

Les états cicatrisés du rotateur pulsé

Auteur : Schroeder, Emilien

Promoteur(s) : Schlagheck, Peter

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences physiques, à finalité approfondie

Année académique : 2023-2024

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/19404>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



FACULTÉ DE SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

Les états cicatrisés du rotateur pulsé

SCHROEDER Emilien
Promoteur : Pr. SCHLAGHECK Peter

Mémoire présenté
dans le cadre de l'obtention du diplôme
de Master en sciences physique
Année académique 2023-2024

Remerciements

Tout d'abord, je souhaite exprimer ma sincère gratitude envers mon promoteur, le Professeur Peter Schlagheck. Je le remercie pour tout le savoir qu'il m'a transmis, ainsi que pour sa disponibilité, ses conseils précieux et sa bienveillance.

Je tiens également à adresser mes remerciements à mon comité de lecture, composé du Professeur John Martin, du Professeur Bertrand Dupé et du Professeur Stéphane Dorbolo, pour avoir accepté d'évaluer attentivement mon travail.

Un immense merci à ma famille qui a toujours été présente à mes côtés, apportant un soutien inestimable et jouant un rôle déterminant dans la réalisation de mes objectifs. Leur encouragement m'a été précieux lorsque nécessaire, et leurs conseils avisés m'ont poussé à donner le meilleur de moi-même. Je leur adresse mes plus sincères remerciements du fond du cœur.

N'oublions pas mes amis, ces compagnons de route qui ont croisé ma trajectoire à un moment donné et avec qui je continue de cheminer. Je ne peux pas tous les citer ici. Cependant dans le cadre de ce travail de fin d'étude je tiens à remercier particulièrement Simon Dengis, Matteo Léonard, Kévin Maltez Cavalheiro, Tom Scheir, Stéphane Fontaine, Adrien Gérard, Shauna Falque et Sam Chaidron. Pour leur soutien, leurs conseils et leur aide éventuelle

Enfin, un grand merci à Eva, sans qui je n'aurais probablement jamais atteint cette étape. Sa présence et son soutien ont été des éléments essentiels de mon parcours et je lui en suis infiniment reconnaissant.

Table des matières

Introduction	5
1 Chaos, systèmes Hamiltoniens et rotateur pulsé	9
1.1 Dynamique	9
1.1.1 Systèmes Hamiltoniens	10
1.2 Le rotateur pulsé	11
1.2.1 Equations de mouvement	11
1.2.2 Le rotateur pulsé dans la pratique	13
1.3 Traitement des systèmes chaotiques	14
1.3.1 Section de Poincaré	14
1.3.2 Surface de Poincaré et rotateur pulsé	15
1.3.3 Points fixes	16
1.4 Sensibilité aux conditions initiales et définition du chaos	16
1.4.1 Sensibilité aux conditions initiales	16
1.4.2 Exposant de lyapunov des points fixes de l'application standard	17
1.4.3 Définition du chaos	18
1.5 Application standard de Chirikov et transition vers le chaos	18
1.5.1 Systèmes intégrables	19
1.5.2 Quasi-intégrabilité et théorème Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM)	20
1.5.3 Poincaré birkhoff	22
1.5.4 Apparition du chaos	22
2 Le chaos quantique	25
2.1 Introduction	25
2.2 Limite semi-classique	26
2.3 Propriétés spectrales	26
2.4 Hypothèse de thermalisation	27
2.5 Distribution de (quasi)probabilité	29
2.5.1 Représentation d'Husimi	29
2.5.2 Taux de participation inverse	31
2.5.3 Fonction de Husimi du rotateur pulsé	31
3 Rotateur pulsé quantique	35
3.1 Théorie de Floquet	35
3.2 Rotateur pulsé quantique	36
3.3 Opérateur de floquet	37
3.4 Evolution du système	37
3.4.1 Périodicité spatiale	37
3.4.2 Périodicité en impulsion	39
3.4.3 Représentation de Floquet dans une base	40
3.4.4 Paramètre semi-classique	41

4	Etats cicatrisés	43
4.1	Définition et propriétés	43
4.1.1	Définition	43
4.1.2	Propriétés	43
4.2	Phénoménologie	44
4.2.1	Etats cicatrisés dans le billard en forme de stade	44
4.2.2	États cicatrisés dans le billard en forme de stade	45
4.2.3	Spectre énergétique	47
4.2.4	Critère de Heller	48
4.3	États cicatrisés dans les systèmes à plusieurs corps	50
4.3.1	Phénoménologie	50
5	Résultats	51
5.1	Introduction	51
5.2	Cicatrisation	51
5.3	Critère de Heller	51
	Conclusion	59

Introduction

Les états cicatrisés ont été découverts par Eric J. Heller en 1984[1]. Les états cicatrisés sont des états quantiques qui ont la particularité d'être fortement localisés autour des orbites périodiques instables du système classique correspondant présentant une dynamique chaotique. Plus nous nous plaçons dans la limite classique, plus cette localisation devient forte. C'est donc cette caractéristique qui leur a donné leur nom. Les états "cicatrisent" dans la limite classique.

Selon le principe de la correspondance quantique-classique, les propriétés de localisation des états propres d'un système quantique dans l'espace des phases du système classique correspondant peuvent être directement liées aux propriétés dynamiques de ce dernier. Les dynamiques classiques régulières donnent lieu à des états propres fortement localisés, obtenus approximativement à partir de méthode de quantification telle que la quantification d'Einstein-Brillouin-Keller (EBK), tandis que les dynamiques chaotiques produisent généralement des états quantiques délocalisés qui sont répartis sur l'ensemble du domaine chaotique de l'espace des phases. Cette propriété de localisation pour les états quantiques associés à un régime classique chaotique est une conséquence directe de l'hypothèse de thermalisation des états propres, qui implique l'ergodicité quantique [2][3][4]. Les cicatrices représentent une exception notable à cette dernière règle ce qui n'est pas anodin et remet en cause certains principes fondamentaux de la physique statistique et du chaos quantique.

L'existence de ces états est a priori soumise à une condition. Cette condition porte le nom de critère de Heller. Ce dernier stipule que leur existence devient possible si l'orbite considérée est relativement faiblement instable à une échelle de temps correspondant à la période de l'orbite. De cette manière un paquet d'ondes préparé sur une telle orbite retrouvera en grande partie sa forme initiale après un aller-retour sur l'orbite[1]. Pour résumer, l'existence des états cicatrisés dépend de deux paramètres. Dans un premier temps la période de ces orbites. Mais aussi l'instabilité de ces orbites, qui est quantifiée à l'aide de l'exposant de Lyapunov. Ce critère forme la pierre angulaire de ce travail. En effet, le but de ce mémoire est de vérifier le critère de Heller pour les états cicatrisés du rotateur pulsé.

Les états cicatrisés ont été étudiés de manière intensive dans des systèmes avec peu de degré de liberté. Leurs propriétés ont été bien établies et plusieurs méthodes ont été trouvées pour les traiter[5][6][7]. Cependant des découvertes récentes ont remis les états cicatrisés au centre de l'actualité. Ces dernières années, des comportements semblables à ce qui serait attendu de la part d'états cicatrisés ont été observés. En particulier ils ont possiblement été observés dans des simulateurs quantiques[8][9][10][11]. Ces systèmes sont des systèmes complexes à plusieurs corps. Ce qui fait que la recherche sur les états cicatrisés à plusieurs corps est devenu une nécessité. De nombreux travaux ont été publiés sur les états cicatrisés à plusieurs corps[12][8]. Néanmoins il reste un problème majeur, une zone d'ombre. En réalité, les comportements observés sont peut-être associés à des états cicatrisés à tort. La limite classique de ces systèmes n'étant pas forcément connue il est difficile de les associer à des orbites périodiques classiques et donc de les catégoriser comme des états cicatrisés au sens de Heller. Malgré tout, l'existence de ces états cicatrisés à plusieurs corps a tout de même été démontré de manière formelle pour des systèmes en particulier[13].

Le rotateur pulsé est un modèle physique particulièrement adapté à l'étude du chaos. Il est possible de restreindre sa dynamique selon une application discrète. L'application standard. Ce nom n'est pas anodin. Si elle porte ce nom c'est car elle regorge d'une grande richesse. Au travers de l'application standard il est possible de se pencher sur des questions diverses telle que le transport, la localisation ou encore les interactions entre résonnances. De plus, au travers du principe de

correspondance il est possible d'en obtenir son équivalent quantique. Ce dernier est particulièrement pratique car il permet, pour des raisons qui seront expliquées dans le chapitre 3, une implémentation numérique[14].

Le modèle du rotateur pulsé a été introduit en 1969 par Boris Chirikov[15][16]. Le rotateur pulsé consiste en un pendule qui ne serait soumis à une perturbation un temps très court et ce de manière périodique. Dans la limite où la période tendrait vers zéro. Nous aurions donc un simple pendule soumis à un potentiel. Disons la gravité pour imaginer. Nous verrons que le comportement du rotateur pulsé dépend de l'intensité de la perturbation. Et que lorsque la perturbation devient assez puissante certaines conditions initiales donnent lieu à des dynamiques chaotiques. Nous verrons aussi que la périodicité du pulse permet de limiter notre étude du système à des intervalles de temps discrets. Ce qui donne lieu à l'application standard[17].

Ce mémoire porte donc sur l'étude des états cicatrisés du rotateur pulsé. Et en particulier, comme déjà mentionné ci-dessus, sur le critère de Heller. Bien que ce système ne soit pas un système à plusieurs corps il est tout de même intéressant de se pencher dessus et ce pour plusieurs raisons. Premièrement pour le caractère paradigmatique du rotateur pulsé. Il est assez étonnant de constater que la littérature est vierge de travaux sur les états cicatrisés du rotateur pulsé. Ainsi étudier ces derniers permet de compléter les connaissances actuelles. De plus, il est possible d'obtenir, à partir du rotateur pulsé, des systèmes à plusieurs corps. En particulier à partir de systèmes de rotateurs pulsés couplés. Les systèmes de rotateur pulsés couplés sont connus comme étant bien adaptés à l'étude de la correspondance classique-quantique dans des systèmes de grande dimension[18].

Ce mémoire est décomposé en cinq parties. Dans un premier temps nous reviendrons sur les aspects du chaos classique dans les systèmes Hamiltonien. Et ce de manière à bien comprendre l'application standard qui découle du rotateur pulsé. Nous tacherons de comprendre comment le chaos émerge dans le cas de l'application standard et comment cette transition vers le chaos s'effectue. Nous mentionnerons donc dans ce cadre le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser et le théorème de Poincaré-Birkhof. Les implications de ces derniers seront donc imaginées à l'aide de l'application standard. Nous en profiterons aussi pour introduire des concepts classiques tels que l'exposant de Lyapunov ou encore les points fixes qui seront directement liés à notre analyse des états cicatrisés dans le rotateur pulsé quantique.

Dans la deuxième partie de ce mémoire, nous donnerons un aperçu du chaos quantique. Cette discipline n'est pas encore parfaitement définie, mais plusieurs approches permettent de traiter de ce qu'est le chaos quantique et de déterminer si un système physique rentre dans ce cadre. En particulier, nous discuterons des deux approches principales. La première est l'approche semi-classique, qui consiste à quantifier un système classiquement chaotique et à étudier son comportement dans la limite classique. Cette approche est particulièrement adaptée au traitement du rotateur pulsé, ainsi qu'aux états cicatrisés. Ensuite, nous aborderons l'approche spectrale, qui tente de définir ce qu'est un système de chaos quantique. En particulier, la conjecture BGS nous dit que les systèmes de chaos quantique présentent des propriétés spectrales distinctes des systèmes dont la limite classique est non chaotique. Dès lors, la connaissance du spectre d'un système nous permettrait d'inférer la dynamique de sa limite classique sans pour autant en avoir connaissance. Il a été montré que cette conjecture découle de l'Hypothèse de thermalisation des états propres sur laquelle nous reviendront brièvement. Si ces sujets sont abordés, c'est justement car l'existence des états cicatrisés en constitue une exception. Ce qui remet en question ces derniers[19]. Nous concluons ce chapitre en présentant des outils utiles pour l'étude des systèmes de chaos quantique, notamment la fonction de Husimi, qui permet de définir une distribution de probabilité dans l'espace des phases classique, et le taux de participation inverse (IPR), qui mesure le degré de localisation de la fonction d'onde dans l'espace des phases.

Dans la troisième partie de ce mémoire, nous étudierons le rotateur pulsé dans sa version quantique. Dans ce cadre nous introduirons la théorie de Floquet, qui permet l'étude des systèmes dont l'hamiltonien présente une dépendance temporelle périodique. De cette théorie de Floquet découle l'opérateur de Floquet qui est un opérateur d'évolution pour ce type de système. Nous obtiendrons son expression pour le rotateur pulsé et montrerons que, en utilisant les propriétés de périodicité des variables du rotateur pulsé, il est possible d'obtenir une représentation de dimension finie. Ce dernier point est un intérêt majeur du rotateur pulsé quantique car il permet une implémentation

numérique de ce dernier.

Dans le quatrième chapitre, nous reviendrons sur les états cicatrisés, les définirons et établirons leurs propriétés majeures. Nous mettrons en évidence ces propriétés dans le cas des états cicatrisés du billard en forme de stade, le système physique dans lequel ils ont été découverts et étudiés pour la première fois. Ensuite, nous établirons le critère de Heller, un critère d'existence de ces états basé sur les propriétés classiques du système. La vérification de ce critère est l'objectif principal de ce travail. Nous parlerons ensuite des enjeux actuels de la recherche sur les états cicatrisés, en particulier sur les états cicatrisés à plusieurs corps.

Enfin, dans la cinquième et dernière partie de ce travail, nous tenterons de vérifier ou d'infirmer le critère de Heller pour les états cicatrisés du rotateur pulsé. Nous présenterons d'abord la manière dont l'étude numérique du rotateur pulsé a été menée, puis nous passerons en revue les résultats produits par cette simulation.

Chapitre 1

Chaos, systèmes Hamiltoniens et rotateur pulsé

1.1 Dynamique

La dynamique... Concept familier à tout physicien, il n'en mérite pas moins une discussion rigoureuse. En effet, ce concept est central lorsqu'on parle de théorie du chaos, et même de manière plus générale de physique.

La dynamique d'un système est la description de son évolution en fonction des causes de cette évolution. De la dynamique émerge le concept de **trajectoires** ou **orbites**.

Nous allons ici présenter la définition de la dynamique présentée par E. Ott dans son ouvrage *Chaos in dynamical systems*[20]. Un système dynamique est une prescription mathématique déterministe donnant l'évolution de l'état du système au cours du temps.

On peut distinguer deux types de dynamiques, les dynamiques discrètes et les dynamiques continues.

Dans le premier cas, la prescription mathématique est une équation différentielle ordinaire d'ordre N . Il est toujours possible de réexprimer ce type d'équation sous forme d'un système de N équations différentielles d'ordre 1. De cette manière, un système dynamique est représenté par la relation suivante

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)] \quad (1.1)$$

où t représente le temps, $\mathbf{x}(t)$ est un vecteur contenant N composantes et \mathbf{F} est un opérateur différentiel. L'opérateur \mathbf{F} détermine le type d'équations auxquelles nous avons à faire. C'est à dire si ces équations sont linéaires ou non-linéaires. Pour rappel, la résolution d'une équation différentielle nécessite des conditions initiales. Plus particulièrement. Si on a une équation d'ordre i alors on a besoin de i conditions initiales. Dans notre cas, nous avons N équations différentielles d'ordre 1 donc nous avons besoin de $N \times 1$ conditions initiales. Il suffit donc de connaître les N composantes du vecteur $\mathbf{x}(0)$ pour déterminer l'évolution temporelle de $\mathbf{x}(t)$ pour $t > 0$. La solution pourra être trouvée analytiquement dans le cas des équations linéaires tandis qu'il faudra, dans la grande majorité des cas, recourir au numérique pour des équations non-linéaires[21][22].

Nous avons donc vu que, connaissant les conditions initiales et les équations de mouvements du système, nous sommes capable d'en déterminer l'état au cours du temps et que cette information est contenue dans la fonction $\mathbf{x}(t)$. Cette fonction contient ce qu'on appelle la trajectoire ou l'orbite du système pour des conditions initiales données. Nous pouvons représenter ces trajectoires dans l'espace des phases. C'est donc un espace de dimension N qui contient les trajectoires du système. Un exemple de trajectoire représentée dans un espace à trois dimensions est donné dans la Fig 1.1. Il est possible de donner une représentation géométrique de l'espace des phases dans le cas de systèmes qui dépendent de trois variables au maximum. Lorsque $N \geq 3$, il est possible de donner des représentations géométriques des trajectoires à condition d'accepter de perdre une partie de l'information contenue dans l'espace des phases. Et ce au travers des sections de Poincaré[23]. Nous reviendrons la dessus incessamment sous peu.

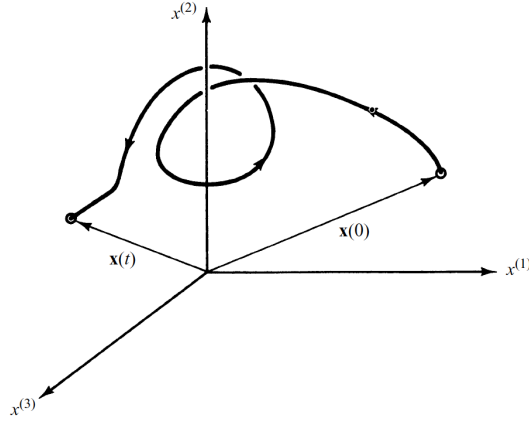


FIGURE 1.1 – Représentation d’une trajectoire dans un espace des phases à 3 dimensions. Le schéma provient de [20]

En réalité, on ne s’intéresse que rarement à une seule trajectoire du système lorsque l’on fait de la physique. En général, nous sommes intéressé par des ensembles de trajectoires qui nous donnent des indices sur le comportement global d’un système physique. C’est pour ça que la notion de flux de trajectoires ou encore courant de trajectoire est souvent plus pertinente que celle de trajectoire. Un flux de trajectoire est donc un ensemble de trajectoires générées par des conditions initiales différentes[20]. Nous pouvons observer ces flux de trajectoires dans l’espace des phases. En effet l’espace des phases contient les trajectoires générées par toutes les conditions initiales possibles. Nous avons traité du cas des systèmes dynamiques continus. Il nous reste le cas des systèmes dynamiques discrets. Dans cette situation, nous parlons d’**applications**. Ce sont donc des systèmes qui évoluent par itérations successives. Nous pouvons écrire une application en toute généralité comme

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_n) \quad (1.2)$$

où \mathbf{x}_n est un vecteur contenant N éléments, N représentant encore une fois le nombre de variables du système [20]. Encore une fois, nous avons besoin de conditions initiales. Il faut bien donner des premières valeurs à cette suite itérative. Nous devons donc connaître \mathbf{x}_0 . Ce type de système génère donc des trajectoires discrètes dans l’espace des phases.

On pourrait penser que ce type de système dynamique n’a pas beaucoup d’intérêt en physique. Cependant il s’avère que sous certaines conditions, il est possible de réduire la dynamique de systèmes régit par des équations différentielles à des applications. Nous reviendrons la dessus bien assez tôt. Au risque de casser le suspens, c’est le cas pour le rotateur pulsé.

1.1.1 Systèmes Hamiltoniens

Nous allons ici traiter du chaos dans les systèmes Hamiltoniens. L’intérêt de ce chapitre est évident dans le cadre de la physique. En effet, le chaos est avant tout une conséquence mathématique à la non-linéarité des équations. Mais lorsqu’on parle de physique, c’est au travers des équations qui représentent une réalité physique que le chaos se manifeste. Et donc au travers de systèmes Hamiltoniens. De plus, la mécanique quantique étant formulée sous forme Hamiltonienne. Nous verrons dans le chapitre deux que les systèmes Hamiltoniens présentant un comportement chaotique sont à la base du chaos quantique. Commençons cette section par quelques rappels élémentaires de physique Hamiltonienne.

L’Hamiltonien, que nous dénoterons $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ est une fonction qui contient l’entiereté de la physique du système. Elle dépend éventuellement du temps, mais surtout et toujours des variables canoniques \mathbf{q} et \mathbf{p} (resp. la position et l’impulsion). Ces variables sont des vecteurs de dimension N . Où N est le nombre de degré de liberté du système.

Les équations de mouvement sont appelées les **équations d’Hamilton**. Ce sont des équations différentielles couplées qui vont régir la trajectoire du système physique considéré et par conséquent

dictent les dynamiques possibles du système. Lesquelles peuvent différer en fonction des conditions initiales. Elles sont données par

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{d\mathbf{q}}{dt} \quad (1.4)$$

En réécrivant les équation d'Hamilton sous la forme symplectique nous pouvons faire réapparaître la prescription mathématique 1.1.

En introduisant le vecteur de dimension $2N$ où N est le nombre de degré de liberté du système

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

et en définissant une fonction \mathbf{F} tel que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_N & -\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{O}_N \end{pmatrix} \nabla H(\mathbf{x}, t) \quad (1.6)$$

avec \mathbf{I}_N la matrice identité de dimension $N \times N$ et \mathbf{O}_N la matrice nulle de dimension $N \times N$. Dès lors, il est possible de réécrire les équations d'Hamilton de cette manière.

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (1.7)$$

Nous voyons donc que les $2N$ variables nécessaires à la description du système sont les variables canoniques \mathbf{x} et \mathbf{p} . Par conséquent l'espace des phases est de dimension $2N$.

1.2 Le rotateur pulsé

Nous allons ici introduire le système physique qui est au centre de ce mémoire. Le rotateur pulsé. Dans ce chapitre, nous le verrons sous sa forme classique. Sa version quantique sera étudiée dans le chapitre 3.

1.2.1 Equations de mouvement

Le rotateur pulsé est décrit par l'Hamiltonien

$$H(\theta, L) = \frac{L^2}{2I} + k \cos \theta \sum_{n=1}^N \delta(t - nT) \quad (1.8)$$

où L est le moment cinétique et θ est la position angulaire. T est une période et δ est une fonctionnelle de Dirac. Nous reviendrons plus tard sur le paramètre k .

Cet Hamiltonien est composé de deux termes. Le premier est intégrable et consiste en une propagation libre du système. Là où le premier terme est trivial, le second l'est moins. Nous sommes en présence d'une perturbation [17]. Cette perturbation est particulière. En effet elle apparaît que de manière pulsée et périodique. D'où l'appellation de rotateur pulsé. Un exemple concret de système physique correspondant à un rotateur pulsé pourrait être, par exemple, un pendule plongé dans le vide pour lequel on "allumerait" la gravité un très court instant et ce toutes les périodes de temps T . On peut facilement s'en convaincre car si on omet la somme sur les deltas de Dirac dans l'Hamiltonien. Il se réduit à l'Hamiltonien du pendule dans un champs gravifique.

A priori, la perturbation dépend de deux paramètres. L'intensité de la perturbation k et la période des pulses T . Cependant, nous verrons plus tard qu'à l'aide d'un changement de variable que la physique du système ne dépend que d'un seul paramètre. Ce paramètre, que nous appellerons K ,

détermine entièrement la dynamique du système pour des conditions initiales données. Cherchons les équations de mouvement du rotateur pulsé à l'aide des équations d'Hamilton.

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = k \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.9)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial L} = \frac{L}{I} \quad (1.10)$$

L'analyse de ces équations de mouvements justifie directement ce qui a été dit plus haut. Si nous nous intéressons à l'équation d'évolution de la variable angulaire θ . Nous voyons que entre deux pulses L est constant. Nous n'avons rien d'autre qu'une évolution libre en θ . La particule a une vitesse angulaire constante. Cependant, l'équation de mouvement pour le moment cinétique L nous montre un changement brusque et discontinu lors du pulse qui influe par conséquent sur l'évolution de θ . Dès lors, nous voyons que ce qu'il se passe entre deux pulses n'a que peu d'intérêt et que l'étude de ce système peu se limiter à l'étude de l'évolution du système tous les pas de temps T . Nous allons donc adopter un traitement stroboscopique du système. Autrement dit nous allons discrétiser notre analyse du système. A partir de maintenant. Nous nous intéresserons juste à ce qu'il se passe juste après (ou juste avant, les deux approches sont équivalentes) le pulse.

Pour ce faire, nous allons calculer la variation du moment angulaire au cours d'une période. Nous allons donc intégrer dL/dt lors d'une période quelconque. Soit L_n (*resp.* L_{n+1}) la valeur du moment cinétique juste avant l'application du n ème pulse (*resp.* le $(n+1)$ ème pulse) avec n un nombre entier positif et quelconque naturellement. De plus nos bornes d'intégration seront en $nT - \epsilon$ et en $(n+1)T - \epsilon$ où ϵ est un temps infinitésimal. En effet il nous faut éviter le temps exact des pulses pour éviter que les intégrales divergent[24].

$$\begin{aligned} L_{n+1} - L_n &= \int_{nT-\epsilon}^{(n+1)T-\epsilon} \frac{dL}{dt} dt \\ &= \int_{nT-\epsilon}^{(n+1)T-\epsilon} k \sin \theta \delta(t - nT) dt \\ &= k \sin \theta_n \end{aligned} \quad (1.11)$$

Nous voyons donc que le moment cinétique varie, entre deux pulses, d'une quantité $k \sin \theta_n$. Voyons maintenant ce qu'il en est pour la position angulaire θ . De la même manière que pour le moment cinétique on note θ_n et θ_{n+1} les valeurs de la position angulaire avant le n ème pulse et avant le $n+1$ ème pulse.

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} - \theta_n &= \int_{nT-\epsilon}^{(n+1)T-\epsilon} \frac{d\theta}{dt} dt \\ &= \int_{nT-\epsilon}^{(n+1)T-\epsilon} \frac{d}{dt} \frac{L_{n+1}}{I} dt \\ &= \frac{L_{n+1}}{I} T \end{aligned} \quad (1.12)$$

De la même manière que pour le moment angulaire, nous avons une variation de la position angulaire θ de $\frac{L_{n+1}}{I} T$ lors d'un pulse.

On obtient donc des équations d'évolutions discrètes. Les variables du système ne dépendent pas de ce qu'il se passe entre deux pulses mais seulement de la période T et de l'intensité de la perturbation k .

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{L_{n+1}}{I} T \quad (1.13)$$

$$L_{n+1} = L_n + k \sin \theta_n \quad (1.14)$$

C'est ici qu'intervient le changement de variable mentionné plus haut. En posant

$$p = TL \Leftrightarrow L = \frac{p}{T} \quad (1.15)$$

alors nos équations deviennent

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{p_{n+1}}{I} \quad (1.16)$$

$$p_{n+1} = p_n + \frac{k}{T} \sin \theta_n \quad (1.17)$$

où $K = k/T$ est notre unique paramètre.

Cependant, dans ce travail nous allons adopter les conventions suivantes afin de simplifier les calculs.

$$I = 1 \quad (1.18)$$

$$T = 1 \quad (1.19)$$

De ce fait, nous garderons la notation L plutôt que d'utiliser p . Car dans ce cas le changement de variable devient $p = L$. Poser $I = 1$ permet d'alléger les écritures sans changer la physique du système. Il s'agit juste d'une modification des unités physiques sous-jacentes.

Dès lors nous obtenons les lois d'évolution du rotateur pulsé. Qui porte aussi le nom d'**application standard**[17].

$$\theta_{n+1} = \theta_n + L_{n+1} \quad (1.20)$$

$$L_{n+1} = L_n + K \sin \theta_n \quad (1.21)$$

L'application standard existe indépendamment de la physique. Elle n'a pas besoin de la physique pour constituer un sujet mathématique d'intérêt. Mais le fait qu'il existe un système physique duquel émerge cette application en fait un sujet d'intérêt pour les physiciens.

Nous avons obtenu l'application standard. Cependant il est encore possible de simplifier le problème. Il s'avère que cette applications possède une périodicité spatiale. En effet, les mouvements du rotateur sont compris dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Nous voyons d'ailleurs sans soucis que l'Hamiltonien 1.8 ne dépend de θ qu'au travers d'un cosinus. Dès lors, nous pouvons restreindre les valeurs de la position angulaire dans l'application standard. Pour ce faire nous utiliserons l'opérateur modulo pour maintenir sa valeur dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Il s'avère que nous avons la même périodicité pour le moment angulaire. Avec ces conditions sur l'application standard. L'espace des phases a la topologie d'un tor[17].

$$\theta_{n+1} = \theta_n + L_{n+1} \bmod 2\pi \quad (1.22)$$

$$L_{n+1} = L_n + K \sin \theta_n \bmod 2\pi \quad (1.23)$$

Nous avons maintenant la version finale de l'application standard. Pour l'étudier dans de bonnes conditions nous allons nous intéresser à quelques concepts fondamentaux de la théorie du chaos.

1.2.2 Le rotateur pulsé dans la pratique

Avant d'aller plus loin. Donnons un aperçu du spectre élargi d'applications du rotateur pulsé.

Le rotateur pulsé est un outil théorique puissant. En effet, son espace des phases est extrêmement riche. Par exemple, il est possible d'y étudier toutes les résonances imaginables. Il affiche aussi des comportements physiques dignes d'intérêt comme la localisation dynamique sur laquelle nous ne reviendront pas dans ce travail[14].

De plus le principe d'universalité nous permet d'utiliser les résultats obtenus à l'aide du rotateur pulsé pour bien d'autres situations. En effet ce dernier nous dit que des comportements qualitatifs semblables peuvent être traités de la même manière peu importe le contexte[23].

Cependant, le rotateur pulsé n'est pas qu'un outil théorique et bel et bien de modéliser des systèmes physiques réels. Parmi eux on peut citer des expériences d'illumination d'atomes froids dans des réseaux optiques[25].

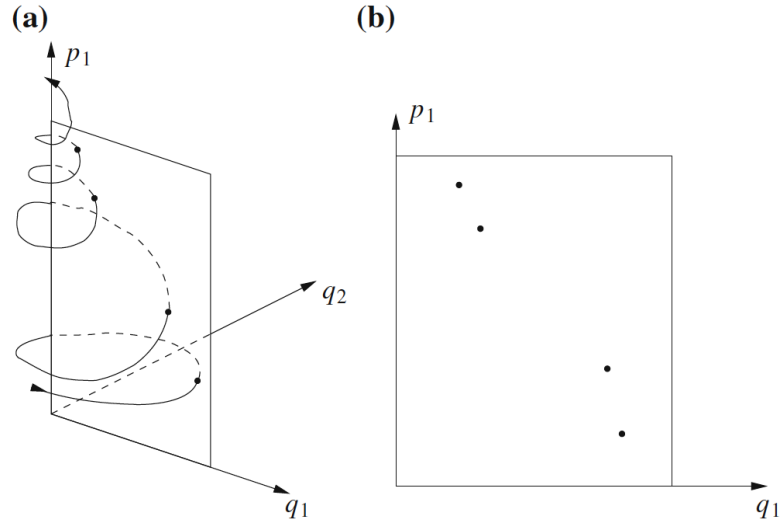


FIGURE 1.2 – a) Représentation d’une trajectoire dans un espace des phases tridimensionnel. La section de Poincaré est construite à partir du plan défini par $q_2 = 0$. b) Section de Poincaré résultante.

Reproduit de [23]

1.3 Traitement des systèmes chaotiques

La notion d’espace des phases a été évoquée précédemment dans l’introduction de ce chapitre. L’espace de phases est un outil essentiel pour l’étude des systèmes dynamiques. En effet, examiner l’espace des phases permet de déterminer visuellement si une orbite est périodique ou chaotique, évitant ainsi une analyse laborieuse au cas par cas. Toutefois, il peut rapidement devenir impossible de le représenter graphiquement, en particulier lorsque le nombre de variables canoniques est supérieur à 3. C’est ici que la section de Poincaré apporte une solution.

1.3.1 Section de Poincaré

L’espace des phases est l’espace des trajectoires. L’espace des phases est de dimension $2N$ où N est le nombre de degrés de liberté du système[23]. On se rend donc compte que si $N \geq 2$ il devient difficile voir impossible d’avoir une représentation purement géométrique de cet espace. Dans le cas $N = 2$ la surface représentant une énergie donnée est un hyperplan à trois dimensions et, si l’énergie est conservée dans le système, il est alors possible de tracer une trajectoire. Mais si cette dernière condition n’est pas respectée par le système ou si $N > 2$ (ce qui est le cas de l’immense majorité des systèmes) alors la tâche en devient impossible. C’est ici qu’interviennent les sections de Poincaré aussi appelées surfaces de sections.

L’idée est la suivante : Choisir un plan dans l’espace des phases et repérer l’intersection des trajectoire de l’espace des phases avec ce dernier. Cela revient à visualiser la dynamique du système pour $2(N - 1)$ coordonnées du système fixées. Les trajectoires passent au travers du plan et ce sont les intersections de ces trajectoires avec le plan qui constituent notre section de Poincaré. On ne repère que les intersections de la trajectoire avec le plan dans un sens particulier. Par exemple depuis l’intérieur du plan vers l’extérieur[23]. Une représentation schématique pour un système ayant un espace des phases tridimensionnel est donnée dans la Fig 1.2.

Imaginons un système Hamiltonien conservatif qui posséderait 2 degrés de liberté.

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = E \quad (1.24)$$

Cette équation nous permet de relier n’importe laquelle de ces coordonnées aux 3 autres, de les exprimer les unes en fonction des autres

$$p_2 = p_2(p_1, q_1, q_2) \quad (1.25)$$

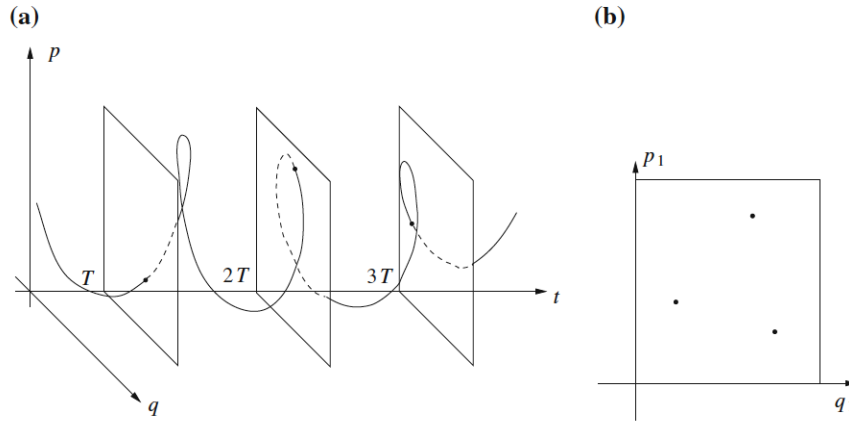


FIGURE 1.3 – a) Représentation de l'espace des phases b) Section de Poincaré stroboscopique
Reproduit de [23]

En supposant le mouvement borné. Un plan choisi dans l'espace tridimensionnel (par exemple on pourrait prendre $p_1 = \text{cste}$ et $q_1 = \text{cste}$) devrait être intersecté de manière répétée par la trajectoire. Si une constante de mouvement devait être présente, alors les différentes intersection devraient tracer une courbe continue. Dès lors, on voit qu'il est possible d'obtenir des informations sur le système physique depuis une représentation graphique. Lorsque ces courbes sont trouvées, il est possible d'en tirer d'autres informations comme leur stabilité par exemple[26].

1.3.2 Surface de Poincaré et rotateur pulsé

Nous pourrions penser que le rotateur pulsé n'est pas concerné par les sections de Poincaré. En effet, après tout, le rotateur pulsé est décrit à partir des deux variables θ et L . Dès lors on pourrait penser que son espace des phases tient dans un plan. Cependant, ce serait faire une grave erreur. L'Hamiltonien du rotateur pulsé dépend du temps, et par conséquent l'énergie n'est pas conservée. Dès lors qu'en est-il pour les Hamiltoniens dépendant du temps ? Et en particulier, dans notre cas, ayant une dépendance périodique dans le temps.

Lorsque l'Hamiltonien est dépendant du temps. On parle de système ayant $N + 1/2$ degrés de liberté. La raison est la suivante. Il est en fait possible de considérer le paramètre de temps de l'Hamiltonien comme une variable supplémentaire, le système possède donc $2N + 1$ variables et donc $N + 1/2$ degrés de liberté. Dès lors on peut réduire l'Hamiltonien dépendant du temps à un Hamiltonien indépendant du temps. Cette manoeuvre donne lieu à la notion d'espace des phases étendu. Ou le temps est traité comme une variable du problème et donne donc lieu à une dimension supplémentaire dans l'espace des phases.

On voit donc que le rotateur pulsé peut-être vu comme un système Hamiltonien indépendant du temps ayant $3/2$ degrés de liberté.

Cependant, notre nouvelle variable possède une propriété remarquable, elle est périodique. En effet

$$H(\theta, p, t) = H(\theta, p, t + T) \quad (1.26)$$

Or, lorsque une des variables de l'espace des phases est périodique. Il existe une manière simplifiée de construire une section de Poincaré. Elle consiste à prendre connaissance de la trajectoire tous les multiples entiers de la période de cette variable. Si la variable périodique est le temps. Alors la trajectoire est mesurée tous les multiples entiers de la période nT où n est un nombre entier. On parle de surfaces de sections stroboscopiques. Une représentation schématique d'une telle section de Poincaré est donnée dans la fig1.3[23].

Il convient de remarquer que c'est exactement ce que fait l'application standard. En réalité, l'application standard est une section de Poincaré stroboscopique du rotateur pulsé !

1.3.3 Points fixes

Nous allons voir ici ce que sont des points fixes d'une section de Poincaré. En plus de donner des informations cruciales sur les systèmes à partir des sections de Poincaré. Ils revêtissent une importance toute particulière dans ce travail. Comme nous le verrons plus tard. Ils sont particulièrement important dans la recherche d'états cicatrisés dans le rotateur pulsé quantique.

Pour comprendre ce qu'est un point fixe d'une section de Poincaré. Il faut parler des applications de Poincaré.

Les applications de Poincaré sont les applications qui génèrent la sections de Poincaré. Ce sont donc des applications qui construisent ces sections sans passer par l'espace des phases. En particulier, l'application standard est une application de Poincaré. Soit donc une application de Poincaré. Dénotons la par la lettre \mathcal{P} . Un point fixe y d'ordre n de la section de Poincaré est tel que

$$\mathcal{P}^n(y) = y \quad (1.27)$$

où la notation n dit que l'application est itérée n fois. Pour bien déterminer l'ordre du point fixe il faut aussi s'assurer que n soit le plus petit entier tel que cette relation est vraie.

La propriété fondamentale qui découle du concept de point fixe est la suivante. L'existence d'un point fixe dans la section de Poincaré implique l'existence d'une trajectoire périodique dans l'espace des phases[23].

En particulier. Un point fixe d'ordre n de l'application standard implique une trajectoire périodique de période nT du rotateur pulsé.

1.4 Sensibilité aux conditions initiales et définition du chaos

Dans la suite de ce chapitre, nous traiterons du comportement physique du rotateur pulsé, et ce au travers de l'application standard. Mais avant de s'intéresser à son comportement il est important de comprendre ce qu'est le chaos. Et comment on peut le quantifier. C'est ce que nous tenterons de faire dans cette section. Le concept à la base de ce qu'est le chaos est celui de sensibilité aux conditions initiales. En effet, un système chaotique est un système qui va se comporter de manière tout à fait différente pour des conditions initiales infiniment proches. Mais qu'entend-t-on par "comportement différent" ? C'est ce dont traite la suite de ce chapitre.

1.4.1 Sensibilité aux conditions initiales

Pour comprendre ce qu'est la sensibilité aux conditions initiales, passons par un raisonnement mathématique. Dans un premier temps, la trajectoire d'un système peut être écrite comme une fonction des conditions initiales et du temps. Nous avons donc, pour une trajectoire qui possède

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(0), t] \quad (1.28)$$

où $\mathbf{x}(0)$ est le vecteur contenant les conditions initiales. Disons que notre système en possède N . La dimension de $\mathbf{x}(t)$ est égale au nombre de variables dynamiques du système. Maintenant changeons légèrement les conditions initiales. Mathématiquement nous avons donc $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{h}(0)$ où $\mathbf{h}(0)$ est un vecteur dont les composantes sont infinitésimales. Dans ce cas la dynamique du système est donnée par

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}'(0), t] = \mathbf{F}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{h}(0), t] \quad (1.29)$$

Dès lors le vecteur $\mathbf{h}(t) = \mathbf{x}'(t) - \mathbf{x}(t)$ est le vecteur qui lie les $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{x}'(t)$ à un instant t . Si son module est grand. Alors les trajectoires se sont fortement éloignées. Ce qui est encore plus intéressant c'est l'évolution temporelle de $\mathbf{h}(t)$. Ce qui permet de voir avec quel taux les trajectoires s'éloignent. C'est donc au travers de cette fonction que nous allons voir si le comportement du système diffère fortement ou non pour des conditions initiales légèrement différentes. Nous pouvons obtenir cette distance à l'aide des équations 1.28 et 1.29 et au travers d'une approximation linéaire

$$\mathbf{h}(t) \simeq (\mathbf{h}(0) \nabla) \mathbf{F}[\mathbf{x}(0), t] \quad (1.30)$$

où ∇ est le gradient de \mathbf{F} par rapport aux conditions initiales. Nous pouvons exprimer cette relation sous forme matricielle.

$$h_n(t) = \sum_{m=1}^N \frac{\partial F_n}{\partial x_m} h_m(0) \quad (1.31)$$

où n, m sont deux indices tel que $n, m = 1, \dots, N$ avec N le nombre de variables du système. Dès lors, la sensibilité aux conditions initiales est dictée par la matrice \mathcal{M} , dont l'expression est donnée ci-dessous. Elle peut être appelée matrice de stabilité mais est plus couramment appelée matrice de monodromie

$$\mathcal{M}_{mn} = \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \quad (1.32)$$

Les valeurs propres de cette matrice nous permettront de déterminer quelle est la dynamique du système. Si les valeurs propres de cette matrice sont toutes de module inférieur à un. Les trajectoires du système sont stables et la distance entre les trajectoires n'augmente pas. Si en revanche, une seule de ces valeurs propres à un module supérieur à un, alors les deux trajectoires vont s'éloigner exponentiellement dans au moins une des directions de l'espace des phases. Et c'est dans cette situation que l'on parle de sensibilité aux conditions initiales[27].

1.4.2 Exposant de lyapunov des points fixes de l'application standard

Dans le cadre de ce mémoire, nous serons amenés à calculer les exposants de Lyapunov des points fixes de l'application standard. Ces derniers permettent de mesurer à quel point un système est sensible aux conditions initiales. Par conséquent, ils sont définis à partir de la matrice de monodromie. Nous en aurons besoin pour vérifier le critère de Heller. Nous reviendrons la dessus dans le chapitre 3. Ces calculs sont tirés de [23].

Calculons d'abord la matrice de monodromie de l'application standard que nous noterons \mathcal{AS} . Pour un point fixe $y = (\theta^*, L^*)^T$ de cette dernière. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{AS}(y + \delta z) &= y + d\mathcal{AS}(y)\delta z + \mathcal{O}(\delta z^2) \\ &= y + \delta z' + \mathcal{O}(\delta z^2) \end{aligned} \quad (1.33)$$

où $\delta z = (\delta\theta, \delta L)$ est un incrément infinitésimal. Au vu de ce qui a été expliqué précédemment la matrice de monodromie est donc donnée par $d\mathcal{AS}(y) \equiv \mathcal{M}(y)$ et nous dit donc comment la trajectoire voisine au point fixe se comporte.

$$\begin{bmatrix} \delta\theta' \\ \delta L' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{AS}_1(\theta^*, L^*)}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathcal{AS}_1(\theta^*, L^*)}{\partial L} \\ \frac{\partial \mathcal{AS}_2(\theta^*, L^*)}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathcal{AS}_2(\theta^*, L^*)}{\partial L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta L \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Pour rappel, l'application standard est donnée par

$$\theta_{n+1} = \theta_n + L_{n+1} \quad (1.35)$$

$$L_{n+1} = L_n + K \sin \theta_n \quad (1.36)$$

Pour faciliter les calculs. Nous pouvons séparer l'application standard en deux. Une application qui garde θ fixé \mathcal{AS}_∞ et une qui garde L fixé \mathcal{AS}_ϵ . Nous avons donc \mathcal{AS}_1 qui est donnée par l'expression

$$\theta_{n+1} = \theta \quad (1.37)$$

$$L_{n+1} = L_n + K \sin \theta_n \quad (1.38)$$

Sa matrice de monodromie est donc donnée par

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial L'}{\partial L} & \frac{\partial L'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial L} & \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K \cos \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Pour ce qui est de \mathcal{AS}_2 , nous avons l'expression

$$\theta_{n+1} = \theta_n + L_{n+1} \quad (1.40)$$

$$L_{n+1} = L_n \quad (1.41)$$

Reproduisons maintenant la même opération

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial L'}{\partial L} & \frac{\partial L'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial L} & \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

Et nous pouvons obtenir la matrice de monodromie totale de la manière suivante

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \circ \mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & K \cos \theta \\ 1 & 1 + \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Nous avons donc le polynôme caractéristique

$$\det(\mathcal{M} - \lambda I) = 0 \quad (1.44)$$

Une des propriétés des applications conservant l'aire est que le déterminant de la matrice de monodromie est égal à 1. L'application standard fait partie de ces dernières. Nous ne rentrerons cependant pas sur les détails de ce point. Cette propriété nous permet d'écrire

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{M}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\text{Tr}(\mathcal{M}^2) - 4} \quad (1.45)$$

On peut distinguer trois situations :

- 1) $|\text{Tr} \mathcal{M}| < 2$
- 2) $|\text{Tr} \mathcal{M}| > 2$
- 3) $|\text{Tr} \mathcal{M}| = 2$

Dans le cas 1) les valeurs propres sont des nombres complexes de norme un dont le produit est égal à un. Dans le cas 2) les valeurs propres sont des nombres réels dont le produit est égal à un. Et pour finir, dans le troisième cas. Les valeurs propres sont simultanément soit égale à un, soit égale à moins un. Ce sont les exposants de Lyapunov.

On peut montrer que le cas 1) engendre des mouvements de rotation autour du point fixe. Dans ce cas le point fixe est dit stable où elliptique. Le cas 2) mène à des trajectoires hyperboliques. Ces points fixes sont dit instables où hyperboliques. Le cas 3) correspond à des trajectoires paraboliques. C'est un point fixe parabolique. Nous sommes surtout intéressé par les cas elliptiques et hyperboliques. Ces derniers sont représentés sur la Fig. 1.4.

1.4.3 Définition du chaos

Usuellement, le chaos est défini à partir d'une quantité appelée l'Entropie métrique KS. KS fait référence aux noms Krylov, Kolmogorov et Sinai. La définition du chaos au travers de cette quantité est : "Le flux de trajectoires dans une région donnée de l'espace des phases est dit chaotique si il a une entropie métrique KS supérieure à zéro". Si un flux de trajectoires satisfait ce critère, alors on parle de K-flux. Nous ne rentrerons pas ici dans les détails exacts de ce qu'est l'Entropie métrique KS. Gardons tout de même à l'esprit que cette quantité est calculée à l'aide des différents exposants de Lyapunov des trajectoires du flux considéré. [24]

1.5 Application standard de Chirikov et transition vers le chaos

Analysons maintenant les propriétés de cette application.

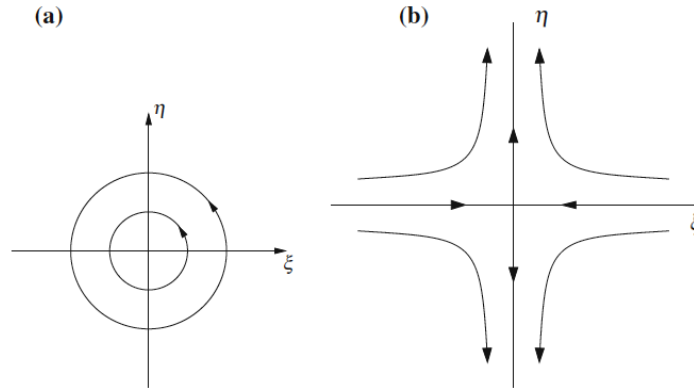


FIGURE 1.4 – a) Points fixes stables ou elliptiques b) points fixes instables ou hyperbolique
Reproduit de [23]

En théorie du chaos, il est évidemment utile de tracer les sections de Poincaré dans le but de repérer les structures et dynamiques qui se forment. Le rotateur pulsé ne fait pas exception à cette règle. Il est néanmoins important de mettre en évidence une petite nuance.

Rappelons que l'application standard dépend d'un paramètre K . Donc pour chacune des valeurs de K existe un espace des phases qui, comme nous le verrons, détermine entièrement les dynamiques rencontrées. La où on appelle ce paramètre "intensité du pulse" lorsqu'on parle du rotateur pulsé, on parle plutôt de paramètre de stochasticité lorsqu'il s'agit d'étudier l'application standard comme un objet purement mathématique. La raison de cette appellation deviendra évidente au cours de l'analyse de cette dernière[17][14].

1.5.1 Systèmes intégrables

Comme suggéré ci-dessus. Le paramètre K va déterminer la dynamique du système. Lorsque ce paramètre sera suffisamment grand, du chaos apparaîtra. Si $K=0$. Alors on dit que le système est intégrable.

Un système est dit **intégrable** s'il possède n degrés de liberté et si il est possible de trouver m constantes de mouvement tel que $m = n$. Ces constantes de mouvement doivent être indépendantes et obéir à la condition $\{c_i, c_j\} = 0$ où les c_i, c_j sont des constantes de mouvement et $i, j = 1, \dots, s$ où s est le nombre de constantes de mouvement du système. Les $\{\}$ représentent les crochets de Poisson. L'indépendance, quant-à-elle, est indispensable pour être sûr de décrire tout l'espace des phases du système.[23]. Les constantes de mouvement sont trouvées à l'aide du théorème de Noether[24]. Les constantes de mouvement sont donc issues des symétries du système. Les systèmes intégrables peuvent être résolus analytiquement et donnent lieu à des dynamiques que nous appellerons **régulières** (en opposition avec **chaotique**).

Par exemple, dans le rotateur pulsé pour $K=0$. Il est possible de trouver autant de constantes de mouvements que de degrés de liberté au système. Dès lors le système est totalement intégrable. En effet, dans ce cas l'Hamiltonien ne dépend pas du temps et l'énergie totale est donc conservée. En l'occurrence, la quantité conservée ici est le moment cinétique et notre portrait de phases n'est composé que de lignes horizontales. On parle ici d'orbites invariantes associées à chaque valeur initiale du moment cinétique L . Les orbites invariantes que l'on peut aussi appeler tores invariants en raison de leur topologie. Le portrait de phase pour $K = 0$ est représenté dans la Fig1.5[20]

Cependant, ces orbites sont de deux types

- **orbite périodiques** : Si la valeur de $L/2\pi$ est un nombre rationnel. L'orbite est parfaitement périodique. L'application standard redonne, après un nombre d'itérations dépendant de cette valeur de L et du rapport des fréquences, exactement le même point dans l'espace des phases. On parle aussi de tores résonnants.

Si $L/2\pi = S/R$ ou S et R sont deux nombres entiers. Alors le nombre de points de l'orbite périodique est égal à R .

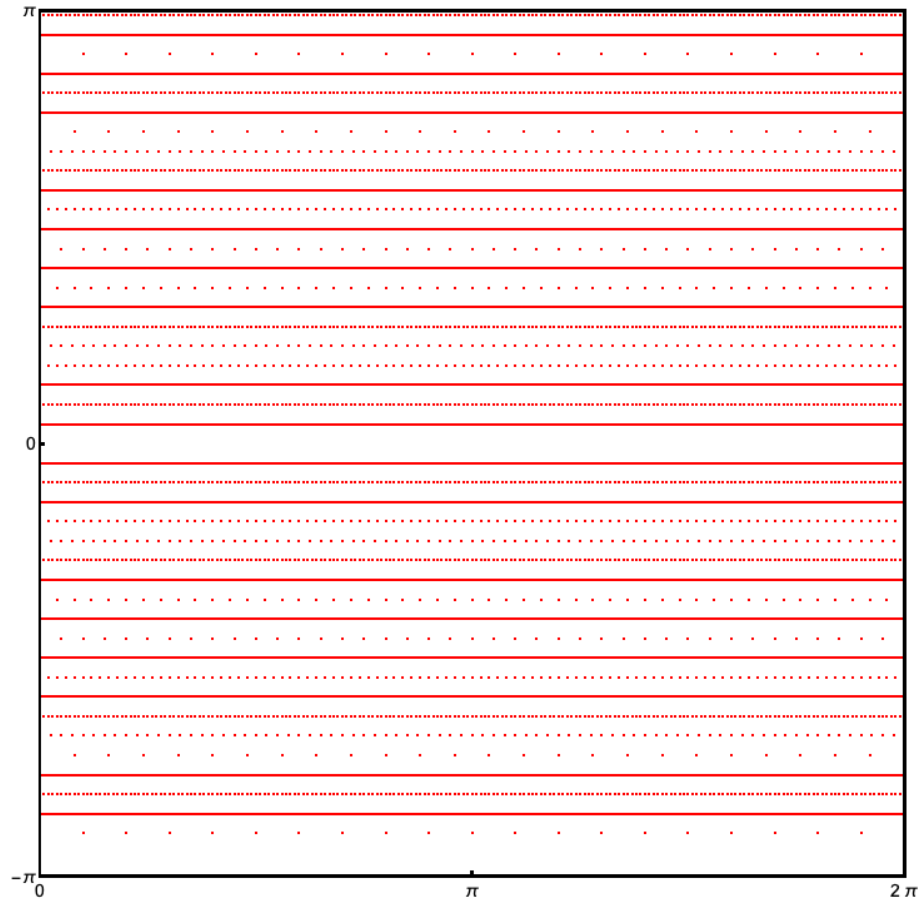


FIGURE 1.5 – Portait de phase de l'application standard pour $K=0$. En abscisse nous avons la coordonnée θ et en ordonnée nous avons le moment cinétique L

- **orbites quasi-périodiques** : Ici la situation est différente. Le rapport entre L et 2π est un nombre irrationnel. Dès lors les itérations d'application standard ne donneront jamais le même couple de point (θ, L) . Cependant ces couples de points finiront, après un certain nombre d'itération par décrire une courbe continue.

Nous pouvons constater ces deux types d'orbites dans la Fig1.5. Nous voyons bien des courbes continues mais aussi des suites de points équidistribués.

En opposition. Un système est non-intégrable si il y a moins de constantes de mouvement que de degrés de liberté. Dans ce cas, le système n'est plus résoluble analytiquement et va donner lieu à des structures dynamiques complexes. La non-intégrabilité est précurseur au chaos sans non plus en imposer l'existence. Le rotateur pulsé devient non-intégrable lorsque K n'est plus égal à 0. Nous allons voir ce qu'il s'y passe.

Nous allons aussi constater que le fait que les orbites soient périodiques ou quasi-périodiques n'est pas un détail. Car leur destin est différent lorsqu'elles sont confrontées à la perturbation. Dans ce but, nous devons introduire le théorème KAM qui traite des orbites irrationnelles et le théorème de Poincaré-Birkhoff qui lui traite des orbites rationnelles.

1.5.2 Quasi-intégrabilité et théorème Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM)

Kolmogorov, Arnold et Moser ont prouvé que, dans des systèmes Hamiltonien légèrement perturbés, les orbites irrationnelles survivent. Survivent oui mais sont tout de même déformées. Ces nouvelles orbites dans le régime perturbé qui sont les restes des orbites irrationnelles du système non perturbé sont appelés des orbites KAM.

Mais pourquoi seulement les orbites irrationnelles ? En fait l'idée est que lorsque l'on fait la

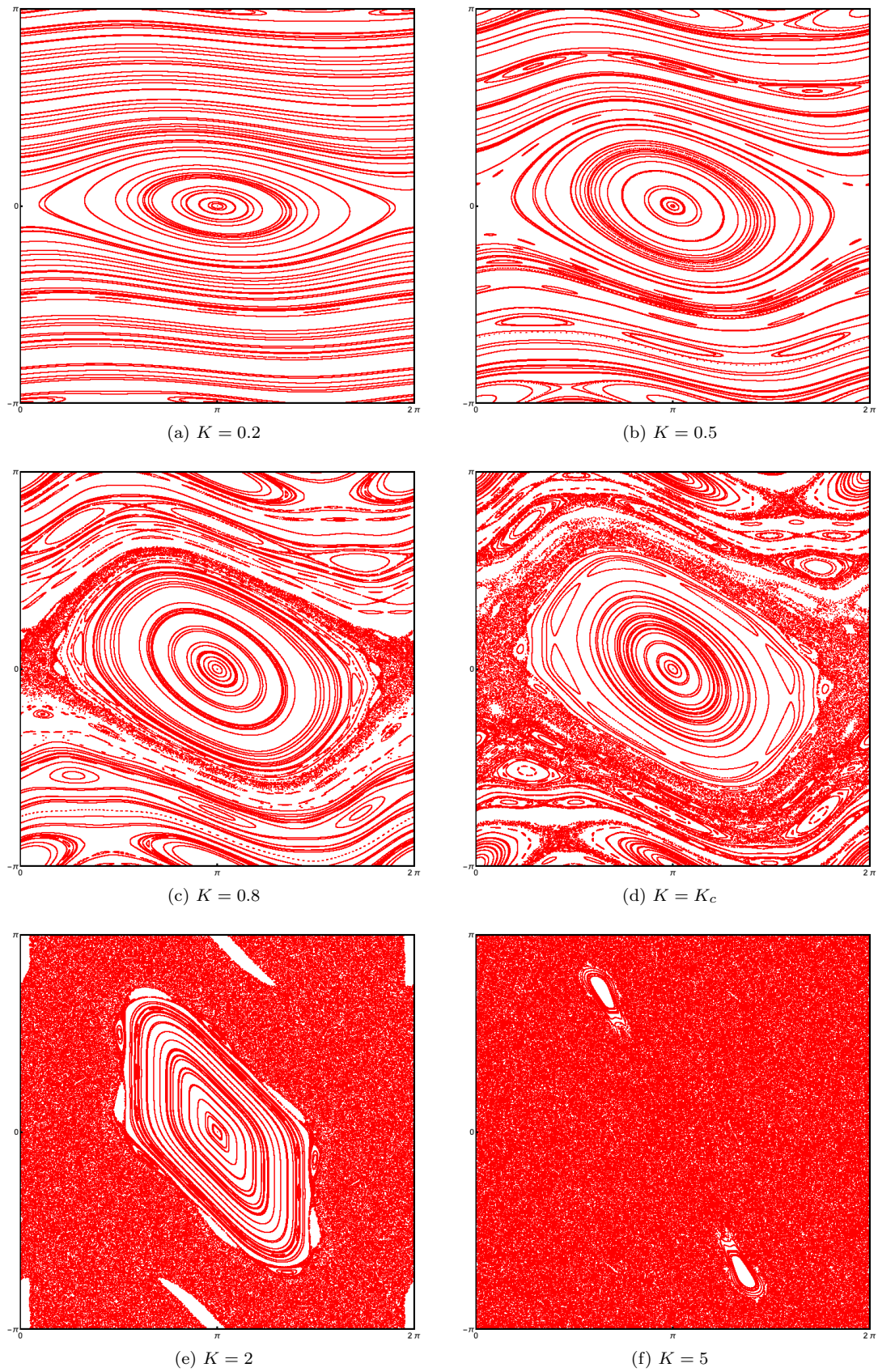


FIGURE 1.6 – Portraits de phases de l'application standard. Différentes valeurs du paramètre de stochasticité K sont représentées
En ordonnée nous avons le moment cinétique L et en abscisse la position angulaire θ

théorie des perturbations il s'avère qu'elle diverge pour les tores rationnels. D'où le fait que ce théorème, qui est en réalité issu d'une théorie des perturbations améliorée, ne s'applique pas aux orbites rationnelles.

Dès lors, dans les régimes où le théorème KAM est d'application. On parle de quasi-intégrabilité. [20][23][24]

1.5.3 Poincaré birkhoff

Nous allons ici nous contenter de discuter des implications du théorème de Poincaré-Nirkhof. Tout comme pour le théorème KAM. Une présentation rigoureuse de ce dernier fait intervenir des concepts complexes qui dépassent largement le cadre de ce mémoire.

Rappelons qu'une orbite périodique n'est composée que de points fixes par construction. Si $L/2\pi = S/R$ avec S et R des nombres entiers. Alors nous obtenons une orbite périodique et chaque point est un point fixe d'ordre R .

Le théorème KAM nous dit aussi que ces orbites sont détruites immédiatement lorsqu'une perturbation rentre en jeu. Par contre les orbites proches sont décrites par un nombre irrationnel. Dès lors elles sont déformées conformément au KAM. Elles vont se croiser de manière à former des structures elliptiques dans l'espace des phases. Des résonances. En particulier, le théorème de Poincaré-Birkhoff dit que les orbites rationnelles non-perturbées vont se transformer en une succession de points fixes. Ces points fixes viennent toujours en nombre paires car ils s'alternent entre point fixes stables et instables [23][20].

Les points fixes stables sont entourés par des structures elliptiques appelées cantori. Ces îlots de cantori sont dit quasi-intégrable et sont entourés par des séparatrices qui se croisent en les points fixes instables. Ces chaînes d'îlots intégrables sont donc les résonances. [28].

Nous pouvons observer ces structures dans la Fig 1.6. Dans le cas $K = 0.2$. Nous voyons clairement la résonance $1:1$ qui est centrée en $(0, \pi)$ qui est aussi le point fixe stable. Le point fixe stable associé étant en $(0, 0)$. Pour le cas $K = 0.5$, nous voyons clairement la résonances $2:1$ sur le haut et le bas du portrait de phase. Cette dernière est donc une succession de deux points fixes stables et de deux points fixes instables. Nous pouvons aussi voir dans ce cas les résonances $3:1$.

En réalité, un des intérêts fondamentaux de l'application standard est qu'elle contient toutes les résonances possibles. En effet, on peut toujours trouver un L tel que $L/2\pi$ est le nombre rationnel voulu.

Cependant nous ne les voyons pas toutes car plus S est grand pour une orbite S/R . Moins l'amplitude des orbites elliptiques qui l'entoure seront grande. Cependant, l'amplitude de ces dernières augmente avec K . Jusqu'à ce qu'elle se superposent. Nous allons voir que c'est de cette superposition que naît le chaos.

1.5.4 Apparition du chaos

Lorsque K augmente, l'intensité de la perturbation augmente. Dans un premier temps, les orbites invariantes constantes en p vont se déformer. En réalité, la valeur de K pour laquelle le dernier tore invariant de l'espace des phases est détruit est

$$K_c \approx 0.97163... \quad (1.46)$$

Les tores invariants empêchent le transport dans l'espace des phases. Ils agissent comme des barrières dynamiques. A partir de cette valeur, l'espace des phases est donc entièrement connecté. Seuls les îlots quasi intégrables agissent comme des freins à la diffusion mais ne l'empêchent pas pour autant. Dès lors, il est possible de parler de chaos global. En effet, on peut voir que des structures ressemblant à du chaos existent pour des valeurs de $K < K_c$ mais reste fortement localisés. Nous pouvons voir ces structures dans la Fig 1.6 pour le cas $K = 0.8$. Pour le $K = K_c$ le chaos commence à s'insinuer un peu partout et devient prépondérant dans les cas $K > K_c$. [17]

Cependant, la valeur de K_c présentée ci-dessus est obtenue numériquement. Nous allons voir qu'il existe cependant un moyen de l'estimer en terme d'interactions entre résonances.

Critère de superposition des résonnances Il est possible de réécrire l'Hamiltonien du rotateur pulsé de la manière suivante (En gardant en tête que nous avons posé $T = 1$ et $I = 1$).

$$H(\theta, L) = \frac{L^2}{2} + K \sum_{m=-\infty}^N \cos(\theta - 2\pi mt) \quad (1.47)$$

On peut facilement se convaincre (le faire éventuellement) que nous avons donc des résonnances 1 :1 centrées dans l'espace des phases sur tous les couples $(2m\pi, \pi)$ comme illustré sur la Fig 1.7. Nous voyons que l'amplitude de la perturbation K détermine entièrement la distance entre la séparatrice supérieur et inférieure, la largeur de la résonnance ΔI .

L'idée du critère de recouvrement est que lorsque les résonnances deviennent si larges qu'elles commencent à s'entremeler. L'intersection des trajectoire produit du chaos.

En approximant toutes ces résonnances à des oscillateurs. On peut déterminer ΔI et ce à l'aide de la théorie des perturbations. Se faisant nous trouvons

$$\Delta I \approx 4\sqrt{K} \quad (1.48)$$

Or les résonnance se touchent lorsque leur largeur est de l'ordre de la hauteur d'une cellule de l'espace des phases. Donc 2π . Ce qui nous permet de donner une approximation de la valeur critique du paramètre de stochasticté K_c

$$K_c \approx \frac{\pi^2}{4} \approx 2.5 \quad (1.49)$$

Nous voyons que nous sommes assez loin du K_c trouvé numériquement. Cependant nous n'avons pris en compte que les interactions des résonnances 1 :1 entre elles. Il est évident que les autres résonnances vont aussi se chevaucher. En utilisant la théorie des perturbations au second ordre, on trouve la largeur des résonnances 2 :1. Et donc en prenant en compte ces dernières nous trouver un K_c plus petit. En l'occurence $K_c = 1.2$.

Un autre point qui est négligé est que les séparatrices sont des orbites KAM. Elles ne sont pas aussi "lisses" que peuvent l'être les séparatrices d'un simple pendule. De plus, du chaos local a déjà commencé à s'insinuer autour des résonnances. En prenant en compte la largeur de la bande de chaos le paramètre K_c est encore abaissé.

Donc en prenant en compte de plus en plus de résonnances et en tenant compte des artefacts propres à la standard map. Nous pourrions nous rapprocher de plus en plus de la bonne valeur de K_c cependant, la tâche semble de plus en plus compliquée[23].

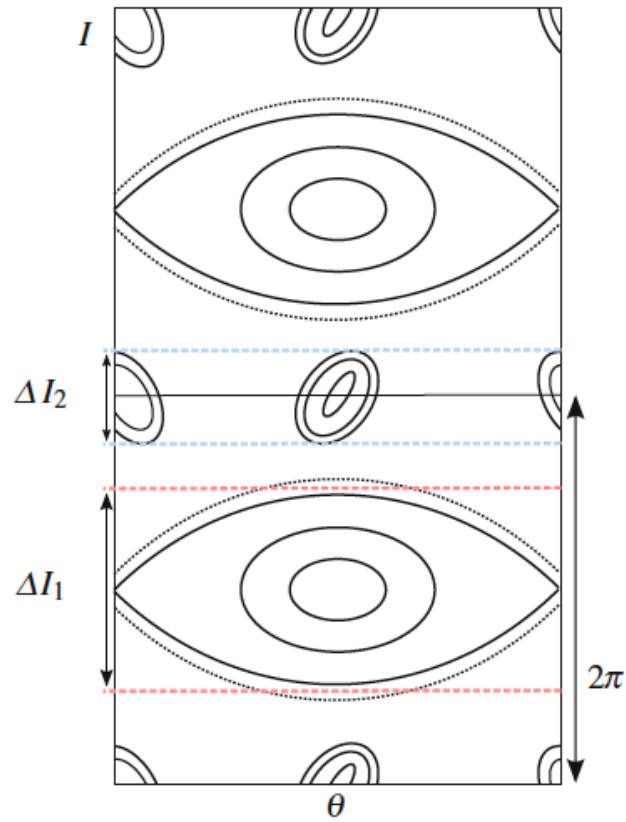


FIGURE 1.7 – Représentation schématique des résonances du rotateur pulsé. Avec une mise en évidence de la largeur de ces dernières.
Reproduit de [23]

Chapitre 2

Le chaos quantique

2.1 Introduction

Le chaos ne semble pas émerger naturellement de la physique quantique. En effet, l'équation de Schrödinger étant linéaire, elle ne manifeste aucune sensibilité aux conditions initiales, écartant ainsi la possibilité de comportements chaotiques. Bien que des tentatives aient été faites pour expliquer l'émergence éventuelle du chaos dans le cadre de la physique quantique, aucune n'a pleinement satisfait [29] [30]. C'est d'ailleurs pour cette raison que la dénomination même de ce domaine de recherche, le "chaos quantique", est débattue. Certains préfèrent parler de "chaoticité quantique" afin d'éviter toute confusion [31]. Bien que cette dernière appellation soit plus précise, l'usage courant de l'expression "chaos quantique" est largement accepté par la communauté des chercheurs dans le domaine.

Mais, en raison de la linéarité de l'équation de Schrödinger, de quoi parlons-nous exactement lorsque nous évoquons le "chaos quantique"? En réalité, il s'agit principalement d'une théorie semi-classique. Nous examinons des systèmes classiquement chaotiques et leur imposons les règles de la physique quantique. Cette méthode nécessite également la définition d'un paramètre déterminant le degré de classicité ou de quanticité de notre système. Cela nous permet de définir la limite classique en faisant tendre ce paramètre vers zéro ou l'infini, en fonction du choix effectué. Dans un deuxième temps, le "chaos quantique" est également une théorie spectrale. En effet, le spectre d'énergie des systèmes quantiques classiquement chaotiques présente des propriétés particulières, dont la conjecture BGS, que nous aborderons dans ce chapitre. Notamment, les distances entre deux états d'énergie voisins suivent des distributions bien définies dans ce cas. Ainsi, si le spectre énergétique du système présente de telles propriétés, on peut conclure que le système classique correspondant est chaotique. On parle alors de "signature quantique du chaos" [32] [33].

Bien sûr, la question de l'émergence du chaos à partir de la physique quantique demeure cruciale. En attendant une solution satisfaisante à ce problème, nous devons nous contenter de la physique semi-classique. Bien qu'elle doive être considérée comme une solution transitoire, elle permet d'obtenir des résultats cohérents, vérifiables et confirmés expérimentalement.

Dans cette section, nous aborderons initialement quelques concepts de physique semi-classique. Ensuite, nous examinerons de manière succincte les propriétés spectrales des systèmes de chaos quantique. Nous détaillerons les classes d'universalités et expliquerons comment elles définissent un système de chaos quantique. Le concept d'ergodicité quantique et de thermalisation sera également exploré. Nous mettrons en lumière le lien entre la théorie des matrices aléatoires, décrivant les propriétés spectrales du chaos quantique, et un concept plus fondamental : l'hypothèse de thermalisation. Ces notions joueront un rôle crucial dans notre compréhension ultérieure de la spécificité des états cicatrisés. En conclusion, nous discuterons d'outils essentiels en chaos quantique, tels que la fonction de Husimi. Cette dernière permet de définir une distribution de probabilité pour les états d'un système quantique. Nous introduirons également le taux de participation inverse (IPR), offrant une mesure de la localisation des fonctions d'ondes. Ces outils, bien que applicables à un

large éventail de contextes, révèlent toute leur pertinence dans le cadre du chaos quantique et seront utilisés ultérieurement dans notre étude.

2.2 Limite semi-classique

Une condition essentielle pour traiter un système à la fois d'un point de vue classique et quantique est la limite semi-classique. Explorons succinctement cette notion.

Il n'est pas nécessaire de souligner ici l'importance de la constante de Planck, qui, entre autres fonctions, définit les échelles caractéristiques du régime quantique. C'est précisément en utilisant cette caractéristique que nous déterminons la limite classique.

Considérons une grandeur caractéristique du système, telle que l'action. Plus cette grandeur est grande, plus nous nous situons dans le cadre du régime classique. En effet, la constante de Planck, \hbar , a la dimension d'une action et représente l'action minimale en physique quantique. Ainsi, si le calcul d'une action est significativement plus grand que \hbar , nous approchons le régime classique. Pour formaliser cette idée, définissons la quantité sans dimension $Action/(2\pi\hbar)$. Nous entrons dans le régime semi-classique lorsque cette quantité est grande, et notamment, la limite semi-classique est atteinte lorsque ce nombre tend vers l'infini[23].

À partir de cette constatation, il est d'usage en physique semi-classique de définir une constante de Planck effective, notée \hbar_{eff} . L'idée est donc d'utiliser la constante de Planck non plus comme une constante, mais comme un paramètre du système. En faisant varier ce paramètre, nous déterminons à quel point notre système est quantique ou classique. La limite semi-classique est ainsi caractérisée par l'expression :

$$\hbar_{\text{eff}} \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

Plus cette constante est petite par rapport aux dimensions caractéristiques du système, plus le nombre d'états quantiques est élevé.

Nous aurons l'occasion de définir \hbar_{eff} dans le chapitre suivant à titre d'exemple. Ce paramètre permet de traiter un système de manière semi-classique, que ce soit pour la partie intégrable, à travers des méthodes de quantification telles que la quantification Einstein-Brillouin-Keller, ou pour la partie chaotique du système.

Pour la partie chaotique, l'approche consiste souvent à relâcher un paquet d'ondes centré en un point particulier de l'espace des phases classique et à le faire évoluer dans le système à l'aide de propagateurs. La constante de Planck détermine ainsi l'étalement du paquet d'ondes dans le système, en vertu de l'inégalité d'Heisenberg. De plus, elle intervient également dans la formulation des propagateurs semi-classiques, ces derniers n'étant valides que dans la limite semi-classique. Il est intéressant de noter qu'à mesure que la limite semi-classique est approchée, le paquet d'ondes tend vers un point, retrouvant ainsi la notion de trajectoire[33][23].

2.3 Propriétés spectrales

En 1984, Bohigas, Giannoni et Schmit ont formulé une conjecture maintenant centrale en chaos quantique [34]. Cette conjecture, connue sous leur nom, affirme que les valeurs propres d'un système quantique, dont le pendant classique est entièrement chaotique, peuvent être modélisées à l'aide des valeurs propres de matrices gaussiennes aléatoires. En particulier, l'espacement entre les états d'énergie du système suit la même distribution que celle des matrices aléatoires.

Cette conjecture s'applique naturellement à la partie chaotique des systèmes mixtes, la partie régulière étant traitée aisément à l'aide des règles de quantification semi-classiques. Lorsqu'un système physique présente des symétries, il est possible de le réduire sous une forme bloc-diagonal. Cette symétrie émerge à partir d'un nombre quantique, où chaque bloc correspond à des parties de l'Hamiltonien qui ne communiquent pas entre elles. Cela permet de traiter les différentes parties du système de manière indépendante, même dans le cas des systèmes dont l'espace de Hilbert est infini. Cependant, il reste à déterminer ces blocs diagonaux[35].

Obtenir la matrice qui représente l'Hamiltonien dans une base donnée est souvent très difficile, voire impossible. C'est là que les matrices aléatoires interviennent. L'idée est de modéliser ces Hamiltoniens à partir des connaissances limitées que nous avons sur le système. La conjecture

BGS indique que ces matrices sont gaussiennes, et l'ajout de symétries supplémentaires permet de restreindre l'ensemble des matrices les modélisant, tout en inférant le moins possible sur le système[23].

L'utilisation de différentes symétries conduit à trois grandes classes d'universalité : les ensembles gaussiens orthogonaux (GOE), les ensembles gaussiens unitaires (GUE) et les ensembles gaussiens symplectiques (GSE). Ces classes correspondent respectivement aux cas où le système est invariant sous une inversion temporelle, n'est pas invariant sous l'inversion temporelle mais l'est sous toute transformation de base unitaire, et enfin, est invariant sous inversion temporelle avec un opérateur d'inversion temporelle \hat{T} tel que $\hat{T}^2 = -1$ [23].

Ces ensembles sont appelés les classes d'universalité car ils s'appliquent sur la base de peu d'informations. Ils sont indépendants du système considéré en tant que tel, d'où le terme "universalité"[33].

Un résultat significatif de la théorie des matrices aléatoires concerne la distribution de la distance entre les états d'énergie voisins. Il est possible de démontrer que chaque classe d'universalité présente une distribution spécifique de l'espacement entre les états voisins, différente du cas intégrable. Ces distributions sont les suivantes :

$$\begin{aligned} P(s) &= e^{-s} && \text{dans le cas intégrable} \\ P(s) &= s^{\frac{\pi}{2}} e^{-s^2 \frac{\pi}{4}} && \text{pour les GOE} \\ P(s) &= s^2 \frac{32}{\pi} e^{-s^2 \frac{4}{\pi}} && \text{pour les GUE} \\ P(s) &= s^3 \frac{2}{3^6 \pi^3} e^{-s^2 \frac{64}{9\pi}} && \text{pour les GSE} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ces distributions sont représentées dans la Fig 2.1

Ces propriétés spectrales permettent l'identification des régimes classiques sous-jacents, particulièrement dans les situations où nous n'avons pas accès au régime classique. La mesure des valeurs propres permet de déterminer si nous sommes dans un cas classiquement intégrable ou classiquement chaotique. Certaines considèrent ces classes d'universalité comme un critère pour repérer le chaos quantique dans un système, voire même comme la définition du chaos quantique[33].

La distribution des énergies permet ainsi d'identifier un régime régulier si elle correspond à une distribution de Poisson, et un régime chaotique si le spectre appartient à l'une des classes d'universalité. C'est un outil puissant lorsque l'on n'a pas accès au pendant classique d'un système[27].

2.4 Hypothèse de thermalisation

Qu'entend-on par thermalisation dans les systèmes quantiques ? Supposons un système physique préparé dans un état $|\Psi(t_0)\rangle$ et une observable \hat{O} . La thermalisation signifie que lors de l'évolution du système, l'observable tend vers les prédictions de l'ensemble microcanonique et reste proche de celles-ci.

Illustrons ce propos pour un système décrit par un Hamiltonien indépendant du temps $\hat{\mathcal{H}}$ tel que $\hat{\mathcal{H}}|m\rangle = E_m|m\rangle$. Le système est préparé dans un état pur $|\Psi(t_0)\rangle$. On a donc

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_m \langle m|\Psi(t_0)\rangle e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t} |m\rangle = \sum_m C_m e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t} |m\rangle \quad (2.3)$$

Regardons l'évolution de l'observable \hat{O}

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(t) &\equiv \langle \Psi(t)|\hat{O}|\Psi(t)\rangle \\ &= \sum_{m,n} C_m^* C_n e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)t} \mathcal{O}_{mn} \\ &= \sum_m |C_m|^2 \mathcal{O}_{mm} + \sum_{m,n \neq m} C_m^* C_n e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)t} \mathcal{O}_{mn} \end{aligned} \quad (2.4)$$

avec $\mathcal{O}_{m,n} = \langle m|\hat{O}|n\rangle$.

Donc, pour dire que \hat{O} thermalise, il faut que lorsque t est grand, $\mathcal{O}(t)$ soit proche des prédictions de l'ensemble microcanonique. Il s'avère que c'est le cas lorsque l'Hamiltonien est une matrice aléatoire et que l'on utilise les prédictions de la RMT pour l'observable. En effet, la RMT prédit

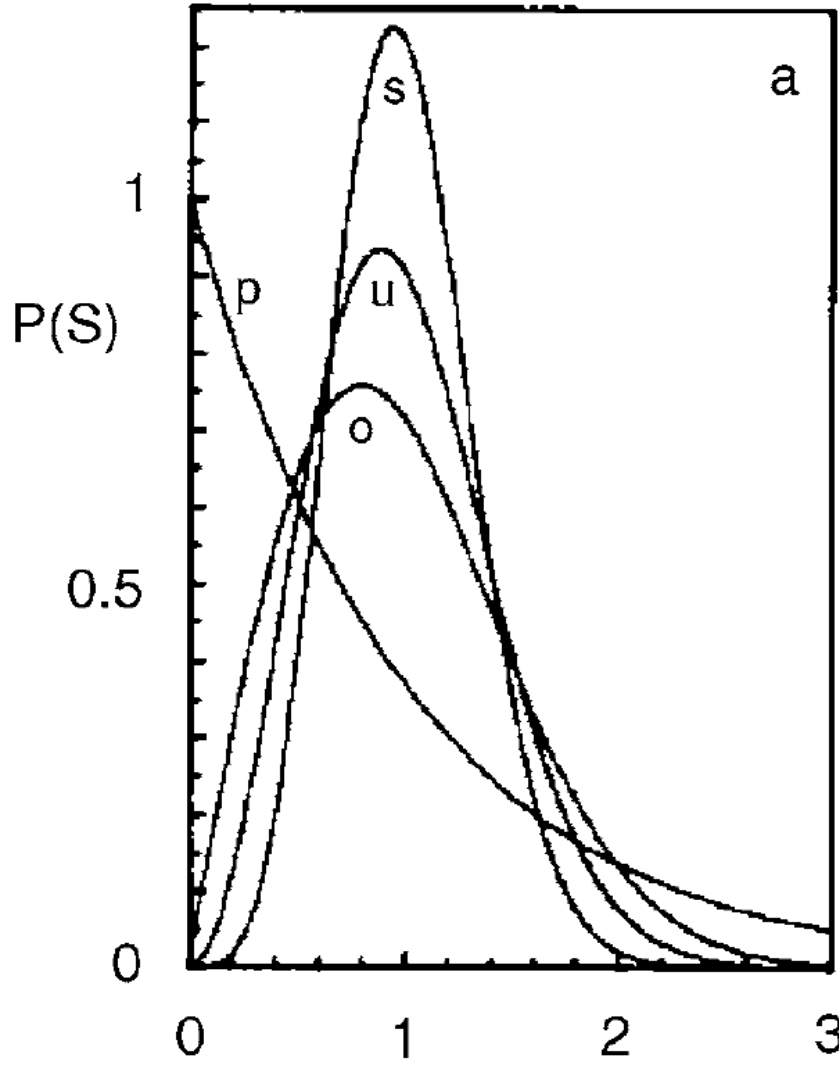


FIGURE 2.1 – Distributions de l'espacement des plus proches voisins. "p" correspond à la distribution de poisson. "s" est pour le cas symplectique. "u" pour le cas unitaire. "o" pour le cas orthogonal.

Reproduit de [33]

que O_{mm} est indépendant de m et que les O_{mn} pour $m \neq n$ sont négligeables. Dans ce cas, on obtient

$$\mathcal{O}(t) \approx \sum_m |C_m|^2 \mathcal{O}_{mm} = \bar{\mathcal{O}} \sum_m |C_m|^2 = \bar{\mathcal{O}} \quad (2.5)$$

Cependant, dans les années 1990, il a été démontré par M. Srednicki[36] que la RMT découlait de quelque chose de bien plus fondamental. C'est l'hypothèse de thermalisation (ETH). Elle peut être formulée de la manière suivante : la représentation d'une observable \mathcal{O} dans la base des états propres d'un Hamiltonien est

$$\mathcal{O}_{mn} = O\left(\frac{E_m + E_n}{2}\right)\delta_{mn} + \exp\left(-\frac{1}{2}S\left(\frac{E_m + E_n}{2}\right)\right)f_O\left(\frac{E_m + E_n}{2}, E_n - E_m\right)R_{mn} \quad (2.6)$$

où $S(E)$ est l'entropie thermodynamique à l'énergie E . $O\left(\frac{E_m + E_n}{2}\right)$ et $f_O\left(\frac{E_m + E_n}{2}, E_n - E_m\right)$ sont des fonctions lisses en leurs arguments. $O\left(\frac{E_m + E_n}{2}\right)$ est la valeur moyenne de l'ensemble microcanonique à l'énergie $\frac{E_m + E_n}{2}$. R_{mn} est une variable aléatoire qui est nulle en moyenne et qui a une variance de un.

Cette hypothèse a été vérifiée de manière numérique dans de nombreux systèmes. Il en découle des résultats importants. En particulier, nous retrouvons les résultats de la théorie des matrices aléatoires à partir de cette hypothèse. Il faut savoir que la théorie des matrices aléatoires est limitée à de petits intervalles d'énergies sans quoi elle ne marche plus aussi bien. Ce qui n'est pas le cas pour l'hypothèse de thermalisation. Ce qui place donc cette hypothèse à un niveau plus fondamental. En réalité la théorie des matrices aléatoires peut être considérée comme une conséquence de l'ETH.

De plus l'ETH implique aussi l'ergodicité quantique. L'ergodicité quantique implique que, si on ignore les résonances de l'Hamiltonien. L'évolution temporelle de l'observable tend vers sa moyenne dans l'ensemble microcanonique.

Il est intéressant de noter que la thermalisation entraîne une perte de mémoire du système. En effet, si le système thermalise, nous n'avons plus aucune information sur son état initial. La thermalisation étant le destin de tous les états du système, cette perte de mémoire se traduit par une délocalisation de la fonction d'onde. Dans la section suivante, nous aborderons la définition d'une distribution de probabilité pour un état dans un système quantique. Cette délocalisation se traduit par une distribution de probabilité quasi-uniformément répartie entre les différentes variables du système.

Les informations présentées dans cette section proviennent des articles [37], [38], [3], où le lecteur curieux pourra trouver davantage d'informations sur le sujet.

L'intérêt de discuter de la thermalisation ici réside dans le fait que les états cicatrisés ne conduisent pas à une thermalisation des observables (référence à trouver). Ils constituent donc une exception à l'ergodicité et à la théorie des matrices aléatoires, ce qui les rend particulièrement dignes d'intérêt. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 4...

2.5 Distribution de (quasi)probabilité

Lorsque nous avons une fonction d'onde semi-classique, il est souvent très intéressant de pouvoir la représenter dans l'espace des phases classiques. Donc en terme des variables classiques de position et d'impulsion. Notre but dans cette section est donc de trouver une fonction prenant en argument les variables canoniques classiques \mathbf{q} et \mathbf{p} (θ et L dans le rotateur pulsé pour rappel), qui donne en sortie l'amplitude de probabilité. C'est le rôle de la distribution de Husimi que nous allons présenter ici.

2.5.1 Représentation d'Husimi

La fonction de Husimi a été mise en évidence par K. Husimi en 1940[39]. Elle résout la problématique de sa fonction préceuseure la "quasi-distribution de Wigner" qui est une distribution de quasi-probabilité. Cette dernière admet tout de même un gros problème. Elle n'est pas définie positive. Ce qui, pour une distribution de probabilité est, de manière évidente, un gros défaut et qui lui vaut donc le préfixe quasi devant le mot distribution.

Il existe plusieurs manières d'obtenir la fonction de Husimi. Ici nous présenterons la version où la distribution de Husimi est vue comme une correction à la fonction de Wigner. Cette dernière ayant été utilisée par Heller pour démontrer l'existence des états cicatrisés [1] elle nous sera utile dans le chapitre 4. Dérivons donc l'expression de la fonction de Husimi selon la méthode utilisée dans [23].

Fonction de Wigner Rappelons ici que la notion de trajectoire n'a pas de sens en mécanique quantique. Et ce en raison de l'inégalité d'Heisenberg. Dès lors, si nous voulons travailler avec les variables canoniques \mathbf{q} et \mathbf{p} nous devons nous assurer que les quantités que nous utilisons ne rentrent pas en contradiction avec le principe d'incertitude. C'est dans ce but que nous introduisons dans un premier temps le symbole de Weyl d'une observable \hat{A}

$$A_W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int d\mathbf{x} \left\langle \mathbf{q} + \frac{\mathbf{x}}{2} \right| \hat{A} \left| \mathbf{q} - \frac{\mathbf{x}}{2} \right\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (2.7)$$

où $|\mathbf{q}\rangle$ représente les modes propres spatiaux du système et où d est.

Nous voyons donc que l'idée sous-jacente au symbole de Weyl est de lisser la dépendance de

l'observable en \mathbf{q} de manière à ce que la nouvelle quantité obtenue ne soit pas affectée par l'inégalité d'Heisenberg.

Dans le cas présent, ce qui va nous intéresser est le symbole de Weyl de l'opérateur densité $\hat{\rho}$. Pour rappel, l'opérateur densité permet d'écrire l'état d'un système de la manière la plus générale qui soit. Dès lors il est naturel, dans le but d'obtenir une distribution de probabilité, d'en chercher son symbole de Weyl. Par simplicité, nous présenterons les résultats pour le cas d'un état pur $\rho \equiv |\Psi\rangle\langle\Psi|$

$$\mathcal{W}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int d\mathbf{x} \langle \mathbf{q} + \frac{\mathbf{x}}{2} | \hat{\rho} | \mathbf{q} - \frac{\mathbf{x}}{2} \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (2.8)$$

Cette fonction porte le nom de fonction de Weyl. Cette fonction définit une densité de probabilité généralisée dans l'espace des phases pour l'état quantique décrit par l'opérateur densité $\hat{\rho}$. Cette fonction peut tout aussi bien être définie dans le cadre de la représentation en impulsion.

Nous avons les relations suivantes

$$\int d\mathbf{q} \mathcal{W}_\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \langle \mathbf{q} | \hat{\rho} | \mathbf{q} \rangle = |\Psi(\mathbf{q}, t)|^2 \geq 0 \quad (2.9)$$

$$\int d\mathbf{p} \mathcal{W}_\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \hat{\rho} | \mathbf{p} \rangle = |\Psi(\mathbf{p}, t)|^2 \geq 0 \quad (2.10)$$

qui nous donne donc la probabilité de trouver le système dans l'état $|\Psi\rangle$ à la position \mathbf{q} (*resp.* en impulsion \mathbf{p}) au temps t . Cette fonction, lorsque intégrée sur tout l'espace donne bien l'unité et est donc normalisée.

Cependant, il y a un problème. Ce problème lui vaut d'ailleurs le préfixe "quasi" devant distribution de probabilité. Cette fonction peut prendre des valeurs négatives. Comme nous allons le voir, La fonction de Husimi résout ce problème.

Fonction de Husimi Nous pouvons obtenir la fonction de Husimi à partir de la fonction de Wigner à l'aide de la relation suivante

$$\mathcal{H}_\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' \mathcal{W}_\psi(\mathbf{q}', \mathbf{p}') f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{q}', \mathbf{p}') \quad (2.11)$$

Cela revient à projeter la fonction de Wigner sur une certaine fonction f et la quantité $\mathcal{H}_\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ est une mesure de ce recouvrement. Bien évidemment, la fonction f n'est pas choisie au hasard. L'idée est de projeter la fonction de Wigner sur des paquets d'ondes minimisant l'inégalité d'Heisenberg et centrés en (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . De cette manière, pour tout point (\mathbf{q}, \mathbf{p}) de l'espace des phases nous mesurons le recouvrement de la fonction d'onde avec le paquet d'onde gaussien centré en ce point et donc à quel point la fonction d'onde donne lieu à une probabilité plus ou moins grande de trouver le système dans cet état. Usuellement, le choix de la fonction f est un état cohérent.

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{q}', \mathbf{p}') = \mathcal{W}_{|\Psi\rangle_{\text{coherent}}} = \frac{1}{(\pi\hbar)^d} \exp\left(-\frac{(\mathbf{q} - \mathbf{q}')^2}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{\hbar^2}\right) \quad (2.12)$$

où σ est le paramètre de compression. Si $\sigma = 1$ le paquet d'onde est aussi large en position qu'en impulsion. Si $\sigma < 1$ (*resp.* $\sigma > 1$) alors le paquet d'onde est comprimé en impulsion (*resp.* en position). Tout en gardant l'inégalité de Heisenberg minimisée, il permet d'augmenter la précision sur l'une ou l'autre des variables de positions et d'impulsions. Evidemment, si on augmente la précision sur \mathbf{q} , nous perdons en précision sur \mathbf{p} . D'où la "compression" dans le nom de ce paramètre.

En discrétisant l'espace de Hilbert du système il est possible d'obtenir une expression discrète de la distribution de Husimi ce qui en permet l'implémentation numérique. La méthode pour obtenir cette expression discrète est montrée dans les références suivantes [40][41][42][43]. Dans le cas du rotateur pulsé, les variables sont θ et L dès lors discrétiser l'espace de Hilbert revient à créer des cellules dans l'espace des phases. Nous verrons dans le prochain chapitre qu'il est possible de restreindre l'étude du rotateur pulsé à un nombre fini de valeurs pour le moment angulaire. Ce nombre que nous appellerons N définit aussi la limite semi-classique. Dès lors nous découpons notre espace des phases en N^2 cellules élémentaires.

2.5.2 Taux de participation inverse

Le taux de participation inverse (IPR) permet de quantifier la localisation de la fonction d'onde. Plus la fonction d'onde est délocalisée, et donc le plus elle "participe" dans l'espace des phases. Le plus le taux de participation inverse sera petit. Et vice versa. Ce dernier est défini à partir de la fonction de Husimi.

Soit la valeur de la fonction de Husimi pour une cellule élémentaire de l'espace des phases $H_{i,j}$ avec $i, j = 1, \dots, N$. La fonction de Husimi est normée dès lors on a que

$$\sum_{i,j=1}^N H_{i,j} = 1 \quad (2.13)$$

Nous définissons l'IPR comme suit

$$IPR = \sum_{ij} H_{i,j}^2 \quad (2.14)$$

Lorsque l'état est localisé au maximum. Cela veut dire que il est localisé entièrement dans une cellule et que donc $H_{i,j} = 0$ sauf pour cette cellule particulière ou elle vaut 1. Dès lors l'IPR est maximal et vaut 1. A l'inverse, si la fonction d'onde est parfaitement répartie dans l'espace des phases. Alors $H_{i,j} = 1/N$ pour tout i, j . Dans ce cas l'IPR vaut donc $1/N$.

Pour résumer l'IPR est compris entre $1/N$ et 1 et plus la fonction d'onde est localisée, moins elle participe, plus l'IPR est grand[44].

2.5.3 Fonction de Husimi du rotateur pulsé

Dans un but illustratif. Nous allons ici montrer quelques fonctions de Husimi du rotateur pulsé. Sur la Fig des états correspondant à des des orbites classiques régulières et donc fortement localisée. Sur la Fig des états dans la mer chaotique. Il sont fortement délocalisé. Ce qui est une conséquence de l'hypothèse de thermalisation. Tous ces états ont été calculés dans le cas $K = 2$ et $N = 150$.

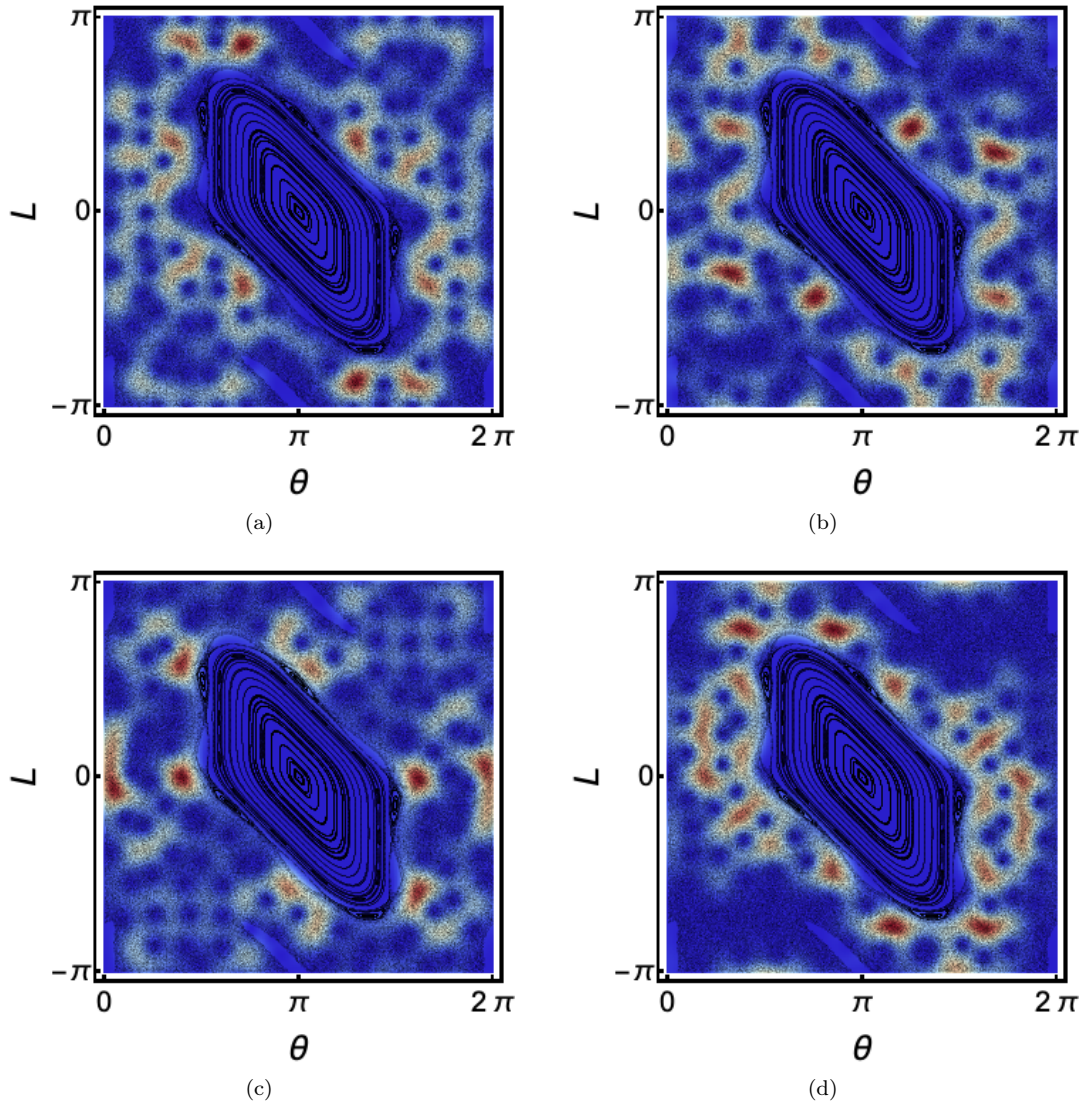


FIGURE 2.2 – Distributions de Husimi d'états chaotiques pour $K=2$ et $N=150$. Ces distributions sont superposées à l'espace des phases classique

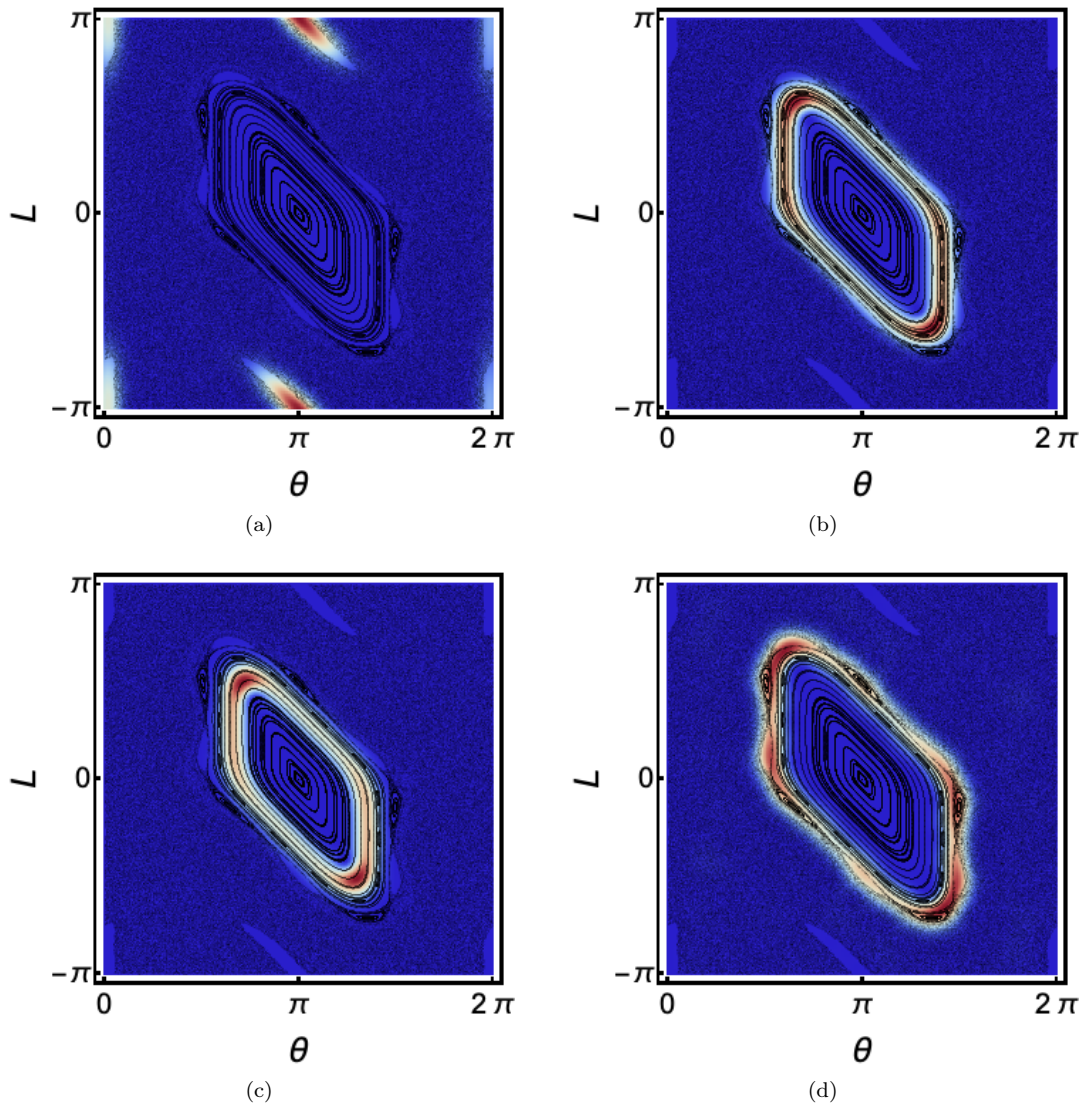


FIGURE 2.3 – Distributions de Husimi d'états réguliers pour $K=2$ et $N=150$. Ces distributions sont superposées à l'espace des phases classique

Chapitre 3

Rotateur pulsé quantique

3.1 Théorie de Floquet

Lorsqu'un Hamiltonien dépend du temps l'énergie n'est pas conservée. Cependant, nous allons voir que lorsque cette dépendance en temps est périodique, c'est à dire que

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \hat{\mathcal{H}}(t + T) \quad (3.1)$$

où T représente la période de l'Hamiltonien, il est possible de restreindre notre étude de ce dernier à des pas de temps T . Si nous restreignons notre étude de cette manière, alors il est possible de traiter l'Hamiltonien comme étant, d'une certaine manière, indépendant du temps. La théorie qui traite de ces systèmes est appelée théorie de Floquet.

La théorie de Floquet passe dans un premier temps par la construction d'un opérateur de translation temporelle. Que nous appellerons opérateur de Floquet.

Soit l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}(t) |\Psi(t)\rangle \quad (3.2)$$

où l'Hamiltonien considéré admet la propriété de périodicité 3.1. Il n'est plus possible de résoudre l'équation sous la forme

$$|\Psi_n(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) |\Psi_n(t_0)\rangle \quad (3.3)$$

Cependant, la périodicité temporelle nous donne cette propriété. Si nous définissons un opérateur de translation temporelle \hat{U}_F tel que nous avons

$$\hat{U}_F |\Psi_n(t)\rangle = |\Psi_n(t + T)\rangle = \lambda_n |\Psi_n(t)\rangle \quad (3.4)$$

Or $|\Psi_n(t)\rangle$ et $|\Psi_n(t + T)\rangle$ doivent donner lieu à la même physique car l'Hamiltonien est le même en t et en $t + T$. Dès lors, les seules valeurs propres λ_n acceptables sont des facteurs de phases et par conséquent sur le cercle complexe. On a donc

$$|\Psi_n(t + T)\rangle = e^{-i\phi_n} |\Psi_n(t)\rangle \quad (3.5)$$

et donc

$$|\Psi_n(t)\rangle = e^{-i\frac{\phi_n}{T}t} |u_n(t)\rangle \quad (3.6)$$

avec $|u(t)\rangle = |u(t + T)\rangle$. C'est le théorème de Floquet[27].

Nous voyons que l'équation 3.3 et 3.6 sont très similaires. Dès lors nous définissons la quasi-énergie

$$E_n^{QE} = \frac{\hbar}{T} \phi_n \quad (3.7)$$

ϕ_n est défini à 2π près. Ce qui implique que la quasi-énergie E^{QE} est bornée dans l'intervalle $[0, \frac{2\pi\hbar}{T}]$.

En réalité, l'opérateur de translation temporel \hat{U}_F est un opérateur d'évolution stroboscopique. Il est unitaire car ses valeurs propres sont sur le cercle complexe et $\hat{U}_F(t_0)$ doit être égal à la matrice unité. Nous avons bien à partir de l'équation 3.4

$$|\Psi(T)\rangle = \hat{U}_F |\Psi(0)\rangle \quad (3.8)$$

Et par conséquent

$$|\Psi(nT)\rangle = (\hat{U}_F)^n |\Psi(0)\rangle \quad (3.9)$$

où n est un nombre entier.

En injectant 3.9 dans 3.2. Nous trouvons donc l'équation qui détermine entièrement l'opérateur d'évolution en ayant comme condition initiale que $\hat{U}_F(t_0)$ est égal à la matrice unité.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_F(t_0 + T) = \hat{\mathcal{H}}(t_0 + T) \hat{U}_F(t_0 + T) \quad (3.10)$$

Il s'avère que

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{U}_F] = 0 \quad (3.11)$$

En effet, l'Hamiltonien est invariant sur une période de temps. Dès lors il commute avec l'opérateur \hat{U}_F . Ce que ça implique est très important. Ça implique que l'Hamiltonien partage les mêmes états propres pour ces pas de temps. N'oublions pas que entre ces pas de temps les états propres de l'Hamiltonien changent. Dès lors, la connaissance des états propres de l'opérateur de Floquet nous donne accès à ce qu'on appelle les quasi-états du système. Ce sont donc des états quasi-stationnaires. Dans le sens où il sont stationnaires pour tous les multiples entiers de la période T du système mais pas pour les valeurs intermédiaires[27]. Ces derniers sont donc associé aux quasi-énergies introduites dans 3.7.

3.2 Rotateur pulsé quantique

Nous avons vu précédemment le rotateur pulsé classique et avons expliqué son intérêt physique. Il est maintenant temps de traiter de sa version quantique dans notre quête des états cicatrisés. Le rotateur pulsé quantique a été étudié pour la première fois par G. Casati, B. Chirikov, F. Izraelev and J. Ford en 1977 [45]. Depuis il a été étudié de manière intensive et ce pour deux raisons principales. La première raison est une raison pratique. Il est possible de déterminer analytiquement sa matrice de Floquet et de réduire sa représentation à une matrice de dimension finie. La seconde raison est le rôle majeur qu'a joué le rotateur pulsé classique (et donc de l'application standard) dans le développement de la théorie du chaos. Dès lors, étudier son pendant quantique n'est que suite logique. Ce système a servi de base pour le développement de beaucoup de concepts et d'outils de chaos quantique [24].

Quantifions donc notre système physique. Par le principe de correspondance, nous pouvons promouvoir nos variables canoniques en opérateurs quantiques. Dès lors dans l'Hamiltonien classique les variables θ et L sont promues au rang d'opérateurs. Nous avons $\hat{\theta}$ et \hat{L} . L'Hamiltonien s'écrit donc

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \frac{\hat{L}^2}{2I} + k \cos \hat{\theta} \sum_m \delta(t - mT) \\ &= \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{V} \sum_m \delta(t - mT) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dès lors l'équation de Schrödinger s'écrit pour la fonction d'onde dans l'espace des positions

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\theta, t)}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2 \Psi(\theta, t)}{\partial \theta^2} + K \cos \theta \delta(t - mT) \Psi(\theta, t) \quad (3.13)$$

où $\Psi(\theta, t)$ est l'amplitude de probabilité pour trouver le système en θ au temps t .

Nous allons voir que nous n'aurons pas besoin de la résoudre. En passant par l'opérateur de Floquet

Notre but étant ici de traiter des états cicatrisés du rotateur pulsé quantique. Nous ne faisons qu'effleurer la richesse du rotateur pulsé quantique. Le lecteur curieux trouvera moult informations sur le sujet dans les références suivantes [14][46][47][48]

3.3 Opérateur de floquet

Nous allons ici trouver l'expression de l'opérateur de Floquet. Rappelons que nous travaillons avec $T = 1$ et $I = 1$. Nous pouvons réécrire notre Hamiltonien de la manière suivante

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \begin{cases} \hat{\mathcal{H}}_0 & \text{si } m \leq t \leq (m+1) - \epsilon \\ \hat{\mathcal{H}}_0 + \frac{\hat{V}}{\epsilon} & \text{si } (m+1) - \epsilon \leq t \leq (m+1) \end{cases} \quad (3.14)$$

où ϵ est un temps infinitésimal. Dans le premier cas, lors de l'évolution libre, l'opérateur d'évolution est donné par

$$\hat{U}(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0 t) \quad (3.15)$$

pour $0 < t < 1$. Lors du pulse, l'opérateur d'évolution est donné par conséquent par

$$\hat{U}(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} (\hat{\mathcal{H}}_0 + \frac{\hat{V}}{\epsilon})(t - 1 + \epsilon)) \hat{U}(1 - \epsilon) \quad (3.16)$$

Pour $1 - \epsilon < t < 1$

Nous avons donc

$$\hat{U}_F = \exp(-\frac{i}{\hbar} (\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{V})\epsilon) \exp(-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0(1 - \epsilon)) \quad (3.17)$$

Nous obtenons enfin l'opérateur de floquet en prenant la limite $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \hat{U}_F &= \exp(-\frac{i}{\hbar} \hat{V}) \exp(-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0) \\ &= \exp(-\frac{i}{\hbar} K \cos \hat{\theta}) \exp(-\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{L}^2}{2}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nous avons notre opérateur de Floquet. Nous devons maintenant le représenter dans une base de manière à le rendre utilisable. De plus nous devons arriver à le représenter de manière finie[27].

3.4 Evolution du système

3.4.1 Périodicité spatiale

Nous allons regarder comment notre système se comporte sous l'application de l'opérateur de Floquet.

Soit l'état du système en représentation des impulsions $\Psi(\theta)$ où $\theta \in [-\infty, +\infty]$. Cette fonction d'onde est défini dans tous l'espace. Nous avons la relation

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}(L) e^{i\theta L} dL \quad (3.19)$$

Nous pouvons décomposer cette fonction d'onde conformément au théorème de Bloch

$$\begin{aligned} \Psi(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}(k + \frac{\varphi}{2\pi}) e^{i(k+\varphi/2\pi)\theta} \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}_k^{(\varphi)} e^{i(k+\varphi/2\pi)\theta} \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \Psi^{(\varphi)}(\theta) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Nous venons de décomposer notre fonction d'onde en une superposition d'ondes de Bloch

$$\Psi^{(\varphi)}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}_k^{(\varphi)} e^{i(k+\varphi/2\pi)\theta} \quad (3.21)$$

En effet, le théorème de Bloch nous dit que lorsqu'un système physique admet un potentiel périodique alors il est possible de décomposer une fonction d'onde en une infinité de ces ondes quasi-périodiques. Quasi-périodiques car elles sont périodiques à un facteur de phase prêt, défini par la phase de Bloch φ .

En effet

$$\begin{aligned}\Psi^{(\varphi)}(\theta + 2\pi) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}_k^{(\varphi)} e^{i(k+\varphi/2\pi)(\theta+2\pi)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}_k^{(\varphi)} e^{i(k+\varphi/2\pi)\theta} e^{i2\pi k} e^{i\varphi} \\ &= e^{i\varphi} \Psi^{(\varphi)}(\theta)\end{aligned}\tag{3.22}$$

Cette procédure est générale et peut-être effectuée pour des périodicités arbitraires. Néanmoins lorsque nous nous intéressons à un modèle physique. Cette périodicité doit être choisie tel qu'elle est égale à la périodicité du potentiel. Donc ici 2π

Opérateur de Floquet Ce théorème a pour conséquence qu'en étudiant l'évolution de toutes les ondes de Bloch. Nous obtenons l'évolution de la fonction d'onde du système.

Regardons maintenant et dans un premier temps comment évolue cette onde de Bloch pour la partie de l'opérateur de Floquet décrivant le pulse $\hat{U}_\theta = \exp(-\frac{i}{\hbar} K \cos \hat{\theta})$. Soit

$$\begin{aligned}(\exp^{-\frac{i}{\hbar} K \cos \hat{\theta}} \Psi)(\theta) &= (\exp^{-\frac{i}{\hbar} K \cos \theta} \Psi)(\theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \exp^{-\frac{i}{\hbar} K \cos \theta} \Psi^{(\varphi)}(\theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \chi^{(\varphi)}(\theta)\end{aligned}\tag{3.23}$$

où $\chi^{(\varphi)}(\theta)$ est aussi une onde de Bloch correspondant à la même phase de Bloch. En effet, on peut facilement voir que $\chi^{(\varphi)}(\theta + 2\pi) = e^{i\varphi} \chi^{(\varphi)}(\theta)$.

Faisons de même avec la partie de l'opérateur de Floquet correspondant à la partie cinétique $\hat{U}_L = \exp(-\frac{i}{2\hbar} \hat{L}^2)$. Nous définissons $\phi^{(\varphi)}(\theta)$ tel que

$$\begin{aligned}(\exp^{-\frac{i}{2\hbar} \hat{L}^2} \Psi)(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \exp^{-\frac{i}{2\hbar} \hat{L}^2} \Psi^{(\varphi)}(\theta) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \phi^{(\varphi)}(\theta)\end{aligned}\tag{3.24}$$

Nous avons donc en utilisant 3.21

$$\begin{aligned}\phi^{(\varphi)}(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}_k^{(\varphi)} \exp^{-\frac{i}{2\hbar} \hat{L}^2} e^{i(k+\varphi/2\pi)\theta} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}_k^{(\varphi)} \exp^{-\frac{i\hbar}{2}(k+\phi/2\pi)^2} e^{i(k+\varphi/2\pi)\theta} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k^{(\varphi)} e^{i(k+\varphi/2\pi)\theta}\end{aligned}\tag{3.25}$$

Nous voyons encore une fois que $\phi_k^{(\varphi)}$ est une onde de Bloch. L'opérateur d'évolution cinétique \hat{U}_L transforme donc une onde de Bloch en une autre onde de Bloch de même phase de Bloch φ . Tout comme l'opérateur de pulse \hat{U}_θ .

3.4.2 Périodicité en impulsion

Nous posons

$$\hbar = \frac{2\pi}{N} \quad (3.26)$$

qui va définir la périodicité de Bloch en impulsion.

A condition de restreindre notre étude pour une seule onde de Bloch. Et en particulier dans le cas $\varphi = 0$, nous avons

$$\Psi(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Psi_k e^{ik\theta} \quad (3.27)$$

Cette onde de Bloch est périodique et de périodicité 2π . Ça revient en réalité à imposer des conditions de bords périodiques. Au vu de ces éléments nous pouvons restreindre le domaine spatial sur lequel nous travaillons. Nous avons donc, par transformation de Fourier

$$\Psi_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \Psi(\theta) e^{-ik\theta} \quad (3.28)$$

Nous allons décomposer les modes de la fonction d'onde en représentation L en N secteur de longueur \hbar . Ça revient à appliquer le théorème de Bloch sur les moments cinétiques. Cependant nous n'obtiendrons pas des ondes de Bloch au sens strict du terme. Mais nous reviendrons la dessus après. Décomposons donc les modes de notre fonction d'onde en secteurs.

$$\begin{aligned} \Psi_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \Psi_{k,l}^{(\alpha)} e^{-ik \frac{2\pi l + \alpha}{N}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \Psi_k^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (3.29)$$

avec $\Psi_{k,l}^{(\alpha)} = \Psi(\frac{2\pi l + \alpha}{N})$ et $\Psi_k^{(\alpha)} = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \Psi_{k,l}^{(\alpha)} e^{-ik \frac{2\pi l + \alpha}{N}}$.

Nous avons dès lors une fonction du type fonction de Bloch

$$\Psi_{k+N}^{(\alpha)} = e^{-i\alpha} \Psi_k^{(\alpha)} \quad (3.30)$$

Cette fonction n'est pas vraiment une onde de Bloch car elle est discrète. Cependant l'idée est la même et nous n'hésiterons pas à utiliser cet abus de langage dans la suite. Reprenons. Nous avons décomposé en "ondes" de Bloch de phases de Bloch α les modes de la fonction d'onde.

Opérateur de Floquet Regardons maintenant comment ces fonctions se comportent sous l'application de notre opérateur de Floquet. Commençons par le terme cinétique

$$(e^{-\frac{i}{2\hbar} \hat{L}^2} \Psi)(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_k e^{ik\theta} \quad (3.31)$$

avec donc

$$\begin{aligned} \phi_k &= \Psi_k e^{-\frac{i\hbar}{2} k^2} \\ &= \Psi_k e^{-\frac{i\pi}{N} k^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \Psi_k^{(\alpha)} e^{-\frac{i\pi}{N} k^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \phi_k^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Comme $\phi_k^{(\alpha)} = \Psi_k^{(\alpha)} e^{-\frac{i\pi}{N} k^2}$ nous avons

$$\begin{aligned} \phi_{k+N}^{(\alpha)} &= \Psi_{k+N}^{(\alpha)} e^{-\frac{i\pi}{N} (k+N)^2} \\ &= \Psi_k^{(\alpha)} e^{-i\alpha} e^{-\frac{i\pi}{N} k^2} e^{-2i\pi} e^{-i\pi N} = \phi_k^{(\alpha)} e^{-i\alpha} \end{aligned} \quad (3.33)$$

à condition que N soit pair.

La validité de ce qui suit est donc limitée au cas où N est choisi pair. C'est très important car lors des simulations numériques nous devront prendre ce point en compte. A noter que pour un choix de phase de Bloch φ différent. La condition sur N aurait été différente.

On a donc obtenu une onde de Bloch en impulsion. En appliquant l'opérateur cinétique sur une fonction périodique décomposée en superposition de phases de Bloch en impulsion.

En représentation de la base, les ondes de Bloch sont transformées en une autre onde de la base mais avec la même phase.

Maintenant qu'en est-il de l'opérateur de Floquet dans la base des moments cinétiques

$$\begin{aligned}
 (\exp(\frac{-i}{\hbar}K \cos \hat{\theta})\Psi)(q) &= \exp(\frac{-i}{\hbar}K \cos \theta)\Psi(\theta) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_k \exp(\frac{-i}{\hbar}K \cos \theta)e^{ik\theta} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \Psi_l^{(\alpha)} \exp(-\frac{i}{\hbar}K \cos \theta) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(i(k\theta - \frac{2\pi l + \alpha}{N})) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \Psi_l^{(\alpha)} \delta(\theta - \frac{2\pi l + \alpha}{N} - 2\pi n) \exp(-\frac{i}{\hbar}K \cos \theta)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

où on a utilisé la formule sommatoire de poisson. Ce qui implique donc que $\theta = (2\pi l + \alpha)/N + 2\pi n$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \Psi_l^{(\alpha)} \exp(-\frac{i}{\hbar}K \cos((2\pi l + \alpha)/N)) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ik(2\pi l + \alpha)/N) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\theta} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \chi_k^\alpha
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Au final on a donc

$$\chi_k^\alpha = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \Psi_l^\alpha [\exp(-\frac{i}{\hbar}K \cos((2\pi l + \alpha)/N))] \exp(ik(2\pi l + \alpha)/N) \tag{3.36}$$

et on s'est débarrassé de la somme infinie.

Le terme entre crochet est le coefficient qu'on recherchait et on a que

$$\chi_{k+N}^{(\alpha)} = e^{i\alpha} \chi_k^{(\alpha)} \tag{3.37}$$

Nos ondes de bloch se transforme comme

$$\Psi_l^{(\alpha)} \rightarrow \Psi_l^{(\alpha)} \exp(-\frac{i}{\hbar}K \cos(\frac{2\pi l + \alpha}{N})) \tag{3.38}$$

$$\Psi_k^{(\alpha)} \rightarrow \Psi_k^{(\alpha)} \exp(\frac{-i\pi}{N}k^2) \tag{3.39}$$

Nous avons donc montrer qu'il est possible de restreindre l'étude de la fonction d'onde du système à une partie finie de celle-ci. En utilisant des conditions de bords.

3.4.3 Représentation de Floquet dans une base

Dans la pratique, nous pouvons simplifier notre matrice de Floquet dans une matrice $U_{k,k'}$ tel que

$$\begin{aligned}
 \langle k' | \hat{U}_F | k \rangle &= e^{-i\frac{\pi}{N}k^2} \langle k' | \exp(-i\frac{i}{\hbar}K \cos \hat{q}) | k \rangle \\
 &= e^{-i\frac{\pi}{N}k^2} \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \exp(i(k' - k)\frac{2\pi l + \alpha}{N}) \exp(-\frac{i}{\hbar}K \cos(\frac{2\pi l + \alpha}{N}))
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Nous pouvons retrouver un modèle similaire dans [49].

Nous avons maintenant les clés en main pour implémenter le rotateur pulsé numériquement. Nous avons accès à une représentation de finie de la matrice de Floquet et donc accès aux états de Floquet.

3.4.4 Paramètre semi-classique

Dans le chapitre précédent. Nous avons vu que la limite classique était liée au nombre possible d'états possibles du système.

Dans la section précédente, nous avons posé $\hbar = 2\pi/N$ et ce nombre définit la dimension de la matrice de Floquet. Le nombre N donne le nombre de valeurs que le moment cinétique peut prendre. Cette redéfinition de \hbar définit le secteur de Floquet. L'espacement entre les états est \hbar et ils peuvent prendre des valeurs entre 0 et 2π . Nous voyons bien que lorsque $\hbar \rightarrow 0$ on a $N \rightarrow \text{infty}$ et nous avons donc bien la limite semi-classique. Ce paramètre introduit dans la section précédente définit donc la limite semi-classique du système[50] .

Chapitre 4

Etats cicatrisés

4.1 Définition et propriétés

4.1.1 Définition

Les états cicatrisés sont des états quantiques localisés dans le voisinage des orbites périodiques instables du système classique correspondant. Ils sont donc définis par leur distribution de probabilité. En effet, cette distribution doit être fortement localisée sur, et dans le voisinage, d'une orbite périodique instable du système classique correspondant. Il est important d'insister sur le fait que cette orbite doit être instable ! En effet, des états propres peuvent être fortement localisés sur des orbites périodiques stables sans que ce soit étonnant. Car ce comportement est totalement compris et prédit. Ces orbites correspondent au régime intégrable du système et leur quantification, à l'aide de méthodes telles que l'approximation WKB, mène à ces états localisés[5][1][6].

4.1.2 Propriétés

Maintenant que la définition des états cicatrisés est posée, il s'agit de se demander ce que ces états ont de si particulier. Comme nous allons le voir, les états cicatrisés ont des propriétés qui remettent en question, ou du moins constituent une exception à certains principes du chaos quantique.

Premier point et non des moindres, les états cicatrisés brisent le principe d'ergodicité quantique. Nous avons déjà vu que ce dernier découle de l'hypothèse de thermalisation des états propres[36][37]. En effet ce principe prédit que l'état d'un système quantique dont l'équivalent classique est chaotique va se thermaliser. C'est-à-dire que la densité de probabilité de l'état du système va, au cours du temps, s'équidistribuer dans l'espace des phases avec de petites fluctuations prédites par la RMT. Le système atteint une température d'équilibre propre au système. Or ce n'est pas le cas pour un état cicatrisé. Comme nous le verrons, lorsque nous laissons évoluer librement un paquet donc gaussien dans le voisinage d'une orbite périodique, nous obtenons une localisation de la fonction d'onde dans le voisinage de cette orbite et elle ne se distribue pas de manière uniforme dans l'espace des phases comme attendu par le postulat d'ergodicité quantique. Les états cicatrisés constituent donc une exception notable à la thermalisation. Nous sommes donc en présence d'un phénomène qui viole le principe d'ergodicité quantique faiblement[19]. Le faiblement vient du fait que ces états restent des exceptions dans le spectre de ces systèmes et que la proportion des états qui brisent l'ergodicité diminue jusqu'à pouvoir être considérée nulle dans la limite classique. Le nombre d'états non thermiques reste faible par rapport aux nombres d'états total du système. L'hypothèse de thermalisation impliquant l'ergodicité quantique et la théorie des matrices aléatoires. Il en découle que le spectre des états cicatrisés ne correspond pas aux prédictions de cette théorie et n'a pas la même forme. Nous reviendrons la-dessus dans la suite.

Cette brisure de l'ergodicité a une autre conséquence remarquable. La thermalisation nous fait perdre toute information sur les conditions initiales du système. En effet, tous les états ergodiques du système ont le même destin, dès lors il n'est pas possible de distinguer quelles conditions initiales ont donné lieu aux mêmes états finaux. En revanche, les états cicatrisés n'étant pas soumis à la

thermalisation, ils gardent en mémoire leur histoire. Ce qui participe à les rendre remarquables[19].

La propriété suivante est celle qui a déterminé l'appellation de ces états bien particuliers. Dans la limite semiclassique ($\hbar \rightarrow 0$), ces états ont une tendance à être de plus en plus localisés sur l'orbite instable et de moins en moins dans son voisinage. Autrement dit, dans la limite semiclassique, la distribution de probabilité tend à se confondre avec l'orbite sous-jacente du système classique. De manière imagée, on peut dire que ces états cicatrisent dans la limite semi-classique[1][19][6]. Nous comprenons donc maintenant d'où vient cette appellation. Lorsque nous ferons référence à cette propriété nous parlerons de "cicatrisation".

Si les états cicatrisés pouvaient être considérés lors de leur mise en évidence en 1984 comme une curiosité de théoricien, il n'en est plus rien aujourd'hui. Comme nous le verrons à la fin de ce chapitre, l'existence des états cicatrisés a été prouvée expérimentalement[27]. Mais plus que ça encore, ils sont apparus dans des systèmes où on ne les attendait pas. Comme par exemple certaines technologies de simulateurs quantiques[9][10]. Il est donc maintenant évident que ce phénomène doit être compris en profondeur dans le but de faire évoluer les technologies quantiques.

4.2 Phénoménologie

Nous devons la première mise en évidence numérique et l'explication théorique de ce phénomène à Heller. Dans son article fondateur publié en 1984 [1], il montre l'existence des états qu'il nommera "états cicatrisés" dans le cas du billard quantique en forme de stade.

Il procède comme suit : il mesure le recouvrement entre la fonction d'onde d'un paquet gaussien, centré dans le voisinage d'un point spécifique d'une orbite périodique instable de ce système et minimisant l'inégalité d'Heisenberg, et la fonction d'onde d'un autre paquet gaussien centré au même point, mais restant immobile au fil du temps. En d'autres termes, il compare la fonction d'onde du système à son état initial. Nous appellerons cette mesure le taux d'autocorrélation. Ce dernier est défini comme suit :

$$|\langle \Psi(t) | \Psi(t_0) \rangle|^2 = A(t) \quad (4.1)$$

où $\Psi(t)$ est la fonction d'onde du paquet gaussien.

Les résultats obtenus ne correspondent pas à ce qui serait attendu pour un état quantique chaotique générique (donc thermal). Ces états, cependant, n'apparaissent que pour des exposants de Lyapunov λ suffisamment petits. Ce qui nous mènera plus tard au critère de Heller. Comme nous allons bientôt le comprendre, les billards sont des systèmes particulièrement adaptés pour étudier le chaos quantique et en particulier les états cicatrisés. Simple conceptuellement, ces derniers vont nous permettre de comprendre de manière suffisamment intuitive ce que sont les états cicatrisés. C'est pour cette raison que les résultats de Heller présentés dans son étude fondatrice seront développés ici.

4.2.1 Etats cicatrisés dans le billard en forme de stade

Les billards sont des systèmes dynamiques qui portent bien leur nom. Ce sont des puits de potentiel plats dont les bords sont infinis et donc impénétrables. Dans ce puits de potentiel, nous plongeons une ou plusieurs particules ponctuelles et nous voilà en présence d'un billard. Il est montré que certaines formes de billard donnent lieu à des dynamiques chaotiques [51]. Dans le cas du billard en forme de stade, qui est un billard correspondant à un rectangle auquel on a juxtaposé deux arcs de cercles (voir Fig 4.1), l'ensemble des dynamiques sont chaotiques, à l'exception de ce qu'on appelle les dynamiques de balle rebondissante. Ce sont les trajectoires où la bille va frapper la paroi non courbée du billard avec un angle d'exactement 90° . Dans ce cas, la bille fait demi-tour, la même chose se reproduit sur la frontière inférieure et ainsi de suite. Nous avons donc manifestement une trajectoire périodique. Périodique oui, mais instable. En effet, il suffit que l'angle soit différent de 90° et ce peu importe la précision pour que la dynamique soit chaotique. Ce type de trajectoire est représenté en rouge sur la Fig 4.1.

Pour résumer, les différentes conditions initiales donnent en général lieu à des dynamiques chaotiques. Cependant, une minorité d'entre elles (malgré tout en nombre infini) donne lieu à des orbites périodiques instables. Nous voyons donc que ce système est particulièrement adapté à

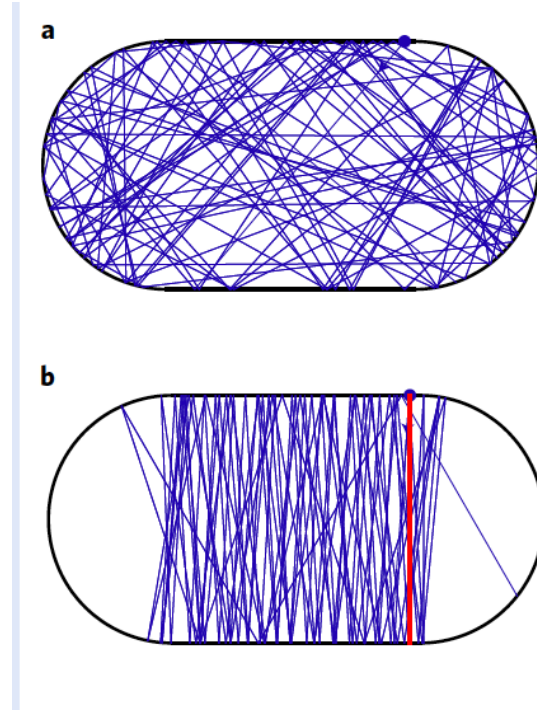


FIGURE 4.1 – Billard en forme de stade. Reproduit de [19]

l'étude des états cicatrisés. Nous pouvons aisément choisir des conditions initiales dans le voisinage d'une orbite périodique instable.

Maintenant que nous savons ce qu'est le billard classique. Qu'en est-il du billard quantique ? Le billard quantique est similaire au billard classique. À ce détail, mais non des moindres, près : au lieu de lancer une bille dans ce potentiel, nous lançons un paquet d'onde. Qui va donc évoluer librement dans le système avec comme seule contrainte d'être confiné dans ce billard. La fonction d'onde du système en dehors du billard est nulle. De manière assez imagée, le billard quantique est parfois appelé "tambour" [52].

Maintenant que nous savons à quel système physique nous avons affaire, partons à la recherche des états cicatrisés.

Pour ce faire, nous allons utiliser la fonction d'autocorrélation introduite précédemment. Cette fonction permet donc de mesurer l'overlap de la fonction d'onde du système avec son état initial au cours du temps. Pour les états ergodiques, et donc soumis à la thermalisation, il est assez évident que cette fonction décroît au cours du temps jusqu'à osciller légèrement autour d'une valeur minimale lorsque le système a atteint l'équilibre et donc que la thermalisation est finie. Mais qu'en est-il lorsque le paquet d'onde est choisi dans le voisinage proche d'une orbite instable ? Et bien, nous allons voir des récurrences périodiques (d'amplitude décroissante néanmoins, en raison de l'étalement du paquet d'onde), et cette période est égale à la période de l'orbite périodique classique correspondante. La figure 4.2 montre la mesure de la fonction d'autocorrélation par rapport au temps dans le cas du billard quantique en forme de stade. En bleu, nous avons la situation pour un état thermal, et en rouge pour un état cicatrisé [19].

4.2.2 États cicatrisés dans le billard en forme de stade

Les billards sont des systèmes dynamiques qui portent bien leur nom. Ce sont des puits de potentiel plats dont les bords sont infinis et donc impénétrables. Dans ce puits de potentiel, nous plongeons une ou plusieurs particules ponctuelles et nous voilà en présence d'un billard. Il est montré que certaines formes de billard donnent lieu à des dynamiques chaotiques [51]. Dans le cas du billard en forme de stade, qui est un billard correspondant à un rectangle auquel on a juxtaposé

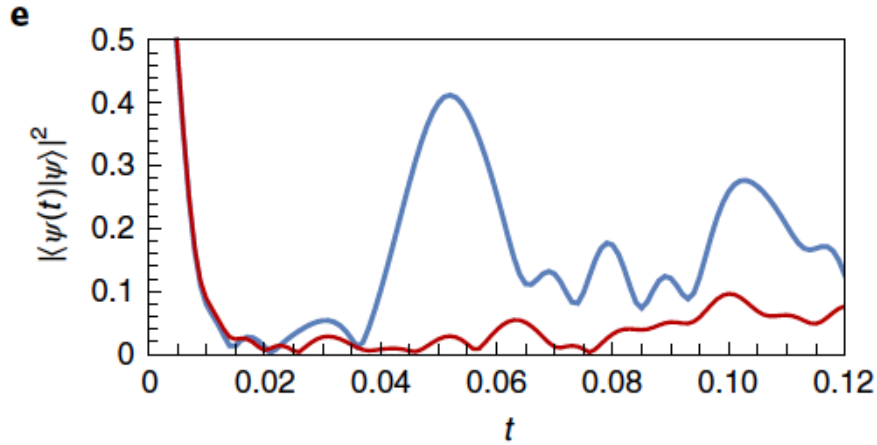


FIGURE 4.2 – fonction d'autocorrélation d'états du billard en forme de stade. En rouge un état thermal, en bleu un état cicatrisé. Reproduit de [19]

deux arcs de cercles (voir Fig 4.1), l'ensemble des dynamiques sont chaotiques, à l'exception de ce qu'on appelle les dynamiques de balle rebondissante. Ce sont les trajectoires où la balle va frapper la paroi non courbée du billard avec un angle d'exactement 90° . Dans ce cas, la balle fait demi-tour, la même chose se reproduit sur la frontière inférieure et ainsi de suite. Nous avons donc manifestement une trajectoire périodique. Périodique oui, mais instable. En effet, il suffit que l'angle soit différent de 90° et ce peu importe la précision pour que la dynamique soit chaotique. Ce type de trajectoire est représenté en rouge sur la Fig 4.1.

Pour résumer, les différentes conditions initiales donnent en général lieu à des dynamiques chaotiques. Cependant, une minorité d'entre elles (malgré tout en nombre infini) donne lieu à des orbites périodiques instables. Nous voyons donc que ce système est particulièrement adapté à l'étude des états cicatrises. Nous pouvons aisément choisir des conditions initiales dans le voisinage d'une orbite périodique instable.

Maintenant que nous savons ce qu'est le billard classique. Qu'en est-il du billard quantique ? Le billard quantique est similaire au billard classique. À ce détail, mais non des moindres, près : au lieu de lancer une balle dans ce potentiel, nous lançons un paquet d'onde. Qui va donc évoluer librement dans le système avec comme seule contrainte d'être confiné dans ce billard. La fonction d'onde du système en dehors du billard est nulle. De manière assez imagée, le billard quantique est parfois appelé "tambour" [52].

Maintenant que nous savons à quel système physique nous avons affaire, partons à la recherche des états cicatrises.

Pour ce faire, nous allons utiliser la fonction d'autocorrélation introduite précédemment. Cette fonction permet donc de mesurer l'overlap de la fonction d'onde du système avec son état initial au cours du temps. Pour les états ergodiques, et donc soumis à la thermalisation, il est assez évident que cette fonction décroît au cours du temps jusqu'à osciller légèrement autour d'une valeur minimale lorsque le système a atteint l'équilibre et donc que la thermalisation est finie. Mais qu'en est-il lorsque le paquet d'onde est choisi dans le voisinage proche d'une orbite instable ? Et bien, nous allons voir des récurrences périodiques (d'amplitude décroissante néanmoins, en raison de l'étalement du paquet d'onde), et cette période est égale à la période de l'orbite périodique classique correspondante. La figure 4.2 montre la mesure de la fonction d'autocorrélation par rapport au temps dans le cas du billard quantique en forme de stade. En bleu, nous avons la situation pour un état thermal, et en rouge pour un état cicatrisé [19].

Nous avons vu, à l'aide de la fonction d'autocorrélation, que les états centrés sur une orbite périodique ne se comportent pas comme un état qui thermalise et qui, par conséquent, sont soumis au postulat d'ergodicité. Maintenant que nous sommes sûrs d'être en présence d'états aux propriétés particulières, il peut être intéressant de tracer la distribution de probabilité de ces états dans l'espace des coordonnées. Heller dans son article a fourni de telles représentations, à l'aide de la

quasi-distribution de Wigner. Qui nous permettent de voir que, en effet, la densité de probabilité de ces états n'est pas équidistribuée dans l'espace des phases et que, surtout, cette densité de probabilité est localisée autour des trajectoires périodiques instables classiques correspondantes. La figure ?? nous montre une distribution de Wigner pour une trajectoire thermique. Dans ce cas, nous constatons que la densité de probabilité ne semble, à première vue, ne pas montrer de structure bien particulière. Tandis que la seconde trajectoire, proche de la trajectoire d'une balle rebondissante, va montrer une distribution de Wigner qui reste localisée autour de cette trajectoire, qui est représentée dans.

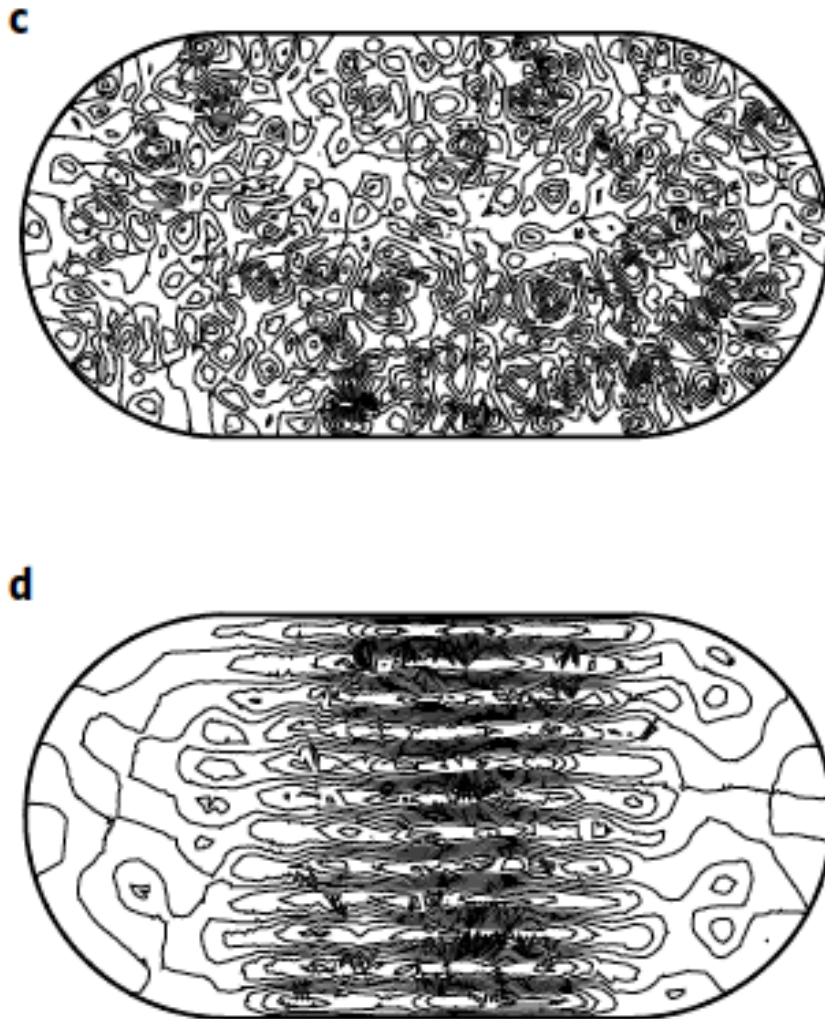


FIGURE 4.3 – Distribution de Wigner pour un état a)thermal b)cicatrisé. Issu de [1]

La figure 4.4 présente des distributions de Wigner pour d'autres orbites périodiques. Nous voyons aussi cet effet de localisation.

4.2.3 Spectre énergétique

La théorie RMT, allant de pair avec le postulat d'ergodicité, n'offre aucune raison de s'attendre à ce que la distribution en énergie des états cicatrises soit prédite par la théorie RMT. Et en effet, ce n'est pas le cas. Nous allons ici examiner ce qu'il en est. Il est possible d'obtenir le spectre d'énergie des états cicatrises à partir du taux d'autocorrélation [1] :

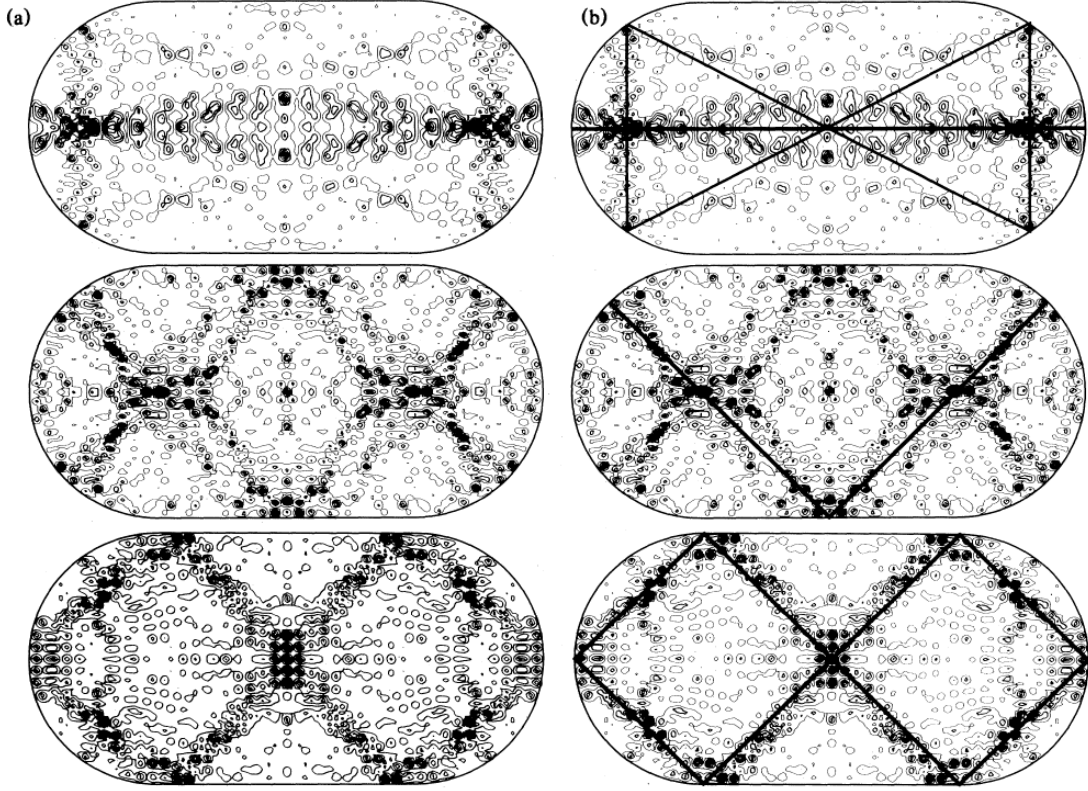


FIGURE 4.4 – Distribution de Wigner pour d'autres orbites périodiques du billard en forme de stade [1]

$$\epsilon_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \exp(i\omega t) \langle \Psi | \Psi(t) \rangle dt \quad (4.2)$$

où ω est la pulsation de l'orbite.

Pour rappel, le comportement de notre fonction d'autocorrélation pour les états cicatrises est caractérisé par une décroissance rapide vers 0 combinée à des récurrences, d'amplitude décroissante, qui interviennent dans le temps à tous les multiples entiers de la période de l'orbite. Ce comportement est représenté dans l'une des figures. Cette forme de la fonction d'autocorrélation implique un spectre avec les propriétés suivantes :

L'étendue totale du spectre est proportionnelle à \hbar du système.

1) Le spectre prend la forme de bandes.

2) Ces bandes sont espacées d'une quantité $\delta E = \hbar\omega$.

3) La largeur des bandes est $\hbar\lambda$ où λ est l'exposant de Lyapunov de l'orbite instable.

4) Il est intéressant de noter que le ratio entre la largeur de bande et l'espacement des bandes est indépendant de \hbar et donc de l'endroit où l'on se trouve dans la limite semi-classique.

4.2.4 Critère de Heller

L'étude du spectre ci-dessus n'est pas seulement utile pour montrer que les états cicatrises constituent une exception à la théorie RMT, mais elle permet également d'émettre des hypothèses sur une éventuelle limitation à l'existence de ces états. Cette condition, que nous allons développer ci-dessous, porte le nom de critère de Heller [1]. Commençons par calculer l'intensité spectrale :

$$I_N = |\langle g | \Psi_n \rangle|^2 = \text{Tr}(\rho_g \rho_\Psi) \simeq \text{Tr}(\rho_g \rho_m) = \frac{S_g(E_n)}{D(E_n)} \quad (4.3)$$

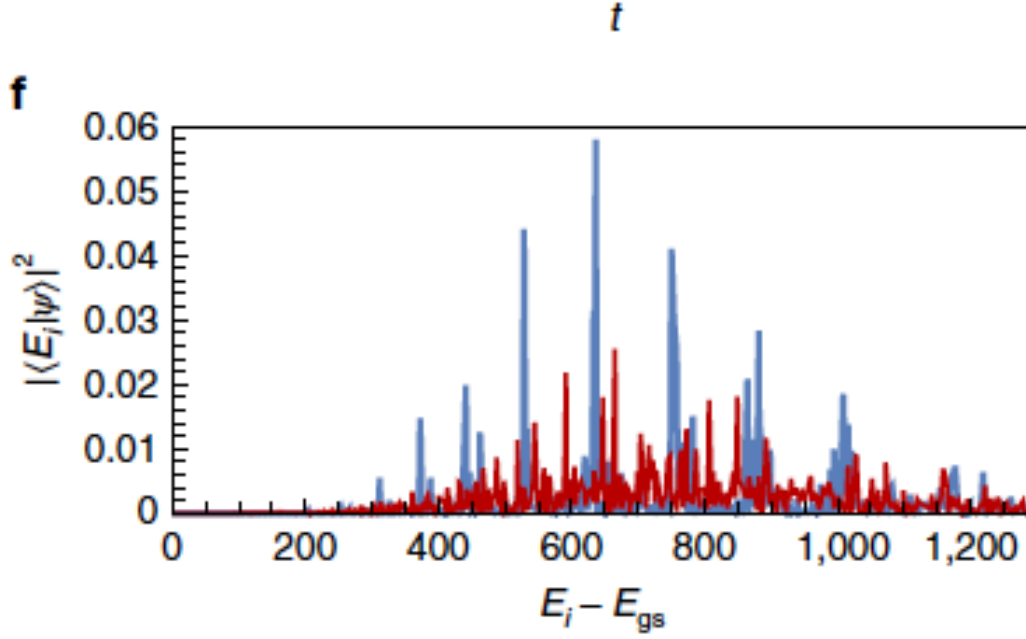


FIGURE 4.5 – Fonction d'autocorrélation en fonction de l'énergie pour un paquet d'onde gaussien lancé sur l'orbite périodique en bleu et à 45° de l'orbite périodique en rouge. Issu de [36]

où $\rho_m = \delta(E - H(p, x))/D(E)$ est la densité microcanonique. $D(E)$ est la densité d'états, et H est l'Hamiltonien. $S_g(E_n)$ est la distribution de probabilité d'énergie normalisée pour notre état initial $g(x, 0)$. Il s'avère que $S(E)$ est aussi le spectre de basse résolution $\epsilon_T(\omega)$ pour l'état du système avant la première récurrence de la fonction d'autocorrélation.

L'existence des bandes dans le spectre énergétique impose de nouvelles conditions sur l'intensité spectrale. L'intensité totale d'une bande est donnée par $S_g(E_b)$, où le subscript b dénote l'énergie de la bande qui doit valoir $S_g(E_b)/D(E_b)$. Or, nous connaissons la distance entre deux bandes consécutives, qui est de $\hbar\omega$, ce qui implique donc que $D_b = (\hbar\omega)^{-1}$. Nous connaissons aussi la largeur des bandes, ce qui nous permet de savoir combien d'états sont présents sous la bande. On a $\epsilon_{\text{états}} = \hbar\lambda D(E)$, qui doivent, pour rappel, participer de manière égale à cette condition. Si on considère que ces états doivent contribuer de manière égale à cette condition, alors on peut déterminer le fameux critère de Heller :

$$I_n^b = \frac{S_g(E_b)/D_b}{\hbar\lambda D(E_b)} = \frac{\omega}{\lambda} I_n > I_n \quad (4.4)$$

$$\Rightarrow \lambda T < 2\pi \quad (4.5)$$

Nous avons donc un critère quant à l'existence des états cicatrisés qui dépend du taux d'instabilité de l'orbite associée et de sa période. Il ne dépend pas de manière notable de la limite semiclassique. Ces états n'existeraient donc pas a priori pour des orbites trop instables ou de période trop grande. Il est intéressant de constater qu'un ingrédient essentiel à l'existence des états cicatrisés, qui est l'instabilité de l'orbite périodique associée, est aussi ce qui limite son existence. On peut comparer cette situation à un ballon de baudruche. Pour avoir un ballon de baudruche, nous avons besoin d'un gradient de pression entre l'extérieur et l'intérieur de ce dernier. Cependant, si ce gradient de pression est trop grand, le ballon explose. Le ballon de baudruche est donc un exemple parlant d'une situation dont un ingrédient essentiel est aussi agent de sa destruction. Dans le cas d'une instabilité trop grande, on peut se représenter la situation comme ne pouvant pas autoriser un comportement qui serait classiquement chaotique et qui permettrait à l'état de rester localisé, comme s'il était aspiré par le reste de la mer chaotique.

4.3 États cicatrisés dans les systèmes à plusieurs corps

À l'heure actuelle, la recherche sur les états cicatrisés est concentrée sur des systèmes physiques comportant de nombreux degrés de liberté. En effet, les états cicatrisés dans les systèmes simples sont plutôt bien compris [6]. Cependant, au cours de ces dernières années, des expériences de chaos quantique ont mis en évidence des comportements pouvant être comparés à ceux des états cicatrisés. Nous allons donc donner ici un aperçu de ce que sont ces états cicatrisés à plusieurs corps. Nous verrons aussi que dans certaines situations, il est difficile de prétendre avec certitude que ces états sont bel et bien des états cicatrisés au sens de Heller, et que, pour cette raison, une certaine confusion règne. Pour simplifier, le problème est le suivant : lorsque qu'un comportement non-ergodique apparaît dans un de ces systèmes, il est associé aux états cicatrisés. Cependant, pour certains de ces systèmes, il est impossible d'avoir accès au comportement classique de ces derniers. Mais, pour rappel, les états cicatrisés sont définis à partir du système classique correspondant. Il faut que la fonction d'onde du système soit localisée dans le voisinage d'une orbite périodique instable. Or, en l'absence de la connaissance du comportement du système dans la limite semi-classique, comment s'assurer qu'une orbite instable est associée à ces états ? Dès lors, il se peut que dans certaines situations, les états cicatrisés à plusieurs corps soient simplement des états réguliers associés à une symétrie du système qui nous aurait échappé. Ou encore un autre type d'état brisant l'ergodicité qui, pour l'instant, nous est encore inconnu. La dénomination la plus sûre pour parler de ces comportements est donc de parler de phénomène brisant l'ergodicité faiblement. Pour résumer et compléter, les états cicatrisés à plusieurs corps sont caractérisés par le fait qu'ils soient des états du système largement minoritaires qui ne thermalisent pas et dont le spectre est indépendant des autres états, autrement dit qu'ils vivent dans un sous-espace de Hilbert qui est totalement indépendant du reste de l'espace de Hilbert du système [19].

Ce type de comportement a été trouvé, entre autres, dans le système de Hubbard et dans des chaînes d'atomes de Rydberg [9] [10]. Cependant, même s'il y a des doutes sur ces comportements observés expérimentalement, il a tout de même été prouvé que des états cicatrisés au sens de Heller peuvent être trouvés dans des systèmes possédant de nombreux degrés de liberté. Dès lors, les états cicatrisés à plusieurs corps existent bel et bien [13].

4.3.1 Phénoménologie

De la même manière que pour le cas des états cicatrisés à un corps, on prépare notre système dans un état initial en dehors de l'équilibre. Cet état va évoluer selon l'équation de Schrödinger et va thermaliser dans le cas ergodique. Dans le cas non-ergodique, ce phénomène n'apparaît pas, et nous observons des récurrences de la fonction d'onde qui dépendent des conditions initiales.

Il s'avère que tous les modèles de systèmes montrant des comportements de type "états cicatrisés à plusieurs corps" étudiés jusqu'à maintenant ont montré comme propriété la possibilité de décomposer l'espace de Hilbert total du système en deux parties au minimum quasi-distinctes et donc a minima quasi-découplées

$$H \approx H_{\text{scar}} \oplus H_{\text{thermal}} \quad (4.6)$$

À l'heure actuelle, la communauté scientifique est en possession de mécanismes permettant de traiter ce type de systèmes. Ces méthodes sont l'algèbre spectrum-generating, la thermalisation restreinte de Krylov et l'embedding projector qui permettent de se rapprocher de la connaissance de la limite classique.

Chapitre 5

Résultats

5.1 Introduction

Nous avons maintenant toutes les clés en main pour étudier les états cicatrisés dans le rotateur pulsé. La démarche utilisée pour repérer les états cicatrisés dans les états de Floquet est la suivante. Nous calculons la valeur de la fonction de Husimi sur les points fixes instables pour chacun de ces états. Ensuite nous récupérons les une ou deux plus grandes valeurs qui correspondent donc aux états les plus fortement localisés sur ces orbites périodiques instables. Ces derniers sont donc des états cicatrisés du système et nous connaissons donc les états de Floquet associés.

Dans ce travail, nous nous sommes concentré sur les résonances 2 :1. De plus nous n'avons pas cherché à répertorier tous les états cicatrisés du système. Nous nous contentons d'un seul. Dans un premier temps nous allons vérifier la propriété de cicatrisation des états cicatrisés. Donc le fait que l'état devient de plus en plus localisé dans la limite semi-classique. Ensuite nous nous attarderons sur la vérification du critère de Heller.

5.2 Cicatrisation

Nous allons présenter les distributions de Husimi des états cicatrisés maximisant cette dernière en les points fixes des résonances 2 :1. Et ce pour plusieurs valeurs du paramètre N . Nous présentons ces derniers dans le cas $K = 1$ pour être en deça du critère de Heller.

Ces états sont représentés superposés à l'espace des phases classiques dans la Fig 5.1 et non superposés à l'espace des phases classiques dans la Fig 5.2. Nous pouvons constater que lorsque N augmente. Et donc lorsqu'on se rapproche de la limite classique. L'état cicatrisé est bel et bien de plus en plus localisé. Nous pouvons aisément imaginer que dans la limite d'un N très grand cette distribution de probabilité se confond totalement avec l'orbite périodique instable classique associée à cet état cicatrisé. L'échelle de la couleur est la suivante. Le plus un point tend vers le bleu. Le moins la probabilité de présence est grande. Le plus un point est rouge, le plus la probabilité de présence est grande.

5.3 Critère de Heller

Le but premier de ce mémoire est la vérification du critère de Heller. Pour rappel nous avons

$$\lambda T < 2\pi \quad (5.1)$$

Ici comme nous travaillons sur une orbite particulière $T = 2$ est constant et donc ce critère ne dépend que de λ . Les exposants de Lyapunov des points fixes ont été calculés numériquement pour différentes valeurs de K . De manière à trouver la valeur de K pour laquelle on ne s'attend plus à trouver d'états cicatrisés. Nous appellerons cette valeur K_{Heller} et on peut voir sur la Fig 5.3 qu'elle vaut approximativement

$$K_{Heller} \approx 1,2 \quad (5.2)$$

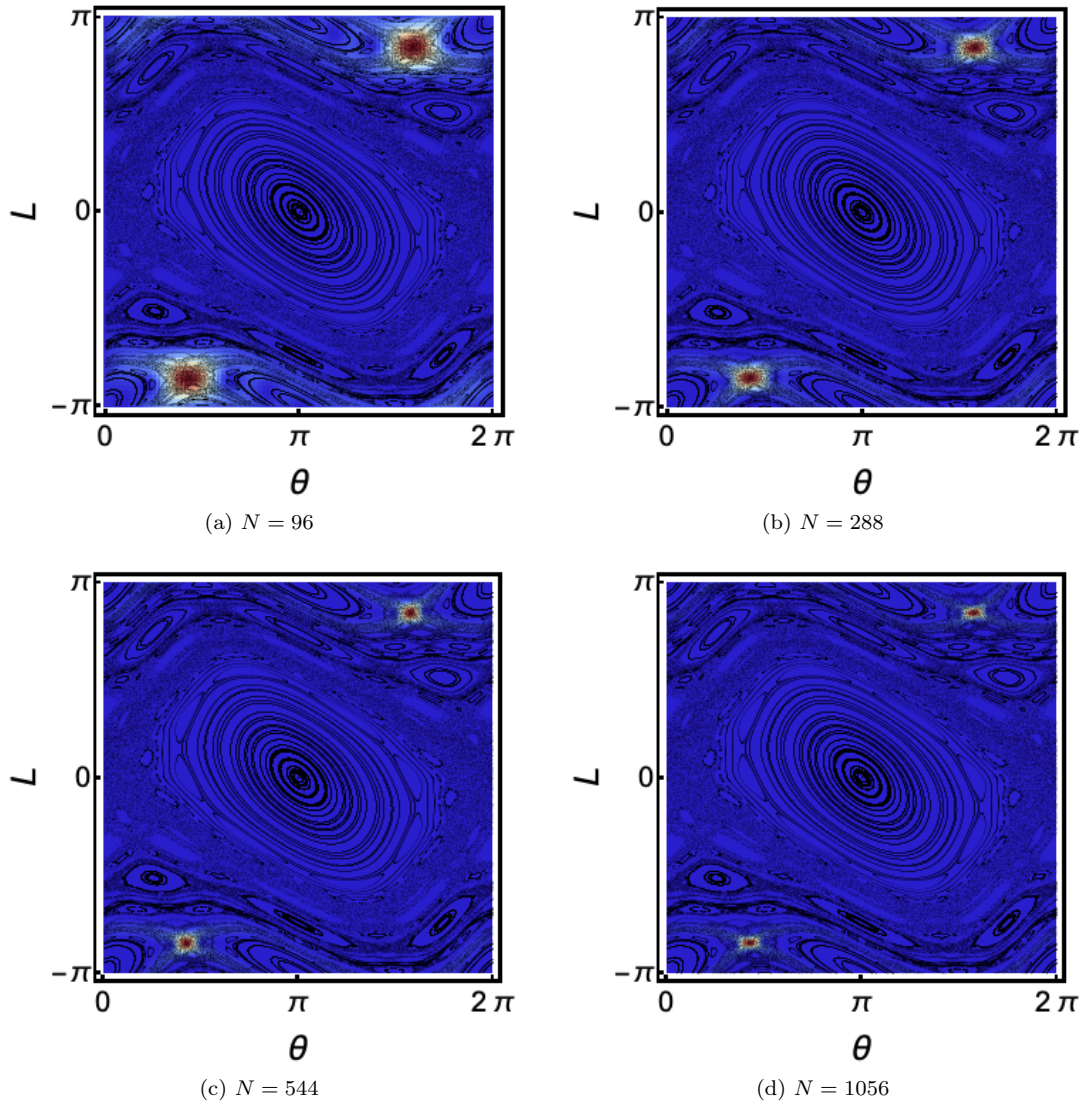


FIGURE 5.1 – Distribution de Husimi pour un état cicatrisé avec $K = 1$. Différentes valeurs de N sont présentées pour observer la cicatrisation dans la limite semi-classique

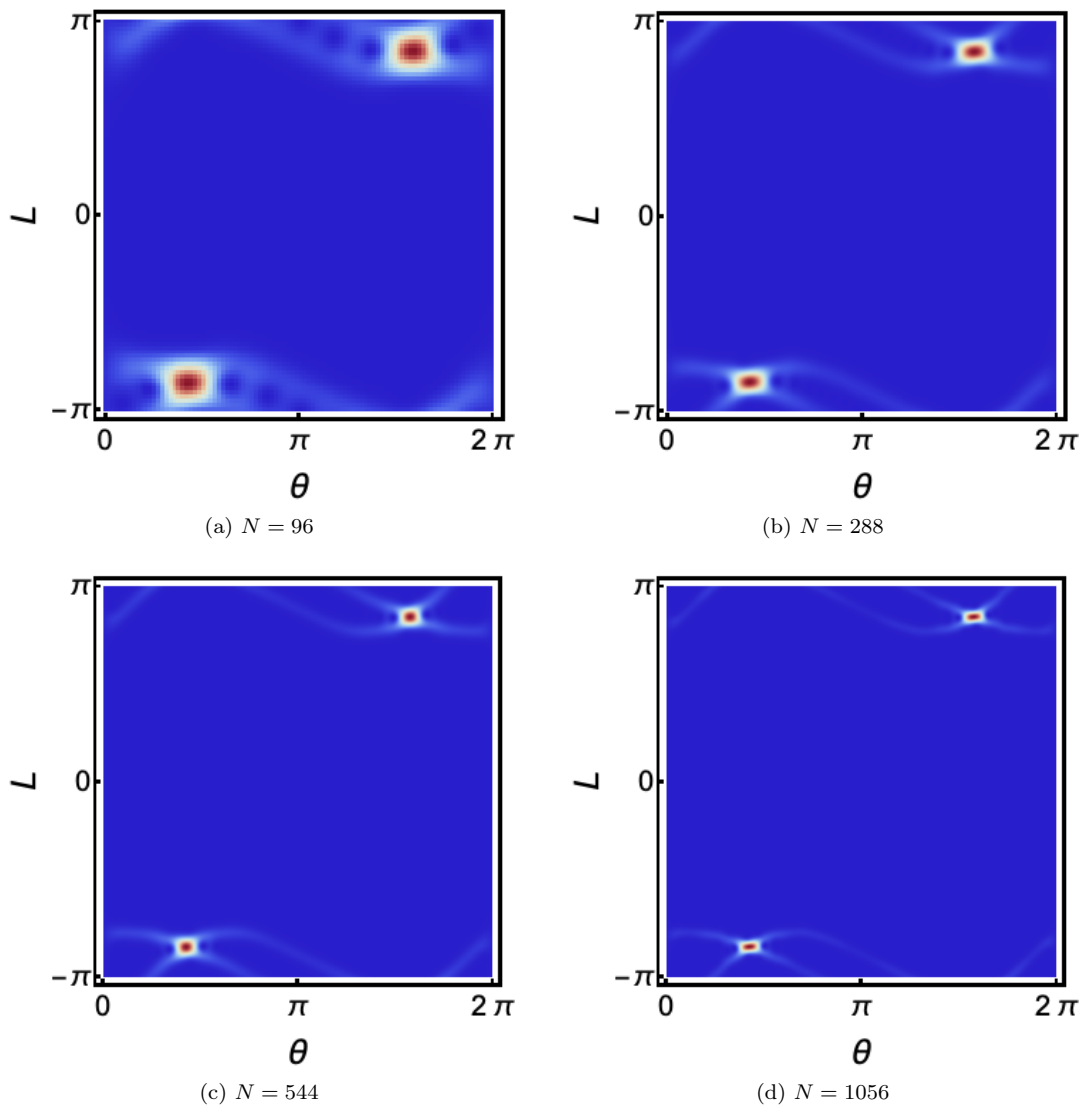


FIGURE 5.2 – Distribution de Husimi pour un état cicatrisé avec $K = 1$. Différentes valeurs de N sont présentées pour observer la cicatrisation dans la limite semi-classique

Vérification du critère de Heller Dans un but de vérifier de manière systématique le critère de Heller nous avons fait appel à l'IPR. L'idée est la suivante. L'IPR des états cicatrisés doit être grand par rapport à celui des autres états chaotiques. En effet, les états cicatrisés constituent une exception à la thermalisation et sont fortement localisés. Les autres états quant à eux sont sensés être délocalisés car thermalisés. Dès lors, l'IPR des états cicatrisés doit être bien plus grand que celui des états thermalisés.

A N constant, nous allons donc repérer les états qui maximisent la fonction de Husimi aux points fixes et ce pour des valeurs de K croissante. Lorsque $K > K_{Heller}$ nous nous attendons donc à trouver un état thermalisé avec cette procédure et non plus un état cicatrisé. Du moins si le critère de Heller est vérifié.

Cela implique que lorsque $K > K_{Heller}$ nous devrions trouver un IPR plus faible que lorsque $K < K_{Heller}$.

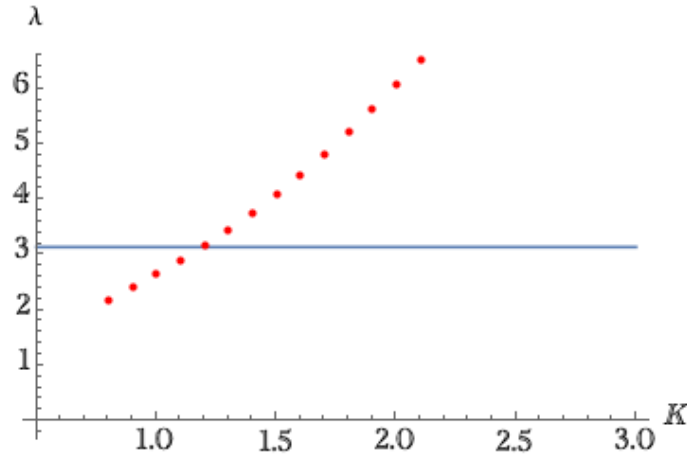


FIGURE 5.3 – En bleu, la valeur maximale de l'exposant de lyapunov selon le critère de Heller. En rouge, les valeurs numériques de l'exposant de lyapunov aux points fixes en fonction de K

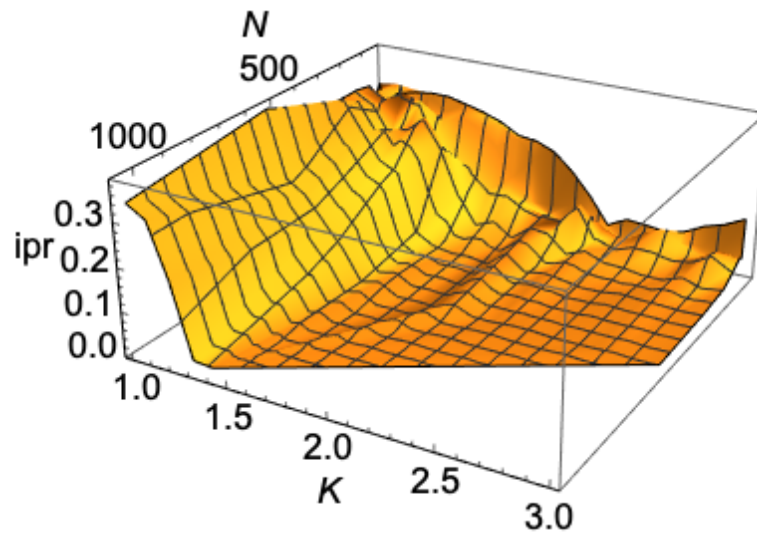
Nous avons donc répéter cette procédure pour des valeurs de N croissantes. Les résultats sont présentés sur la Fig 5.4. Ce sont donc des graphiques de l'IPR en fonction de la dimension N et du paramètre de stochasticité K . Sur le dessus nous avons un graphique pour un grand intervalle de valeurs de K . Sur la droite, un zoom est effectué sur la zone où K vaut plus ou moins K_{Heller} .

Plusieurs constats peuvent être fait ici.

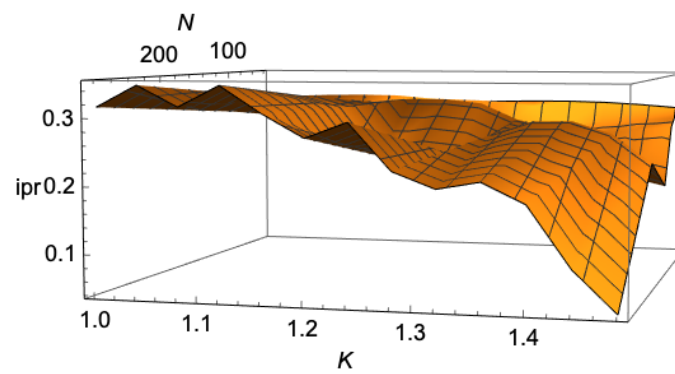
Cicatrisation Premièrement, on pourrait s'étonner de ne pas voir d'augmentation de l'IPR en fonction de la dimension du système. En effet la propriété de cicatrisation que nous avons observé précédemment nous dit justement que ces états sont de plus en plus localisés dans la limite classique. En réalité c'est dû au fait que l'IPR dépend de la dimension N du système comme nous l'avons vu dans le chapitre 2. Une des implications de cette dépendance en N est que pour une localisation équivalente dans l'espace des phases mais pour deux dimensions différentes. L'IPR sera plus petit pour la dimension la plus grande. Dès lors le fait que l'IPR ne diminue pas dans la limite classique témoigne tout de même d'une augmentation de la localisation selon N .

Transition de phase Dans un second temps, il apparait une forte chute de l'IPR lorsque l'on est proche de K_{Heller} . Ensuite nous atteignons un plateau où l'IPR devient très petit et plus ou moins constant à de petites fluctuations près. Ce qui correspond à ce qu'on attendrait d'état thermalisés.

La pente de la chute de l'IPR à partir de K_{Heller} semble augmenter avec N . On peut imaginer que cette pente devienne quasi infinie et que un changement de régime abrupte, une espèce de transition de phase, apparaisse dans la limite semi-classique. Pour justifier cette idée, il faudrait probablement pousser la limite semi-classique plus loin et quantifier de manière précise cette pente au niveau de $K = K_{Heller}$.



(a)



(b)

FIGURE 5.4 – IPR d'un état cicatrisé en fonction de K et de N . Sur le graphique du dessus. La partie manquante correspond à un déficit de données

$K < K_{Heller}$: Ici rien d'étonnant. Les états cicatrisés sont bien présents et sont tous semblables à ce qui peut-être observé sur la Fig 5.2. C'est à dire une distribution de Husimi parfaitement localisé sur l'orbite périodique instable associées à la résonnance 2 :1. L'IPR semble plus ou moins constant dans la zone $1 < K < K_{Heller}$. Cependant, nous n'allons pas tirer de conclusion sur ce point. En effet, il faudrait regarder cette zone de plus près pour en tirer des conclusions.

$K > K_{Heller}$: **Une surprise ?** Comme nous l'avons vu précédemment. Une transition de phase semble se dessiner pour $K = K_{Heller}$. En toute logique, si le critère de Heller est valide et au vu de la méthodologie utilisée pour obtenir ces graphiques. Nous devrions obtenir des états thermalisés en allant regarder les états associés aux points des graphiques 5.4 pour $K > K_{Heller}$. Cependant, le résultat n'est pas exactement celui escompté. Regardons la Fig 5.5. Nous pouvons constater que lors de la transition de phase l'état cicatrisé semble exploser sous l'impulsion du chaos qui devient de plus en plus puissant. Il y a des raisons de penser que cette transition de phase se fait sur un intervalle de K plus petit dans la limite classique. En raison de la pente des graphique 5.4 qui laisse à penser que la pente de cette transition est de plus en plus forte dans la limite classique.

Maintenant ce qui est encore plus intéressant est ce qu'il se passe pour des valeurs de K encore plus élevées. Nous pouvons les observer sur la Fig 5.6

Nous retrouvons des états inattendus. Nous nous attendions à des états chaotiques entièrement thermalisés alors que nous trouvons des états dont une partie de la distribution de probabilité est répartie dans la mer chaotique mais aussi une partie non négligeable est toujours localisée sur les points fixes d'ordre 2. Dès lors on peut penser que Ces états sont donc des états semi-thermalisés et semi-localisés. La question se pose donc. Ces états sont-ils des états cicatrisés ou non ?

Conclusion : Lors de l'étude des états cicatrisés selon les deux paramètres K et N nous avons observé des phénomènes attendus mais aussi des phénomènes inattendus.

Tout se passe comme prévu lorsque $K < K_{Heller}$. Cependant dans le cas $K = K_{Heller}$ nous observons un comportement qui peut-être assimilé à une transition de phase vers des états semi-localisés et semi-thermalisés. Le critère de Heller semble agir comme une frontière entre ces deux régime. Cependant la question suivante se pose : "Ces états sont-ils des états cicatrisés ou non ?". D'un côté ils sont fortement localisés sur des orbites périodiques instables, en l'occurrence des points fixes d'ordre 2, mais une partie de leur densité de probabilité est dans la mer chaotique. Ces états doivent donc être caractérisés dans le futur pour mener soit à une redéfinition de ce que sont les états localisés. Soit à une infirmation du critère de Heller.

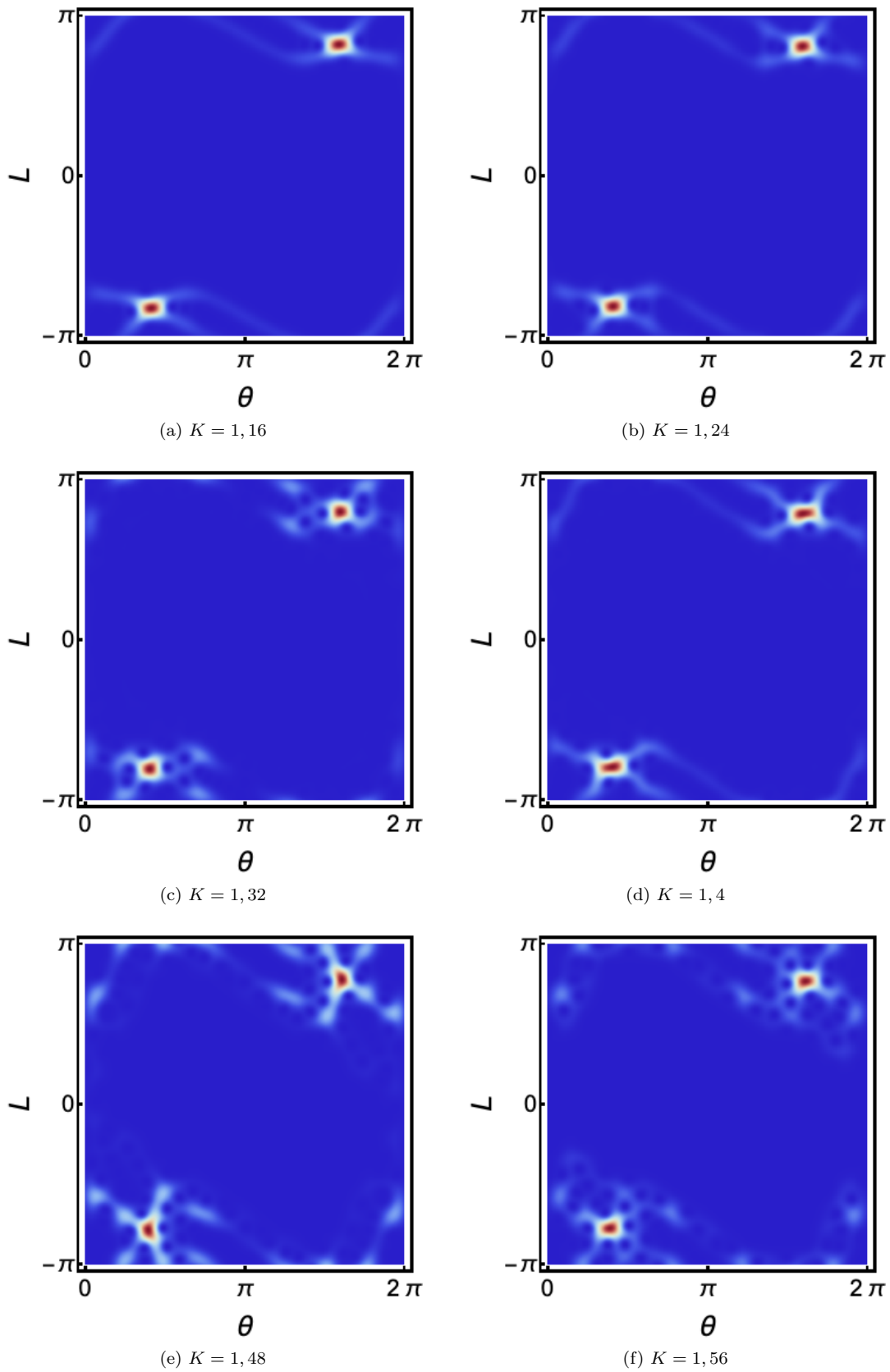


FIGURE 5.5 – Distribution de Husimi d'états cicatrisés pour des valeurs proches de $K = K_{\text{Heller}}$ et $N = 288$

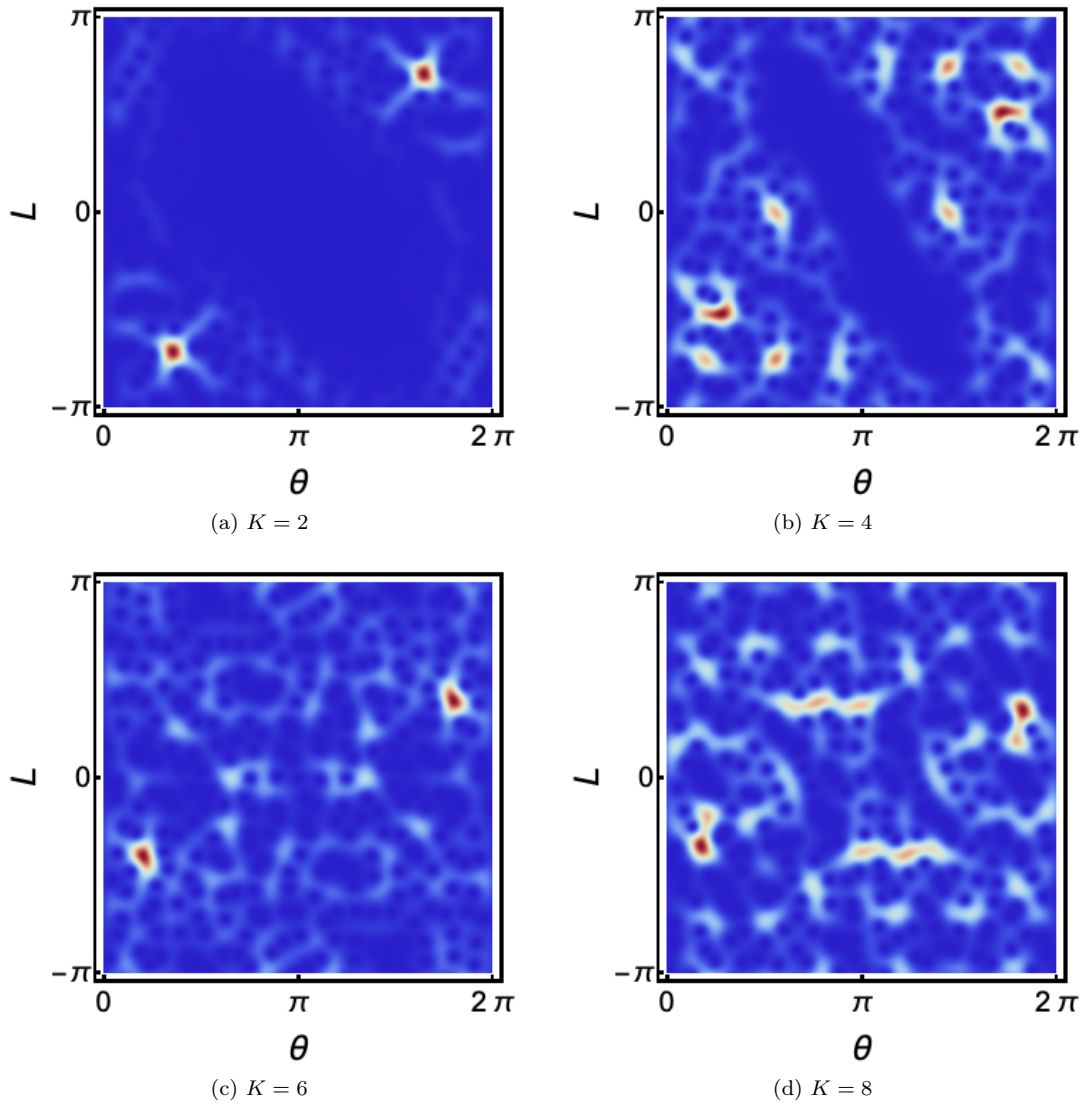


FIGURE 5.6 – Distribution de Husimi d'états localisés sur les points fixes d'ordre 2 pour de grandes valeurs de K et $N = 288$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons passé en revue tous les concepts importants pour comprendre les états cicatrisés dans le rotateur pulsé. En particulier, nous avons examiné comment les implémenter numériquement, concluant par une étude de leurs propriétés, en mettant particulièrement l'accent sur le critère de Heller.

Dans le chapitre 1, nous avons vu comment obtenir l'application standard à partir du modèle du rotateur pulsé. Ensuite, nous avons abordé des concepts de chaos classique, cruciaux non seulement pour comprendre cette application standard, mais aussi pour la caractérisation des états cicatrisés, pour rappel, sont définis à partir de considérations classiques.

Le chapitre 2 nous a plongé dans la construction du domaine du chaos quantique. Nous avons détaillé les aspects qui font des états cicatrisés des objets quantiques remarquables. En particulier, nous avons examiné en quoi le fait que les états cicatrisés soient une exception à la thermalisation et, par conséquent, à l'ergodicité quantique, en fait un sujet d'étude essentiel. L'hypothèse de thermalisation étant à la base du chaos quantique, ces états remettent en question certains de ses aspects. Nous avons conclu ce chapitre en introduisant des outils particulièrement adaptés lorsqu'il s'agit de chaos quantique.

Le chapitre 3 a exploré l'analogie quantique du rotateur pulsé, expliquant comment ce système peut être traité dans la pratique. Nous avons introduit la théorie de Floquet à cette fin. Nous avons ensuite expliqué pourquoi nous pouvons restreindre l'étude du rotateur pulsé quantique à une partie finie de l'espace de Hilbert du système complet. Nous avons conclu ce chapitre en présentant une expression pour obtenir une représentation finie de l'opérateur de Floquet, dans le but de tirer des conclusions numériques.

Dans le chapitre 4, nous nous sommes penchés plus en détail sur la notion d'états cicatrisés, examinant ce qui les caractérise. Dans un but pédagogique et historique, nous sommes revenus sur les états cicatrisés du billard en forme de stade. Nous avons ensuite abordé leur évolution logique : les états cicatrisés à plusieurs corps. Nous avons examiné pourquoi ces derniers suscitent un intérêt croissant et quelles problématiques leur sont liées.

Enfin, dans le chapitre 5, nous avons présenté les résultats de notre étude numérique, confirmant la propriété de cicatrisation de ces états. Mais surtout, nous avons observé que la validité du critère de Heller dans le cas du rotateur pulsé pouvait faire l'objet de débats. En effet, bien que un changement de régime soit observé à la frontière du critère de Heller il est difficile pour autant de nier catégoriquement l'existence des états cicatrisés lorsque ce dernier affirme qu'ils ne peuvent plus être présent dans le système. Dans notre cas, le critère de Heller semble distinguer le cas où nous avons des états quantique entièrement localisés sur l'orbite périodique instable associée et le cas où ces états sont fortement localisé sur ces orbites mais aussi en partie dans la mer chaotique.

Deux idées principales pourraient émerger de ce mémoire. D'un point de vue pratique, nous pourrions pousser l'étude des états cicatrisés vers des systèmes de rotateurs pulsés couplés. Après avoir examiné le cas simple, il est courant de se diriger vers des cas moins triviaux, surtout compte tenu de l'actualité du domaine. Les états cicatrisés à plusieurs corps sont au cœur des recherches actuelles, visant à comprendre des effets expérimentaux observés. Il est naturel de vouloir augmenter le nombre de degrés de liberté du système étudié. A noter qu'il peut-être aussi intéressant d'investiguer un peu plus dans le rotateur pulsé simple. En effet, nous pourrions aussi essayer de traiter des états cicatrisés associés à d'autres résonances que les $2:1$. Il pourrait aussi être intéressant de voir si ces états interagissent entre eux et comment.

Le deuxième point est plus profond. Il s'agit d'une potentielle révision du critère de Heller pour déterminer si son domaine d'application est restreint. Ou si nous avons affaire à une question de redéfinition des états cicatrisés. En résumé, soit le critère de Heller n'est pas valide, soit les états cicatrisés doivent être définis comme étant strictement localisés sur les orbites périodiques instables correspondantes. Il va de soit que cette deuxième option élude une partie du problème. Il faut en effet être en mesure de caractériser ces états partiellement localisés sur l'orbite périodique et partiellement localisés dans la mer chaotique.

Bibliographie

- [1] Eric J Heller. Bound-state eigenfunctions of classically chaotic hamiltonian systems : scars of periodic orbits. *Physical Review Letters*, 53(16) :1515, 1984.
- [2] Lea F Santos and Marcos Rigol. Localization and the effects of symmetries in the thermalization properties of one-dimensional quantum systems. *Physical Review E*, 82(3) :031130, 2010.
- [3] Rahul Nandkishore and David A Huse. Many-body localization and thermalization in quantum statistical mechanics. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 6(1) :15–38, 2015.
- [4] Ehud Altman. Many-body localization and quantum thermalization. *Nature Physics*, 14(10) :979–983, 2018.
- [5] L Kaplan. Recent developments in the theory of scarring. *arXiv preprint chaos-dyn/9810013*, 1998.
- [6] L Kaplan and EJ Heller. Measuring scars of periodic orbits. *Physical Review E*, 59(6) :6609, 1999.
- [7] Eduardo G Vergini. Semiclassical approach to long time propagation in quantum chaos : Predicting scars. *Physical Review Letters*, 108(26) :264101, 2012.
- [8] F Revuelta, Eduardo German Vergini, RM Benito, and Florentino Borondo. Computationally efficient method to construct scar functions. *Physical Review E*, 85(2) :026214, 2012.
- [9] Guo-Xian Su, Hui Sun, Ana Hudomal, Jean-Yves Desaulles, Zhao-Yu Zhou, Bing Yang, Jad C Halimeh, Zhen-Sheng Yuan, Zlatko Papić, and Jian-Wei Pan. Observation of many-body scarring in a bose-hubbard quantum simulator. *Physical Review Research*, 5(2) :023010, 2023.
- [10] Hannes Bernien, Sylvain Schwartz, Alexander Keesling, Harry Levine, Ahmed Omran, Hannes Pichler, Soonwon Choi, Alexander S Zibrov, Manuel Endres, Markus Greiner, et al. Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator. *Nature*, 551(7682) :579–584, 2017.
- [11] Christopher J Turner, Alexios A Michailidis, Dmitry A Abanin, Maksym Serbyn, and Zlatko Papić. Weak ergodicity breaking from quantum many-body scars. *Nature Physics*, 14(7) :745–749, 2018.
- [12] Wen Wei Ho, Soonwon Choi, Hannes Pichler, and Mikhail D Lukin. Periodic orbits, entanglement, and quantum many-body scars in constrained models : Matrix product state approach. *Physical review letters*, 122(4) :040603, 2019.
- [13] Quirin Hummel, Klaus Richter, and Peter Schlagheck. Genuine many-body quantum scars along unstable modes in bose-hubbard systems. *Physical Review Letters*, 130(25) :250402, 2023.
- [14] MS Santhanam, Sanku Paul, and J Bharathi Kannan. Quantum kicked rotor and its variants : Chaos, localization and beyond. *Physics Reports*, 956 :1–87, 2022.
- [15] BV Chirikov. Research concerning the theory of non-linear resonance and stochasticity, prepr. 267, inst. *Nuclear Physics, Novosibirsk.(Engl. Trans. CERN Transl. 31, 1971)*, 1969.

- [16] Boris Valerianovich Chirikov. Research concerning the theory of non-linear resonance and stochasticity. Technical report, CM-P00100691, 1971.
- [17] B. Chirikov and D. Shepelyansky. Chirikov standard map. *Scholarpedia*, 3(3) :3550, 2008. revision #197507.
- [18] Martin Richter, Steffen Lange, Arnd Bäcker, and Roland Ketzmerick. Visualization and comparison of classical structures and quantum states of four-dimensional maps. *Physical Review E*, 89(2) :022902, 2014.
- [19] Maksym Serbyn, Dmitry A Abanin, and Zlatko Papić. Quantum many-body scars and weak breaking of ergodicity. *Nature Physics*, 17(6) :675–685, 2021.
- [20] Edward Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [21] Sylvie Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles-2e éd. : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2021.
- [22] George B Arfken, Hans J Weber, and Frank E Harris. *Mathematical methods for physicists : a comprehensive guide*. Academic press, 2011.
- [23] Sandro Wimberger. *Nonlinear dynamics and quantum chaos*, volume 10. Springer, 2014.
- [24] Linda E Reichl. *Transition to Chaos*. Springer, 2021.
- [25] FL Moore, JC Robinson, C Bharucha, PE Williams, and MG Raizen. Observation of dynamical localization in atomic momentum transfer : A new testing ground for quantum chaos. *Physical review letters*, 73(22) :2974, 1994.
- [26] Allan J Lichtenberg and Michael A Lieberman. *Regular and chaotic dynamics*, volume 38. Springer Science & Business Media, 2013.
- [27] Hans-Jürgen Stöckmann. *Quantum chaos : an introduction*, 2000.
- [28] Robert Sinclair Mackay, JD Meiss, and IC Percival. Resonances in area-preserving maps. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 27(1-2) :1–20, 1987.
- [29] Wojciech Hubert Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Reviews of modern physics*, 75(3) :715, 2003.
- [30] Michael V Berry. Chaos and the semiclassical limit of quantum mechanics (is the moon there when somebody looks?). *Quantum Mechanics : Scientific perspectives on divine action*, 41 :56, 2001.
- [31] Michael Berry. Quantum chaology, not quantum chaos. *Physica Scripta*, 40(3) :335, 1989.
- [32] Ze’ev Rudnick. What is quantum chaos. *Notices of the AMS*, 55(1) :32–34, 2008.
- [33] Fritz Haake. *Quantum signatures of chaos, 3rd edition*. Springer, 2010.
- [34] Oriol Bohigas, Marie-Joya Giannoni, and Charles Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Physical review letters*, 52(1) :1, 1984.
- [35] Madan Lal Mehta. *Random matrices*. Elsevier, 2004.
- [36] Mark Srednicki. Chaos and quantum thermalization. *Physical review e*, 50(2) :888, 1994.
- [37] Luca D’Alessio, Yariv Kafri, Anatoli Polkovnikov, and Marcos Rigol. From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics. *Advances in Physics*, 65(3) :239–362, 2016.
- [38] Masahito Ueda. Quantum equilibration, thermalization and prethermalization in ultracold atoms. *Nature Reviews Physics*, 2(12) :669–681, 2020.

- [39] Kôdi Husimi. Some formal properties of the density matrix. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, 22(4) :264–314, 1940.
- [40] Florence Lenaers. Contribution à l'étude du rotateur pulsé quantique, 2014.
- [41] Benjamin Levi, Bertrand Georgeot, and Dima L Shepelyansky. Quantum computing of quantum chaos in the kicked rotator model. *Physical Review E*, 67(4) :046220, 2003.
- [42] Benjamin Lévi. *Simulation de systemes quantiques sur un ordinateur quantique réaliste*. PhD thesis, Université Paris-Diderot-Paris VII, 2004.
- [43] Klaus M Frahm, Robert Fleckinger, and Dima L Shepelyansky. Quantum chaos and random matrix theory for fidelity decay in quantum computations with static imperfections. *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 29 :139–155, 2004.
- [44] Holger Schanz. Wave packet dynamics and chaotic eigenstates. *Irreversible Prozesse und Selbstorganisation*, page 227.
- [45] Giulio Casati and Joseph Ford. Stochastic behavior in classical and quantum hamiltonian systems.[como, 1977]. 1979.
- [46] Chushun Tian and Alexander Altland. Theory of localization and resonance phenomena in the quantum kicked rotor. *New Journal of Physics*, 12(4) :043043, 2010.
- [47] Shau-Jin Chang and Gabriel Perez. Classical and quantum eigenstates of a kicked rotor. *Chinese Journal of Physics*, 30(4) :479, 1992.
- [48] Tao Ma. General theory of the quantum kicked rotator. i. *arXiv preprint arXiv :0710.1661*, 2007.
- [49] Felix M Izrailev. Simple models of quantum chaos : Spectrum and eigenfunctions. *Physics Reports*, 196(5-6) :299–392, 1990.
- [50] P Leboeuf, J Kurchan, M Feingold, and DP Arovas. Topological aspects of quantum chaos. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2(1) :125–130, 1992.
- [51] Gregor Tanner. How chaotic is the stadium billiard? a semiclassical analysis. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 30(8) :2863, 1997.
- [52] Eduardo Fradkin and Joel E Moore. Entanglement entropy of 2d conformal quantum critical points : hearing the shape of a quantum drum. *Physical review letters*, 97(5) :050404, 2006.