*Démonstration.* Il suffit de réexprimer la formule comme  $\int_a^b |\overrightarrow{D_t \gamma(t)}| dt$  et d'exprimer la norme  $|\overrightarrow{D_t \gamma(t)}|$  à l'aide de la métrique.  $\square$

### 3.3 Courbures et seconde forme fondamentale

Dans cette section, nous introduisons la courbure normale associée à une direction de l'espace tangent, ainsi que la courbure géodésique. Cela nous permet de faire apparaître la deuxième forme fondamentale, ainsi que les symboles de Christoffel et la courbure de Gauss.

Il sera important de noter que certains résultats obtenus ne dépendent que de la métrique et de ses dérivées, et pourront dès lors être utilisés, en tant que définition cette fois, dans le cadre où la métrique n'est pas induite par l'espace affine euclidien contenant la surface.

Commençons par rappeler quelques faits sur les courbes. On se souvient que si  $(I, \varphi)$  est un paramétrage régulier de courbe, alors l'abscisse curviligne comptée à partir de  $t_0 \in I$  définie par

$$s(u) = \int_{t_0}^u |\overrightarrow{D_v \gamma(v)}| dv$$

établit un changement de variables entre  $I$  et  $s(I) = I'$  et que  $(I', \gamma \circ s^{-1})$ , que nous noterons par abus de langage  $(I', \gamma)$ , définit un paramétrage équivalent mais naturel, en ce sens que  $|\overrightarrow{D_s \gamma(s)}| = 1$  pour tout  $s \in I'$ .

On peut donc toujours supposer avoir un tel paramétrage. Comme il est d'usage, on réservera la lettre  $s$  pour un paramétrage naturel et on notera les dérivées par rapport à un tel paramètre par un point. À titre d'exemple, rappelons la définition du vecteur tangent unitaire.

**Définition 3.3.1.** Dans un paramétrage naturel, le vecteur tangent unitaire en un point  $\gamma(s)$  d'un arc régulier de courbe est le vecteur

$$\overrightarrow{t}(s) = \overrightarrow{D_s \gamma(s)} = \dot{\gamma}(s).$$

Ce vecteur ne dépend du paramétrage que via son signe, et détermine la direction tangente à l'arc au point  $\gamma(s)$ . C'est la variation de ce vecteur (nécessairement la variation en direction) qui indique à quel point l'arc est courbé. Cela conduit naturellement à la notion de courbure de l'arc et de vecteur de courbure.

**Définition 3.3.2.** Si  $(I, \gamma)$  est un paramétrage naturel d'un arc régulier de courbe, alors le vecteur de courbure en  $\gamma(s)$  est

$$\overrightarrow{k}(s) = \overrightarrow{\dot{t}}(s) = \ddot{\gamma}(s).$$

La courbure en  $\gamma(s)$  est définie par

$$\kappa(s) = |\overrightarrow{k}(s)| = |\ddot{\gamma}(s)|,$$

et quand elle n'est pas nulle, on définit le vecteur normal principal par

$$\overrightarrow{n}(s) = \frac{\overrightarrow{k}(s)}{|\overrightarrow{k}(s)|} = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{|\ddot{\gamma}(s)|}.$$

Le vecteur  $\overrightarrow{b}(s) = \overrightarrow{t}(s) \wedge \overrightarrow{n}(s)$  complète alors le trièdre de Frenet, qui définit une base orthonormée positive, variant en fonction de  $s$  (pour plus de détails, voir [12]).

On peut bien sûr définir ces vecteurs dans un paramétrage quelconque : il suffit d'associer à ce paramétrage un paramétrage naturel équivalent et de même orientation via l'abscisse curviligne, et d'y définir les vecteurs comme ci-dessus.

Les formules de dérivation classique et le théorème de la fonction inverse permettent d'obtenir des expressions de  $\vec{t}$  et  $\vec{k}$  dans un paramétrage quelconque.

**Proposition 3.3.3.** *Dans un paramétrage quelconque  $(I, \gamma)$ , nous avons*

$$\vec{t}(u) = \frac{\overrightarrow{D_u \gamma(u)}}{|\overrightarrow{D_u \gamma(u)}|} = \frac{\gamma'(u)}{|\gamma'(u)|}$$

et

$$\vec{k}(u) = \frac{\gamma''(u)|\gamma'(u)|^2 - \langle \gamma'(u), \gamma''(u) \rangle \gamma'(u)}{|\gamma'(u)|^3}.$$

*Démonstration.* Pour toute fonction  $f$  définie sur  $I$  et à valeurs dans un espace affine  $\mathcal{A}$  ou un espace vectoriel  $\mathcal{F}$ , l'application  $f \circ s^{-1}$  est une fonction définie sur  $I'$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D_x(f \circ s^{-1})}(x) &= \overrightarrow{D_u f(u)} \Big|_{u=s^{-1}(x)} D_x s^{-1}(x) \\ &= \overrightarrow{D_u f(u)} \Big|_{u=s^{-1}(x)} \frac{1}{D_u s(u)} \Big|_{u=s^{-1}(x)} \\ &= \frac{\overrightarrow{D_u f(u)}}{|\overrightarrow{D_u f(u)}|} \Big|_{u=s^{-1}(x)}. \end{aligned}$$

On obtient la première formule en considérant  $f = \gamma$ , tandis que la deuxième correspond à  $f$  définie par  $f(u) = \frac{\overrightarrow{\gamma(u)}}{|\overrightarrow{\gamma(u)}|} = \frac{\gamma'(u)}{|\gamma'(u)|}$ .  $\square$

**Remarque 3.3.4.** On constate que si par définition, le vecteur  $\vec{t}$  dépend du paramétrage via son signe, ce n'est pas le cas pour  $\vec{k}$  et  $\kappa$ , qui sont indépendants du paramétrage de l'arc.

### 3.3.1 Courbure normale à une surface

Nous considérons maintenant une surface  $S$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ), un point  $P \in S$  et un paramétrage  $(U, \varphi)$  ou voisinage de  $P$ . On souhaite mesurer la "courbure de  $S$ " en analysant la courbure en  $P$  de courbes tracées sur  $S$ .

Évidemment, on va avoir, selon les courbes, toutes les courbures possibles, comme on le voit en prenant l'exemple de courbes tracées sur une surface  $S$  plane. Il faudra dès lors se limiter à certaines courbes.

Suivant la référence [14, page 179], nous donnons directement la définition.

**Définition 3.3.5.** Dans les conditions décrites ci-dessus, si  $C$  est une courbe paramétrée par  $(I, \gamma)$  et incluse dans  $S$ , le vecteur de courbure normale  $\vec{k}_N$  de  $C$  en  $P$  est la projection du vecteur de courbure à  $C$  en  $P$  sur la normale  $\vec{N}$  à  $S$  en  $P$ .

On a donc

$$\vec{k}_N = \langle \vec{k}, \vec{N} \rangle N.$$

La courbure normale en  $P$  est le nombre

$$\kappa_N = \langle \vec{k}, \vec{N} \rangle.$$

**Remarque 3.3.6.** Ici,  $\vec{k}_N$  est indépendant du choix de  $\vec{N}$ , tandis que  $\kappa_N$  a un signe qui dépend du choix de  $\vec{N}$ , comme beaucoup d'objets définis par la suite.

La définition précédente semble dépendre fortement de la courbe choisie, mais nous allons montrer comment calculer  $\vec{k}_N$ , et qu'il ne dépend que de la direction tangente à  $C$  en  $P$ .

**Proposition 3.3.7.** *Si la courbe  $C$  est paramétrée au voisinage de  $P$  par  $\gamma(x) = \varphi(u(x), v(x))$ , alors on a*

$$\kappa_N = \frac{L(u'(x))^2 + 2Mu'(x)v'(x) + N(v'(x))^2}{E(u'(x))^2 + 2Fu'(x)v'(x) + G(v'(x))^2}$$

où les fonctions  $L, M, N$  sont définies par

$$L(u, v) = -\langle \partial_u \varphi, \partial_u \vec{N} \rangle$$

$$M(u, v) = -\langle \partial_u \varphi, \partial_v \vec{N} \rangle = -\langle \partial_v \varphi, \partial_u \vec{N} \rangle$$

$$N(u, v) = -\langle \partial_v \varphi, \partial_v \vec{N} \rangle.$$

*Démonstration.* Nous avons

$$\kappa_N = \langle \vec{k}, \vec{N} \rangle = \langle \dot{\vec{t}}, \vec{N} \rangle = \langle \vec{t}, \dot{\vec{N}} \rangle$$

car  $\langle \vec{t}, \vec{N} \rangle = 0$ .

Nous savons que

$$\dot{\vec{t}}(x) = \frac{\overrightarrow{D_x \gamma(x)}}{|\overrightarrow{D_x \gamma(x)}|} = \frac{\gamma'(x)}{|\gamma'(x)|}.$$

Nous avons aussi, semblablement à la propriété 3.3.3

$$\dot{\vec{N}} = D_s \vec{N}(s) = \frac{D_x \vec{N}(x)}{|\gamma'(x)|}.$$

Nous sommes donc amenés à calculer

$$\kappa_N = -\frac{\langle \gamma'(x), \dot{\vec{N}}(x) \rangle}{|\gamma'(x)|^2}$$

où

$$\begin{cases} \dot{\vec{N}}(x) &= D_x \vec{N}(u(x), v(x)) \\ \gamma(x) &= \varphi(u(x), v(x)). \end{cases}$$

Le théorème des dérivation des fonctions composées, que l'on peut exprimer avec des abus de langage, donne

$$\begin{aligned}\gamma'(x) &= \partial_u \varphi u'(x) + \partial_v \varphi v'(x) \\ D_x \vec{N}(u(x), v(x)) &= \partial_u \vec{N} u'(x) + \partial_v \vec{N} v'(x).\end{aligned}$$

Donc le numérateur vaut

$$-\langle \partial_u \varphi u'(x) + \partial_v \varphi v'(x), \partial_u \vec{N} u'(x) + \partial_v \vec{N} v'(x) \rangle.$$

Le résultat annoncé est obtenu par bilinéarité.  $\square$

Cette expression, qui donne la courbure normale en tout point de la courbe considérée, est homogène en  $(u'(x), v'(x))$ . Cela conduit au résultat suivant :

**Proposition 3.3.8.** *Toutes les courbes tracées sur  $S$  au point  $P \in S$  qui ont la même droite tangente en  $P$  ont la même courbure normale en  $P$ .*

*Démonstration.* Soient  $(I_1, \gamma_1)$  et  $(I_2, \gamma_2)$  des courbes qui ont la même droite tangente en  $P$ . Si on écrit

$$\gamma_1(x) = \varphi(u_1(x), v_1(x)) \text{ et } \gamma_2(x) = \varphi(u_2(x), v_2(x))$$

et si  $P = \gamma_1(x_0) = \gamma_2(y_0)$ , nous avons

$$\begin{aligned}\gamma'_1(x_0) &= u'_1(x_0) \partial_u \varphi + v'_1(x_0) \partial_v \varphi, \\ \gamma'_2(y_0) &= u'_2(y_0) \partial_u \varphi + v'_2(y_0) \partial_v \varphi.\end{aligned}$$

Ces vecteurs étant multiples, on a

$$\begin{pmatrix} u'_2(y_0) \\ v'_2(y_0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u'_1(x_0) \\ v'_1(x_0) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

pour un réel  $\lambda$  non nul. La courbure associée à  $\gamma_2$  en  $P$  vaut

$$\frac{Ku'_2(y_0)^2 + 2Lu'_2(y_0)v'_2(y_0) + Mv'_2(y_0)^2}{Eu'_2(y_0)^2 + 2Fu'_2(y_0)v'_2(y_0) + Gv'_2(y_0)^2}.$$

Nous utilisons 3.1 et constatons qu'à un facteur  $\lambda^2$  au numérateur et au dénominateur, nous avons la courbure normale associée à  $\gamma_1$  en  $P$ .  $\square$

Les coefficients  $L, M, N$  qui apparaissent dans la proposition 3.3.7 jouent un rôle important dans la suite. Ils définissent une deuxième forme quadratique sur l'espace tangent en un point  $P$ .

On peut également comparer la courbure d'une courbe tracée sur la surface et la courbure normale.

**Proposition 3.3.9.** *Si  $\gamma$  est une courbe tracée sur la surface admettant une normale  $\vec{n}$ , alors on a*

$$\kappa_N = \kappa \cos(\alpha)$$

où  $\alpha$  est l'angle entre  $\vec{n}$  et  $\vec{N}$ .

*Démonstration.* Nous avons par définition  $\vec{k} = \kappa \vec{n}$  et

$$\kappa_N = \langle \vec{k}, \vec{N} \rangle = \langle \kappa \vec{n}, \vec{N} \rangle = \kappa \langle \vec{n}, \vec{N} \rangle.$$

Puisque  $\vec{n}$  et  $\vec{N}$  sont normés, le résultat suit.  $\square$

**Définition 3.3.10.** La deuxième forme fondamentale est définie dans un système de coordonnées  $(U, \varphi)$  par

$$\Omega(a\partial_u\varphi + b\partial_v\varphi) = a^2L + 2abM + b^2N$$

où  $L, M, N$  sont définis en 3.3.7.

On notera aussi  $\Omega$  la forme bilinéaire associée, et on l'appellera deuxième forme fondamentale.

Dans la base  $(\partial_u\varphi, \partial_v\varphi)$  de l'espace tangent en un point  $P$ , la forme  $\Omega$  se représente au moyen de la matrice

$$\overline{\Omega} = \begin{pmatrix} K & M \\ M & L \end{pmatrix}.$$

On peut également la noter de manière tensorielle, à savoir

$$\Omega = Kdu^2 + 2Ldudv + Mdv^2$$

ou

$$\Omega = Kdu^2 + L(du \otimes dv + dv \otimes du) + Mdv^2.$$

Enfin, on a encore une interprétation de la courbure normale définie par une direction tangente.

**Proposition 3.3.11.** Si  $C$  est une courbe tracée sur  $S$  en coupant  $S$  par un plan parallèle à  $\vec{N}$ , alors on a  $|\kappa_N| = \kappa$ .

*Démonstration.* La courbe est incluse dans un plan dont  $\vec{N}$ ,  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  sont des vecteurs directeurs. Puisque  $\vec{N}$  et  $\vec{n}$  sont orthogonaux à  $\vec{t}$  et normés, on a  $\vec{n} = \pm \vec{N}$ , donc l'angle  $\alpha$  de la proposition 3.3.9 vaut 0 ou  $\pi$ .  $\square$

**Remarque 3.3.12.** Si on se donne une courbe sur la surface obtenue par intersection avec un plan normal, on n'a pas le choix sur  $\vec{n}$ , mais on peut choisir un système de coordonnées pour que  $\vec{N}$  soit égale à  $\vec{n}$ . On a alors  $\kappa_N = \kappa$ , comme indiqué dans [14, page 181].

À partir de la notion de courbure normale sur  $P$ , on peut définir la courbure de Gauss en ce point. Cela se fait à l'aide du théorème d'Euler.

**Théorème 3.3.13.** Soit  $P$  un point d'une surface  $S$ , si la fonction

$$f : T_P S \rightarrow \mathbb{R} : \vec{v} \mapsto \kappa_n(\vec{v}) = \frac{\Omega(\vec{v}, \vec{v})}{g(\vec{v}, \vec{v})}$$

n'est pas constante, alors elle atteint un maximum  $\kappa_1$  et un minimum  $\kappa_2$  correspondant à des directions orthogonales  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  telles que  $\Omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$ . Ces nombres sont les valeurs propres de la matrice  $\bar{g}^{-1}\overline{\Omega}$ .



Nous donnons deux preuves de ce fait important.

*Première preuve.* Puisque la première forme fondamentale définit un produit scalaire sur l'espace tangent  $T_P S$ , on peut y choisir une base orthonormée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . La fonction courbure de l'énoncé étant homogène, il suffit de l'évaluer sur des vecteurs normés (au sens de  $g$ ), c'est-à-dire les vecteurs de la forme

$$\vec{v} = \cos(\theta)\vec{e}_1 + \sin(\theta)\vec{e}_2.$$

On a alors

$$f(\vec{v}) = f(\theta) = \cos^2(\theta)\Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + 2\sin(\theta)\cos(\theta)\Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + \sin^2(\theta)\Omega(\vec{e}_2, \vec{e}_2).$$

On sait que cette fonction périodique admet un maximum et un minimum. On a de plus

$$f'(\theta) = -2\sin(\theta)\cos(\theta)\Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + 2\cos(2\theta)\Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + \sin(2\theta)\Omega(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$$

et

$$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2\theta)\Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \sin(2\theta)(\Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_1) - \Omega(\vec{e}_2, \vec{e}_2)).$$

1. Si les quantités  $\Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et  $\Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_1) - \Omega(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$  sont simultanément nulles, alors  $f$  est constante.
2. Si  $\Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$ , les solutions  $\theta$  de l'équation sont  $\theta = \frac{k\pi}{2}$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  et la fonction prend des valeurs optimales  $\Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_1)$  et  $\Omega(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$  pour  $\vec{v} = \vec{e}_1$  ou  $\vec{v} = \vec{e}_2$ .
3. Si  $\Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = \Omega(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$ , les solutions sont données par  $\cos(2\theta) = 0$ , ou  $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$  et les valeurs optimales sont  $\Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \pm \Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  correspondant à  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 \pm \vec{e}_2)$ .
4. Dans le cas général, elles sont données par

$$\tan(2\theta) = 2 \frac{\Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{\Omega(\vec{e}_2, \vec{e}_2) - \Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_1)}.$$

On constate qu'il y a encore deux directions orthogonales.

Dans les cas 2 et 3, on a directement  $\Omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$ .

Dans le cas 4, on a  $\vec{v}_1 = \cos(\theta)\vec{e}_1 + \sin(\theta)\vec{e}_2$  et  $\vec{v}_2 = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{e}_1 + \sin(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{e}_2 = -\sin(\theta)\vec{e}_1 + \cos(\theta)\vec{e}_2$ . Donc

$$\Omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\frac{1}{2}\sin(2\theta)\Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \cos(2\theta)\Omega(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\Omega(\vec{e}_2, \vec{e}_2).$$

On a donc bien  $\Omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$ .

Enfin, notons  $W$  l'application représentée par  $\bar{g}^{-1}\bar{\Omega}$  dans la base  $(\partial_u\varphi, \partial_v\varphi)$ , et montrons que l'on a

$$g(\vec{v}_i, W\vec{v}_j) = \Omega(\vec{v}_i, \vec{v}_j).$$

Si  $\vec{v}_i = x_i\partial_u\varphi + y_i\partial_v\varphi$ , on a

$$g(\vec{v}_i, W\vec{v}_j) = (x_i \ y_i)\bar{g} \bar{g}^{-1}\bar{\Omega} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} = (x_i \ y_i)\bar{\Omega} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} = \Omega(\vec{v}_i, \vec{v}_j).$$

Donc si  $i \neq j$ ,  $W\vec{v}_j$  est orthogonal à  $\vec{v}_i$ , donc multiple de  $\vec{v}_j$  ( $W\vec{v}_j = \lambda_j\vec{v}_j$ ), mais nous avons aussi

$$\Omega(\vec{v}_j, \vec{v}_j) = g(\vec{v}_j, W\vec{v}_j) = \lambda_j.$$

□

*Deuxième preuve.* Puisque  $g$  définit un produit scalaire sur  $T_p S$ , on peut y choisir une base orthonormée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Dans cette base, la forme bilinéaire  $\Omega$  se représente par une matrice  $\overline{\Omega}'$  symétrique.

Il existe une matrice  $O$  orthogonale telle que  $\overline{\Omega}'' = O^T \overline{\Omega}' O$  soit diagonale. Les vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  dont les composantes dans  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sont les colonnes de  $O$  forment donc une base orthonormée pour  $g$ , dans laquelle  $\Omega$  se représente par  $\overline{\Omega}'' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  avec  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ . La courbure associée au vecteur  $\vec{v} = \cos(\theta)\vec{v}_1 + \sin(\theta)\vec{v}_2$  est alors donnée par

$$\kappa_N(\theta) = \lambda_1 \cos^2(\theta) + \lambda_2 \sin^2(\theta).$$

- Si  $\lambda_1 = \lambda_2$ , la courbure est constante et vaut  $\lambda_1 = \lambda_2$ .
- Si  $\lambda_1 > \lambda_2$ , alors

$$\kappa_n(\theta) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \sin^2(\theta).$$

La courbure varie donc entre  $\lambda_2$  et  $\lambda_1$ , et ces valeurs sont atteintes pour  $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$  et  $\theta = k\pi$  (pour  $k \in \mathbb{Z}$ ) respectivement, c'est-à-dire dans les directions orthogonales  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ .

Les valeurs optimales sont donc les valeurs propres de  $\overline{\Omega}''$ , et les directions correspondantes ses vecteurs propres, uniques si  $\overline{\Omega}''$  n'est pas multiple de l'identité.

On termine la preuve comme la première en notant que  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont vecteurs propres de  $\overline{g}^{-1}\Omega$ , de valeur propre  $\Omega(\vec{v}_1, \vec{v}_1)$  et  $\Omega(\vec{v}_2, \vec{v}_2)$ , ou on "remonte" de  $\overline{\Omega}''$  à  $\Omega$ .  $\square$

**Remarque 3.3.14.**

1. L'application définie dans la preuve précédente est, éventuellement au signe près, l'application de Weingarten associée au point  $P$  de la surface  $S$ .
2. Les courbures normales dépendent du choix de  $\vec{N}$  et sont donc définies au signe près, le produit des courbures normales maximale et minimale est indépendant du choix de  $\vec{N}$ .

La remarque précédente conduit à une définition fondamentale.

**Définition 3.3.15.** Les courbures normales maximale et minimale  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  en un point  $P$  sont appelées courbures principales. Leur produit est la courbure de Gauss  $\kappa$  en un point  $P$ . Si  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ , ces courbures sont associées à des directions orthogonales, appelées directions principales.

On peut finalement calculer la courbure  $\kappa$  en fonction des coefficients des formes fondamentales.

**Proposition 3.3.16.** La courbure  $\kappa$  s'exprime en fonction des formes fondamentales par

$$\kappa = \frac{\det \overline{\Omega}}{\det \overline{g}} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

*Démonstration.* D'après le théorème précédent, les courbures sont les valeurs propres de la matrice  $\overline{g}^{-1}\overline{\Omega}$ . Leur produit est donc le déterminant de cette matrice, et le résultat s'ensuit.  $\square$

### 3.3.2 La courbure géodésique

Nous nous plaçons dans les mêmes conditions que dans la section précédente avec une courbe  $C$  tracée sur une surface  $S$  et passant par un point  $P$ , éventuellement paramétrée de manière naturelle (même si ce n'est pas toujours nécessaire). Nous avons obtenu la courbure normale à  $C$  en projetant le vecteur de courbure  $\vec{k}$  en  $P$  sur la normale à la surface en  $P$ . L'autre projection naturelle donne le vecteur de courbure géodésique.

**Définition 3.3.17.** Le vecteur de courbure géodésique  $\vec{k}_g$  en  $P$  est la projection du vecteur de courbure  $\vec{k}$  en  $P$  sur  $T_P S$ . ce vecteur a des propriétés naturelles.

**Proposition 3.3.18.** On a la décomposition  $\vec{k} = \vec{k}_N + \vec{k}_g$ . De plus,  $\vec{k}_g$  est orthogonal au vecteur tangent  $\vec{t}$ .

*Démonstration.* La première assertion découle de la décomposition  $\vec{\mathcal{A}} = T_P S \oplus \vec{N}$  et du fait que  $\vec{k}_N$  est la projection orthogonale de  $\vec{k}$  sur  $\vec{N}$ . Pour la deuxième, on note que  $\vec{k}$  et  $\vec{k}_N$  sont orthogonaux à  $\vec{t}$ .  $\square$

On se place toujours en un point  $P$  où la surface admet une normale  $\vec{N}$  et la courbe considérée un vecteur tangent  $\vec{t}$ . On définit un troisième vecteur  $\vec{u}$  tel que  $(\vec{t}, \vec{u}, \vec{N})$  soit une base orthonormée positive. On peut alors calculer  $\vec{k}_g$ .

**Proposition 3.3.19.** Nous avons  $\vec{k}_g = \langle \vec{k}, \vec{u} \rangle \vec{u}$ .

*Démonstration.* Puisque  $\vec{k}_g$  est la projection de  $\vec{k}$  sur  $T_P S$ , dont une base orthonormée est  $(\vec{t}, \vec{u})$ , nous avons

$$\vec{k}_g = \langle \vec{k}, \vec{t} \rangle \vec{t} + \langle \vec{k}, \vec{u} \rangle \vec{u}.$$

Puisque  $\langle \vec{k}, \vec{t} \rangle = 0$ , par définition, on a le résultat annoncé.  $\square$

Ceci amène naturellement à une définition.

**Définition 3.3.20.** Avec les notations ci-dessus, la courbure géodésique associée à la courbe (paramétrée)  $C$  est

$$\kappa_g = \langle \vec{k}, \vec{u} \rangle.$$

Il est important de remarquer que la courbure géodésique dépend du choix de l'orientation de la surface (via  $\vec{N}$  qui définit  $\vec{u}$ ) et de l'orientation de  $C$  via  $\vec{t}$  (qui définit  $\vec{u}$ ). on peut donner une première expression de  $\kappa_g$ , utilisant le produit mixte.

**Proposition 3.3.21.** Avec les notations ci-dessus, nous avons

$$\kappa_g = [\vec{t}, \vec{k}, \vec{N}].$$

En particulier, si la courbe est donnée dans un paramétrage naturel  $(I, \gamma)$ , nous avons

$$\kappa_g = [\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \vec{N}].$$

*Démonstration.* On a par définition  $\vec{u} = \vec{N} \wedge \vec{t}$ . Donc

$$\kappa_g = \langle \vec{k}, \vec{N} \wedge \vec{t} \rangle = [\vec{N}, \vec{t}, \vec{k}],$$

et le premier résultat est démontré par invariance du produit mixte par permutation circulaire. La deuxième partie suit directement puisque dans un paramétrage naturel, on a  $\vec{t} = \dot{\gamma}$  et  $\vec{k} = \ddot{\gamma}$ .  $\square$

Pour terminer cette section, donnons une interprétation de la courbure géodésique en un point  $P$ . Nous avons en effet décidé de projeter l'accélération  $\vec{k}$  sur le plan tangent en  $P$ . Bien que cela soit raisonnable, puisque nous avons projeté  $\vec{k}$  sur  $\vec{N}$  pour déterminer la courbure normale, il n'y a pas de raison pour que la projection ainsi définie produise un objet utile en géométrie. L'intuition derrière la définition de  $\vec{k}_g$  (et  $\kappa_g$ ) est donnée par la construction que nous donnons maintenant.

Nous cherchons à déterminer un arc  $(I, \gamma)$  de longueur minimale joignant  $P$  à un point (suffisamment proche)  $Q$ . Pour un tel arc, on considère sa projection orthogonale sur le plan (affine)  $\pi$  tangent en  $P$ . L'intuition est que cette projection devrait aussi être un arc de longueur minimale entre  $P$  et la projection  $Q^*$  de  $Q$  sur ce plan  $\pi$ . Dans le plan, un arc de longueur minimale est donné par un segment de droite, et a donc une courbure nulle. Nous nous intéressons donc, pour un arc quelconque passant par  $P$ , à la courbure (en  $P$ ) de sa projection sur le plan tangent en  $P$ .

**Proposition 3.3.22.** *Soit  $(I, \gamma)$  un paramétrage naturel d'un arc de courbe tracé sur  $S$ . On note  $(I, \gamma^*)$  la projection de cet arc sur  $T_P S$ . Alors*

- $(I^*, \gamma^*)$  est régulier pour  $I^* \subset I$ .
- Le vecteur de courbure  $\vec{k}^*$  de  $(I^*, \gamma^*)$  en  $P$  est égal à  $\vec{k}_g$ .

*Démonstration.* On peut supposer sans perte de généralité que  $(I, \gamma)$  est un paramétrage naturel tel que  $0 \in I$  et  $\gamma(0) = P$ . Le plan tangent à la surface en  $P$  est  $P + \langle \vec{t}_0, \vec{u}_0 \rangle$ , où  $\vec{t}_0$  est le vecteur tangent unitaire de  $\gamma$  en  $P$  et  $\vec{u}_0$  est tel que  $(\vec{t}_0, \vec{u}_0, \vec{N}_0)$  soit une base orthonormée positive.

La projection de  $\gamma$  sur ce plan est donc

$$\gamma^* = P + \langle \gamma - P, \vec{t}_0 \rangle \vec{t}_0 + \langle \gamma - P, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0.$$

Nous avons donc

$$\overrightarrow{D_s \gamma^*(s)} = \langle \vec{t}, \vec{t}_0 \rangle \vec{t}_0 + \langle \vec{t}, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0.$$

En  $s = 0$ , ce vecteur est égal à  $\vec{t}_0$  et est donc de norme 1. Puisque  $\gamma^*$  a la même classe de dérivabilité que  $\gamma$ , il est de classe  $C^1$  au moins et  $\overrightarrow{D_s \gamma^*(s)} \neq 0$  sur un intervalle ouvert  $I^*$  contenant 0.

Calculons maintenant le vecteur de courbure  $\vec{k}^*$  en  $s = 0$ . Il faut pour cela prendre en compte que  $s$  n'est pas un paramétrage naturel pour  $\gamma^*$ . On a donc

$$t^*(s) = \frac{\overrightarrow{D_s \gamma^*(s)}}{\left| \overrightarrow{D_s \gamma^*(s)} \right|} = \frac{\langle \vec{t}, \vec{t}_0 \rangle \vec{t}_0 + \langle \vec{t}, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0}{\left| \overrightarrow{D_s \gamma^*(s)} \right|}$$

et

$$\vec{k}^*(s) = \frac{\overrightarrow{D_s t^*(s)}}{\left| \overrightarrow{D_s t^*(s)} \right|}.$$

Nous avons

$$\overrightarrow{D_s t^*(s)} = \frac{1}{\left| \overrightarrow{D_s t^*(s)} \right|^2} \left( \overrightarrow{D_s^2 \gamma^*(s)} \left| \overrightarrow{D_s \gamma^*(s)} \right| - D_s \left| \overrightarrow{D_s \gamma^*(s)} \right| \overrightarrow{D_s \gamma^*(s)} \right).$$

De plus, vu la formule de dérivation de la fonction racine

$$D_s \left| \overrightarrow{D_s \gamma^*(s)} \right| = \frac{\langle \overrightarrow{D_s \gamma^*(s)}, \overrightarrow{D_s^2 \gamma^*(s)} \rangle}{\left| \overrightarrow{D_s \gamma^*(s)} \right|}.$$

Nous avons donc

$$\vec{k}^*(s) = \frac{1}{\left| \overrightarrow{D_s t^*(s)} \right|^4} \left( \overrightarrow{D_s^2 \gamma^*(s)} \left| \overrightarrow{D_s \gamma^*(s)} \right| - \frac{\langle \overrightarrow{D_s \gamma^*(s)}, \overrightarrow{D_s^2 \gamma^*(s)} \rangle}{\left| \overrightarrow{D_s \gamma^*(s)} \right|} \overrightarrow{D_s \gamma^*(s)} \right). \quad (3.2)$$

En  $s = 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D_s \gamma^*(s)}|_{s=0} &= \vec{t}_0, \\ \overrightarrow{D_s^2 \gamma^*(s)}|_{s=0} &= \langle \vec{k}_0, \vec{t}_0 \rangle \vec{t}_0 + \langle \vec{k}_0, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0 = \langle \vec{k}_0, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $\vec{k}_0$  est le vecteur de courbure de  $\gamma$  en  $s = 0$ , donc (3.2) donne

$$\vec{k}^*(0) = \frac{1}{\left| \overrightarrow{D_s t^*(s)} \right|^4} \overrightarrow{D_s^2 \gamma^*(s)} \left| \overrightarrow{D_s^2 \gamma^*(s)} \right|_{s=0}.$$

Nous avons vu que  $\left| \overrightarrow{D_s^2 \gamma^*(s)} \right|_{s=0} = 1$ , et par (3.3), nous obtenons finalement

$$\vec{k}^*(0) = \langle \vec{k}_0, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0,$$

ce qui achève la preuve par la proposition 3.3.19.  $\square$

Cette interprétation de  $\vec{k}_g$  et donc de  $\kappa_g$  mène directement à la définition suivante.

**Définition 3.3.23.** Une courbe  $C$  tracée sur une surface est une géodésique si la courbure géodésique est nulle en tout point de  $C$ .

Au vu des définitions de  $\kappa_g$  et  $\vec{k}_g$ , nous obtenons tout de suite la caractérisation suivante.

**Proposition 3.3.24.** Une courbe  $C$  est une géodésique si et seulement si en tout point de  $C$ , le vecteur de courbure  $\vec{k}$  est un multiple de  $\vec{N}$ .

Nous rappelons que lorsque  $\vec{k}$  est non nul en  $P$ , alors le plan osculateur de  $C$  en  $P$  est le plan  $P + \langle \vec{t}, \vec{k} \rangle$ . Si  $\vec{k}$  est non nul, la condition indiquant que  $\vec{k}$  est multiple de  $\vec{N}$  dans la proposition précédente est équivalente à la condition " $\vec{N}$  est multiple de  $\vec{k}$ ". Cela conduit à la proposition suivante.

**Proposition 3.3.25.** *Une courbe  $C$  est une géodésique si et seulement si en tout point  $P$  de  $C$ ,  $\vec{k}$  est nul ou le plan osculateur à  $C$  en  $P$  est perpendiculaire au plan tangent à la surface en  $P$ .*

*Démonstration.* Si  $C$  est une géodésique et si  $\vec{k}$  est non nul en  $P$ , alors  $\langle \vec{t}, \vec{k} \rangle$  contient  $\vec{N}$ , et le plan osculateur est bien perpendiculaire au plan tangent en  $P$ .

Si le plan osculateur à  $C$  en  $P$  est perpendiculaire au plan tangent, alors  $\langle \vec{t}, \vec{k} \rangle$  contient  $\vec{N}$ . Mais puisque  $\vec{N}$  est orthogonal à  $\vec{t}$ ,  $\vec{N}$  est multiple de  $\vec{k}$ , donc  $\vec{k}$  est multiple de  $\vec{N}$ .  $\square$

Cette caractérisation permet de déterminer certaines géodésiques, comme le montrent les résultats suivants.

**Proposition 3.3.26.** *Dans le plan euclidien, les droites sont des géodésiques.*

*Démonstration.* Soit  $d$  une droite de  $S$ . La courbure  $\vec{k}$  est nulle en tout point de  $d$ . Donc  $d$  est une géodésique.  $\square$

Remarquons que l'on devait s'attendre à ce résultat, puisque nous avons considéré les droites comme prototypes des géodésiques.

Voici un autre résultat bien connu.

**Proposition 3.3.27.** *Si  $S$  est une sphère, alors tout grand cercle  $C$  de  $S$  est une géodésique.*

*Démonstration.* Par définition, un grand cercle  $C$  est l'intersection de  $S$  avec un plan  $\pi$  contenant le centre  $O$  de la sphère. La courbure de  $C$  n'est pas nulle, puisque  $C$  est un cercle. Le plan osculateur de  $C$  en  $P$  est le plan  $\pi$  définissant  $C$ . Le vecteur  $\overrightarrow{OP}$  est un vecteur directeur de  $\pi$ , et c'est évidemment un multiple de  $\vec{N}$ . Donc le plan osculateur est perpendiculaire au plan tangent et  $C$  est une géodésique.  $\square$

Dans des situations moins simples, nous déterminons les géodésiques à l'aide d'équations différentielles. c'est l'objet de la prochaine section.

## 3.4 Coefficients de Christoffel et géodésiques

Afin d'exprimer les courbures et d'obtenir les équations des géodésiques, nous aurons besoin d'exprimer adéquatement les dérivées secondes du paramétrage, et les dérivées de la normale.

Nous nous plaçons toujours dans un paramétrage local  $(U, \varphi)$  de classe  $C^2$  en moins. Pour tout  $(u, v) \in U$ , les vecteurs  $\partial_u \varphi, \partial_v \varphi, \vec{N}$  sont linéairement indépendants. Les vecteurs  $\partial_u^2 \varphi, \partial_u \partial_v \varphi, \partial_v^2 \varphi$  peuvent être décomposés dans cette base. Ce sont les équations de Gauss. De même, les vecteurs  $\partial_u \vec{N}$  et  $\partial_v \vec{N}$  peuvent être décomposés dans cette base, ce sont les équations de Weingarten.

Avant de les formuler, introduisons des notations plus légères.

**Notation 3.4.1.** Si  $f$  est une application de classe  $C^1$  sur  $U$ , on note  $f_u, f_v$  les dérivées partielles de  $f$  définies sur  $U$ . De même pour une application de classe  $C^2$ , on note  $f_{uu}, f_{uv}, f_{vv}$  les dérivées partielles d'ordre 2, et nous continuons de le sorte si nécessaire.

Les notations qui apparaîtront ci-dessous seront claires, si on pense  $u$  comme la première coordonnée et  $v$  comme la deuxième (nous devrions utiliser  $u_1$  et  $u_2$ , mais ces notations sont plus lourdes), et si nous prenons en compte la convention de sommation d'Einstein.

**Définition 3.4.2** (Équation de Gauss-Weingarten). Les coefficients (fonctionnels)  $\Gamma_{jk}^i, \alpha_{i,j}, \beta_i^j, \gamma_j$  ( $i, j \in \{1, 2\}$ ) sont définis par les équations

$$\varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + \alpha_{11} \vec{N} \quad (3.4)$$

$$\varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + \alpha_{12} \vec{N} \quad (3.5)$$

$$\varphi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + \alpha_{22} \vec{N} \quad (3.6)$$

et

$$\vec{N}_u = \beta_1^1 \varphi_u + \beta_1^2 \varphi_v + \gamma_1 \vec{N} \quad (3.7)$$

$$\vec{N}_v = \beta_2^1 \varphi_u + \beta_2^2 \varphi_v + \gamma_2 \vec{N}. \quad (3.8)$$

Les prochains résultats permettent de calculer les coefficients définis ci-dessus en termes des coefficients  $E, F, G$  de la première forme fondamentale et de leurs dérivées partielles.

Avant d'aller plus loin, remarquons que les trois premières équations (celles de Gauss) peuvent s'écrire, si nous remplaçons la coordonnée par son numéro ( $u$  par 1 et  $v$  par 2) comme

$$\varphi_{ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \varphi_k + \alpha_{ij} \vec{N}$$

tandis que les secondes sont

$$\vec{N}_i = \sum_{j=1}^2 \beta_i^j \varphi_j + \gamma_i \vec{N}.$$

Enfin, les coefficients  $\Gamma_{21}^1$  et  $\Gamma_{21}^2$  ne sont pas définis, mais vu l'équation 3.5 et la commutativité des dérivées partielles, il est naturel de poser  $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1$  et  $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2$ . Passons maintenant à la détermination des coefficients qui apparaissent dans les équations de Gauss.

**Proposition 3.4.3.** *Les coefficients des équations de Gauss sont donnés par*

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \bar{g}^{-1} \begin{pmatrix} \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle \\ \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \bar{g}^{-1} \begin{pmatrix} \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle \\ \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \bar{g}^{-1} \begin{pmatrix} \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle \\ \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

et

$$\alpha_{11} = L, \quad \alpha_{12} = M, \quad \alpha_{22} = N. \quad (3.12)$$

*Démonstration.* Nous savons que les coefficients existent et sont uniques puisque ce sont les composantes des membres de gauche des équations de Gauss dans la base  $(\varphi_u, \varphi_v, \vec{N})$ . Pour les déterminer, on multiplie scalairement par  $\varphi_u, \varphi_v, \vec{N}$ .

Pour la première équation, nous obtenons

$$\begin{cases} \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle \\ \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{cases}$$

puisque  $\langle \varphi_u, \vec{N} \rangle = \langle \varphi_v, \vec{N} \rangle = 0$ .

Ce système s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle \\ \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons le résultat annoncé en multipliant les deux membres par  $\bar{g}^{-1}$ .

Nous procédons de la même façon pour les deux autres équations et nous obtenons (3.9), (3.10) et (3.11).

En multipliant scalairement chaque équation par  $\vec{N}$ , nous obtenons directement

$$\langle \varphi_{uu}, \vec{N} \rangle = \alpha_{11}, \langle \varphi_{uv}, \vec{N} \rangle = \alpha_{12}, \langle \varphi_{vv}, \vec{N} \rangle = \alpha_{22}.$$

Puisque les applications  $\langle \varphi_u, \vec{N} \rangle$  et  $\langle \varphi_v, \vec{N} \rangle$  sont identiquement nulles, nous avons

$$\langle \varphi_u, \vec{N} \rangle_u = 0 = \langle \varphi_{uu}, \vec{N} \rangle + \langle \varphi_u, \vec{N}_u \rangle$$

donc

$$\alpha_{11} = \langle \varphi_{uu}, \vec{N} \rangle = -\langle \varphi_u, \vec{N}_u \rangle = K.$$

De même,

$$\alpha_{12} = \langle \varphi_{uv}, \vec{N} \rangle = -\langle \varphi_u, \vec{N}_v \rangle = L$$

et

$$\alpha_{22} = \langle \varphi_{vv}, \vec{N} \rangle = -\langle \varphi_v, \vec{N}_v \rangle = M,$$

et (3.12) est établi. □

Nous procédons de la même façon pour déterminer les coefficients des équations de Weingarten.

**Proposition 3.4.4.** *Les coefficients apparaissant dans les équations de Weingarten sont donnés par*

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

et

$$\begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 \end{pmatrix} = -\bar{g}^{-1} \bar{\Omega}.$$



*Démonstration.* Nous multiplions scalairement les équations (3.7) et (3.8) par  $\vec{N}$ , et nous tenons compte du fait que  $\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = 1$  et que  $\vec{N}$  est orthogonal à  $\varphi_u$  et à  $\varphi_v$ . Nous avons alors

$$\gamma_1 = \langle \vec{N}, \vec{N}_u \rangle \text{ et } \gamma_2 = \langle \vec{N}, \vec{N}_v \rangle.$$

Puisque  $\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = 1$  identiquement sur  $U$ , on obtient  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ .

En multipliant les mêmes équations par  $\varphi_u$  et  $\varphi_v$ , on a directement

$$\begin{aligned} -L &= \langle \varphi_u, \vec{N}_u \rangle = \beta_1^1 E + \beta_1^2 F \\ -M &= \langle \varphi_v, \vec{N}_u \rangle = \beta_1^1 F + \beta_1^2 G \\ -M &= \langle \varphi_u, \vec{N}_v \rangle = \beta_2^1 E + \beta_2^2 F \\ -N &= \langle \varphi_v, \vec{N}_v \rangle = \beta_2^1 F + \beta_2^2 G. \end{aligned}$$

On peut écrire ces équations sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

et on obtient le résultat annoncé.  $\square$

Les coefficients qui interviennent dans les équations de Gauss vont jouer un rôle important dans la suite. Cela mérite une définition.

**Définition 3.4.5.** Les coefficients  $\Gamma_{ij}^k$  définis par (3.4.3) sont les coefficients de Christoffel (de seconde espèce). Les coefficients  $\langle \varphi_{rs}, \varphi_t \rangle$  (pour  $r, s, t \in \{u, v\}$ ) sont les coefficients de Christoffel de première espèce.

Dans la suite, nous allons montrer que les coefficients de Christoffel sont des fonctions des coefficients  $E, F, G$  de la métrique et de leurs dérivées premières.

**Proposition 3.4.6.** *Les coefficients de Christoffel de première espèce sont donnés par*

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle &= \frac{1}{2} E_u, \quad \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2} G_v, \\ \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle &= \frac{1}{2} E_v, \quad \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, \\ \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle &= F_u - \frac{1}{2} E_v, \quad \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Pour les premières relations, il suffit d'appliquer la définition de  $E, F, G$  et de dériver :

$$E_u = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_u = 2 \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle,$$

par symétrie du produit scalaire. De même,

$$G_v = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_v = 2 \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle,$$

et puis

$$E_v = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_v = 2 \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle$$

et

$$G_u = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_u = 2\langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle.$$

Pour les deux dernières relations, il suffit de dériver  $F$  : nous avons

$$F_u = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_u = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \frac{1}{2}E_v$$

et

$$F_v = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_v = \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle + \frac{1}{2}G_u$$

et le résultat suit.  $\square$

Nous obtenons le corollaire suivant.

**Corollaire 3.4.7.** *Les symboles de Christoffel s'écrivent comme des fonctions des coefficients  $E, F, G$  et de leurs dérivées partielles. En particulier, les coefficients de seconde espèce sont donnés par*

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \bar{g}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \bar{g}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \bar{g}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de Christoffel permettent d'exprimer les courbures de Gauss et géodésiques. Ils permettent enfin d'obtenir les équations des géodésiques. C'est l'objet des sections suivantes.

## 3.5 Équations de compatibilité et courbure de Gauss

Les équations de Gauss-Weingarten permettent d'exprimer les dérivées secondes du paramétrage. On peut, si la surface est de classe  $C^3$ , calculer les dérivées d'ordre 3 et exprimer la commutativité des dérivées partielles. Cela fournit des conditions de compatibilité sur les fonctions introduites ci-dessus.

**Proposition 3.5.1.** *Si la surface considérée est de classe  $C^3$ , on a les relations suivantes :*

$$L_v - M_u = L\Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2 \quad (3.13)$$

$$M_v - N_u = L\Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N\Gamma_{12}^2 \quad (3.14)$$

$$(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 + L\beta_2^1 = (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 + M\beta_1^1 \quad (3.15)$$

$$(\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + L\beta_2^2 = (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + M\beta_1^2 \quad (3.16)$$

$$(\Gamma_{22}^1)_u + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 + N\beta_1^1 = (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 + M\beta_2^1 \quad (3.17)$$

$$(\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^2 + N\beta_1^2 = (\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^2 + M\beta_2^2 \quad (3.18)$$

Les équations (3.13) et (3.14) sont appelées équations de Mainardi-Codazzi.

*Démonstration.* Nous exprimons la condition  $(\varphi_{uu})_v = (\varphi_{uv})_u$ .

Nous avons tout d'abord

$$\begin{aligned}
(\varphi_{uu})_v &= (\Gamma_{11}^1)_v \varphi_u + (\Gamma_{11}^2)_v \varphi_v + L_v \vec{N} \\
&\quad + \Gamma_{11}^1 \varphi_{uv} + \Gamma_{11}^2 \varphi_{vv} + L \vec{N}_v \\
&= (\Gamma_{11}^1)_v \varphi_u + (\Gamma_{11}^2)_v \varphi_v + L_v \vec{N} \\
&\quad + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + M \vec{N}) \\
&\quad + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + N \vec{N}) \\
&\quad + L(\beta_2^1 \varphi_u + \beta_2^2 \varphi_v).
\end{aligned}$$

De la même façon, nous avons

$$\begin{aligned}
(\varphi_{uv})_u &= (\Gamma_{12}^1)_u \varphi_u + (\Gamma_{12}^2)_u \varphi_v + M_u \vec{N} \\
&\quad + \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L \vec{N}) \\
&\quad + \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + M \vec{N}) \\
&\quad + M(\beta_1^1 \varphi_u + \beta_1^2 \varphi_v).
\end{aligned}$$

Nous obtenons trois équations. La composante selon  $\vec{N}$  fournit

$$L_v + M\Gamma_{11}^1 + N\Gamma_{11}^2 = M_u + L\Gamma_{12}^1 + M\Gamma_{12}^2,$$

c'est-à-dire l'équation (3.13). La composante selon  $\varphi_u$  fournit

$$(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + L\beta_2^1 = (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + M\beta_1^1,$$

qui correspond après simplification à l'équation (3.15). La composante selon  $\varphi_v$  donne finalement

$$(\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + L\beta_2^2 = (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + M\beta_1^2.$$

qui correspond à l'équation (3.16).

Nous procédons de la même façon pour exprimer l'identité  $(\varphi_{vv})_u = (\varphi_{uv})_v$ . Nous avons d'une part

$$\begin{aligned}
(\varphi_{vv})_u &= (\Gamma_{22}^1)_u \varphi_u + (\Gamma_{22}^2)_u \varphi_v + N_u \vec{N} \\
&\quad + \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L \vec{N}) \\
&\quad + \Gamma_{22}^2 (\Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + M \vec{N}) \\
&\quad + N(\beta_1^1 \varphi_u + \beta_1^2 \varphi_v),
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
(\varphi_{uv})_v &= (\Gamma_{12}^1)_v \varphi_u + (\Gamma_{12}^2)_v \varphi_v + M_v \vec{N} \\
&\quad + \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + M \vec{N}) \\
&\quad + \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + N \vec{N}) \\
&\quad + M(\beta_2^1 \varphi_u + \beta_2^2 \varphi_v).
\end{aligned}$$

Nous obtenons comme ci-dessus l'équation

$$N_u + \Gamma_{22}^1 L + \Gamma_{22}^2 M = M_v + \Gamma_{12}^1 M + \Gamma_{12}^2 N$$

qui est l'équation (3.14). De plus, selon  $\varphi_u$ , nous avons

$$(\Gamma_{22}^1)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 + N \beta_1^1 = (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + M \beta_2^1$$

qui correspond à l'équation (3.17). Finalement, selon  $\varphi_v$ , nous obtenons

$$(\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^2 + N \beta_1^2 = (\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^2 + M \beta_2^2$$

qui correspond à l'équation (3.18).  $\square$

Ces équations permettent d'exprimer la courbure de Gauss. Nous commençons par un lemme technique.

**Lemme 3.5.2.** *La courbure de Gauss vaut*

$$\kappa = \frac{1}{E}(\beta_1^2 M - \beta_2^2 L) \quad (3.19)$$

$$\kappa = \frac{1}{EG - F^2}(E(\beta_2^1 M - \beta_1^1 N) + F(\beta_2^2 M - \beta_1^2 N)). \quad (3.20)$$

*Démonstration.* Nous savons que la courbure s'écrit

$$\kappa = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

En utilisant la formule 3.4.4, nous avons

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ -L \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ -L \end{pmatrix} \\ &= - \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ M^2 - LN \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La deuxième composante donne

$$\beta_1^2 M - \beta_2^2 L = E \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

et nous obtenons le premier résultat. La même formule donne

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -N \\ M \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -N \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LN - M^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La première composante donne directement la formule annoncée.  $\square$

Nous obtenons alors directement deux formules pour exprimer la courbure de Gauss.

**Théorème 3.5.3.** *Sur une surface de classe  $C^3$ , la courbure de Gauss est donnée par*

$$\kappa = \frac{1}{E} ((\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2) \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{EG - F^2} (E((\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1) \\ &\quad + F((\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1)) \end{aligned} \quad (3.22)$$

*Démonstration.* Pour la première formule, nous utilisons la première formule du lemme 3.5.2, ainsi que la formule (3.16). Pour la seconde formule, nous utilisons la deuxième formule du lemme 3.5.2 ainsi que les formules (3.17) et (3.18).  $\square$

### 3.6 Courbure géodésique et équation des géodésiques

Nous utilisons maintenant les résultats développés ci-dessus pour obtenir l'expression de la courbure géodésique.

Nous considérons un paramétrage  $(U, \varphi)$  d'une surface de classe  $C^3$ . Nous utilisons les notations introduites ci-dessus. Nous nous donnons le paramétrage d'une courbe à valeurs dans  $\varphi(U)$  en nous donnant une courbe dans  $U$  et en le transportant sur la surface via  $\varphi$ . On a donc une courbe

$$\varphi : I \rightarrow S : s \mapsto \varphi(u(s), v(s)). \quad (3.23)$$

Nous supposons que  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^3$ ,  $\varphi$  de classe  $C^3$ , et que le paramétrage est naturel.

**Proposition 3.6.1.** *Si  $\gamma$  est donné par (3.23) et si le paramétrage est naturel, alors la courbure géodésique en  $s$  est donnée par*

$$\kappa_g = \sqrt{EG - F^2} (\Gamma_{11}^2 (\dot{u})^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \dot{u}^2 \dot{v} + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) \dot{u} (\dot{v})^2 - \Gamma_{22}^1 \dot{v}^3 + \dot{u} \ddot{v} - \ddot{u} \dot{v}).$$

*Démonstration.* Nous utilisons la formule  $\kappa_g = [\vec{t}, \vec{k}, \vec{N}]$ . Nous calculons successivement, par le théorème de dérivation des fonctions composées

$$\vec{t} = \dot{\gamma} = \dot{u} \varphi_u + \dot{v} \varphi_v, \quad (3.24)$$

où la dépendance en  $s$  est sous-entendue. De même,

$$\begin{aligned} \vec{k}(s) &= \ddot{\gamma} = \ddot{u} \varphi_u + \dot{u}(\varphi_{uu} \dot{u} + \varphi_{uv} \dot{v}) \\ &\quad + \ddot{v} \varphi_v + \dot{v}(\varphi_{uv} \dot{u} + \varphi_{vv} \dot{v}) \\ &= (\dot{u})^2 \varphi_{uu} + (\dot{v})^2 \varphi_{vv} + 2\dot{u} \dot{v} \varphi_{uv} + \ddot{u} \varphi_u + \ddot{v} \varphi_v. \end{aligned}$$

Par bilinéarité et antisymétrie du produit mixte, nous avons donc

$$\begin{aligned} \kappa_g &= (\dot{u})^3 [\varphi_u, \varphi_{uu}, \vec{N}] + (\dot{u})^2 \dot{v} ([\varphi_v, \varphi_{uu}, \vec{N}] + 2[\varphi_u, \varphi_{uv}, \vec{N}]) \\ &\quad + \dot{u} (\dot{v})^2 ([\varphi_u, \varphi_{vv}, \vec{N}] + 2[\varphi_v, \varphi_{uv}, \vec{N}]) + (\dot{v})^3 [\varphi_v, \varphi_{vv}, \vec{N}] \\ &\quad + [\varphi_u, \varphi_v, \vec{N}] (\dot{u} \ddot{v} - \ddot{u} \dot{v}). \end{aligned}$$

Il reste à calculer les produits mixtes, en utilisant les équations de Gauss. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} [\varphi_u, \varphi_{uu}, \vec{N}] &= \Gamma_{11}^2 [\varphi_u, \varphi_v, \vec{N}] \\ [\varphi_v, \varphi_{uu}, \vec{N}] &= -\Gamma_{11}^1 [\varphi_u, \varphi_v, \vec{N}] \\ [\varphi_u, \varphi_{uv}, \vec{N}] &= \Gamma_{12}^2 [\varphi_u, \varphi_v, \vec{N}] \\ [\varphi_u, \varphi_{vv}, \vec{N}] &= \Gamma_{22}^2 [\varphi_u, \varphi_v, \vec{N}] \\ [\varphi_v, \varphi_{uv}, \vec{N}] &= -\Gamma_{12}^1 [\varphi_u, \varphi_v, \vec{N}] \\ [\varphi_v, \varphi_{vv}, \vec{N}] &= -\Gamma_{22}^1 [\varphi_u, \varphi_v, \vec{N}] \end{aligned}$$

Enfin, nous concluons en notant que

$$[\varphi_u, \varphi_v, \vec{N}] = \langle \varphi_u \wedge \varphi_v, \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} \rangle = |\varphi_u \wedge \varphi_v| = \sqrt{EG - F^2}.$$

□

Nous pouvons maintenant écrire les équations des géodésiques. En principe, il suffit d'écrire la relation  $\kappa_g = 0$ , mais nous remplaçons cette équation de degré 3 par des équations de degré 2.

**Proposition 3.6.2.** *Une courbe  $C$  paramétrée de manière naturelle par (3.23) est une géodésique si et seulement si*

$$\ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 = 0 \quad (3.25)$$

$$\ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 = 0. \quad (3.26)$$

*Démonstration.* La condition pour que la courbe soit une géodésique et que le vecteur de courbure  $\vec{k}$  soit pour toute valeur de  $s$  orthogonal au plan tangent en  $\gamma(s)$ . Cette condition s'écrit

$$\langle \vec{k}, \varphi_u \rangle = \langle \vec{k}, \varphi_v \rangle = 0.$$

Nous avons calculé  $\vec{k}$  dans la démonstration précédente. Les conditions ci-dessus s'écrivent

$$\dot{u}^2 \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle + \dot{v}^2 \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle + 2\dot{u}\dot{v} \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle + \ddot{u} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + \ddot{v} \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle = 0 \quad (3.27)$$

$$\dot{u}^2 \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \dot{v}^2 \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle + 2\dot{u}\dot{v} \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle + \ddot{u} \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle + \ddot{v} \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 0 \quad (3.28)$$

Nous pouvons écrire ces équations vectoriellement en

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} + \dot{u}^2 \begin{pmatrix} \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle \\ \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle \end{pmatrix} + \dot{v}^2 \begin{pmatrix} \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle \\ \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle \end{pmatrix} + 2\dot{u}\dot{v} \begin{pmatrix} \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle \\ \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle \end{pmatrix} = 0$$

Nous multiplions alors par l'inverse de  $\bar{g}$  et nous obtenons, via la proposition 3.24

$$\begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} + \dot{u}^2 \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} + \dot{v}^2 \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} + 2\dot{u}\dot{v} \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

comme annoncé. □

Il est important de remarquer que les équations des géodésiques ne dépendent que des coefficients de Christoffel, donc de la métrique  $g$  (et de ses dérivées). C'est cette constatation qui va permettre de généraliser les géodésiques dans le contexte riemannien plus général.

Enfin, nous pouvons analyser le lien entre les équations (3.25) et (3.26) et la condition demandant que le paramétrage soit naturel.

Pour rappel, cette condition s'écrit  $\left| \overrightarrow{D_s \gamma(s)} \right|^2 = 1$ , ou encore, puisque  $\overrightarrow{D_s \gamma(s)} = \dot{u}\varphi_u + \dot{v}\varphi_v$ ,

$$\dot{u}^2 \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + 2\dot{u}\dot{v} \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle + \dot{v}^2 \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1. \quad (3.29)$$

Nous avons alors la proposition suivante.

**Proposition 3.6.3.** *Si une courbe  $C$  paramétrée par  $(I, \gamma)$  (non nécessairement naturel) satisfait les équations (3.25) et (3.26) (ou (3.27 et (3.28)), alors  $\left| \overrightarrow{D_s \gamma(s)} \right|$  est constant.*

*Démonstration.* Les expressions de  $\overrightarrow{t}$  et  $\overrightarrow{k}$  données par (3.24) et l'équation suivante ne dépendent pas du fait que le paramétrage soit naturel.

Les équations de l'énoncé expriment alors que  $\overrightarrow{D_s^2 \gamma(s)}$  est orthogonal à  $\varphi_u$  et  $\varphi_v$ . Par linéarité,  $\overrightarrow{D_s^2 \gamma(s)}$  est aussi orthogonal à  $\overrightarrow{D_s \gamma(s)}$ , et donc

$$D_s \left| \overrightarrow{D_s \gamma(s)} \right| = \frac{\langle \overrightarrow{D_s^2 \gamma(s)}, \overrightarrow{D_s \gamma(s)} \rangle}{\left| \overrightarrow{D_s \gamma(s)} \right|} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

## 3.7 Courbure et géodésiques dans un cadre plus général

Les notions de courbure et de géodésiques que nous avons présentées sont valables pour une surface plongée dans un espace affine euclidien de dimension trois. La première forme fondamentale définit en chaque point une application bilinéaire symétrique définie positive sur l'espace tangent en ce point.

On peut étendre cette notion au cadre général des variétés, dont on rappelle la définition en annexe. On doit alors se donner, en chaque point de la variété, une forme bilinéaire sur l'espace tangent, de manière telle que cette application varie de manière lisse en fonction du point. Cela fait appel aux notions de fibrés vectoriels de champs de tenseurs covariants, qui sont définies à l'annexe B.1. On y décrit par exemple comment vérifier qu'un tel champs de tenseurs est de classe  $C^\infty$ , en coordonnées.

Si on demande qu'en chaque point, l'application bilinéaire définisse un produit scalaire, on obtient la notion de métrique riemannienne, qui généralise la première forme fondamentale.

Nous avons remarqué que la courbure de Gauss et les symboles de Christoffel peuvent s'exprimer uniquement en fonction de la première forme fondamentale et de ses dérivées. C'est l'objet du corollaire 3.4.7 et du théorème 3.5.3. Les équations des géodésiques (proposition 3.6.2) ne font quant à elles intervenir que les symboles de Christoffel.

Nous adopterons comme définition des géodésiques et de la courbure dans le cadre général, les expressions fournies par ces résultats.

Enfin, il est à noter que les généralisations qui suivent ne sont pas "complètes" : on travaille en effet sur des surfaces plongées dans  $\mathbb{R}^3$ , mais on y définit une métrique Riemannienne distincte de la métrique riemannienne induite.

# Chapitre 4

## Modèles de géométrie hyperbolique

### 4.1 Cinq modèles de géométrie hyperbolique

Dans cette section, nous allons présenter cinq modèles de géométrie hyperbolique en dimension  $n + 1$ . Nous pouvons construire la totalité de la géométrie hyperbolique sur un unique modèle. Cependant, le fait de prendre en compte plusieurs modèles nous permet de déduire les différentes propriétés de manière plus aisée en fonction de celui que nous étudions. Il est à noter que tous les modèles que nous allons considérer sont définis sur des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Conformément à l'usage, nous noterons le tenseur métrique  $d_s^2$ .

**Définition 4.1.1.** Le modèle du demi-espace de Lobatchevski  $D$  est défini sur le domaine  $\{(1, x_2, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} > 0\}$ . Sa métrique est donnée en chaque point par la formule

$$ds_D^2 = \frac{dx_2^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}.$$

**Définition 4.1.2.** Le modèle de Poincaré  $P$  est défini sur  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ . Sa métrique est donnée en chaque point par la formule

$$ds_P^2 = 4 \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2}.$$

**Définition 4.1.3.** Le modèle de l'hémisphère  $H$  est défini sur  $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \text{ et } x_{n+1} > 0\}$ . Sa métrique est donnée en chaque point par la formule

$$ds_H^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}.$$

**Définition 4.1.4.** Le modèle de Beltrami-Klein  $K$  est défini sur  $\{(x_1, \dots, x_n, 1) : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ . Sa métrique est donnée en chaque point par la formule

$$ds_K^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)} + \frac{(x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n)^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2}.$$

**Définition 4.1.5.** Le modèle de l'hyperboloïde  $L$  est défini sur  $\{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1 \text{ et } x_{n+1} > 0\}$ . Sa métrique est donnée en chaque point par la formule

$$ds_L^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2.$$



La notion d'isomorphie dans ce contexte est donnée par la généralisation naturelle de celle d'isométrie affine, encore appelée isométrie, et dont la définition suit <sup>1</sup>.

**Définition 4.1.6.** Si  $(S_1, g_1)$  et  $(S_2, g_2)$  sont deux surfaces munies d'une métrique riemanniennes, une isométrie locale est une application différentiable  $f : S_1 \rightarrow S_2$  telle que  $f^*g_2 = g_1$ .

Une isométrie (globale) est une isométrie locale bijective.

Cette notion est importante, car on peut montrer que dans deux modèles isométriques, la courbure de Gauss et les géodésiques se correspondent d'un modèle à l'autre via l'isométrie. Il en va de même pour la distance que l'on peut définir sur ces modèles.

**Définition 4.1.7.** Soient  $V$  une hypersurface de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et  $O$  un point n'appartenant pas à  $V$ . La projection centrale de centre  $O$  sur  $V$  est l'application qui à tout point  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  associe l'intersection de la droite  $OP$  avec  $V$ , si cette intersection existe.

**Définition 4.1.8.** Soient  $V$  et  $W$  des hypersurfaces de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , et soit  $d$  une droite orthogonale à  $V$ . Une projection orthogonale de  $V$  sur  $W$  est une application qui à un point  $P$  de  $V$  associe l'intersection de  $W$  avec la parallèle à  $d$  passant par  $P$ , si cette intersection existe.

Il nous est possible de démontrer que ces modèles sont tous isométriques. Pour cela, nous pouvons obtenir des isométries entre leurs métriques. Cette méthode est en majeure partie tirée de [5]. Nous commençons par définir les applications suivantes :

1.  $\alpha : H \rightarrow D$ , projection centrale de sommet  $(-1, 0, \dots, 0)$  ;
2.  $\beta : H \rightarrow P$ , projection centrale de sommet  $(0, \dots, 0, -1)$  ;
3.  $\gamma : K \rightarrow H$ , projection orthogonale ;
4.  $\delta : K \rightarrow L$ , projection centrale de sommet  $(0, \dots, 0)$ .

La première étape consiste à déterminer l'image de chaque point des domaines de définition de ces applications.

**Proposition 4.1.9.** *La projection centrale  $\alpha$  est l'application*

$$\alpha : H \rightarrow D : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(1, \frac{2x_2}{(x_1 + 1)}, \dots, \frac{2x_{n+1}}{(x_1 + 1)}\right).$$

*Démonstration.* Soit  $A = (x_1, \dots, x_{n+1})$  un point de  $H$ , et posons  $O$  comme étant le point  $(-1, 0, \dots, 0)$ . Nous cherchons le point  $B = (1, y_2, \dots, y_{n+1})$  commun à  $D$  et à la droite  $AO$ . Nous cherchons donc un réel  $k$  tel que

$$\begin{cases} y_1 = 1 & = kx_1 + (1 - k).(-1) \\ y_i & = kx_i \quad \forall i \in \{2, \dots, n + 1\}. \end{cases}$$

La première équation nous donne l'égalité  $k = \frac{2}{x_1 + 1}$ . Le point  $B$  a donc pour coordonnées

$$\begin{cases} y_1 & = 1 \\ y_i & = \frac{2x_i}{x_1 + 1} \quad \forall i \in \{2, \dots, n + 1\}. \end{cases}$$

---

1. La notion de pull-back utilisée dans la définition est donnée à l'annexe B.3.

Il n'y a pas de problème au niveau des conditions d'existence, étant donné que  $x_1$  est obligatoirement différent de  $-1$  au vu de la définition de  $H$ . De plus, à nouveau par définition de  $H$ , nous avons bien  $y_{n+1} > 0$ .  $\square$

**Proposition 4.1.10.** *La projection centrale  $\beta$  est l'application*

$$\beta : H \rightarrow P : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left( \frac{x_1}{x_{n+1} + 1}, \frac{x_2}{x_{n+1} + 1}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1} + 1}, 0 \right)$$

*Démonstration.* Tout comme dans le cas précédent, nous choisissons un point  $A$  de  $H$ , et le centre de la projection est appelé  $O$  (cette fois-ci, il s'agit du point  $(0, \dots, 0, -1)$ ). Soit  $B$  le point commun à  $P$  et à la droite  $AO$ . Nous cherchons  $k$  tel que

$$\begin{cases} y_i &= kx_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ y_{n+1} = 0 &= kx_{n+1} + (1 - k) \cdot (-1). \end{cases}$$

Nous déduisons de la deuxième ligne que  $k = \frac{1}{x_{n+1} + 1}$ . Les équations deviennent

$$\begin{cases} y_i &= \frac{x_i}{x_{n+1} + 1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ y_{n+1} &= 0. \end{cases}$$

De plus, il nous est possible de montrer que  $y_1^2 + \dots + y_n^2 < 1$ .  $\square$

**Proposition 4.1.11.** *La projection orthogonale  $\gamma$  est l'application*

$$\gamma : K \rightarrow H : (x_1, \dots, x_n, 1) \mapsto \left( x_1, x_2, \dots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2} \right).$$

*Démonstration.* Soit  $A = (x_1, \dots, x_n, 1)$  un élément de  $K$ . Nous cherchons un réel strictement positif  $k$  tel que  $B = (x_1, \dots, x_n, k)$  soit l'image de  $A$  par projection orthogonale, c'est-à-dire tel que

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + k^2 = 1.$$

Nous réécrivons l'équation précédente :

$$k = \pm \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}.$$

Ce  $k$  est bien défini et surtout non nul par définition de  $K$ . De plus, comme nous le voulons strictement positif, il doit être égal à la racine carrée positive. Cela nous donne la définition de  $\gamma$ .  $\square$

**Proposition 4.1.12.** *La projection centrale  $\delta$  est l'application*

$$\delta : K \rightarrow L : (x_1, x_2, \dots, x_n, 1) \mapsto \left( \frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}}, \dots, \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}} \right).$$

*Démonstration.* Soient  $A = (x_1, \dots, x_n, 1)$  un point de  $K$  et  $O$  le point de coordonnées nulles. Si  $B = (y_1, \dots, y_{n+1})$  est l'intersection de  $L$  avec la droite  $AO$ , alors il existe un réel  $k$  tel que

$$\begin{cases} y_i &= kx_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ y_{n+1} &= k. \end{cases}$$

La définition de  $L$  nous donne l'égalité  $k^2(x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1) = -1$ . Nous en déduisons  $k = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}}$ . Le fait que  $y_{n+1}$  est positif par définition de  $L$  nous donne l'image par  $\delta$  que nous cherchions.  $\square$

On démontre maintenant que ces applications sont bel et bien des isométries en utilisant la définition rappelée ci-dessus et le calcul explicite du pull-back donnée à la proposition B.3.6.

**Proposition 4.1.13.** *Nous avons  $\alpha^*(ds_D^2) = ds_H^2$ .*

*Démonstration.* Posons en premier lieu

$$y_2 = \frac{2x_2}{x_1 + 1}, \dots, y_{n+1} = \frac{2x_{n+1}}{x_1 + 1}.$$

Pour tout  $i$  compris entre 2 et  $n + 1$ , nous avons

$$dy_i = 2 \frac{(x_1 + 1)dx_i - x_i dx_1}{(x_1 + 1)^2} = \frac{2}{x_1 + 1} \left( dx_i - \frac{x_i}{x_1 + 1} dx_1 \right).$$

Ensuite, comme  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  est un élément de  $H$ , nous avons  $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ . Ainsi,

$$2x_1 dx_1 + \dots + 2x_{n+1} dx_{n+1} = 0 \Leftrightarrow x_1 dx_1 = -(x_2 dx_2 + \dots + x_{n+1} dx_{n+1})$$

et

$$x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 - x_1^2.$$

Maintenant que nous avons obtenu tout cela, nous pouvons expliquer l'égalité :

$$\begin{aligned} \alpha^*(ds_D^2) &= \frac{1}{y_{n+1}^2} (dy_2^2 + \dots + dy_{n+1}^2) \\ &= \frac{(x_1 + 1)^2}{4x_{n+1}^2} \frac{4}{(x_1 + 1)^2} \left[ \sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 - \frac{2dx_1}{x_1 + 1} \sum_{i=2}^{n+1} x_i dx_i + \frac{dx_1^2}{(x_1 + 1)^2} \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 \right] \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left[ \sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2 + \frac{2}{x_1 + 1} x_1 dx_1^2 + \frac{dx_1^2}{(x_1 + 1)^2} (1 - x_1^2) \right] \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2 \\ &= ds_H^2. \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 4.1.14.** *Nous avons  $\beta^*(ds_P^2) = ds_H^2$ .*

*Démonstration.* Soit  $(y_1, \dots, y_n, 0)$  l'image de  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  par  $\beta$ . Nous avons

$$y_1 = \frac{x_1}{x_{n+1} + 1}, \dots, y_n = \frac{x_n}{x_{n+1} + 1}. \quad (4.1)$$

Pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ , nous obtenons

$$dy_i = \frac{(x_{n+1} + 1)dx_i - x_i dx_{n+1}}{(x_n + 1) + 1)^2} = \frac{1}{x_{n+1} + 1} \left( dx_i - \frac{x_i dx_{n+1}}{x_{n+1} + 1} \right).$$

Le fait que  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  est un élément de  $\beta$  implique que

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1.$$

Cette égalité nous permet d'écrire les deux équations suivantes :

$$2x_1 dx_1 + \dots + 2x_n dx_n + 2x_{n+1} dx_{n+1} = 0, \text{ et} \quad (4.2)$$

$$1 - x_{n+1}^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2. \quad (4.3)$$

Il nous est maintenant possible d'établir l'égalité.

$$\begin{aligned} \beta^*(ds_P^2) &= 4 \frac{dy_1^2 + \dots + dy_n^2}{(1 - y_1^2 - \dots - y_n^2)^2} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{(1 - y_1^2 - \dots - y_n^2)^2} \frac{1}{(x_{n+1} + 1)^2} \left[ \sum_{i=1}^n dx_i^2 - \frac{2dx_{n+1}}{x_{n+1} + 1} \sum_{i=1}^n x_i dx_i + \frac{dx_{n+1}^2}{(x_{n+1} + 1)^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right] \end{aligned}$$

Intéressons-nous en particulier à la première fraction de la seconde ligne. En nous servant des égalités (4.1) et (4.3), nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - y_1^2 - \dots - y_n^2)^2} &= \frac{(x_{n+1} + 1)^4}{((x_{n+1} + 1)^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2} \\ &= \frac{(x_{n+1} + 1)^4}{(x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} + 1 + x_{n+1}^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(x_{n+1} + 1)^2}{4x_{n+1}^2}. \end{aligned}$$

L'égalité devient donc

$$\beta^*(ds_P^2) = \frac{1}{x_{n+1}^2} \left[ \sum_{i=1}^n dx_i^2 - \frac{2dx_{n+1}}{x_{n+1} + 1} \sum_{i=1}^n x_i dx_i + \frac{dx_{n+1}^2}{(x_{n+1} + 1)^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right].$$

Les équations (4.2) et (4.3) nous permettent de réécrire le second membre :

$$\begin{aligned} \beta^*(ds_P^2) &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \left[ \sum_{i=1}^n dx_i^2 + \frac{2x_{n+1}}{x_{n+1} + 1} dx_{n+1}^2 + \frac{dx_{n+1}^2}{(x_{n+1} + 1)^2} (1 - x_{n+1}^2) \right] \\ &= \frac{1}{x_{n+1}^2} \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2 \\ &= ds_H^2. \end{aligned}$$

□

**Proposition 4.1.15.** *Nous avons  $\gamma^*(ds_H^2) = ds_K^2$ .*

*Démonstration.* Posons

$$y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n \text{ et } y_{n+1}^2 = 1 - y_1^2 - \dots - y_n^2 = 1 - x_1^2 - \dots - x_n^2.$$

Nous avons donc  $dy_i = dx_i$  pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$  et  $y_{n+1}dy_{n+1} = -(x_1dx_1 + \dots + x_ndx_n)$ . Tout comme pour le cas précédent, il ne nous reste plus qu'à expliquer l'égalité :

$$\begin{aligned} \gamma^*(ds_H^2) &= \frac{1}{y_{n+1}^2}(dy_1^2 + \dots + dy_n^2) + \frac{1}{y_{n+1}^2}dy_{n+1}^2 \\ &= \frac{1}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)}(dx_1^2 + \dots + dx_n^2) + \frac{(x_1dx_1 + \dots + x_ndx_n)^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^2} \\ &= ds_K^2. \end{aligned}$$

□

De la même manière, nous pouvons obtenir le résultat suivant.

**Proposition 4.1.16.** *Nous avons  $\delta^*(ds_L^2) = ds_K^2$ .*

## 4.2 Géodésiques du plan de Lobatchevski

Rappelons que le (demi-)plan de Lobatchevski correspond au modèle  $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y > 0 \right\}$

en dimension 2. Nous avons donc  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ . Nous commençons par calculer les symboles de Christoffel.

**Proposition 4.2.1.** *Les symboles de Christoffel du plan de Lobatchevski en un point  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  sont donnés par*

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/y \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* Nous appliquons le corollaire 3.4.7, avec de plus  $\bar{g} = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $E = \frac{1}{y^2}, F = 0, G = \frac{1}{y^2}$ . □

Nous pouvons maintenant écrire les équations des géodésiques.

**Proposition 4.2.2.** *Une courbe  $C$  de  $H$  paramétrée de manière naturelle par  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  est une géodésique si et seulement si*

$$\ddot{x} - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y} = 0 \tag{4.4}$$

$$\ddot{y} + \frac{\dot{x}^2}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y} = 0 \tag{4.5}$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer les propositions 3.6.2 et 4.2.3.  $\square$

Avant de déterminer les géodésiques, rappelons la condition qui exprime que le paramétrage est naturel : pour une courbe paramétrée  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  le paramétrage est naturel si et seulement si

$$\frac{\dot{x}^2}{y^2} + \frac{\dot{y}^2}{y^2} = 1. \quad (4.6)$$

On peut maintenant donner une première information géométrique sur les géodésiques.

**Proposition 4.2.3.** *Toute géodésique<sup>2</sup> du demi-plan de Lobatchevski est :*

1. *Soit une demi-droite paramétrée par*

$$\begin{cases} x(s) = K \\ y(s) = \frac{1}{s}, \end{cases}$$

2. *Soit un demi-cercle ouvert centré sur un point de l'axe des abscisses paramétré par*

$$\begin{cases} x(s) = \pm \frac{1}{K} \tanh(\pm s + K') + K'' \\ y(s) = \frac{1}{K \cosh(t(s))}, \end{cases}$$

où  $K$  est une constante non nulle, et  $K'$  et  $K''$  sont des constantes réelles.

*Démonstration.* On considère une géodésique paramétrée de manière naturelle par  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  sur un intervalle  $I$ . L'équation (4.4) est équivalente à

$$\left( \frac{\dot{x}}{y^2} \right)' = 0. \quad (4.7)$$

On le voit en effectuant la dérivée du membre de gauche de (4.7) et en utilisant le fait que  $y$  est strictement positif sur le domaine considéré. Il existe donc une constante  $K$  telle que

$$\dot{x} = Ky^2.$$

Le résultat varie alors selon la valeur de  $K$ . Si  $K = 0$ , alors on obtient  $\dot{x} = 0$  sur  $I$ . Il existe donc une constante  $C$  telle que  $x(s) = C$  pour tout  $s \in I$ . L'équation 4.5 donne alors

$$\ddot{y} - \frac{\dot{y}}{y^2} = 0,$$

ou de manière équivalente

$$\left( \frac{\dot{y}}{y} \right)' = 0.$$

Il existe alors une constante  $D$  telle que

$$\frac{\dot{y}(s)}{y} = D \quad \forall s \in I. \quad (4.8)$$

---

2. On considère ici l'image du paramétrage  $(I, \gamma)$ , c'est-à-dire la courbe décrite par le paramétrage.

Si  $D$  est nul, on obtient que  $\gamma(s)$  est constant sur  $I$  (on a une géodésique triviale). Dans le cas contraire, on a

$$\dot{y}(s) = Dy(s),$$

et la fonction  $y$  est déterminée par deux constantes :

$$y(s) = a \exp(Ds).$$

Enfin, on a un paramétrage naturel si et seulement si

$$\left( \frac{\dot{y}(s)}{y} \right)^2 = 1,$$

ce qui donne  $D = \pm 1$ . Il reste à traiter le cas  $K \neq 0$ . Traitons le cas  $K > 0$ , l'autre étant similaire. De l'équation (4.6), on tire

$$K^2 y^4 + \dot{y}^2 = y^2 \tag{4.9}$$

ou

$$\dot{y}^2 = y^2(1 - K^2 y^2). \tag{4.10}$$

Il est possible de résoudre cette équation en la divisant par  $\dot{x}^2$ , et en considérant  $y$  comme une fonction de  $x$ . Nous proposons d'effectuer un changement de variables adapté à la situation. Si  $y(s)$  est solution de l'équation (4.9), alors on a  $K^2 y^2(s) \leq 1$ , donc  $\frac{1}{K^2 y^2(s)} \geq 1$  et, comme  $y(s) \geq 1$ ,  $\frac{1}{K y(s)} \geq 1$ . Si on se place en un point où  $y(s) \neq \frac{1}{K}$ , alors  $\frac{1}{K y(s)} > 1$ , et on peut définir un changement de variables par

$$\cosh(t(s)) = \frac{1}{K y(s)},$$

ou de manière équivalente

$$y(s) = \frac{1}{K \cosh(t(s))}.$$

L'équation (4.10) s'écrit alors

$$\frac{\sinh^2(t(s)) \dot{t}^2(s)}{K^2 \cosh^4(t(s))} = \frac{\tanh^2(t(s))}{K^2 \cosh^2(t(s))}$$

On obtient donc

$$\dot{t}^2(s) = 1,$$

qui donne

$$t(s) = \pm s + K'.$$

On obtient donc la paramétrisation

$$y(s) = \frac{1}{K \cosh(\pm s + K')}$$

puis l'équation 4.8 donne

$$\dot{x}(s) = \frac{K}{K^2 \cosh^2(\pm s + K')}$$

et finalement

$$x(s) = \pm \frac{1}{K} \tanh(\pm s + K') + K''.$$

On peut vérifier que les fonctions  $x(s)$  et  $y(s)$  satisfont les équations (4.4), (4.5) et (4.6). Pour cela, il nous faut connaître  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  et  $\dot{y}$ .

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \pm \left( -\frac{2}{K} \frac{\sinh(\pm s + K')}{\cosh^3(\pm s + K')} \right) \\ \dot{y} &= \pm \frac{1}{K} \left( -\frac{\sinh(\pm s + K')}{\cosh^2(\pm s + K')} \right) \\ \ddot{y} &= \pm \frac{1}{K} \frac{2 \sinh^2(\pm s + K') - \cosh^2(\pm s + K')}{\cosh^3(\pm s + K')}.\end{aligned}$$

Le premier membre de l'équation (4.4) devient

$$\begin{aligned}\ddot{x} - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y} &= -\frac{2}{K} \frac{\sinh(\mp s + K')}{\cosh^3(\mp s + K')} - 2 \left( \frac{1}{K \cosh^2(\pm s + K')} \right) \left( -\frac{\sinh(\pm s + K')}{K \cosh^2(\pm s + K')} \right) (K \cosh(\pm s + K')) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Le premier membre de l'équation (4.5) devient

$$\begin{aligned}\ddot{y} + \frac{\dot{x}^2}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y} &= \frac{2 \sinh^2(\pm s + K') - \cosh^2(\pm s + K')}{K \cosh^3(\pm s + K')} + \left( \frac{1 - \sinh^2(\pm s + K')}{K^2 \cosh^4(\pm s + K')} \right) K \cosh(\pm s + K') \\ &= 0.\end{aligned}$$

Enfin, le premier membre de l'équation (4.6) devient

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}^2}{y^2} + \frac{\dot{y}^2}{y^2} &= \left( \frac{1}{K^2 \cosh^4(\pm s + K')} \right) K^2 \cosh^2(\pm s + K') + \left( \frac{\sinh^2(\pm s + K')}{K^2 \cosh^4(\pm s + K')} \right) K^2 \cosh^2(\pm s + K') \\ &= \frac{1 + \sinh^2(\pm s + K')}{\cosh^2(\pm s + K')} = 1.\end{aligned}$$

On constate alors directement que  $\gamma(s)$  appartient à un cercle centré sur  $(0, K'')$  et de rayon  $\frac{1}{K}$ , puisque

$$\begin{aligned}(x(s) - K'')^2 + y(s)^2 &= \frac{1}{K^2} \left( \frac{1}{\cosh^2(\pm s + K')} + \tanh^2(\pm s + K') \right) \\ &= \frac{1}{K^2},\end{aligned}$$

pour tout  $s$ . □



### 4.3 Comment définit-on les géodésiques dans le modèle de Beltrami ?

Pour obtenir les géodésiques dans le modèle de Beltrami-Klein  $K$ , nous allons nous servir de celles que nous avons trouvées dans le modèle du plan de Lobatchevski  $D$ . Il nous faut dès lors calculer l'isométrie entre ces deux modèles.

**Proposition 4.3.1.** *L'isométrie  $\eta$  entre  $D$  et  $K$  est donnée par*

$$\eta : D \rightarrow K : (1, y_1, y_2) \mapsto \left( \frac{4 - y_1^2 - y_2^2}{4 + y_1^2 + y_2^2}, \frac{4y_1}{4 + y_1^2 + y_2^2}, 1 \right).$$

*Démonstration.* Nous considérons les applications  $\alpha$  et  $\gamma$  considérées précédemment. Leur composition nous donne l'application

$$\alpha \circ \gamma : K \rightarrow D : (x_1, x_2, 1) \mapsto \left( 1, \frac{2x_2}{x_1 + 1}, \frac{2\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}{x_1 + 1} \right).$$

Nous cherchons l'isométrie inverse  $\eta = (\alpha \circ \gamma)^{-1}$ . Soient  $y_1$  et  $y_2$  tels que  $\alpha \circ \gamma(x_1, x_2, 1) = (1, y_1, y_2)$ . Nous avons donc

$$\begin{cases} y_1 &= \frac{2x_2}{x_1 + 1} \\ y_2 &= \frac{2\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}{1 + x_1} \end{cases}$$

Nous définissons  $\varphi(y_1, y_2)$  comme suit :

$$\begin{aligned} \varphi(y_1, y_2) &= \left( \frac{y_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{y_2}{2} \right)^2 \\ &= \frac{x_2^2}{(1 + x_1)^2} + \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{(1 + x_1)^2} \\ &= \frac{1 - x_1^2}{(1 + x_1)^2} \\ &= \frac{1 - x_1}{1 + x_1}. \end{aligned}$$

Cela nous permet de réécrire  $x_1$  en fonction de  $y_1$  et  $y_2$  :

$$\begin{aligned} \varphi(y_1, y_2) + \varphi(y_1, y_2)x_1 &= 1 - x_1 \\ \Leftrightarrow (1 + \varphi(y_1, y_2))x_1 &= 1 - \varphi(y_1, y_2) \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{1 - \varphi(y_1, y_2)}{1 + \varphi(y_1, y_2)} = \frac{4 - y_1^2 - y_2^2}{4 + y_1^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Nous en concluons la valeur de  $x_2$ .

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{y_1(x_1 + 1)}{2} \\ &= \frac{y_1}{2} \left( 1 + \frac{4 - y_1^2 - y_2^2}{4 + y_1^2 + y_2^2} \right) \\ &= \frac{4y_1}{4 + y_1^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

□

Maintenant que nous avons notre isométrie, nous pouvons obtenir les géodésiques dans le disque de Beltrami-Klein. En effet,

**Théorème 4.3.2.** *L'image isométrique d'une géodésique est une géodésique.*

Nous allons démontrer la chose suivante :

**Théorème 4.3.3.** *Les géodésiques dans le disque de Beltrami-Klein sont les segments de droite usuels dont les extrémités sont situées sur le cercle de rayon 1.*

*Démonstration.* Nous reprenons les fonctions  $x(s)$  et  $y(s)$  décrites dans la proposition 4.2.3, et nous traitons le cas des demi-cercles, l'autre se traitant de la même manière. Nous réécrivons l'isométrie  $\eta$  de la proposition 4.3.1 afin de nous faciliter la tâche.

$$\eta : D \rightarrow K : (1, x, y) \mapsto \left( \frac{4 - x^2 - y^2}{4 + x^2 + y^2}, \frac{4y}{4 + x^2 + y^2}, 1 \right).$$

Étant donné le fait que nous voyons apparaître  $x^2 + y^2$  plusieurs fois dans la formulation de  $\eta$ , nous calculons ce terme immédiatement.

$$\begin{aligned} x^2(s) + y^2(s) &= \frac{1}{K^2} \left( \tanh^2(s + K') + \frac{1}{\cosh^2(s)} \right) + 2 \frac{K''}{K} \tanh(s + K') + (K'')^2 \\ &= \frac{1}{K^2} + \frac{2K''}{K} \tanh(s + K') + (K'')^2. \end{aligned}$$

Nous considérons à présent l'application  $\eta'$  telle que  $\eta'(x, y) = ((\eta)_1(x, y), (\eta)_2(x, y))$ . Par abus de langage,  $\eta'$  est appelé  $\eta$  dans la suite de la démonstration. Nous avons donc

$$\eta(x(s), y(s)) = \left( \frac{4 - \left( \frac{1}{K^2} + \frac{2K''}{K} \tanh(s + K') + (K'')^2 \right)}{4 + \left( \frac{1}{K^2} + \frac{2K''}{K} \tanh(s + K') + (K'')^2 \right)}, \frac{4 \left( \frac{\tanh(s + K')}{K} + K'' \right)}{4 + \left( \frac{1}{K^2} + \frac{2K''}{K} \tanh(s + K') + (K'')^2 \right)} \right).$$

Notre but étant de montrer que  $\eta(x(s), y(s))$  correspond à un segment de droite inclus dans le disque et d'extrémités sur le cercle, il nous faut vérifier deux choses :

1. Le fait que  $\eta(x(s), y(s))$  satisfait une équation du premier degré.
2. Le fait que les limites de  $\eta(x(s), y(s))$  pour  $s$  tendant vers  $\pm\infty$  appartiennent au bord du disque unité.

Commençons par montrer le premier point. Nous définissons les éléments  $N_1$ ,  $N_2$  et  $D$  comme suit :

$$\begin{aligned} N_1 &= 4 - \left( \frac{1}{K^2} + \frac{2K''}{K} \tanh(s + K') + (K'')^2 \right), \\ N_2 &= 4 \left( \frac{\tanh(s + K')}{K} + K'' \right), \\ D &= 4 + \left( \frac{1}{K^2} + \frac{2K''}{K} \tanh(s + K') + (K'')^2 \right). \end{aligned}$$

Il s'agit respectivement du numérateur de la première coordonnée, de celui de la deuxième coordonnée et du dénominateur de chacune d'entre elles. Pour démontrer le premier point, il nous faut trouver des  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que

$$aN_1 + bN_2 + cD = 0.$$

Nous réécrivons cette égalité sous la forme de deux équations, l'une contenant tous les termes dépendant de  $s$  (et donc de  $\tanh(s + K')$ ) et l'autre contenant tous les termes indépendants. Cela nous donne au final

$$\begin{cases} aK'' + 2b + cK'' = 0 \\ a\left(4 - \frac{1}{K^2} - K''^2\right) + 4bK'' + c\left(4 + \frac{1}{K^2} + K''^2\right) = 0. \end{cases}$$

Nous avons donc bel et bien affaire à l'équation d'une droite en dimension 3. Cela assure l'existence des coefficients  $a, b, c$  demandés.

Cherchons à présent les extrémités de ce segment. Nous cherchons les limites de  $\eta(x(s), y(s))$  en  $\pm\infty$ . En remplaçant  $s$  dans la définition de  $\eta$ , nous obtenons les points

$$A = \left( \frac{4 - \left(\frac{1}{K} - K''\right)^2}{4 + \left(\frac{1}{K} - K''\right)^2}, \frac{4\left(-\frac{1}{K} + K''\right)}{4 + \left(\frac{1}{K} - K''\right)^2} \right) \text{ et } B = \left( \frac{4 - \left(\frac{1}{K} + K''\right)^2}{4 + \left(\frac{1}{K} + K''\right)^2}, \frac{4\left(\frac{1}{K} + K''\right)}{4 + \left(\frac{1}{K} + K''\right)^2} \right).$$

Il s'agit bien de points situés sur le cercle de rayon 1.  $\square$

## 4.4 Projection stéréographique

Nous avons montré dans la section 4.2 que les cinq modèles présentés sont isomorphes. Nous nous intéressons maintenant à deux modèles célèbres, ceux de Beltrami-Klein et de Poincaré. Nous cherchons en particulier à établir un isomorphisme direct entre les deux disques. C'est pourquoi dans cette section, nous allons définir la projection stéréographique et démontrer qu'elle préserve les angles.

**Définition 4.4.1.** Soient  $S^n$  une sphère de dimension  $n$  dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\alpha$  le plan tangent affine à  $S^n$  passant par son pôle sud  $S$ , et  $N$  le pôle nord de  $S^n$ . Si  $x$  est un point de  $S^n \setminus \{N\}$ , il existe un unique point  $\pi(x)$  commun à  $\alpha$  et à la droite passant par  $x$  et  $N$ . Nous appelons ce point  $\pi(x)$  la projection stéréographique de  $x$  sur  $\alpha$ .

**Remarque 4.4.2.** Il existe d'autres formes de projections stéréographiques. Nous aurions pu aussi considérer la projection qui envoie un point  $x$  de  $S^n \setminus \{S\}$  sur le plan tangent affine à  $S^n$  en  $N$ . Une autre possibilité est de projeter les points de  $S^n$  sauf un de ses pôles sur le plan équatorial de la sphère. Cependant, nous n'allons considérer dans la suite de cette section que la projection présentée dans la définition 4.4.1.

**Définition 4.4.3.** Une application préserve les angles entre deux vecteurs si la valeur du produit scalaire des deux vecteurs dans l'ensemble de départ est égale à celle du produit scalaire de leurs images dans l'ensemble image.

**Définition 4.4.4.** L'angle entre deux courbes sécantes est égal à l'angle entre leurs vecteurs tangents respectifs en l'intersection.

**Théorème 4.4.5** (Conformité, préservation des angles). *Reprenons les notations de la définition précédente. L'application  $\pi$  préserve les angles entre les courbes sur  $S^n \setminus \{N\}$ . De plus, si  $x \in S^n \setminus \{N, S\}$  et si  $T = xy$  est un segment de droite tangent à  $S^n$  en  $x$ , alors les angles  $\widehat{\pi(x)xy}$  et  $\widehat{x\pi(x)\pi(y)}$  sont soit égaux, soit complémentaires.*<sup>3</sup>

*Démonstration.* Nous pouvons supposer que :

- $S^n$  est la sphère unité de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ;
- $S$  est le point  $(0, \dots, 0, -1)$  ;
- $N$  est le point  $(0, \dots, 0, 1)$  ;
- $\alpha$  est le plan  $x_{n+1} = -1$ .

L'application  $\pi$  est donnée par la formule  $\pi(x) = (y_1, \dots, y_n, -1)$ , avec

$$y_i = \frac{-2}{x_{n+1} - 1} x_i. \quad (4.11)$$

En effet, soit  $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$  un point de  $S^n$  différent de  $N$ . L'image  $\pi(x)$  de  $x$  se trouve sur la droite  $xN$ , c'est-à-dire qu'il existe  $k$  tel que

$$\begin{cases} y_i &= kx_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ y_{n+1} &= kx_{n+1} + (1 - k). \end{cases}$$

La deuxième équation nous donne la valeur de  $k$ , et nous trouvons bien les valeurs pour les  $y_i$  de l'équation (4.11).

Soit  $ds^2 = dy_1^2 + \dots + dy_n^2$  la métrique sur  $\alpha$ . Cherchons son image sur  $S^n$  grâce au pull-back de  $\pi$ . En d'autres termes, nous cherchons  $\pi^*(ds^2)$ .

À partir des définitions des  $y_i$ , nous déduisons les pull-back des  $dy_i$ , pour  $i$  compris entre 1 et  $n$  :

$$\pi^*(dy_i) = \frac{-2}{x_{n+1} - 1} \left( dx_i - \frac{x_i}{x_{n+1} - 1} dx_{n+1} \right).$$

De plus, le fait que  $x$  est un point de  $S^n$  nous donne les deux équations suivantes :

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1$$

et

$$x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n + x_{n+1} dx_{n+1} = 0.$$

Il nous vient alors cette équation :

$$\pi^*(ds^2) = \frac{4}{(x_{n+1} - 1)^2} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2).$$

En conclusion, en chaque point, le pull-back de la métrique euclidienne sur  $\alpha$  est un multiple de la métrique euclidienne sur  $S^n$ . Multiplier les distances dans un espace tangent par une constante positive ne modifie pas les angles : l'application  $\pi$  préserve donc les angles.

---

3. Démonstration tirée en grande partie de [5].

Passons à présent à la seconde assertion du théorème. Pour le démontrer, nous allons devoir poser une petite propriété. Soient  $P$  et  $P'$  deux plans de dimension  $n$  dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{n+1}$ , qui s'intersectent en  $Q$  de dimension  $n - 1$ . Nous choisissons trois points  $q \in Q$ ,  $p \in P$  et  $p' \in P'$  tels que les segments  $pq$  et  $p'q$  sont de même longueur et sont tous les deux perpendiculaires à  $Q$ .

Si  $r$  est un point de  $Q$ , il est évident que les angles  $\widehat{pqr}$  et  $\widehat{p'qr}$  sont égaux. Au vu de ce qui a été dit avant, les triangles  $pqr$  et  $p'qr$  sont donc semblables, et les segments  $pr$  et  $p'r$  sont de même longueur. Ainsi, par les propriétés des triangles isocèles, les angles  $\widehat{pp'r}$  et  $\widehat{p'pr}$  sont égaux.

Nous choisissons à présent des éléments de  $\mathbb{R}^{n+1}$  pour les faire correspondre avec la propriété précédente :

- $P$  est le plan  $\alpha$ , c'est-à-dire le plan tangent à  $S^n$  en  $S$  ;
- $P'$  est le plan tangent à  $S^n$  en  $x$  ;
- $p$  est le point  $x$  ;
- $p'$  est le point  $\pi(x)$  ;
- $Q$  est l'intersection de  $P$  et  $P'$  ;
- Nous pouvons supposer que  $y$  est un point de  $Q$  (et donc que  $y$  est égal à  $\pi(y)$ ) ;
- $r$  est le point  $y$ .

Nous avons  $\widehat{pp'r}$  égal à  $\widehat{p'pr}$ . La seconde assertion est donc démontrée.

□

## 4.5 Disque de Poincaré

Nous allons à partir de maintenant nous intéresser à deux modèles en particulier. Nous commençons avec le disque de Poincaré. Il nous est possible d'obtenir les géodésiques du modèle de Poincaré de la même manière que pour celles de Beltrami-Klein.

**Définition 4.5.1.** Le disque de Poincaré, aussi appelé représentation conforme, est un modèle de géométrie hyperbolique en deux dimensions. Dans cette représentation, tous les points sont situés à l'intérieur du disque unité, tandis que l'ensemble des droites est composé des diamètres du disque et des arcs de cercle inclus dans le disque qui sont orthogonaux à sa frontière.

Si cette représentation est nommée d'après Henri Poincaré, elle avait déjà été proposée par Eugenio Beltrami lors de son étude de la géométrie hyperbolique. La dénomination "disque de Poincaré" est simplement due au fait que la redécouverte de la représentation par le mathématicien français est devenue plus connue que les travaux de Beltrami datant de 14 ans auparavant.

Nous travaillons en dimension 2, donc la métrique donnée à la définition 4.1.2 devient

$$ds^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

**Théorème 4.5.2.** *La métrique de Poincaré dans le disque donnée sous forme matricielle est donnée par*

$$g_P(x, y) = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Définition 4.5.3.** Soient deux points  $P$  et  $Q$  du disque de Poincaré. La distance entre ces deux points nous est donnée par la formule suivante :

$$d(P, Q) = \operatorname{arcosh} \left( 1 + \frac{2|PQ|^2}{(1 - |OP|^2)(1 - |OQ|^2)} \right),$$

où  $O$  est le centre du disque.

Comme dit précédemment, les droites dans le disque de Poincaré sont soit des diamètres de celui-ci, soit des arcs de cercle inclus dans le disque et orthogonaux à sa frontière.

Dans le cas où la droite considérée est un arc de cercle, son équation est de la forme

$$x^2 + y^2 + ax + by + 1 = 0.$$

Si l'on connaît deux points  $U$  et  $V$  du disque qui appartiennent à cet arc (et qui ne sont pas diamétralement opposés), et si leurs coordonnées respectives sont  $(u_1, u_2)$  et  $(v_1, v_2)$ , l'équation peut s'écrire sous la forme

$$x^2 + y^2 + \frac{u_2(v_1^2 + v_2^2) - v_2(u_1^2 + u_2^2) + u_2 - v_2}{u_1v_2 - u_2v_1}x + \frac{v_1(u_1^2 + u_2^2) - u_1(v_1^2 + v_2^2) + v_1 - u_1}{u_1v_2 - u_2v_1}y + 1 = 0.$$

En particulier, si l'on choisit deux points sur la frontière du disque, on obtient l'équation

$$x^2 + y^2 + \frac{2(u_2 - v_2)}{u_1v_2 - u_2v_1}x + \frac{2(v_1 - u_1)}{u_1v_2 - u_2v_1}y + 1 = 0.$$

## 4.6 Modèle de Beltrami-Klein

Nous nous intéressons désormais au modèle de Beltrami-Klein. Le théorème suivant a déjà été démontré dans le théorème 4.3.3.

**Théorème 4.6.1.** *Le modèle de Beltrami-Klein, ou modèle du disque de Klein, est un modèle de géométrie hyperbolique. En dimension 2, le modèle prend la forme du disque unité. Ses points sont ceux se trouvant à l'intérieur du disque, et ses géodésiques sont les cordes du disque amputées de leurs extrémités.*

La métrique associée au modèle de Beltrami-Klein donnée dans la définition 4.1.4 devient en dimension 3

$$ds_B^2 = \frac{(1 - y^2)dx^2 + 2xydxdy + (1 - x^2)dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

ou

$$ds_B^2 = \frac{(1 - y^2)dx^2 + xy(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + (1 - x^2)dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

**Théorème 4.6.2.** *La métrique de Beltrami-Klein dans le disque s'écrit sous forme matricielle*

$$g_B(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2} \begin{pmatrix} 1 - y^2 & xy \\ xy & 1 - x^2 \end{pmatrix}.$$

### 4.6.1 Isométries dans le disque de Klein

Soient  $O$  le point de coordonnées  $(0,0)$  et  $Ox$  l'ensemble des points d'ordonnée nulle dans  $\mathbb{R}^2$ . Le but de cette section est de démontrer que les symétries axiales d'axe  $Ox$  et les rotations de centre  $O$  dans le disque de Beltrami-Klein sont des isométries. Cela nous permettra ainsi de nous concentrer sur les segments verticaux lorsque nous voudrons démontrer des résultats dans le disque.

**Proposition 4.6.3.** *La symétrie axiale d'axe  $Ox$  est une isométrie dans le disque de Beltrami-Klein.*

*Démonstration.* Soit l'application correspondant à la symétrie axiale d'axe  $Ox$  dans le disque

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Nous souhaitons montrer qu'il s'agit d'une isométrie, c'est-à-dire que

$$f^*(ds_B^2) = ds_B^2.$$

Posons  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ . D'après l'annexe B.3, nous avons

$$\begin{cases} dx' = dx \\ dy' = -dy. \end{cases}$$

Calculons maintenant le pull-back de  $ds_B^2$  par  $f$  :

$$\begin{aligned} f^*(ds_B^2) &= f^*\left(\frac{(1-y'^2)dx'^2 + x'y'(dx' \otimes dy' + dy' \otimes dx') + (1-x'^2)dy'^2}{(1-x'^2-y'^2)^2}\right) \\ &= \frac{(1-y^2)dx^2 + (-x)(-y)(-dx \otimes (-dy) - dy \otimes (-dx)) + (1-x^2)dy^2}{(1-x^2-y^2)^2} \\ &= ds_B^2. \end{aligned}$$

L'application  $f$  est donc bel et bien une isométrie. □

**Proposition 4.6.4.** *Les rotations de centre  $O$  sont des isométries dans le disque de Beltrami-Klein.*

*Démonstration.* Nous souhaitons à présent démontrer que la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$

$$f : K \rightarrow K : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta)x + \sin(\theta)y \\ -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{pmatrix}$$

est une isométrie, et ce pour tout  $\theta$ .

Nous posons

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y \\ y' = -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y. \end{cases}$$

Nous calculons ici encore les éléments de la base duale.

$$\begin{cases} dx' = \cos(\theta)dx + \sin(\theta)dy \\ dy' = -\sin(\theta)dx + \cos(\theta)dy. \end{cases}$$

Grâce aux deux relations ci-dessus, nous obtenons les égalités suivantes :

$$\begin{cases} x'^2 = \cos^2(\theta)x^2 + 2\sin(\theta)\cos(\theta)xy + \sin^2(\theta)y^2 \\ x'y' = -\sin(\theta)\cos(\theta)x^2 + \cos^2(\theta)xy - \sin^2(\theta)xy + \sin(\theta)\cos(\theta)y^2 \\ y'^2 = \sin^2(\theta)x^2 - 2\sin(\theta)\cos(\theta)xy + \cos^2(\theta)y^2. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} dx'^2 = \cos^2(\theta)dx^2 + \cos(\theta)\sin(\theta)(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + \sin^2(\theta)dy^2 \\ dx' \otimes dy' = -\sin(\theta)\cos(\theta)dx^2 + \cos^2(\theta)dx \otimes dy - \sin^2(\theta)dy \otimes dx + \sin(\theta)\cos(\theta)dy^2 \\ dy' \otimes dx' = -\sin(\theta)\cos(\theta)dx^2 - \sin^2(\theta)dx \otimes dy + \cos^2(\theta)dy \otimes dx + \sin(\theta)\cos(\theta)dy^2 \\ dy'^2 = \sin^2(\theta)dx^2 - \cos(\theta)\sin(\theta)(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + \cos^2(\theta)dy^2. \end{cases}$$

Nous calculons chaque terme de la métrique de Klein séparément.

$$\begin{aligned} (1 - y'^2)dx'^2 &= (\cos^2(\theta) - x^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + 2xy \sin(\theta) \cos^3(\theta) - y^2 \cos^4(\theta)) dx^2 \\ &\quad + (\cos(\theta) \sin(\theta) - x^2 \sin^3(\theta) \cos(\theta) + 2xy \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) - y^2 \sin(\theta) \cos^3(\theta)) dx \otimes dy \\ &\quad + (\cos(\theta) \sin(\theta) - x^2 \sin^3(\theta) \cos(\theta) + 2xy \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) - y^2 \sin(\theta) \cos^3(\theta)) dy \otimes dx \\ &\quad + (\sin^2(\theta) + x^2 \sin^4(\theta) + xy \sin^3(\theta) \cos(\theta) - y^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)) dy^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'y'dx' \otimes dy' &= (x^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) - xy \sin(\theta) \cos^3(\theta) + xy \sin^3(\theta) \cos(\theta) - y^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)) dx^2 \\ &\quad + (-x^2 \sin(\theta) \cos^3(\theta) + xy \cos^4(\theta) - xy \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + y^2 \sin(\theta) \cos^3(\theta)) dx \otimes dy \\ &\quad + (x^2 \sin^3(\theta) \cos(\theta) - xy \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + xy \sin^4(\theta) - y^2 \sin^3(\theta) \cos(\theta)) dy \otimes dx \\ &\quad + (x^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + xy \sin(\theta) \cos^3(\theta) - xy \sin^3(\theta) \cos(\theta) + y^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)) dy^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'y'dy' \otimes dx' &= (x^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) - xy \sin(\theta) \cos^3(\theta) + xy \sin^3(\theta) \cos(\theta) - y^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)) dx^2 \\ &\quad + (x^2 \sin^3(\theta) \cos(\theta) - xy \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + xy \sin^4(\theta) - y^2 \sin^3(\theta) \cos(\theta)) dx \otimes dy \\ &\quad + (-x^2 \sin(\theta) \cos^3(\theta) + xy \cos^4(\theta) - xy \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + y^2 \sin(\theta) \cos^3(\theta)) dy \otimes dx \\ &\quad + (-y^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + xy \sin(\theta) \cos^3(\theta) - xy \sin^3(\theta) \cos(\theta) + y^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)) dy^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - x'^2)dy'^2 &= (\sin^2(\theta) - x^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) - 2xy \sin^3(\theta) \cos(\theta) - y^2 \sin^4(\theta)) dx^2 \\ &\quad + (-\sin(\theta) \cos(\theta) + x^2 \sin(\theta) \cos^3(\theta) + 2xy \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + y^2 \sin^3(\theta) \cos(\theta)) dx \otimes dy \\ &\quad + (-\sin(\theta) \cos(\theta) + x^2 \sin(\theta) \cos^3(\theta) + 2xy \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + y^2 \sin^3(\theta) \cos(\theta)) dy \otimes dx \\ &\quad + (\cos^2(\theta) - x^2 \cos^4(\theta) - 2xy \sin(\theta) \cos^3(\theta) - y^3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)) dy^2. \end{aligned}$$



Après avoir effectué les différentes simplifications qu'il nous est possible de faire, il nous est possible de conclure que

$$f^*(ds_B^2) = ds_B^2.$$

□

#### 4.6.2 Distance dans le disque de Klein

Nous allons à présent calculer la distance dans le disque de Klein. Étant donné le fait que les rotations et les symétries d'axe horizontal sont des isométries dans le disque de Klein, nous allons nous concentrer dans un premier temps sur la longueur d'un segment du type

$$\{(a, ty) \in K : t \in [0, 1]\}$$

où  $a$  est un élément de  $[0, 1[$  et  $y$  est un élément de  $]0, \sqrt{1 - a^2}[$ .

Pour obtenir la longueur de ce segment, nous cherchons la valeur de

$$\mathcal{L} = \int_0^1 |(a, ty)|_B dt,$$

où  $|\cdot|_B$  est la norme associée au disque de Beltrami-Klein.

En appliquant ce que nous avons trouvé jusqu'à présent, nous obtenons

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \sqrt{\frac{\begin{pmatrix} 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - t^2 y^2 & tay \\ tay & 1 - a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}}{(1 - a^2 - t^2 y^2)^2}} dt.$$

Il nous faut calculer la valeur du produit des matrices qui se trouve dans la racine carrée. Cela nous donne

$$\begin{pmatrix} 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - t^2 y^2 & tay \\ tay & 1 - a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tay^2 & y(1 - a^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = y^2(1 - a^2).$$

L'égalité devient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= y\sqrt{1 - a^2} \int_0^1 \frac{1}{1 - a^2 - t^2 y^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{1 - a^2}}{y} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{1 - a^2}{y^2}\right) - t^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{1 - a^2}}{y} \frac{y^2}{1 - a^2} \int_0^1 \frac{1}{1 - \left(\frac{yt}{\sqrt{1 - a^2}}\right)^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{1 - a^2}}{y} \frac{y^2}{1 - a^2} \left[ \frac{\sqrt{1 - a^2}}{y} \operatorname{arctanh} \left( \frac{yt}{\sqrt{1 - a^2}} \right) \right]_0^1 \\ &= \operatorname{arctanh} \left( \frac{y}{\sqrt{1 - a^2}} \right). \end{aligned}$$

Nous avons également

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{1-a^2} + y}{\sqrt{1-a^2} - y} \right).$$

En effet, lorsque nous calculons la dérivée de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $y$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \left( \operatorname{arctanh} \left( \frac{y}{\sqrt{1-a^2}} \right) \right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{1}{1 - \left( \frac{y}{\sqrt{1-a^2}} \right)^2} \\ &= (\sqrt{1-a^2}) \frac{1}{1-a^2-y^2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-a^2}-y} + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}+y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \ln(\sqrt{1-a^2}+y) - \ln(\sqrt{1-a^2}-y) \right)' \\ &= \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{1-a^2}+y}{\sqrt{1-a^2}-y} \right) \right)'. \end{aligned}$$

Maintenant que nous avons calculé la longueur d'un segment du type

$$\{(a, ty) \in K : t \in [0, 1]\},$$

nous connaissons la longueur d'un segment du type

$$\{(a, t(y_2 - y_1)) \in K : t \in [0, 1]\}$$

où  $a$  est un élément de  $[0, 1[$  et  $y_1$  et  $y_2$  sont des éléments de  $]0, \sqrt{1-a^2}[$ . Le segment défini ainsi joint donc les points  $(a, -y_1)$  et  $(a, y_2)$ .

Pour revenir à la longueur de ce segment, celle-ci est égale à

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{\sqrt{1-a^2} + y_1}{\sqrt{1-a^2} - y_1} \right) + \ln \left( \frac{\sqrt{1-a^2} + y_2}{\sqrt{1-a^2} - y_2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(\sqrt{1-a^2} + y_1)(\sqrt{1-a^2} + y_2)}{(\sqrt{1-a^2} - y_1)(\sqrt{1-a^2} - y_2)} \right). \end{aligned}$$

Pour montrer le prochain résultat lié à la distance dans le disque de Klein, nous allons devoir nommer différents points du disque et de sa frontière :

- $A$  est le point  $(a, \sqrt{1-a^2})$ ;
- $B$  est le point  $(a, -\sqrt{1-a^2})$ ;
- $P$  est le point  $(a, y_2)$ ;
- $Q$  est le point  $(a, -y_1)$ .

Nous souhaitons montrer que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{|AQ| \cdot |BP|}{|AP| \cdot |BQ|} \right),$$

où  $|\cdot|$  est la norme euclidienne. Cela se déduit aisément à partir du fait que

$$|AQ| = \sqrt{1 - a^2} + y_1,$$

$$|BP| = \sqrt{1 - a^2} + y_2,$$

$$|AP| = \sqrt{1 - a^2} - y_1,$$

$$|BQ| = \sqrt{1 - a^2} - y_2.$$

En résumé, la longueur d'un segment dans le disque de Klein fait intervenir la notion de birapport :

**Définition 4.6.5.** Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points distincts et appartenant à une même droite, le birapport de ces quatre points est donné par la formule suivante :

$$(A; B; C; D) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AB| \cdot |CD|}$$

**Proposition 4.6.6.** Soient deux points  $P$  et  $Q$  dans le disque de Klein. Si  $A$  et  $B$  sont les extrémités de la droite passant par  $P$  et  $Q$ , et si les points sont ordonnés comme suit :

$$A < P < Q < B,$$

alors la distance entre  $P$  et  $Q$  est donnée par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \ln(A; P; Q; D) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{|AQ| \cdot |BP|}{|AP| \cdot |BQ|} \right).$$

## 4.7 Le modèle de Beltrami vérifie-t-il les quatre premiers postulats ?

Pour rappel, notre objectif est d'obtenir un modèle de géométrie qui vérifie les quatre premiers postulats d'Euclide tout en respectant les conditions imposées par l'hypothèse de l'angle aigu. Cette section est donc consacrée à ces vérifications. Nous commençons par vérifier les postulats.

**Proposition 4.7.1.** Les quatre premiers postulats d'Euclide sont vérifiés dans le modèle de Beltrami.

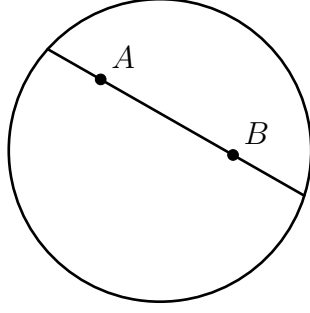
*Démonstration.*

### 1. Par deux points distincts passe une droite :

Pour rappel, le théorème 4.6.1 nous indique que les géodésiques du modèle sont les cordes du disque amputées de leurs extrémités. Ainsi, pour tous points  $A$  et  $B$  dans le disque, nous pouvons trouver une géodésique qui passe par ces points.

### 2. On peut toujours prolonger un segment rectiligne :

Si nous considérons un segment rectiligne  $[AB]$  quelconque dans le disque, nous pouvons effectivement toujours le prolonger, ce qui nous donne une géodésique du modèle.



### 3. Il n'existe qu'une seule circonférence avec un centre et un diamètre donné :

Par définition d'Euclide, une circonférence est un ensemble de points à égale distance d'un même point, ce dernier étant le centre de la circonférence.

Soit  $C$  un point du modèle de Beltrami, le cercle de rayon strictement positif  $R$  et de centre  $C$  est l'ensemble

$$\left\{ P \in K : R = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{|A_P C| \cdot |B_P P|}{|A P| \cdot |B C|} \right) \right\},$$

où pour tout point  $P \in K$  différent de  $C$ ,  $A_P$  et  $B_P$  correspondent aux extrémités de la géodésique passant par  $C$  et  $P$ , avec les points ordonnés comme suit :

$$A_P < P < C < B_P.$$

L'ensemble tel que défini contient bien tous les points à égale distance  $R$  de  $C$ .

### 4. Tous les angles droits sont égaux :

Pour vérifier cette affirmation, nous devons nous assurer que toute perpendiculaire à une géodésique dans le disque de Beltrami forme avec cette géodésique quatre angles égaux. La méthode pour obtenir les perpendiculaires est issue de [9] et [23]. Les calculs proposés ici sont quant à eux propres à ce mémoire. Nous ne donnons que les grandes lignes de cette démonstration.

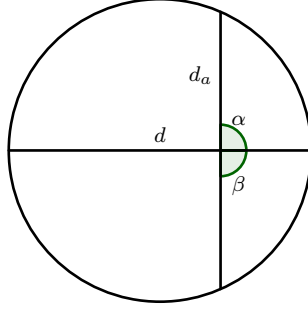
Soit une géodésique  $d$  du disque de Beltrami. Supposons en premier lieu que  $d$  est un diamètre du disque. Quitte à effectuer une rotation, qui pour rappel est une isométrie dans le modèle, nous pouvons plus simplement supposer que  $d$  correspond à l'axe horizontal, c'est à dire à l'ensemble  $\{(t, 0) : t \in ]0, 1[ \}$ .

Selon [9, page 238], les perpendiculaires à  $d$  sont les géodésiques correspondant aux ensembles  $\{(a, t) : t \in ]-\sqrt{1-a^2}, \sqrt{1-a^2}[ \}$  avec  $a$  qui est un élément de  $] -1, 1[$ . Vérifions l'égalité entre les angles formés par  $d$  et une de ces géodésiques, que nous appellerons  $d_a$ .

Nous avons que  $d$  et  $d_a$  se rencontrent en  $A = (a, 0)$ . Leurs vecteurs tangents en ce point sont respectivement

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mesurons l'angle  $\alpha$  entre ces deux vecteurs au point  $A$  dans le modèle de Beltrami :



$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{v}_a \rangle &= \frac{(1 - A_2)^2 (\vec{v})_1 (\vec{v}_a)_1 + A_1 A_2 ((\vec{v})_1 (\vec{v}_a)_2 (\vec{v})_2 (\vec{v}_a)_1) + (1 - A_2)^2 (\vec{v})_2 (\vec{v}_a)_2}{(1 - (A_1)^2 - (A_2)^2)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nous trouvons le même résultat pour l'angle  $\beta$  entre  $-\vec{v}$  et  $\vec{v}_a$ , et il en va de même pour les angles qui leur sont opposés au sommet par la proposition A.5, qui est valide en géométrie hyperbolique. Ainsi, les angles sont tous égaux dans cette disposition.

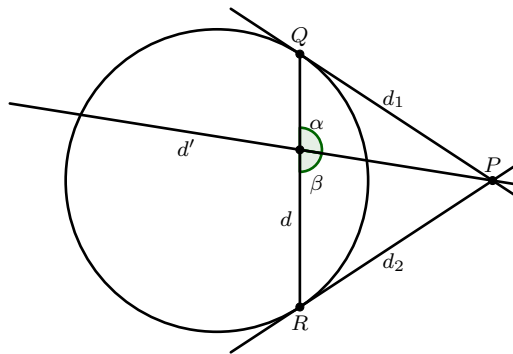
Il nous faut maintenant montrer le résultat dans les cas où  $d$  n'est pas un diamètre du disque. Quitte à effectuer une rotation, nous pouvons supposer que  $d$  est une géodésique correspondant à un ensemble du type  $\{(a, t) : t \in ]-\sqrt{1 - a^2}, \sqrt{1 - a^2}[\}$ , pour un certain  $a$  dans  $]0, 1[$ . La méthode pour obtenir les perpendiculaires à  $d$  est donnée par [23, page 8].

Nous commençons par chercher les tangentes (au sens euclidien) au cercle passant par les extrémités de  $d$ . Les extrémités en question étant les points  $Q = (a, \sqrt{1 - a^2})$  et  $R = (a, -\sqrt{1 - a^2})$ , nous obtenons les tangentes respectives

$$d_1 \equiv y = -\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}x + \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}$$

et

$$d_2 \equiv y = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}x - \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}.$$



L'intersection de ces deux tangentes, que nous allons appeler le pôle  $P$ , a pour coordonnées (euclidiennes)  $(\frac{1}{a}, 0)$ . Soit  $A = (a, b)$  un point quelconque de  $d$ . Considérons la droite (euclidienne) passant par  $A$  et  $P$  : la géodésique  $d'$  dans le disque dont les points sont des éléments de cette droite est perpendiculaire à  $d$ <sup>4</sup>. Cette géodésique est l'ensemble

$$\left\{ (x, y) = \left( ta + \frac{(1-t)}{a}, tb \right) : t \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 1 \right\}.$$

Les vecteurs tangents associés à  $d$  et  $d'$  sont respectivement

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}' = \begin{pmatrix} \frac{a^2-1}{a} \\ b \end{pmatrix}.$$

Mesurons l'angle  $\alpha$  entre ces deux vecteurs au point  $A$  dans le modèle de Beltrami :

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle &= \frac{(1 - A_2)^2 (\vec{v})_1 (\vec{v}')_1 + A_1 A_2 ((\vec{v})_1 (\vec{v}')_2 + (\vec{v})_2 (\vec{v}')_1) + (1 - A_2)^2 (\vec{v})_2 (\vec{v}')_2}{(1 - (A_1)^2 - (A_2)^2)^2} \\ &= \frac{ab \left( \frac{a^2-1}{a} \right) + (1 - a^2)b}{(1 - a^2 - b^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Nous trouvons un résultat similaire lorsque nous mesurons l'angle  $\beta$  entre les vecteurs  $-\vec{v}$  et  $\vec{v}'$ . Nous avons ainsi l'égalité entre les angles  $\alpha$  et  $\beta$ .

De plus, au vu de ce que nous avons trouvé jusqu'à présent, à savoir que les produits des vecteurs formant chacun des angles droits est nul, nous avons bel et bien l'égalité entre tous les angles droits dans le modèle de Beltrami. □

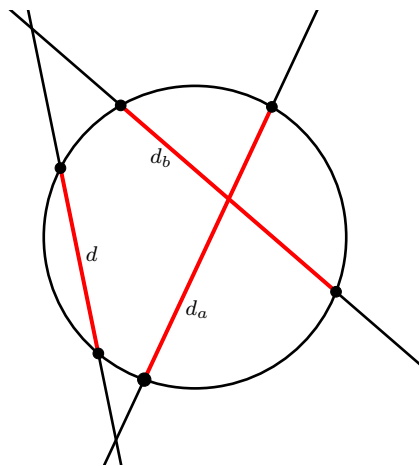
Il ne nous reste plus qu'à établir la validité de l'hypothèse de l'angle aigu dans ce modèle. Pour cela, il nous suffit de démontrer le résultat suivant :

**Proposition 4.7.2.** *Soit  $P$  un point extérieur à une géodésique  $d$  dans le modèle de Beltrami. Il nous est possible de trouver plusieurs parallèles à  $d$  (au sens d'Euclide) passant par  $P$ .*

*Démonstration.* Étant donné que les géodésiques dans le modèle sont des segments au sens usuel, nous considérons deux droites euclidiennes  $a$  et  $b$  passant par le point  $P$  et possédant une intersection avec la droite euclidienne contenant  $d$ , telles que ces intersections ont lieu en dehors du disque. Comme deux droites distinctes possèdent au plus une intersection, les droites  $a$  et  $b$  n'intersectent pas  $d$ , et il en va de même pour les géodésiques  $d_a$  et  $d_b$  du disque correspondant à  $a$  et  $b$  respectivement. Ainsi, nous avons trouvé deux géodésiques passant par  $P$  qui sont parallèles à  $d$  (au sens d'Euclide). □

---

4. Les géodésiques dans le disque dont la droite euclidienne associée dans le plan passent par le pôle de  $d$  sont les seules géodésiques perpendiculaires à  $d$ , voir [9, page 239].



# Annexe A

## Propriétés des *Éléments*

Nous citons dans cette annexe l'intégralité des propriétés énoncées par Euclide dans ses *Éléments* qui nous sont utiles pour la justification des démonstrations du chapitre 2 consacré au travail de Saccheri.

Si la traduction des propriétés est à l'origine tirée de [18], j'ai délibérément choisi de les réadapter afin de mieux correspondre au langage employé dans le chapitre 2. Les énoncés ne sont donc pas identiques à ceux fournis par la traduction.

Il est également à noter que la numérotation présentée n'est pas celle d'Euclide, et que toutes ses propriétés n'ont pas été retranscrites.

**Proposition A.1.** *Si deux côtés d'un triangle sont respectivement de même longueur que deux côtés d'un autre triangle, et si les deux angles compris entre les côtés égaux de ces deux triangles sont de même amplitude, la base de l'un sera de même longueur que la base de l'autre ; ces deux triangles sont isométriques, et les autres angles compris entre des côtés de même longueur de ces deux triangles seront aussi de même amplitude.*

**Proposition A.2.** *Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux : et si les côtés égaux sont prolongés, les angles sous la base vont aussi être égaux.*

**Proposition A.3.** *Si deux côtés d'un triangle sont respectivement de même longueur que deux côtés d'un autre triangle, et si la base de l'un est de même longueur que la base de l'autre, deux angles compris entre des côtés de même longueur seront de même amplitude.*

**Proposition A.4.** *Si une droite intersecte une autre droite, deux angles ayant pour sommet l'intersection et placés d'un même côté d'une même droite seront soit tous les deux droits, soit tels que la somme de leurs amplitudes sera égale à deux angles droits.*

**Proposition A.5.** *Si deux droites s'intersectent, elles forment des angles opposés au sommet égaux.*

**Proposition A.6.** *Lorsque l'on prolonge le côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur au triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.*

**Proposition A.7.** *Deux angles d'un triangle quelconque, peu importe lesquels, sont tels que la somme de leurs amplitudes est inférieure à deux angles droits.*



**Proposition A.8.** *Dans tout triangle, un plus grand côté est opposé à un plus grand angle.*

**Proposition A.9.** *Dans tout triangle, un plus grand angle est opposé à un plus grand côté.*

**Proposition A.10.** *Si deux triangles ont deux côtés de même longueur, et si l'angle compris entre ces deux côtés est plus grand dans l'un que dans l'autre, la base de l'un va être de plus grande longueur que la base de l'autre.*

**Proposition A.11.** *Si deux triangles ont deux côtés de même longueur chacun à chacun, et si la base de l'un est de plus grande longueur que la base de l'autre, alors l'angle opposé à la base du premier sera plus grand que l'angle opposé à la base du second.*

**Proposition A.12.** *Si deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, et s'ils ont de plus un côté de même longueur tel qu'il est soit adjacent aux deux angles, soit opposé à l'un des deux angles, ils auront leurs autres côtés de même longueur, et le troisième angle de l'un sera égal au troisième angle de l'autre.*

**Proposition A.13.** *Si une droite rencontrant deux autres droites forme avec celles-ci des angles alternes égaux<sup>1</sup>, alors les deux droites sont parallèles.*

**Proposition A.14.** *Si une droite intersectant deux autres droites fait un angle extérieur égal à un angle intérieur opposé et placé du même côté, ou bien si elle forme des angles intérieurs et placés du même côté tels que la somme de leurs amplitudes est égale à deux angles droits, ces deux droites sont parallèles.*

**Proposition A.15.** *Si l'on prolonge le côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur obtenu est égal à la somme des deux angles intérieurs et opposés. Ainsi, les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux angles droits.*

---

1. Euclide ne précise pas dans son énoncé s'il s'agit des angles alternes-internes ou alternes-externes. Cependant, la démonstration de la propriété fournie par [17] semble indiquer qu'il s'agit des angles alternes-internes.

# Annexe B

## Notions de géométrie riemannienne

Dans ce chapitre, nous introduisons différentes notions de géométrie riemannienne qui nous sont nécessaires dans ce mémoire. Les notations sont légèrement différentes de celles du chapitre 3. Cela ne causera que peu de confusion, et nous alerterons sur les différences et établirons les correspondances.

### B.1 Variétés

Dans cette section, nous rappelons les notions de base de la géométrie différentielle. Elles sont principalement issues de [7]. Cela nous permet également de fixer les différentes notations employées dans la suite de ce travail. Nous détaillons également des éléments généraux de géométrie riemannienne.

**Définition B.1.1.** Un difféomorphisme de classe  $C^k$  (avec  $k$  entier) d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  dans un ouvert  $\Omega'$  de  $\mathbb{R}^n$  est une bijection de classe  $C^k$  telle que sa bijection réciproque est de classe  $C^k$ .

**Définition B.1.2.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Une carte de  $X$  est un couple  $(U, \varphi)$  où  $U$  est un ouvert de  $X$  appelé le domaine de carte et où  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  est une bijection telle que  $\varphi(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition B.1.3.** Un atlas de  $X$  de classe  $C^k$  est un ensemble de cartes  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$  tel que

1. si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , alors
  - $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  et  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  ;
  - $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  est un difféomorphisme de classe  $C^k$ .
2.  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$ .

**Définition B.1.4.** Une variété de classe  $C^k$  est un ensemble muni d'un atlas de classe  $C^k$ .

**Définition B.1.5.** Soient  $V$  et  $V'$  deux variétés de classe  $C^k$ . Une application  $f : V \rightarrow V'$  est de classe  $C^{k'}$  ( $1 \leq k' \leq k$ ) si, pour tout  $x \in V$  et pour au moins une carte  $(U', \psi)$  de  $V'$  contenant  $f(x)$ , il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $V$  contenant  $x$  telle que  $f(U) \subset U'$  et que l'application

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(U')$$

soit de classe  $C^{k'}$ .

**Définition B.1.6.** L'application  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  qui apparait dans la définition B.1.5 est appelée l'expression locale de  $f$  (par rapport aux cartes  $(U, \varphi)$  et  $(U', \psi)$ ).

**Définition B.1.7.** Soit  $V$  une variété de classe  $C^k$ , une courbe de classe  $C^k$  sur  $V$  est une application de classe  $C^k$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $V$ .

**Définition B.1.8.** Soit  $x$  un élément de  $V$ , et  $\Gamma$  l'ensemble des courbes  $\gamma$  de classe  $C^k$  sur  $V$  telles que  $\gamma(0) = x$ . Deux courbes  $\gamma$  et  $\gamma'$  de  $\Gamma$  ont un contact d'ordre 1 en  $x$  s'il existe une carte  $(U, \varphi)$  telle que  $x \in U$  et

$$D_t \varphi \circ \gamma(t)|_{t=0} = D_t \varphi \circ \gamma'(t)|_{t=0}. \quad (\text{B.1})$$

**Proposition B.1.9.** La relation  $\mathcal{R}$  définie sur  $\Gamma$  par

$$\gamma \mathcal{R} \gamma' \Leftrightarrow \gamma \text{ et } \gamma' \text{ ont un contact d'ordre 1}$$

est une relation d'équivalence. De plus, si l'équation (B.1) est vraie pour une carte  $(U, \varphi)$ , alors elle est vraie pour toutes les cartes qui contiennent  $x$ .

**Définition B.1.10.** Un vecteur tangent en  $x$  est une classe d'équivalence pour la relation  $\mathcal{R}$ . On note  $[\gamma]$  la classe d'équivalence associée à  $\gamma$ , c'est-à-dire le vecteur tangent défini par la courbe  $\gamma$ . L'espace tangent à  $V$  en  $x$  est l'ensemble des vecteurs tangents  $[\gamma]$  en  $x$ . On le note  $T_x V$ .

Il nous reste à munir  $T_x V$  d'une structure d'espace vectoriel. Pour ce faire, nous utilisons une carte  $(U, \varphi)$  dont le domaine contient  $x$ .

**Proposition B.1.11.** Soit l'application

$$\varphi_{*x} : T_x V \rightarrow \mathbb{R}^n : [\gamma] \mapsto D_t \varphi \circ \gamma(t)|_{t=0}$$

Il s'agit d'une bijection de  $T_x V$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

*Démonstration.* Démontrons l'injectivité. Soient  $[\gamma]$  et  $[\gamma']$  deux éléments de  $T_x V$  dont les images par  $\varphi_{*x}$  sont identiques. Nous avons

$$\varphi_{*x}([\gamma]) = \varphi_{*x}([\gamma']) \Leftrightarrow D_t \varphi \circ \gamma(t)|_{t=0} = D_t \varphi \circ \gamma'(t)|_{t=0}.$$

Les courbes  $\gamma$  et  $\gamma'$  ont ainsi un contact d'ordre 1, ce qui implique que  $[\gamma] = [\gamma']$  par définition de  $T_x V$ .

Démontrons à présent la surjectivité. Soit  $h \in \mathbb{R}^n$  et soit  $(U, \varphi)$  une carte telle que  $x \in U$ . Pour  $|t|$  suffisamment petit,  $\varphi(x) + th \in \varphi(U)$ , donc  $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + th)$  est une courbe sur  $V$ . Elle passe par  $x$  en  $t = 0$  et

$$D_t \varphi \circ \gamma(t)|_{t=0} = D_t(\varphi(x) + th)|_{t=0} = h.$$

□

**Définition B.1.12.** On munit  $T_x V$  de la structure d'espace vectoriel qui fait de l'application  $\varphi_{*x}$  une bijection linéaire.

Il est possible de montrer que la structure ainsi définie est indépendante de la carte choisie pour la définir. Étant donné que nous avons une bijection linéaire à notre disposition, nous l'utilisons pour définir une base de  $T_x V$ .

**Définition B.1.13.** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(\varphi_{*x}^{-1}(e_1), \dots, \varphi_{*x}^{-1}(e_n))$  est une base de  $T_x V$ . Pour tout  $i$ , on note  $\varphi_{*x}^{-1}(e_i) = \frac{d}{dx^i}$ .

**Définition B.1.14.** Soit une application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $C^1$  au minimum. La différentielle de  $f$  en un point  $x$  d'une variété  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  est donnée par l'application linéaire

$$f_{*x}(h) = D_t f(x + th)|_{t=0}.$$

Si l'on pose  $\gamma(t) = x + th$ ,  $\gamma$  est une courbe telle que  $\gamma(0) = x$  et  $D_t \gamma(t)|_{t=0} = h$ . On obtient l'égalité

$$f_{*x}(D_t \gamma(t)|_{t=0}) = D_t f(\gamma(t))|_{t=0}.$$

La définition de la différentielle donnée précédemment peut être généralisée aux variétés de la façon suivante.

**Définition B.1.15.** La différentielle de  $f$  au point  $x$  est l'application

$$f_{*x} : T_x V \rightarrow T_{f(x)} V' : [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

**Proposition B.1.16.** Pour tout  $x$  dans  $V$ ,  $f_{*x}$  est bien définie et linéaire.

**Définition B.1.17.** Soit  $V$  une variété. Le fibré tangent de  $V$  est l'ensemble

$$TV = \bigcup_{x \in V} T_x V.$$

**Proposition B.1.18.** Si  $V$  est une variété de classe  $C^k$ , alors  $TV$  est une variété de classe  $C^{k-1}$ .<sup>1</sup>

*Démonstration.* Pour toute carte  $(U, \varphi)$  de  $V$ , on définit l'ensemble

$$TU = \bigcup_{x \in U} T_x V$$

et l'application

$$\varphi_* : TU \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n : X \in T_x V \mapsto (\varphi(x), \varphi_{*x} X).$$

Montrons que les  $(TU, \varphi_*)$  forment un atlas de  $TV$  de classe  $C^{k-1}$  si  $V$  est de classe  $C^k$ .

Les  $\varphi_*$  sont tous bijectifs. En effet, si  $\varphi_*(X) = \varphi_*(Y)$  pour  $X \in T_x V$  et  $Y \in T_y V$ , nous avons  $\varphi(x) = \varphi(y)$ , donc  $x = y$ . Ainsi,  $\varphi_{*x}(X) = \varphi_{*x}(Y)$ . Comme  $\varphi_{*x}$  est injectif,  $X = Y$ . Soit  $(u, h)$  un élément de  $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ . Nous avons  $(\varphi_{*\varphi^{-1}(u)})^{-1}(h) \in TU$  et son image par  $\varphi_*$  est  $(u, h)$ .

---

1. Démonstration tirée de [7].

Soient  $(U, \varphi)$  et  $(U', \psi)$  deux cartes telles que  $U \cap U' \neq \emptyset$ . Nous avons

$$\varphi_*(TU \cap TU') = \varphi_* \left( \bigcup_{x \in U \cap U'} T_x V \right) = \varphi(U \cap U') \times \mathbb{R}^n,$$

qui est un ouvert de  $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ . De plus,

$$\begin{aligned} \psi_* \circ (\varphi_*)^{-1} : (u, h) &\mapsto (\psi \circ \varphi^{-1}(u), \psi_{*\varphi^{-1}(u)} \circ (\varphi_{*\varphi^{-1}(u)})^{-1}h) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1}(u), (\psi \circ \varphi^{-1})_{*u}h). \end{aligned}$$

C'est une application de classe  $C_{k-1}$  si  $V$  est de classe  $C_k$ .

Ainsi, les  $(TU, \varphi_*)$  forment un atlas de classe  $C_{k-1}$  de  $TV$ .  $\square$

**Remarque B.1.19.** Soient  $x, x' \in V$ . Si  $x \neq x'$ , alors  $T_x V$  et  $T_{x'} V$  sont d'intersection vide car ils sont construits à partir d'éléments différents par nature. Il est important de se méfier de la vision que nous avons de l'espace vectoriel d'une sphère en un point, que l'on considère comme un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^3$ , ou de l'espace affine dans lequel on considère la sphère et où les espaces tangents, quand ils sont identifiés à des sous-espaces affines ou vectoriels, ont en général une intersection non triviale.

**Définition B.1.20.** Soit  $V$  une variété. Pour tout  $x \in V$ , on considère l'espace dual de  $T_x V$ , c'est-à-dire  $\mathcal{L}(T_x V, \mathbb{R})$ . On note cet ensemble  $T_x^* V$  et on l'appelle le fibré cotangent à  $V$  en  $x$ .

Soit  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$ . Comme sa différentielle  $f_{*x}$  est linéaire, nous avons  $f_{*x} \in T_x^* V$ . Cette observation nous permet de construire la base duale de la base que nous avons construite pour  $T_x V$ , associée à une carte  $(U, \varphi)$  où  $U$  contient  $x$ .

**Proposition B.1.21.** Si  $(U, \varphi)$  est une carte de  $V$ , on définit pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$x^i : U \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \varphi(x)^i.$$

Alors en chaque point  $x \in U$ , les différentielles des fonctions  $x^i$  au point  $x$ , notées  $dx_x^1, \dots, dx_x^n$ , forment la base duale de  $\left( \frac{d}{dx^1}, \dots, \frac{d}{dx^n} \right)$ .

*Démonstration.* Pour rappel, nous avons choisi  $\frac{d}{dx^j}$  égal à  $(\varphi_{*x})^{-1}(e_j)$ . Nous avons vu dans la preuve de B.1.11 comment écrire ce vecteur comme une classe associée à une courbe :

$$\frac{d}{dx^j} = (\varphi_*)^{-1}(e_j) = [\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_j)]$$

avec  $\varphi(x) + te_j$  dans  $\varphi(U)$  pour  $|t|$  suffisamment petit.

Lorsque nous évaluons  $dx_x^i$  en  $\frac{d}{dx^j}$ , avec  $i$  et  $j$  compris entre 1 et  $n$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} (dx^i)_x \left( \frac{d}{dx^j} \right) &= D_t x^i(\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_j))|_{t=0} \\ &= D_t [\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_j))]^i|_{t=0} \\ &= \delta_j^i. \end{aligned}$$

Les  $dx_x^i$  forment donc une base, duale de  $\left( \frac{d}{dx^1}, \dots, \frac{d}{dx^n} \right)$ .  $\square$

Si  $\omega$  est un élément de  $T_x^*V$ , alors il existe des réels  $\omega_1, \dots, \omega_n$  tels que

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_x^i.$$

**Définition B.1.22.** Soit  $V$  une variété. Le fibré cotangent de  $V$  est l'ensemble

$$T^*V = \bigcup_{x \in V} T_x^*V.$$

**Proposition B.1.23.** Si  $V$  est une variété de classe  $C^k$ , alors  $T^*V$  est une variété de classe  $C^{k-1}$ .

*Démonstration.* La démonstration est similaire à celle donnée pour le fibré tangent.  $\square$

## B.2 Variétés riemanniennes

**Définition B.2.1.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif et  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une forme bilinéaire sur  $V$  est une application  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $B$  est linéaire par rapport à chacun de ses arguments.

Une forme bilinéaire est symétrique si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall x, y \in V, B(x, y) = B(y, x).$$

**Définition B.2.2.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif et  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une forme quadratique sur  $V$  est une application  $Q : V \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $Q$  vérifie les deux conditions suivantes :

1.  $\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}, Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$  ;
2. L'application  $(x, y) \mapsto \frac{1}{2} (Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$  est une application bilinéaire symétrique.

**Définition B.2.3.** Une forme quadratique  $Q$  est définie si pour tout  $x$  dans  $V$ ,  $Q(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .

**Définition B.2.4.** Une forme quadratique  $Q$  est positive (resp. négative) si pour tout  $x$  dans  $V$ ,  $Q(x) \geq 0$  (resp.  $Q(x) \leq 0$ ).

**Définition B.2.5.** Soit  $V$  une variété. L'ensemble  $\otimes^2 T_x^*V$  est l'ensemble des applications bilinéaires sur  $T_x V$ . La variété  $\otimes^2 T^*V$  est définie par

$$\otimes^2 T^*V = \bigcup_{x \in V} \otimes^2 T_x^*V.$$

**Définition B.2.6.** Soit  $V$  une variété. L'ensemble  $S^2 T_x^*V$  est l'ensemble des applications bilinéaires symétriques sur  $T_x V$ . La variété  $S^2 T^*V$  est définie par

$$S^2 T^*V = \bigcup_{x \in V} S^2 T_x^*V.$$

Nous avons une variété  $V$  et une métrique riemannienne, c'est à dire une application qui à chaque point  $x \in V$  associe un produit scalaire, et ceci de manière régulière, c'est-à-dire de manière  $C^k$ . La définition est formalisée au moyen des structures différentielles de  $V$  et de  $S^2T^*V$ .

Nous avons défini les variétés  $T^*V$ ,  $\otimes^2T^*V$  et  $S^2T^*V$ . Nous allons définir de manière similaire  $\otimes^pT^*V$ .

**Définition B.2.7.** L'ensemble  $\otimes^pT^*V$  est l'union sur tous les  $x \in V$  de l'espace des applications  $p$ -linéaires sur  $T_xV$ .

Les champs des tenseurs covariants, parfois appelés formes différentielles, sont des vecteurs de ce fibré, comme nous l'avons vu pour les métriques riemanniennes. Un tel champ  $\omega$  associe à chaque point  $x \in V$  un élément  $\omega_x$  de  $\otimes^pT^*V$ , c'est-à-dire une application  $p$ -linéaire sur  $T_xV$ , de manière régulière, c'est-à-dire que si  $V$  est de classe  $C^k$ , l'application est de classe  $C^{k'}$  pour un certain  $k' \leq k - 1$ .

Il y a en fait deux propriétés dans la définition ci-dessus : le fait que  $\omega_x$  soit "cotangent" au point  $x$ , et la régularité.

Si on définit la projection de  $\otimes^pT^*V$  vers  $V$  par

$$\pi : \otimes^pT^*V \rightarrow V : \xi \in \otimes^pT_x^*V \mapsto x,$$

alors on peut traduire les propriétés facilement.

**Définition B.2.8.** Un champ de tenseurs  $p$ -covariant de classe  $C^{k'}$  sur  $V$  est une application  $\omega : V \rightarrow \otimes^pT^*V$ , de classe  $C^{k'}$  et telle que  $\pi \circ \omega = \text{id}_V$ .

Un tel champ est encore appelé section globale de  $\otimes^pT^*V$ . On note  $\Gamma(\otimes^pT^*V)$  l'ensemble de ces tenseurs.

Il est assez simple de traduire ces propriétés en coordonnées locales. En effet, étant donnée une carte  $(U, \varphi)$ , on dispose d'une base de  $T_xV$ , pour tout  $x \in U$ , à savoir  $dx^1, \dots, dx^n$ . On obtient une base de  $\otimes^pT_x^*V$  en considérant les applications  $p$ -linéaires définies par les produits tensoriels

$$dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p} : (X_1, \dots, X_p) \mapsto dx^{i_1}(X_1) \dots dx^{i_p}(X_p).$$

Donc, au dessus de  $U$ , tout champ de tenseurs se décompose en

$$\omega_x = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n a_{i_1, \dots, i_p}(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p}.$$

La régularité est alors équivalente à celle des coefficients  $a_{i_1, \dots, i_p}$ .

**Définition B.2.9.** Soit une variété  $V$ , une métrique riemannienne sur  $V$  est une métrique riemannienne sur son fibré tangent. La donnée  $(V, g)$  est une métrique riemannienne.

## B.3 Pull-back d'un tenseur covariant

La notion de pull-back d'un champ de tenseurs covariant généralise aux variétés la notion vectorielle de transposée d'une application, rappelée ci-dessous.

**Définition B.3.1.** Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$  et  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire. La transposée de  $T$  est l'application

$$T^* : F^* \rightarrow E^* : \xi \mapsto T^*\xi$$

où  $T^*\xi(u) = \xi(Tu)$  pour tout  $u \in E$ .

Cette définition s'étend directement aux applications  $p$ -linéaires : une application  $T$  de  $E$  dans  $F$  définit une application, que nous noterons encore  $T^*$  entre espaces d'applications  $p$ -linéaires.

**Définition B.3.2.** Si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$  et  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire, alors

$$T^* : \otimes^p F^* \rightarrow \otimes^p E^* : \omega \mapsto T^*\omega$$

est défini par

$$T^*\omega(u_1, \dots, u_p) = \omega(Tu_1, \dots, Tu_p).$$

On vérifie directement que l'application  $T^*\omega$  ainsi définie est  $p$ -linéaire et que l'opérateur  $T^*$  est lui-même linéaire.

Il peut être utile de calculer les composantes de  $T^*\omega$  en fonction de celles de  $\omega$ . Pour cela, on se donne des bases  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $(f_1, \dots, f_m)$  de  $E$  et  $F$  respectivement, ainsi que les bases duales  $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$  et  $(\xi^1, \dots, \xi^m)$ .

**Proposition B.3.3.** Si  $\omega \in \otimes^p F^*$ , alors on a

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m \omega(f_{i_1}, \dots, f_{i_p}) \xi^{i_1} \otimes \dots \otimes \xi^{i_p}.$$

*Démonstration.* On a pour tous  $X_1, \dots, X_p \in F$ ,

$$\begin{aligned} \omega(X_1, \dots, X_p) &= \omega \left( \sum_{i_1=1}^m X_1^{i_1} f_{i_1}, \dots, \sum_{i_p=1}^m X_p^{i_p} f_{i_p} \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m \omega(f_{i_1}, \dots, f_{i_p}) X_1^{i_1} \dots X_p^{i_p} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m \omega(f_{i_1}, \dots, f_{i_p}) \xi^{i_1} \otimes \dots \otimes \xi^{i_p} (X_1, \dots, X_p). \end{aligned}$$

On constate que les applications linéaires  $\omega$  et  $\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m \omega(f_{i_1}, \dots, f_{i_p}) \xi^{i_1} \otimes \dots \otimes \xi^{i_p}$  sont égales.  $\square$



Cette proposition indique non seulement que les applications  $p$ -linéaires  $\xi^{i_1} \otimes \dots \otimes \xi^{i_p}$  forment une partie génératrice (et en fait une base) de  $\otimes^p F^*$ , mais elle montre aussi comment obtenir la composante  $i_1, \dots, i_p$  d'un élément  $\omega$  de  $\otimes^p F^*$  dans cette base. Il suffit de l'évaluer sur le  $p$ -uplet  $(f_{i_1}, \dots, f_{i_p})$ .

Cela nous permet d'obtenir les composantes de  $T^*\omega$  en fonction de celles de  $T\omega$ . S'il est d'usage dans les cours d'algèbre linéaire de base de décrire un tel opérateur sous forme matricielle en posant

$$T_{i,j} = T(e_j)_i,$$

où la composante  $i$  est prise dans la base  $(f_1, \dots, f_m)$ , nous utiliserons les notations tensorielles :

$$T_j^i = (T(e_j))^i = \xi^i(T(e_j))$$

qui sont plus appropriées à notre propos. La correspondance est simple : l'indice tensoriel du haut correspond à l'indice de la ligne. On a alors

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^m T_j^i f_i.$$

**Proposition B.3.4.** *Avec les notations ci-dessus, si*

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m \omega_{i_1, \dots, i_p} \xi^{i_1} \otimes \dots \otimes \xi^{i_p},$$

*alors*

$$T^*\omega = \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n \left( \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m T_{j_1}^{i_1} \dots T_{j_p}^{i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} \right) \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_p}.$$

*Autrement dit, la composante  $j_1, \dots, j_p$  de  $T^*\omega$  est  $\sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m T_{j_1}^{i_1} \dots T_{j_p}^{i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p}$ .*

*Démonstration.* La composante  $(T^*\omega)_{j_1, \dots, j_p}$  n'est autre, par la proposition précédente, que  $T^*\omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$ . Par définition, on a alors

$$\begin{aligned} T^*\omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) &= \omega(Te_{j_1}, \dots, Te_{j_p}) \\ &= \omega \left( \sum_{i_1=1}^m T_{j_1}^{i_1} f_{i_1}, \dots, \sum_{i_p=1}^m T_{j_p}^{i_p} f_{i_p} \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m T_{j_1}^{i_1} \dots T_{j_p}^{i_p} \omega(f_{i_1}, \dots, f_{i_p}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m T_{j_1}^{i_1} \dots T_{j_p}^{i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p}. \end{aligned}$$

□

Il s'agit maintenant de définir le pull-back d'un champ de tenseurs covariant sur une variété  $V'$  par une application  $f : V \rightarrow V'$ .

L'observation qui permet la généralisation est que pour tout  $x \in V$ ,  $f_{*x} : T_x V \rightarrow T_{f(x)} V'$  est une application linéaire. Il suffit donc de lui appliquer la construction précédente, en ajoutant la dépendance en  $x$ .

**Définition B.3.5.** Soient  $V, V'$  deux variétés de classe  $C^k$  et  $f : V \rightarrow V'$  de classe  $C^k$  également. Le pull-back par  $f$  est l'application

$$f^* : \Gamma(\otimes^p T^* V') \rightarrow \Gamma(\otimes^p T^* V) : \omega \mapsto (f^* \omega)$$

où  $(f^* \omega)_x = f_{*x}^*(\omega_{f(x)})$ .

En d'autres mots, on a

$$(f^* \omega)_x(X_1, \dots, X_p) = \omega_{f(x)}(f_{*x} X_1, \dots, f_{*x} X_p)$$

pour tous  $\omega$ , tout  $x \in V$  et tous  $X_1, \dots, X_p \in T_x V$ .

On peut détailler cette définition dans les cas qui nous seront les plus utiles :

— pour une forme différentielle  $\omega \in \Gamma(T^* V')$ , on a

$$(f^* \omega)_x(X) = \omega_{f(x)}(f_{*x} X) \quad \forall x \in T_x V;$$

— pour une 2-forme  $\omega \in \Gamma(\otimes^2 T^* V')$ , on a

$$(f^* \omega)_x(X, Y) = \omega_{f(x)}(f_{*x} X, f_{*x} Y) \quad \forall X, Y \in T_x V.$$

On peut vouloir faire quelques vérifications, notamment le fait que  $(f^* \omega)$  soit bien un élément de  $\Gamma(\otimes^p T^* V)$ , quel que soit  $\omega$ , ce qui revient à montrer que  $(f^* \omega)_x$  est une application  $p$ -linéaire sur  $T_x V$ , l'application qui à  $x$  associe  $(f^* \omega)_x$  soit suffisamment régulière. Le résultat voulu découle de la définition de  $(f^* \omega)_x$  : c'est la transposée de  $f$ , appliquée à  $\omega_{f(x)}$ . Pour la dernière, elle découle d'une autre question naturelle, à savoir l'expression de  $f^* \omega$  en coordonnées.

On se rappelle qu'étant donné  $x_0 \in V$ , il existe des cartes  $(U, \varphi)$  ( $U', \psi$ ) dont les domaines contiennent  $x_0$  et  $f(x_0)$  respectivement et qui sont telles que  $f(U) \subset U'$  et

$$F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(U')$$

soit de classe  $C^k$ .

Étant donnés des points  $x \in U$  et  $y \in U'$ , on note  $\varphi(x) = (x^1, \dots, x^n)^T$  et  $\psi(y) = (y^1, \dots, y^m)^T$ . De plus, au-dessus de  $U$ , on a des bases  $\frac{d}{dx^1}, \dots, \frac{d}{dx^n}$  et  $dx^1, \dots, dx^n$  en chaque point. Il en va de même en  $y : \frac{d}{dy^1}, \dots, \frac{d}{dy^m}$  et  $dy^1, \dots, dy^m$ . On peut alors avoir l'expression en coordonnées du pull-back de tout champ de tenseurs.

**Proposition B.3.6.** Pour tout  $\omega \in \Gamma(\otimes^p T^* V')$  et avec les notations précédentes, si en coordonnées au-dessus de  $U'$ , on a

$$\omega_y = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m \omega_{i_1, \dots, i_p}(y) dy^{i_1} \otimes \dots \otimes dy^{i_p},$$

alors, pour tout  $x \in U$ , on a

$$(f^*\omega)_x = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^m \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n A_{j_1}^{i_1}(x) \dots A_{j_p}^{i_p}(x) \omega_{i_1, \dots, i_p}(f(x)) dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_p}$$

où les fonctions  $A_l^k(x)$  sont des composantes de  $f_{*x}$  dans les bases adéquates :

$$A_l^k(x) = dy^k \left( f_{*x} \frac{d}{dx^l} \right).$$

# Bibliographie

- [1] BELTRAMI, Eugenio. Essay on the interpretation of noneuclidian geometry. *Giornale di Matematiche*. 1868, VI, p. 7-34.
- [2] BELTRAMI, Eugenio. Saggio di interpretazione dellageometria non-euclidea. *Giornale di Matematiche*. 1868, (VI), p. 284-322.
- [3] BOLYAI, János. *Appendix : The Theory of Space*. Amsterdam : Elsevier Science Publishers B.V., 1987. 239 p. Sous la dir. de KÁRTESZI, Ferenc. ISBN 0 444 86528 4.
- [4] BONOLA, Roberto. *Non-Euclidian Geometry : A Critical And Historical Study Of Its Development*. Chicago : The Open Court Publishing Company, 1912. XII, 268 p. Trad. de l'italien par H. S. CARSLAW.
- [5] CANNON, James W. et al. *Hyperbolic Geometry*. Vol. 31. MSRI Publications, 1997. (Flavors of Geometry).
- [6] DALLE, Antoine et C. DE WAELE. *Cours de Géométrie à l'usage de l'Enseignement moyen, normal et technique : Géométrie dans l'espace avec compléments*. 24<sup>e</sup> éd. Namur : Éditions AD. Wesmael-Charlier, 1963.
- [7] DE WILDE, Marc. *Notions de géométrie différentielle*. Université de Liège, 1994.
- [8] GÓMEZ, Joan. *Quand les droites deviennent courbes*. RBA Coleccionables. S.A., 2011. (Le monde est mathématique).
- [9] GREENBERG, Marvin Jay. *Euclidian and non-Euclidian Geometries : development and history*. 3<sup>e</sup> éd. New York : W.H. Freeman et Company, 1994. ISBN 0-7167-2446-4.
- [10] HARTSHORNE, Robin. *Geometry : Euclid and Beyond*. New York : springer-Verlag, 2000. (Undergraduate Texts in Mathematics). Sous la dir. d'AXLER, S., F.W. GEHRING et Ribet K.A. ISBN 978-1-4419-3145-0.
- [11] JAOUICHE, Khalil. *La théorie des parallèles en pays d'Islam : contribution à la préhistoire des géométries non-euclidiennes*. Paris : J. Vrin, 1986. (L'histoire des sciences : textes et études). ISBN 2711609200.
- [12] LECOMTE, Pierre. *Courbes et surfaces*.
- [13] LEGENDRE, Adrien-Marie. *Éléments de géométrie*. Paris : Firmin Didot, 1794.
- [14] LIPSCHUTZ, M. M. *Theory and Problems of Differential Geometry*. McGraw-Hill, 1969.
- [15] LOBATCHEVSKI, Nikolaï. *La théorie des parallèles*. 1980. Disponible via l'URL <<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3942g/f2.item.texteImage>>.

- [16] PAPADOPOULOS, Athanase et Guillaume THÉRET. *Hyperbolic geometry in the work of Johann Heinrich Lambert*. arXiv, 2015. Disponible via l'URL DOI : 10.48550/ARXIV.1503.01865.
- [17] PEYRARD, F. *Les oeuvres d'Euclide en grec, en latin et en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours*. Paris : M. Patris, 1814. Disponible via l'URL <<https://archive.org/details/lesoeuvresdeucli01eucl/page/n5/mode/2up>>.
- [18] PEYRARD, François. *Éléments de géométrie d'Euclide*. 1804.
- [19] PLAYFAIR, John. *Elements of Geometry*. New York : W.E. Dean, 1846.
- [20] ROBERT, Caroline. *Formes quadratiques réelles. Exemples et applications*. Université de Rennes 1, 2014. Disponible via l'URL <<http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~crobet/memoire.pdf>>.
- [21] SACCHERI, Gerolamo. *Euclid Vindicated from Every Blemish*. 2014. (Classic Texts in the Sciences). Sous la dir. de DE RISI, Vincenzo. ISBN 978-3-319-05965-5.
- [22] SACCHERI, Girolamo. *Euclides ab omni naevo vindicatus : sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia*. 1<sup>re</sup> éd. Mediolani, 1733.
- [23] SZYDLIK, Steve. *Hyperbolic Constructions in Geometer's Sketchpad*. 2001. Disponible via l'URL <[https://www.maa.org/sites/default/files/images/upload\\_library/4/vol1/hypertoolbox/toolbox.pdf](https://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/4/vol1/hypertoolbox/toolbox.pdf)>.
- [24] WOLFF, Christian von. *Der Anfangs-Gründe Aller Mathematischen Wissenschaften*. 1<sup>re</sup> éd. Halle : Regner, 1710.