

Développement d'un modèle numérique pour l'analyse des efforts dans des ligatures d'une pile de plats métalliques sous impacte

Auteur : Flock, Julian

Promoteur(s) : Denoel, Vincent

Faculté : Faculté des Sciences appliquées

Diplôme : Master en ingénieur civil des constructions, à finalité spécialisée en "civil engineering"

Année académique : 2016-2017

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/2625>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.

Développement d'un modèle numérique pour l'analyse des efforts dans des ligatures d'une pile de plats métalliques sous impact

TRAVAIL DE FIN D'ÉTUDES RÉALISÉ EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE
MASTER "INGÉNIEUR CIVIL EN CONSTRUCTION" PAR FLOCK JULIAN

Auteur :
Julian FLOCK

Promoteurs :
Vincent DENOËL (ULg)
David MAERTENS (ArcelorMittal)

Année académique 2016-2017



Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon promoteur académique, Mr. Denoël, pour tout le soutien ainsi que pour tous les conseils avisés qu'il a pu m'apporter tout au long de ce travail.

Je souhaiterais également remercier Mr. Maertens pour tout le temps qu'il a consacré à nos réunions et pour nous avoir permis de visiter l'usine de Liège.

Par ailleurs, je remercie également tous les intervenants d'ArcelorMittal Tailored Blanks présents lors des campagnes de mesures grâce à qui les essais ont pu se dérouler sans incidents.

JULIAN FLOCK

Énoncé

DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE NUMÉRIQUE POUR L'ANALYSE DES EFFORTS DANS DES LIGATURES D'UNE PILE DE PLATS MÉTALLIQUES SOUS IMPACT

Ingénieur Civil En Construction - Année Académique 2016-2017

Auteur : Julian Flock

Promoteur académique : Vincent Denoël

La société ArcelorMittal Tailored Blanks est une filiale du groupe ArcelorMittal produisant, sur le site de Liège, des flans pour l'industrie automobile. Les produits sont expédiés le plus souvent par camion sous forme d'une pile de plats. Une majorité de la production est réalisée sur des palettes en bois avec l'utilisation de deux types de liens.

Le cerclage des piles a un coût non négligeable tant en terme de matière qu'en terme de main d'œuvre. Dès lors, le but de ce travail est de créer un logiciel leur permettant de les aider dans la détermination du nombre optimum de ligatures à mettre en place tout en gardant un bon niveau de sécurité pendant les conditions de transports internes (chariot élévateur) et externes (camion). Finalement, si le modèle convient à ArcelorMittal Tailored Blanks liège, il pourra également être utilisé pour les autres sites européens.

Pour ce faire, la problématique va être étudiée de trois points de vue différents. Afin de comprendre convenablement les différents phénomènes devant entrer en considération, une solution analytique est développée dans un premier temps.

Un modèle simplifié à un degré de liberté où seulement un type de ligature est pris en considération est d'abord développé de façon à introduire le principe général de l'algorithme de résolution implémenté dans ce travail. Après quoi, un modèle plus complet prenant en compte tous les flans individuellement et tous les types de ligatures est ensuite implémenté de façon à représenter au mieux la réalité.

Ce travail permet également de mettre en évidence des profils d'accélération type pouvant se produire réellement sur le support d'une pile de plats pendant des incidents tels que des freinages d'urgence. Pour ce faire, une campagne de mesures d'accélération sur les engins utilisés par Arcelor-Mittal Tailored Blanks a été réalisé.

Finalement, le dernier point abordé dans ce travail essayera, grâce au modèle ainsi développé, de valider ou invalider la méthode actuellement utilisée pour le dimensionnement des ligatures.

Le jury :

Denoël V.

Maertens D.

Duchêne L.

Franssen JM.

Résumé

Le but de ce travail est de développer un logiciel permettant de déterminer les efforts se développant dans les ligatures d'une pile de plats métalliques sous une sollicitation quelconque. La dynamique de ce problème est d'abord caractérisée par des forces de frottement pouvant se développer aux interfaces entre chaque élément. Les forces de frottement étant par essence discontinues, deux comportements peuvent se présenter. Soit l'élément colle sur son support, soit l'élément glisse sur son support. Le modèle numérique développé dans ce travail est donc fondé sur une intégration numérique basée sur la détection d'événements afin de pouvoir simuler convenablement ces deux phases. Le calcul des forces de rappel exercées par les ligatures nécessite dans un premier temps de pouvoir traiter numériquement les éventuels contacts pouvant se produire entre les plats et les ligatures. En outre, l'effet de rappel de ces ligatures sur un plat donné dépendant indirectement des contacts ainsi que du déplacement de tous les plats de la pile, il est nécessaire de développer un schéma numérique implicite permettant de prendre en compte ces non-linéarités. Par conséquent, il a été choisi de construire un modèle numérique basé sur la méthode de Newton-Raphson modifiée. A l'aide du modèle ainsi développé et de profils de sollicitation concrète déterminés expérimentalement, il a finalement pu être possible de discuter la validité de la méthode utilisée par ArcelorMittal Tailored Blanks pour dimensionner les ligatures.

Abstract

The main purpose of this work is the development of a numerical scheme computing stresses in ligatures for stack of metallic plates under any impacts. First of all, the dynamic of that kind of system is defined by the development of friction forces at interfaces between each plate. As friction forces are intrinsically non-smooth, two states can happen. Either the element is sticking to its base or the element is slipping out of its base. In order to replicate these two phases, the numerical model elaborated in this work is based on an event-driven integration scheme. Computation of spring forces applied by ligatures on plates requires the algorithm to handle with potentials contacts that can appear between plates and ligatures. Moreover, as the spring effect of ligatures on a given plate depend indirectly on contacts and displacements of the whole stack of plates, an implicit numerical scheme is needed to take these non-linearities into account. The integration procedure used in the model is therefore based on a modified Newton-Raphson's method. By means of excitation profiles empirically established, the numerical model was finally runned with different settings in order to discuss the validity of the design procedure of ligatures employed by ArcelorMittal Tailored Blanks.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Approche théorique	5
2.1	Contexte	5
2.2	Définition de la problématique	9
2.2.1	Définition formelle	9
2.2.2	Définition mathématique	12
2.2.3	Symboles	18
2.3	Solution Analytique	18
2.3.1	Solution générale	19
2.3.1.1	<i>Stick</i>	19
2.3.1.2	<i>Slip</i>	20
2.3.1.3	Résumé	22
2.3.2	Conditions de sortie de régime	23
2.3.2.1	<i>Stick</i>	23
2.3.2.2	<i>Slip</i>	23
2.3.3	Construction solution	26
2.3.4	Conclusion	28
3	Approche numérique	30
3.1	Système à un degré de liberté	30
3.1.1	Introduction	30
3.1.2	Algorithme	31
3.1.2.1	Intégration temporelle	33
3.1.2.2	Détection d'événements	35
3.1.2.3	Localisation événement	36
3.1.3	Validation	37
3.2	Système à plusieurs degrés de liberté	40
3.2.1	Introduction	40
3.2.2	Algorithme	42
3.2.2.1	Contact - Force de rappel ligatures - Force de frottement	45
3.2.2.2	Intégration temporelle	48
3.2.2.3	Détection d'événements	50
3.2.2.4	Localisation événement	50
3.2.3	Matrice tangente	50
3.2.4	Validation	59

4	Application	63
4.1	Accélération - Mesures sur site	63
4.1.1	Introduction	63
4.1.2	Dispositif expérimental	63
4.1.3	Liste des essais	64
4.1.4	Dépouillement résultats bruts	64
4.1.5	Résumé résultats	73
	4.1.5.1 Freinage d'urgence	73
	4.1.5.2 Virage	75
4.1.6	Conclusion	75
4.2	Étude principe de dimensionnement	76
5	Conclusion Générale	81

Chapitre 1

Introduction

ArcelorMittal Tailored Blanks est une filiale d'ArcelorMittal produisant exclusivement des produits plats pour diverses industries. Afin d'envoyer les commandes produites à l'usine aux clients, les plats sont empilés les uns sur les autres et sont ensuite cerclés à l'aide de plusieurs types de ligature. Une illustration de ce type de dispositif est présentée à la Figure 1.1.

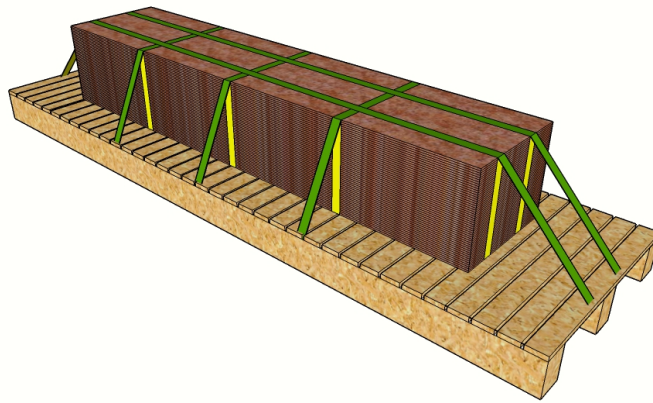


FIGURE 1.1 : Schéma - Illustration pile de plats ligaturés sur une palette en bois

Lorsque le support d'un tel système subit un certain mouvement, des forces d'inertie apparaissent à l'intérieur des plats de telle façon qu'ils vont avoir tendance à se déplacer les uns par rapport aux autres. En outre, les interfaces entre chaque plat étant caractérisées par un certain état de surface ou autrement dit, une certaine rugosité, des forces de frottements peuvent s'y développer. Dans ces conditions, les ligatures vont permettre de maintenir la pile de plats en position.

En pratique, il apparaît cependant que, dans certains cas, les ligatures ne permettent pas de garantir l'intégrité de la pile de plats. Cela signifie par conséquent que la commande est perdue et qu'elle doit être reproduite à l'usine entraînant ainsi des pertes financières non négligeables pour ArcelorMittal Tailored Blanks. C'est pourquoi il a été demandé à Mr. Denoël de mener une étude afin de pouvoir analyser les efforts se développant dans les ligatures d'une pile de plats lorsqu'elle est soumise à un impact. Pour ce faire, il a été choisi de développer un modèle numérique permettant de déterminer l'évolution des déplacements de plats mais également des contraintes à l'intérieur des ligatures. Le but de ce travail est donc de fournir un logiciel à ArcelorMittal Tailored Blanks leur permettant de pouvoir analyser les efforts dans les ligatures lorsque le support d'une pile de plats quelconque subie un impact quelconque.

Le rapport est structuré en trois chapitres traitant la problématique à chaque fois avec une optique différente.

Le premier chapitre aborde la problématique d'un point de vue purement théorique.

Dans un premier temps, ce chapitre permet de présenter l'environnement dans lequel ce travail a été effectué ainsi que les limites du modèle qui sera développé.

Pour ce faire, ArcelorMittal Tailored Blanks Liège ainsi que sa ligne de production principale sont d'abord détaillés à la section 2.1 afin de présenter le contexte de ce travail. Ensuite, la section 2.2 définit d'un point de vue théorique et mathématique la problématique dans le but de fixer correctement les limitations des différents éléments de ce travail.

Finalement, ce chapitre présente également à la section 2.3 le développement d'une solution analytique pour un système à un degré de liberté subissant une sollicitation sinusoïdale. Cela permet d'une part de mettre en évidence les phénomènes principaux intervenant dans la dynamique d'une pile de plats et d'autre part d'avoir une solution de base qui servira à valider le modèle numérique développé au chapitre 3.

Le second chapitre se consacre au développement des modèles numériques permettant d'analyser les efforts dans les ligatures.

Afin de présenter la structure générale de l'algorithme implémenté dans le modèle ainsi que pour introduire les étapes importantes du code de calculs, un modèle à un degré de liberté a été créé dans un premier temps. La section 3.1 est dédiée aux développements de ce modèle. Afin de vérifier ce premier modèle, la solution analytique développée au chapitre 2 est utilisée.

Une fois le principe de résolution générale validé grâce au modèle à un degré de liberté, la section 3.2 présente un modèle plus complet permettant de déterminer les déplacements de tous les plats constituant une pile. Ce nouveau code de calculs est basé sur un schéma de résolution implicite permettant de prendre en compte convenablement l'effet des ligatures. Afin de valider ce dernier modèle, les mesures expérimentales réalisées dans le travail [1] sont utilisées.

Le dernier chapitre abordant la problématique d'un point de vue plus pratique est séparé en deux parties distinctes.

Tout d'abord, plusieurs essais ont été menés chez ArcelorMittal Tailored Blanks dans le but de déterminer des caractéristiques type de sollicitation pouvant apparaître sur le support d'une pile de plats. Pour ce faire, des accéléromètres ont été placés sur des engins pendant qu'ils opéraient des manoeuvres. La section 4.1 traite donc du dépouillement et de l'analyse des mesures effectuées.

Ensuite, la section 4.2 s'intéresse à la méthode de dimensionnement des ligatures utilisée en pratique par ArcelorMittal Tailored Blanks. Cette petite étude a pour but de discuter la validité de la méthode mise en place.

Chapitre 2

Approche théorique

2.1 Contexte

ArcelorMittal Tailored Blanks est une filiale à 100% du groupe ArcelorMittal produisant des plats métalliques de toutes sortes pour l'industrie automobile principalement. Le site d'ArcelorMittal Tailored Blanks se situant à Liège existe depuis 1996 et produit en moyenne 11 millions de plats par an à l'aide de deux lignes de production implantées sur une surface au sol de $10\,000m^2$. En tout, 64 équivalents temps plein travaillent à Liège pour un chiffre d'affaire de 53 millions d'euros.

Le fonctionnement de la ligne de production principale du site ArcelorMittal Tailored Blanks Liège va être détaillé afin de présenter le contexte dans lequel ce travail a été effectué et de délimiter convenablement les limites de la problématique étudiée.

Comme expliqué dans l'introduction, ArcelorMittal Tailored Blanks produit une variété de plats aux dimensions diverses à partir de bobines de matière première. Par conséquent, la première étape est la réception de ces bobines et leur stockage en début de ligne de production. Les bobines arrivent la plupart du temps par voie routière et sont déchargées à l'aide d'un pont roulant. Ensuite, elles sont installées au début de la ligne de production où elles seront déroulées et passeront dans une planeuse avant d'arriver dans la presse.

La Figure 2.1 est une photographie de la zone de stockage avec des bobines en attente pour de futures commandes et la Figure 2.2 est une photographie d'une bobine sur la dérouleuse.



FIGURE 2.1 : Photographie - Stockage Bobines



FIGURE 2.2 : Photographie - Bobine sur dérouleuse

La tôle entre ensuite en continu dans la presse où elle sera usinée. La presse principale possède un effort de coupe de 1250 tonnes et peut accueillir des plats avec une épaisseur de 0,5 mm à 4 mm et une largeur de 1,8 m maximum. Une deuxième presse avec un effort de coupe de 2500 tonnes est également présente sur le site de Liège afin de découper des plats plus épais. La Figure 2.3 illustre la presse pendant des opérations de production.



FIGURE 2.3 : Photographie - Presse

Chaque produit étant individualisé en fonction des demandes du client, l'outil de coupe doit être adapté pour chaque commande. Par conséquent, un atelier permettant la fabrication de ces outils

est situé à proximité de la presse. La forme des plats peut être plus ou moins complexe en fonction de leur utilisation future. Les Figures 2.4 et 2.5 représentent deux photographies illustrant deux exemples de plats produits sur le site de Liège.

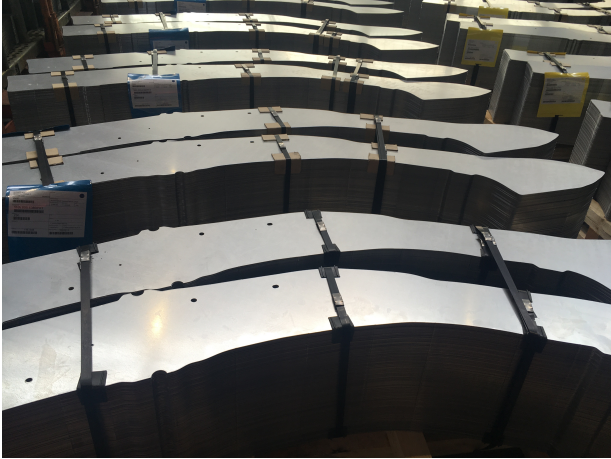


FIGURE 2.4 : Photographie - Plat Exemple 1

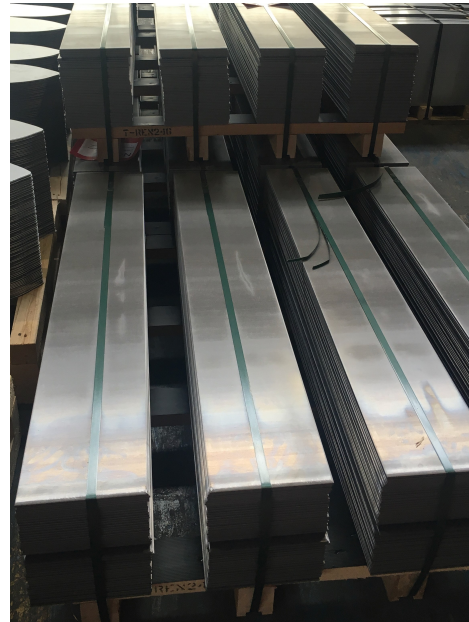


FIGURE 2.5 : Photographie - Plat Exemple 2

Ces produits correspondent, par exemple, à des pièces de carrosserie destinées à un fabricant automobile.

A la sortie de la presse, les plats usinés sont convoyés jusqu'à la fin de la ligne de production pour être empilés sur des palettes. Un système d'empilement automatique est utilisé où les plats sont transportés au-dessus d'une palette en étant maintenus sur leurs parties supérieures avant d'être poussés sur la pile de plats déjà formée. La Figure 2.6 est un cliché de ce système d'empilement.

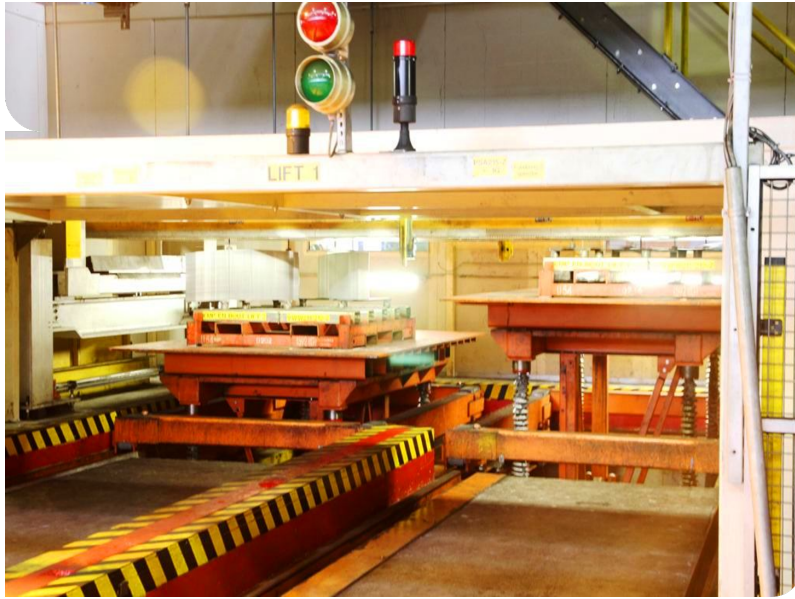


FIGURE 2.6 : Photographie - Système empilement

Une fois tous les plats empilés, la palette est transportée jusqu'à l'atelier de cerclage où la pile va être ligaturée manuellement. Il existe deux manières de ligaturer une pile de plats. Il y a d'une part des ligatures englobant la pile de plats et la palette (appelées ligatures de palette) et d'autre part des ligatures englobant seulement la pile de plats (appelées ligatures de pile). Concrètement, un ouvrier place les ligatures autour de la pile et utilise un compresseur pour serrer les ligatures et leur appliquer une pré-tension. La Figure 2.7 est une photographie de l'atelier de cerclage du site d'ArcelorMittal Tailored Blanks Liège.



FIGURE 2.7 : Photographie - Atelier de cerclage

Après cerclage, les commandes sont stockées et puis envoyées par transport routier aux différents clients.

En conclusion, la totalité des opérations peut être résumée en 6 étapes principales. Les bobines sont d’abord reçues sur site et puis déroulées et découpées dans une presse pour être mises en forme. Ensuite, les plats ainsi formés sont empilés et ligaturés avant d’être envoyés chez le client. L’apport de ce travail intervient au niveau des deux dernières étapes, à savoir le cerclage des piles de plats et la manutention de l’ensemble palette - pile de plats. Effectivement, ArcelorMittal Tailored Blanks a observé à plusieurs reprises, sous certaines conditions de manutention comme un freinage d’urgence, une rupture des ligatures entraînant la perte de la commande considérée. Dès lors, une étude permettant d’analyser les efforts à l’intérieur des ligatures d’une pile de plats a été demandée auprès du professeur Vincent Denoël par le biais de Mr. Maertens, directeur de projets chez ArcelorMittal Tailored Blanks. C’est ainsi qu’il a été proposé de développer un modèle numérique permettant d’analyser les efforts dans les ligatures.

L’équipe de dynamique des structures de l’ULg a donc développé un logiciel basé sur un modèle numérique explicite afin de répondre à la demande de Mr. Maertens.

Dans le cadre de ce travail, un modèle implicite va être développé afin d’améliorer les études déjà existantes. La méthode développée dans ce travail est donc totalement différente de l’étude faite auparavant [1] et tous les développements seront repris depuis le début.

2.2 Définition de la problématique

Cette partie est consacrée à la définition formelle et mathématique de la problématique. Pour rappel, l’intitulé de la problématique est la suivante :

Développement d’un modèle numérique pour l’analyse des efforts dans des ligatures d’une pile de plats métalliques sous impact.

En d’autres termes, il faut élaborer un algorithme de calcul permettant d’étudier la dynamique d’une pile de plats ligaturée lorsque celle-ci est soumise à un mouvement du support donné dans le but de déterminer les efforts se développant à l’intérieur des ligatures afin de pouvoir dimensionner ces dernières de la manière la plus appropriée.

2.2.1 Définition formelle

Premièrement, l’objet de cette étude porte d’une part sur un empilement de plats métalliques et d’autre part sur les ligatures permettant de maintenir en position cette pile de plats. Il est donc nécessaire, dans un premier temps, de définir et caractériser ces deux termes dans le cadre de ce travail. Ensuite, le but est de pouvoir, pour un impact donné, dimensionner le nombre de ligatures nécessaires à l’aide d’un modèle numérique. Par conséquent, il tient également de détailler le type de modèle qui va être développé ainsi que les types d’impact qui seront pris en compte pour le dimensionnement des ligatures. Dans la suite de cette section chacun de ces mots clés (pile de plats ; ligatures ; modèle numérique ; impact) vont être détaillés.

Pile de plats La forme des plats produits par ArcelorMittal Tailored Blanks peut être très complexe en fonction de leur utilisation. Cependant, dans une première approche et dans le cadre de ce travail, des plats de forme rectangulaire vont être étudiés. L'adaptation aux plats de formes différentes peut être envisagée comme chemin d'améliorations. L'étude portera donc sur des plats rectangulaires dont les dimensions et la masse pourront être variables. Un plat est ainsi défini d'une part par sa largeur, sa longueur et son épaisseur et d'autre part par son poids volumique. La Figure 2.8 ci-dessous représente un schéma reprenant les différentes caractéristiques des plats étudiés. De la même manière, le nombre de plats constituant la pile étudiée sera variable.

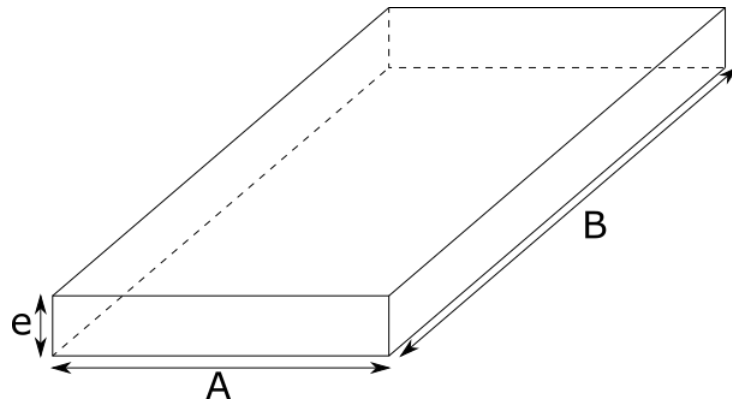


FIGURE 2.8 : Schéma - Plats étudiés dans ce travail

Ligatures Les liens utilisés pour maintenir les plats en position sont des ligatures métalliques dont les caractéristiques mécaniques sont connues. Elles possèdent un module de Young de 200GPa et une section droite de 12mm^2 . Cependant, il a été montré de manière expérimentale dans le travail [1] que la rupture d'une ligature n'est pas causée par la rupture interne de la ligature mais plutôt par l'ouverture de l'agrafe permettant de maintenir la ligature fermée. La photographie de la Figure 2.9 illustre la rupture observée lors des essais menés à l'Université de Liège par le professeur Vincent Denoël [1].



FIGURE 2.9 : Photographie - Rupture d'une ligature causée par l'ouverture de l'agrafe de fermeture

Les essais réalisés consistaient à effectuer des essais de traction statiques sur plusieurs ligatures en vue de déterminer la vraie limite de rupture ainsi que la vraie rigidité des ligatures. Finalement, l'étude [1] a pu montrer grâce à ces essais que la limite de rupture du lien pouvait être prise égale à $280MPa$. En outre, il a également été montré que l'interpénétration entre les ligatures et le support entraîne une perte de rigidité de telle façon que le module de Young peut être considéré égal à $12,5GPa$.

Concrètement, l'effet des deux types de ligatures (ligatures de palette et ligatures de pile) va être de créer une force de rappel sur chacun des plats dont l'intensité dépend des déplacements de chacun des plats. Autrement dit, l'effet des ligatures pourra être modélisé grâce à des ressorts dont la rigidité sera fonction des caractéristiques mécaniques des ligatures mais également de la pré-tension appliquée au moment du serrage de la ligature.

Impact Dans un premier temps, un impact dans le sens classique du terme, à savoir une accélération constante pendant un laps de temps plus ou moins court, pourrait être considéré. Cependant et de manière plus générale, n'importe quel type de mouvement pouvant réellement apparaître sur le support d'une pile de plats devrait être pris en compte. D'après l'expérience de Mr. Maertens, quatre événements seraient intéressants à examiner.

Premièrement, une des causes les plus fréquentes lors d'une rupture de ligatures est un freinage d'urgence. Effectivement, l'intensité des accélérations du support mises en jeu lors d'un freinage d'urgence est si importante qu'il en résulte la plupart du temps par une augmentation considérable des efforts dans les ligatures entraînant l'ouverture de l'agrafe et la perte de la commande. Il est donc impératif d'étudier ce type de sollicitation.

L'effet de l'inclinaison de la palette en bois sera également pris en considération. Ce cas particulier est analysé car il pourrait éventuellement permettre d'avoir une méthode de dimensionnement simplifiée. L'idée est de se dire que si le système reste stable lorsque le support est incliné d'une valeur bien définie, le nombre de ligatures est considéré comme suffisant pour éviter tout incident. Évidemment, la valeur de l'inclinaison donnée au support doit être définie de la manière la plus appropriée et un projet complet serait sans doute nécessaire pour pouvoir la déterminer le plus adroitement possible. Ceci constitue un éventuel prolongement de ce travail.

Finalement, ArcelorMittal Tailored Blanks a déjà pu observer à plusieurs reprises des déplacements latéraux trop importants lorsque les camions circulent dans un carrefour giratoire trop rapidement. Dès lors, l'analyse du comportement d'une pile de plats soumise à une force centrifuge peut également être pris en considération.

Modèle numérique Le but est de créer un algorithme de calcul permettant d'analyser les efforts se développant dans les ligatures lorsque la pile de plats sera soumise à une des sollicitations précédemment décrites. Ce modèle sera codé dans MATLAB et intégré dans une interface graphique afin de le rendre accessible aux personnes concernées. La Figure 2.10 illustre l'interface graphique utilisateur également édité dans MATLAB. Même si l'interface utilisateur utilisée est celle déjà développée par Mr. Denoël dans le projet [1], le modèle numérique exposé dans le cadre de ce travail est complètement différent. Effectivement, le but ici est de créer un modèle qui n'est plus explicite mais implicite permettant ainsi un algorithme de calcul plus robuste.

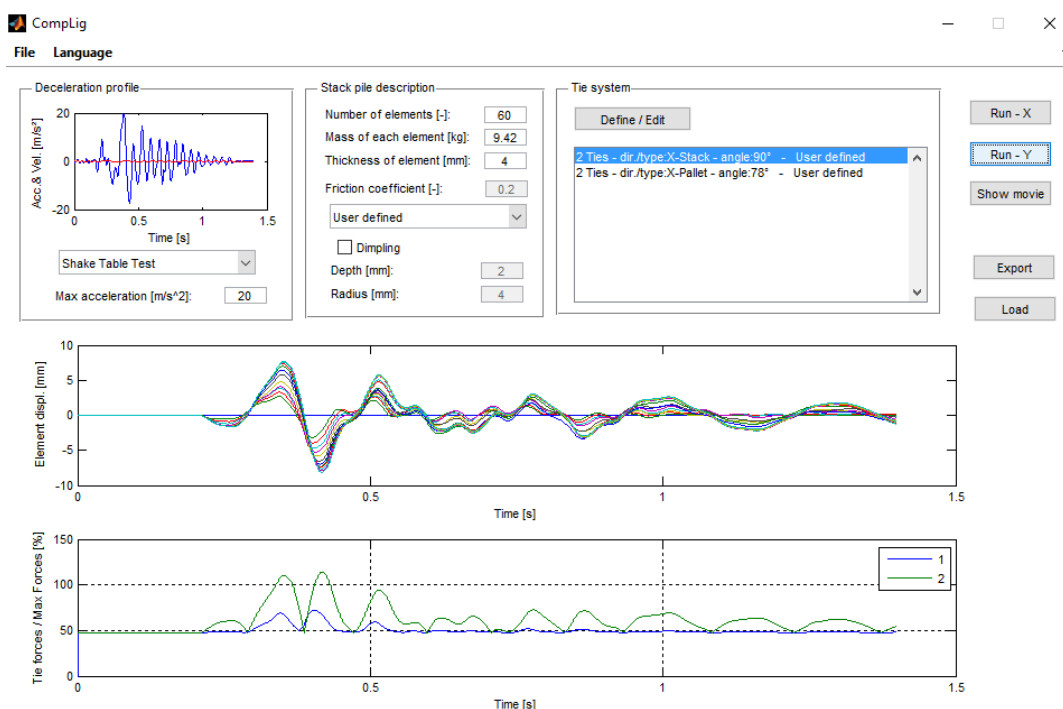


FIGURE 2.10 : Screenshot - Interface graphique utilisateur créée par Vincent Denoël [1]

Afin de bien comprendre les différents phénomènes entrants en jeu, un premier modèle résolvant le problème pour un système à un seul degré de liberté sera développé. D'un point de vue plus pratique, un système à un degré de liberté peut être vu comme une pile de plats où tous les plats en partie supérieure glissent ensemble sur le premier plat qui est resté collé au support. La Figure 2.11 est un schéma illustrant un système à un degré de liberté. Ensuite, un deuxième modèle à plusieurs degrés de liberté sera développé afin de pouvoir quantifier le plus précisément possible la dynamique d'une pile de plats soumise à un impact.

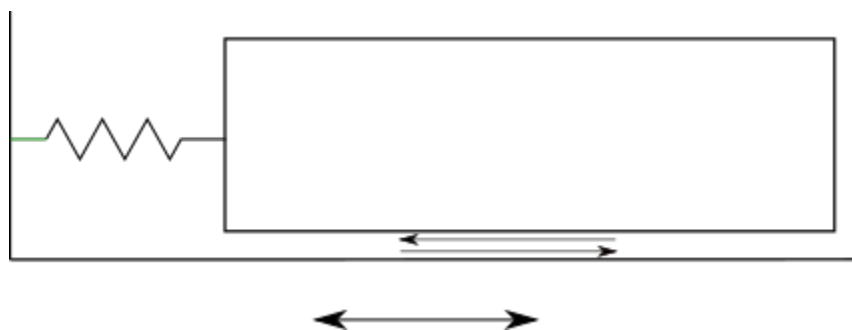


FIGURE 2.11 : Schéma - Système 1 degré de liberté

2.2.2 Définition mathématique

Afin de concevoir convenablement le modèle numérique il est nécessaire de définir la problématique d'un point de vue mathématique ainsi que de fixer les conventions utilisées tout au long de ce travail.

Afin d'établir les équations d'équilibre régissant le problème étudié, le système exposé à la Figure 2.12 est étudié. La pile est constituée, de manière générale, de N plats et est ligaturée à l'aide de ligatures de pile et de ligatures de palette. La Figure 2.12 illustre également, en traits discontinus, une déformée possible de la pile de plats. Ce schéma permet de distinguer les déplacements relatifs (dénommés q dans la suite du travail) des déplacements absolus (dénommés x dans la suite du travail). D'un côté, le déplacement relatif d'un plat donné est défini comme le déplacement entre la position du plat et le centre du support en position déformée. D'un autre côté, le déplacement absolu d'un plat donné correspond à la somme du déplacement relatif et du déplacement imposé au support (dénommé u dans la suite du travail). En d'autres termes, le déplacement absolu est défini dans un référentiel fixe et centré à la position initiale du support tandis que le déplacement relatif est défini dans un référentiel en mouvement et centré à la position du support en état déformée. Dans un formalisme mathématique, cela donne :

$$x(t) = q(t) + u(t) \quad (2.1)$$

Les différentes forces intervenant dans la dynamique de cette pile de plats, illustrées à la Figure 2.13, vont être listées et explicitées. La convention de signes utilisée ici ainsi que dans la suite de ce travail est également défini à la Figure 2.13. Le sens positif est donc imposé vers la droite.

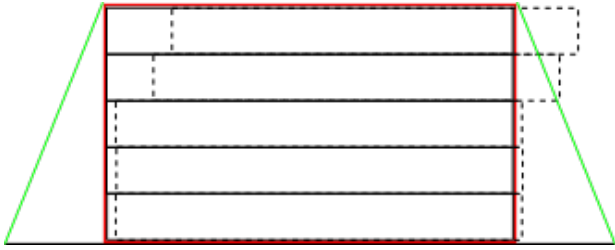


FIGURE 2.12 : Schéma - Système constitué de N plats métalliques ligaturés par des ligatures de pile (rouge) et des ligatures de palette (vert)

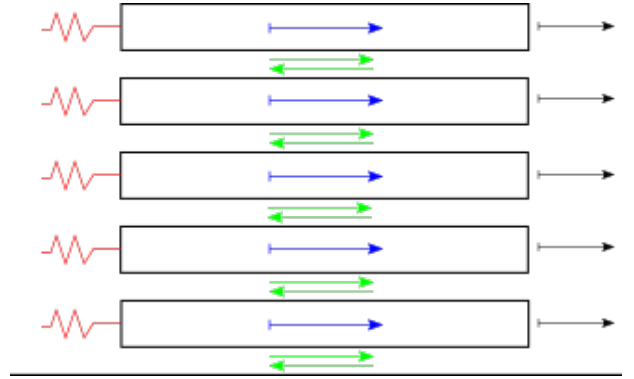


FIGURE 2.13 : Schéma - Bilan des Forces ; Rouge - Force de rappel ligatures ; Vert - Force de frottement aux interfaces ; Bleu - Force d'inertie ; Noir - Sollicitation

Force d'inertie La première force à prendre en compte dans un problème de dynamique est sans aucun doute la force d'inertie. De manière générale, une force d'inertie correspond au produit entre la masse d'un objet et son accélération. Dans le cas particulier étudié dans ce travail, chacun des plats est donc soumis à une force d'inertie dont l'intensité est égale au produit entre la masse d'un plat et son accélération absolue. Pour un plat quelconque de masse m :

$$F_I(t) = m\ddot{x}(t) \quad (2.2)$$

Où $\ddot{x}(t)$ est en fait égale à la somme de l'accélération relative $\ddot{q}(t)$ avec l'accélération du support $\ddot{u}(t)$. Par conséquent, la force d'inertie peut être décomposée en deux parties :

$$F_I(t) = m\ddot{q}(t) + m\ddot{u}(t) \quad (2.3)$$

Force de frottement L'équation 2.3 montre que lorsque le support entre en mouvement avec une accélération non nulle (i.e. $\ddot{u}(t) \neq 0$ et $\ddot{q}(t) = 0$), une force d'inertie va se développer dans chacun des plats constituant une pile quelconque. Afin de contrebalancer cette sollicitation, des forces de frottement vont se développer permettant ainsi d'empêcher la mise en mouvement des plats et de conserver l'équilibre global de la pile. Plus la sollicitation va s'intensifier, plus les forces de frottement vont augmenter. Si, pour un plat quelconque de la pile, la force de frottement atteint un certain palier défini par un coefficient frottement (dénommé μ), le simple bilan entre la sollicitation et les forces de frottement ne sera plus conservé si l'accélération du support augmente encore. Dès lors, le plat décolle de son support et son accélération relative s'accroît de manière à conserver l'équilibre des forces. Autrement dit, le plat est en mouvement et l'évolution de sa position dans le temps peut être déterminée à partir des équations de la dynamique.

Il existe donc deux régimes différents. Soit les plats restent immobiles et les forces de frottement sont inférieures au seuil de glissement défini par \tilde{F}_f , soit ils entrent en mouvement et les forces de frottement restent constantes à la valeur de ce seuil. Mathématiquement, cela se traduit par l'équation 2.4. La force de frottement s'oppose au mouvement du plat par rapport à son support direct, c'est-à-dire par rapport au plat se trouvant juste en-dessous ou la palette en bois si le premier plat de la pile est considéré. C'est pourquoi la force de frottement est du signe opposé de la différence entre la vitesse relative du plat considéré et celle de son support direct comme l'illustre la Figure 2.14.

$$\begin{cases} |F_f| = \tilde{F}_f & \text{Si } \dot{q}(t) \neq 0 \\ |F_f| \leq \tilde{F}_f & \text{Si } \dot{q}(t) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Où

$\tilde{F}_f = \mu N g$ - Force de frottement limite [N]

N - Poids vertical appliqué sur le plat [kg]

μ - Coefficient de frottement [-]

g - Accélération de la pesanteur [m/s²]

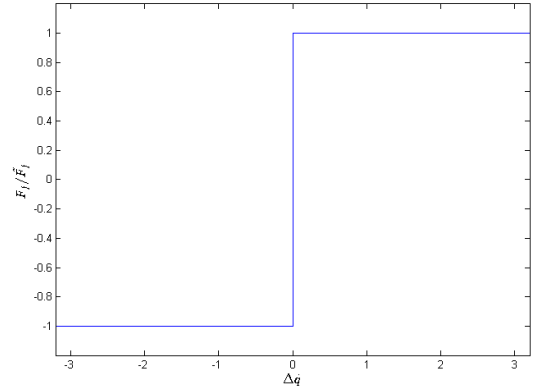


FIGURE 2.14 : Graphique - Force de frottement F_f en fonction de la différence entre la vitesse relative du plat et celle de son support direct $\Delta \dot{q}$

En outre, la Figure 2.14 montre qu'il existe une discontinuité dans l'évolution de la force de frottement en fonction de la vitesse relative. L'existence de deux comportements différents en fonction des paramètres du système constitue une première particularité du phénomène étudié. Même si au premier abord le système est discontinu, il est en réalité continu mais seulement par morceaux. C'est-à-dire qu'en dehors des transitions entre une phase de "collement" (phase de *stick*) et une phase de glissement (phase de *Slip*), le système est continu et donc dérivable. Ce type de problème est connu et a déjà été étudié comme par exemple dans [2] où Remco Leine et Henk Nijmeijer présentent différents modèles permettant d'étudier la dynamique des systèmes mécaniques discontinus.

De façon à respecter l'équilibre des forces aux interfaces entre deux plats, à chaque force de frottement sous un plat correspond une force réciproque force d'intensité égale mais de sens différent s'appliquant sur le support. La Figure 2.13 montre effectivement que deux forces de sens opposé s'appliquent à chaque interface. Dès lors, lorsque le bilan global des forces est réalisé pour un plat quelconque il est nécessaire de prendre également en compte la réciproque de la force frottement du plat se situant juste au-dessus du plat considéré. Cette remarque n'est cependant pas applicable pour le plat se trouvant en tête de pile pour lequel il n'y a plus aucun plat au-dessus. Cela signifie également qu'il est supposé qu'aucun frottement ne peut se développer entre le dernier plat et les ligatures. Cette hypothèse est défendable dans le sens où, à la demande du client, les piles de plats sont la plupart du temps emballées dans un papier de protection avant d'être ligaturées comme l'illustre le cliché de la Figure 2.15. Des forces de frottement entre le dernier plat et les ligatures ne peuvent définitivement pas apparaître.

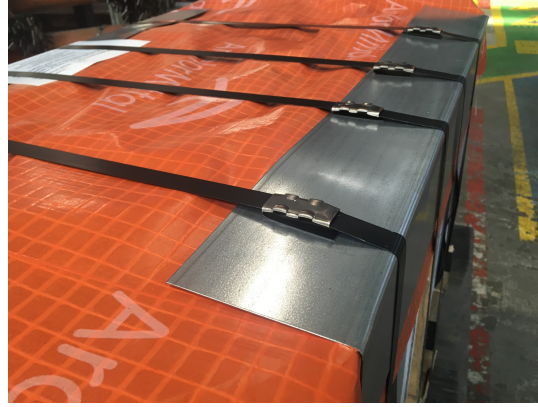


FIGURE 2.15 : Photographie - Papier d'emballage de protection des piles de plats

Force de rappel ressort Les ligatures ont un effet semblable à des ressorts en créant des forces de rappel lorsque les plats se déplacent. Par contre, ces forces de rappel n'existent que s'il y a contact entre les ligatures et les plats. Les ligatures de palette, englobant la pile de plats et la palette, sont constamment en contact avec le dernier flanc de la pile. Dès lors, si le dernier plat veut se déplacer, la ligature se déformera créant ainsi un effort à l'intérieur de la ligature. Cet effort étant incliné, une composante horizontale existe et correspond à l'effet de rappel de la ligature. Le schéma de la Figure 2.16 représentant un zoom sur la partie gauche de la pile de la Figure 2.12 illustre ce principe. Finalement, la ligature de palette peut être modélisée comme un ressort sur le dernier flanc avec une rigidité dépendant des caractéristiques mécaniques de la ligature projetée sur l'horizontale. En reprenant la notation utilisée à la Figure 2.16, la raideur équivalente de la ligature de palette est égale à :

$$k_{eq.lig.palette,1} = \frac{E_p A_p}{L_p} \sin(\theta) \sin(\theta) \quad (2.5)$$

Où

- L_p - Longueur initiale ligature de palette
- E_p - Module de Young ligature de palette
- A_p - Aire section droite ligature de palette

- θ - Angle entre la ligature de palette et le dernier plat à l'état initial

Les ligatures peuvent donc être modélisées à l'aide de ressorts dont la rigidité est donnée par l'équation 2.5. La ligature agissant autant à droite qu'à gauche de la pile il faut en fait deux ressorts en parallèle pour simuler l'effet d'une ligature. Les deux ressorts peuvent donc être rassemblés en un seul ressort avec une rigidité $k_{eq.Lig.palette,2}$ donnée par l'équation 2.6.

$$k_{eq.Lig.palette,2} = \frac{k_{eq.Lig.palette,1}}{2} \quad (2.6)$$

Si plusieurs ligatures sont utilisées dans un même sens, cela correspond à des ressorts en série. Dès lors, il suffit de multiplier la rigidité donnée par 2.6 par le nombre de ligatures utilisées pour obtenir la rigidité équivalente finale. En conclusion, les ligatures de palette vont avoir l'effet d'un ressort sur le dernier plat de la pile dont la rigidité dépend de ses caractéristiques mécaniques ($E_p A_p$), de l'angle formé entre la pile et la ligature (θ) ainsi que du nombre de ligatures utilisées.

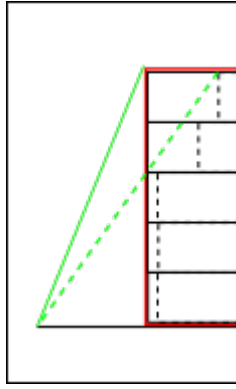


FIGURE 2.16 : Schéma Ligature de palette

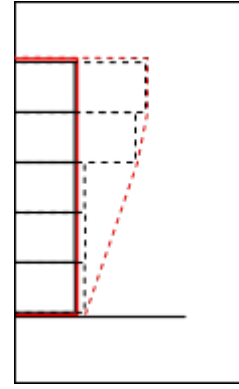


FIGURE 2.17 : Schéma Ligature de pile

La principale différence entre les ligatures de palette et les ligatures de pile réside dans le fait que l'existence d'un contact entre une ligature de pile et un plat donné n'est pas toujours assuré. Afin d'illustrer ce problème, la Figure 2.12 où les ligatures de pile sont représentées en rouge peut à nouveau être considéré. Dans cet exemple, la ligature de pile en état déformée est en contact avec 2 plats sur la droite. Au niveau de ces contacts, la ligature est (éventuellement) inclinée. Sachant que dans la ligature il existe, en plus de pré-tension déjà appliquée, un effort résultant de la déformation de la ligature imposée par le déplacement des plats, l'inclinaison de l'effort au niveau des contacts entraîne une composante horizontale de la force correspondant à un effet de rappel. Il apparaît ainsi que l'effet d'une ligature de pile peut être simulée par un ressort qui est un peu particulier. Effectivement, la loi reliant les déplacements des plats aux forces de rappel exercées par les ligatures n'est pas simplement linéaire comme c'est le cas pour un ressort classique.

Premièrement, la ligature de pile a un effet sur un plat donné que si celui-ci est en contact avec la ligature. Ensuite, s'il y a contact, l'intensité de la force de rappel dépend d'une part de la pré-tension appliquée et d'autre part de la longueur de la déformée de la ligature. En se référant au schéma de la Figure 2.17, la ligature est tendue mais surtout inclinée au niveau des contacts. Cette inclinaison entraîne l'existence d'une composante horizontale de l'effort résidant à l'intérieur de la ligature correspondant à un effet de rappel. L'effort dans la ligature est égal à la somme entre la pré-tension déjà appliquée et l'effort supplémentaire dû à la déformation de la ligature (effort axial pour passer d'une ligature d'une longueur initiale L_{0s} à une ligature avec une longueur déformée l_s). Cet effort est égal à :

$$F_{lig.pile} = \frac{E_s A_s}{L_{0s}} (l_s - L_{0s}) + T_s \quad (2.7)$$

Où (l'indice s pour *Stack* \equiv *Pile* est utilisé pour distinguer les caractéristiques des ligatures de pile des caractéristiques des ligatures de palette (indice p)) :

- L_{0s} - Longueur initiale ligature de pile
- l_s - Longueur déformée ligature de pile
- E_s - Module de Young ligature de pile
- A_s - Aire section droite ligature de pile
- T_s - Pré-tension ligature de pile

Ensuite, la composante horizontale de cet effort incliné correspond à la force de rappel exercée par la ligature. Afin d'obtenir cette composante, il suffit donc de multiplier l'équation 2.7 par le sinus de l'angle θ .

Il apparaît donc que la force de rappel ne dépend pas directement du déplacement de chacun des plats. Effectivement, la force de rappel dépend d'abord de la longueur de la déformée de la ligature qui dépend du déplacement de chacun des plats. Ensuite, la force de rappel dépend également de l'angle entre la ligature et le plat qui, lui dépend à nouveau du déplacement de chacun des plats. Cela signifie que les ressorts permettant de modéliser l'effet des ligatures de pile sont en fait non-linéaires. En outre, la présence d'un ressort sur un plat donné n'est assuré que s'il y a contact entre le plat et la ligature. Il est donc également nécessaire de savoir traiter le problème de contact pour pouvoir traiter l'effet des ligatures de pile.

Bilan des Forces Une fois toutes les forces listées et explicitées, il faut faire le bilan des forces afin d'établir l'équation gouvernant le phénomène étudié. En résumé, il faut prendre en considération les forces d'inertie, les forces de frottement et les forces de rappel. De manière générale, l'équation d'équilibre sous format matriciel s'écrit :

$$\underline{F}_{Inertie} + \underline{F}_{Ressort} + \Delta \underline{F}_{Frottement} = \underline{0} \quad (2.8)$$

Où :

- \underline{F}_I - Force d'inertie
- $\underline{F}_{Ressort}$ - Force de rappel des ligatures
- $\Delta \underline{F}_{Frottement}$ - Force de frottement global pour un plat

Il a été montré (équation 2.3) que les forces d'inertie pouvaient être séparées en deux parties, la première étant la force d'inertie du plat en lui-même et la seconde étant la sollicitation imposée au support. De plus, il a également été expliqué qu'il faut prendre en compte les forces de frottement s'appliquant sur les deux faces d'un flanc. C'est pourquoi les forces de frottement sont notées avec un Δ signifiant qu'il faut faire la différence entre la force de frottement du plat considéré avec la force de frottement du plat se situant juste au-dessus. L'équation 2.8 devient donc :

$$\underline{\underline{M}} \underline{\ddot{q}} + \underline{F}_R + \Delta \underline{F}_{Frottement} = -\underline{\underline{M}} \underline{\ddot{u}} \quad (2.9)$$

Cette dernière équation constitue l'équation d'équilibre qu'il faut résoudre numériquement.

2.2.3 Symboles

Cette partie résume la notation utilisée dans ce travail.

$x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$	Déplacement absolu [m], Vitesse absolue [m/s], Accélération absolue [m/s ²]
$q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)$	Déplacement relatif [m], Vitesse relative [m/s], Accélération relative [m/s ²]
$u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)$	Déplacement du support [m], Vitesse du support [m/s], Accélération du support [m/s ²]
F_I	Force d'inertie [N]
F_r	Force de rappel [N]
F_f	Force de frottement [N]
$E_s E_p$	Module de Young ligature de pile et ligature de palette [Pa]
$A_s A_p$	Aire section droite ligature de pile et ligature de palette [m ²]
$L_s L_p$	Longueur initiale ligature de pile et ligature de palette [m]
$l_s l_p$	Longueur déformée ligature de pile et ligature de palette [m]
$T_s T_p$	Pré-tension ligature de pile et ligature de palette [N]
m	Masse d'un plat [kg]
e	Épaisseur d'un plat [m]
μ	Coefficient de frottement [-]
g	Accélération de la pesanteur [m/s ²]

2.3 Solution Analytique

Afin de pouvoir valider ou invalider le modèle numérique à un degré de liberté, une solution analytique pour une sollicitation sinusoïdale va être développée dans ce chapitre.

Le système étudié dans cette partie est composé d'un objet de masse m posé sur un support en mouvement et relié à celui-ci avec un ressort linéaire de raideur k et où, en plus, des forces de frottement peuvent se développer entre l'objet et le support. La Figure 2.18 représente le système étudié.

Par exemple, ce système peut correspondre à un bloc de plusieurs flancs glissant ensemble sur le premier plat d'une pile. L'objet du système aurait donc la masse totale du bloc de plats et la raideur du ressort modéliserait l'effet de rappel apporté par les ligatures. La Figure 2.19 illustre ce cas concret. Cependant, modéliser les ligatures de cette manière ne permet pas de simuler l'effet des ligatures de pile. Effectivement, les forces de rappel exercées par les ligatures de pile dépendent du déplacement du plat de manière non-linéaire (cf. équation 2.7) alors que le ressort est linéaire. Le modèle étudié ici ne prend donc en compte que les ligatures de palette.

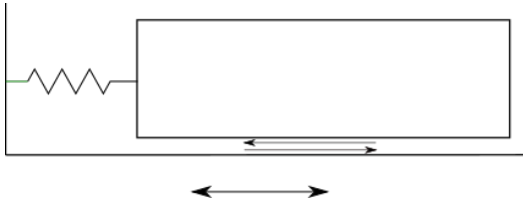


FIGURE 2.18 : Schéma - Système 1 degré de liberté

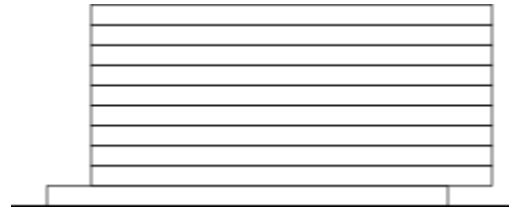


FIGURE 2.19 : Schéma - Système 1 degré de liberté - Exemple

L'équation à résoudre est l'équation 2.9 appliquée à un système à un degré de liberté. Il faut donc résoudre l'équation 2.10.

$$m \ddot{q}(t) + k q(t) + F_f(t) = -m \ddot{u}(t) \quad (2.10)$$

Le mouvement du support est imposé à une sinusoïde d'intensité A et de pulsation ω . De la sorte, les équations 2.11, 2.12 et 2.13 correspondent au déplacement du support, à la vitesse du support et à l'accélération du support respectivement.

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad (2.11)$$

$$\dot{u}(t) = A \omega \cos(\omega t) \quad (2.12)$$

$$\ddot{u}(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t) \quad (2.13)$$

Le choix d'un mouvement du support sinusoïdal n'est pas le plus représentatif de la réalité mais cela permet d'avoir des expressions analytiques raisonnablement simples.

En divisant l'équation 2.10 par la masse et en remplaçant $\ddot{u}(t)$ par son expression, l'équation à résoudre devient l'équation 2.14.

$$\ddot{q}(t) + \omega_1^2 q(t) + \frac{F_f(t)}{m} = A \omega^2 \sin(\omega t) \quad (2.14)$$

Où ω_1 est la pulsation propre du système et est défini par l'équation 2.15.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.15)$$

Dans un premier temps, l'équation 2.14 va être résolue pour des conditions initiales q_0 et \dot{q}_0 quelconques dans les deux régimes différents (i.e. *Stick* et *Slip*).

2.3.1 Solution générale

2.3.1.1 *Stick*

Dans un régime dit de "collement", l'objet collant sur le support par définition, le déplacement relatif $q(t)$ reste constant et est égal au déplacement relatif initial q_0 pendant toute la durée de la phase. Dès lors, la vitesse et l'accélération relatives sont nulles pendant ce même laps de temps. Le déplacement relatif, la vitesse relative et l'accélération relative sont donc égaux aux équations 2.16, 2.17 et 2.18.

$$q(t) = q_0 \quad (2.16)$$

$$\dot{q}(t) = 0 (= \dot{q}_0) \quad (2.17)$$

$$\ddot{q}(t) = 0 \quad (2.18)$$

Durant une phase de *stick*, la force de frottement évolue de façon à ce que l'équation d'équilibre 2.14 soit respectée. En d'autres termes, la force de frottement est donnée par l'équation 2.19.

$$F_f(t) = m A \omega^2 \sin(\omega t) - \omega_1^2 m q(t) - m \ddot{q}(t) \quad (2.19)$$

En introduisant les expressions du déplacement relatif et de l'accélération relative précédemment déterminées dans l'équation 2.20 et en notant que $\omega_1^2 m$ est en fait égal à la raideur k du ressort, l'expression de la force de frottement devient l'équation 2.20.

$$F_f(t) = m A \omega^2 \sin(\omega t) - k q_0 \quad (2.20)$$

En résumé, le déplacement relatif est constant et la vitesse relative est nulle pendant une phase de *stick*. En réalité, la vitesse relative est égale à la vitesse relative initiale \dot{q}_0 qui doit être nulle pour rentrer dans une phase de *stick*. La force de frottement, quant à elle, évolue selon l'équation 2.20 tant qu'il n'y a pas de changement de régime. Autrement dit, elle évolue jusqu'au moment où elle devient égale à \bar{F}_f .

2.3.1.2 Slip

Pendant une phase de glissement, la force de frottement est, par définition, constante (au signe près) pendant toute la durée de la phase. Dès lors, l'équation 2.14 devant être vérifiée, l'objet va décoller de son support de manière à conserver l'équilibre des forces à tous moments. Le mouvement relatif de l'objet par rapport à son support correspond donc à la solution de l'équation différentielle 2.14 où $F_f(t)$ est égale à (en valeur absolue) $\mu m g$. L'équation à résoudre dans une phase de *stick* est donc l'équation 2.21.

$$\ddot{q}(t) + \omega_1^2 q(t) = A \omega^2 \sin(\omega t) - \mu g \text{sign}(\dot{q}(t)) \quad (2.21)$$

En considérant le signe de $\dot{q}(t)$ constant pendant toute la phase, l'équation 2.21 est une équation différentielle ordinaire à coefficients constants avec des conditions initiales q_0 et \dot{q}_0 quelconques. Il est donc possible de déterminer une solution analytique.

D'après la théorie, la solution d'une équation différentielle ordinaire correspond à la somme de la solution homogène avec la solution particulière. La solution homogène est obtenue en résolvant l'équation avec un second membre nul alors que la solution particulière est obtenue en prenant en compte le second membre.

Solution homogène L'équation à résoudre est donc l'équation 2.22.

$$\ddot{q}(t) + \omega_1^2 q(t) = 0 \quad (2.22)$$

C'est une équation différentielle ordinaire homogène pour laquelle il faut d'abord résoudre sa forme caractéristique afin de trouver la solution. Effectivement, la solution homogène s'écrit comme l'équation 2.23 où z_i^* sont les N racines de l'équation caractéristique.

$$q_h(t) = \sum_{i=1}^N e^{z_i^* t} \quad (2.23)$$

La forme caractéristique de l'équation 2.22 et sa solution correspondent aux équations 2.24 et 2.25 respectivement où i est l'unité imaginaire.

$$z^2 + \omega_1^2 = 0 \quad (2.24)$$

$$z^* = \pm i \omega_1 \quad (2.25)$$

Il y a deux racines différentes. La solution homogène $q_h(t)$ peut donc s'écrire comme l'expression 2.26 (où C_1, C_2 sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales). Cette équation peut directement être transformée sous la forme d'une combinaison de cosinus et sinus (avec des constantes différentes A^*, B^*).

$$q_h(t) = C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t} \quad (2.26)$$

$$q_h(t) = A^* \cos(\omega_1 t) + B^* \sin(\omega_1 t) \quad (2.27)$$

L'expression 2.27 est donc la solution homogène recherchée.

Solution particulière Afin de pouvoir résoudre l'équation 2.21 en prenant en compte le second membre (en faisant l'hypothèse que le signe de $\dot{q}(t)$ est positif), il est supposé que la solution particulière est sous la forme de l'expression 2.28 où C et D sont des constantes à déterminer. A partir de cette hypothèse, il est possible de déterminer l'expression de la dérivée seconde correspondant ainsi à l'équation 2.29.

$$q_p^*(t) = C \sin(\omega t) - D \quad (2.28)$$

$$\ddot{q}_p^*(t) = -C \omega^2 \sin(\omega t) \quad (2.29)$$

Les deux constantes C et D sont déterminées en insérant les expressions de $q_p^*(t)$ et de $\ddot{q}_p^*(t)$ dans l'équation 2.21. De la sorte, les constantes sont déterminées à partir de l'équation 2.30 ou, après simplification, à partir de l'équation 2.31.

$$-\omega^2 C \sin(\omega t) + C \omega_1^2 \sin(\omega t) - \omega_1^2 D = A \omega^2 \sin(\omega t) - \mu g \quad (2.30)$$

$$C (\omega_1^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - \omega_1^2 D = A \omega^2 \sin(\omega t) - \mu g \quad (2.31)$$

Il est ainsi possible de déterminer par identification les deux constantes C et D . De cette manière, les deux constantes s'écrivent sous la forme des expressions 2.32 et 2.33.

$$C = \frac{A \omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2} \quad (2.32)$$

$$D = \frac{\mu g}{\omega_1^2} \quad (2.33)$$

En définissant δ comme le rapport entre la pulsation d'excitation ω et la pulsation propre du système ω_1 et α comme le rapport entre l'accélération maximum du support $A \omega^2$ et l'accélération de la pesanteur g (cf. équations 2.34 et 2.35 ci-contre), les deux constantes deviennent les expressions 2.36 et 2.37.

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_1} \quad (2.34)$$

$$\alpha = \frac{A \omega^2}{g} \quad (2.35)$$

$$C = \frac{A}{\frac{1}{\delta^2} - 1} \quad (2.36)$$

$$D = \frac{\mu}{\alpha} A \delta^2 \quad (2.37)$$

De cette manière, la solution particulière de l'équation 2.21 est donnée par l'expression 2.38.

$$q_p(t) = \frac{\mu}{\alpha} A \delta^2 + \frac{A}{\frac{1}{\delta^2} - 1} \sin(\omega t) \quad (2.38)$$

Solution finale La solution analytique finale est donc donnée par l'équation 2.39 correspondant à la somme entre $q_h(t)$ (équation 2.27) et $q_p(t)$ (équation 2.38).

$$q(t) = A^* \cos(\omega_1 t) + B^* \sin(\omega_1 t) + \frac{\mu}{\alpha} A \delta^2 + \frac{A}{\frac{1}{\delta^2} - 1} \sin(\omega t) \quad (2.39)$$

La vitesse relative (donnée par l'équation 2.40) et l'accélération relative (donnée par l'équation 2.41) sont données par les dérivées premières et seconde l'expression 2.39.

$$\dot{q}(t) = -A^* \omega_1 \sin(\omega_1 t) + B^* \omega_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{A \omega}{\frac{1}{\delta^2} - 1} \cos(\omega t) \quad (2.40)$$

$$\ddot{q}(t) = -A^* \omega_1^2 \cos(\omega_1 t) - B^* \omega_1^2 \sin(\omega_1 t) - \frac{A \omega^2}{\frac{1}{\delta^2} - 1} \sin(\omega t) \quad (2.41)$$

Afin de déterminer complètement la solution, il ne reste plus qu'à évaluer les constantes A^* et B^* à partir des conditions initiales q_0 et \dot{q}_0 . Il faut donc résoudre pour A^* et B^* le système d'équations composé des équations 2.42 et 2.43.

$$q(t_0) = A^* \cos(\omega_1 t_0) + B^* \sin(\omega_1 t_0) + \frac{\mu}{\alpha} A \delta^2 + \frac{A}{\frac{1}{\delta^2} - 1} \sin(\omega t_0) = q_0 \quad (2.42)$$

$$\dot{q}(t_0) = -A^* \omega_1 \sin(\omega_1 t_0) + B^* \omega_1 \cos(\omega_1 t_0) + \frac{A \omega}{\frac{1}{\delta^2} - 1} \cos(\omega t_0) = \dot{q}_0 \quad (2.43)$$

De cette manière, les expressions des deux constantes s'écrivent sous la forme des équations 2.44 et 2.45.

$$\begin{aligned} A^* = & q_0 \cos(\omega_1 t_0) - \frac{\dot{q}_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 t_0) + \frac{\mu}{\alpha} A \delta^2 \cos(\omega_1 t_0) \\ & + \frac{A}{\frac{1}{\delta^2} - 1} (\delta \sin(\omega_1 t_0) \cos(\omega t_0) - \sin(\omega t_0) \cos(\omega_1 t_0)) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} B^* = & q_0 \sin(\omega_1 t_0) + \frac{\dot{q}_0}{\omega_1} \cos(\omega_1 t_0) + \frac{\mu}{\alpha} A \delta^2 \sin(\omega_1 t_0) \\ & - \frac{A}{\frac{1}{\delta^2} - 1} (\delta \cos(\omega_1 t_0) \cos(\omega t_0) + \sin(\omega_1 t_0) \sin(\omega t_0)) \end{aligned} \quad (2.45)$$

2.3.1.3 Résumé

L'évolution des variables principales du système (i.e. $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$ et $F_f(t)$) est donc totalement différente en fonction du régime considéré. Si l'objet est dans une phase de *stick*, le déplacement relatif est constant, la vitesse (ainsi que l'accélération) relative est nulle et la force de frottement évolue selon l'expression 2.20. A l'opposé, dans une phase de *slip*, le déplacement, la vitesse et l'accélération relatifs ne sont plus constants dans le temps mais évoluent selon les expressions 2.39, 2.40 et 2.41 respectivement alors que la force de frottement est constante.

Il est maintenant nécessaire de déterminer les conditions de sortie de chacun de ces deux régimes.

2.3.2 Conditions de sortie de régime

2.3.2.1 *Stick*

Pour sortir d'un régime de *stick*, la force de frottement, en valeur absolue, doit devenir plus grande que $\tilde{F}_f = \mu m g$. Sachant que l'expression de la force de frottement est donnée par l'équation 2.20, la condition de sortie peut s'écrire comme l'expression 2.46. Après simplification et en ré-utilisant les deux paramètres adimensionnels α et δ précédemment définis (cf. équations 2.34 et 2.35), la condition devient l'expression 2.47.

$$A \omega^2 \sin(\omega t) - \omega_1^2 q_0 \geq \mu g \quad (2.46)$$

$$\sin(\omega t) \geq \frac{\mu}{\alpha} + \frac{q_0}{\delta^2 A} \quad (2.47)$$

Il apparaît une condition d'existence de sortie de phase. Effectivement, pour que le sinus soit plus grand que le second membre de l'équation 2.47, il est nécessaire que ce second membre soit inférieur à 1. En d'autres termes, pour qu'il puisse se produire un décollement lorsque le système est dans un régime de *stick* il est nécessaire que le rapport entre μ et α respecte l'expression 2.48.

$$\frac{\mu}{\alpha} \leq 1 - \frac{q_0}{\delta^2 A} \quad (2.48)$$

Ceci constitue donc une condition d'existence pour que le système puisse entrer dans un régime de glissement à partir d'un régime de "collement" quelconque. Si cette condition n'est plus remplie à un moment donné, la masse restera collée au support jusqu'à la fin.

Finalement, si la condition d'existence est remplie, le temps à la sortie d'un régime de *stick*, noté t^* , est donné par l'expression 2.49.

$$\omega t^* = \arcsin\left(\frac{\mu}{\alpha} + \frac{q_0}{\delta^2 A}\right) \quad (2.49)$$

2.3.2.2 *Slip*

Dans un régime de glissement, la condition de sortie porte cette fois-ci sur la vitesse relative de l'objet en mouvement. Effectivement, pour que la masse recolte sur son support il est nécessaire que la vitesse relative soit nulle. Cette condition peut s'écrire sous la forme de l'expression 2.50 où t^* représente l'instant de décollement.

$$\dot{q}(t^*) = 0 \quad (2.50)$$

Cette équation peut être ré-écrite sous la forme de l'équation 2.51 en utilisant l'expression de $\dot{q}(t)$ précédemment développé (équation 2.40).

$$\frac{A \omega}{\frac{1}{\delta^2} - 1} \cos(\omega t^*) = A^* \omega_1 \sin(\omega_1 t^*) - B^* \omega_1 \cos(\omega_1 t^*) \quad (2.51)$$

Évidemment, cette condition est remplie pour $t^* = t_0$ vu que la vitesse relative est nulle pendant une phase de *stick*.

L'instant de recollement t^* doit donc être solution de l'équation 2.51. Le fait d'avoir une combinaison de cosinus et sinus de pulsation différente (ω d'un côté et ω_1 de l'autre) empêche une

résolution analytique simple de cette équation. Il n'est donc pas possible de fournir une expression de t^* . Cependant, le temps de sortie peut tout de même être déterminé de manière semi-numérique. Effectivement, la solution de l'équation 2.51 correspond en fait à l'intersection entre deux courbes, la première étant l'expression du membre de droite et la seconde étant l'expression du membre de gauche. Dès lors, il est possible de trouver t^* en évaluant ces deux courbes numériquement et puis en cherchant leurs intersections.

Afin d'illustrer graphiquement cette démarche, la Figure 2.20 représente ces deux courbes dans un cas particulier. Les valeurs numériques utilisées dans cet exemple sont les suivantes :

$$\begin{array}{lll} f = 4\text{Hz} & A = 0,02\text{m} & t_0 = 0,05\text{s} \\ f_1 = 2,5\text{Hz} & \dot{q}_0 = 0\text{m/s} & t_{end} = 1\text{s} \\ \delta = 0,833 & q_0 = 0\text{m} & \mu = 0,5 \end{array}$$

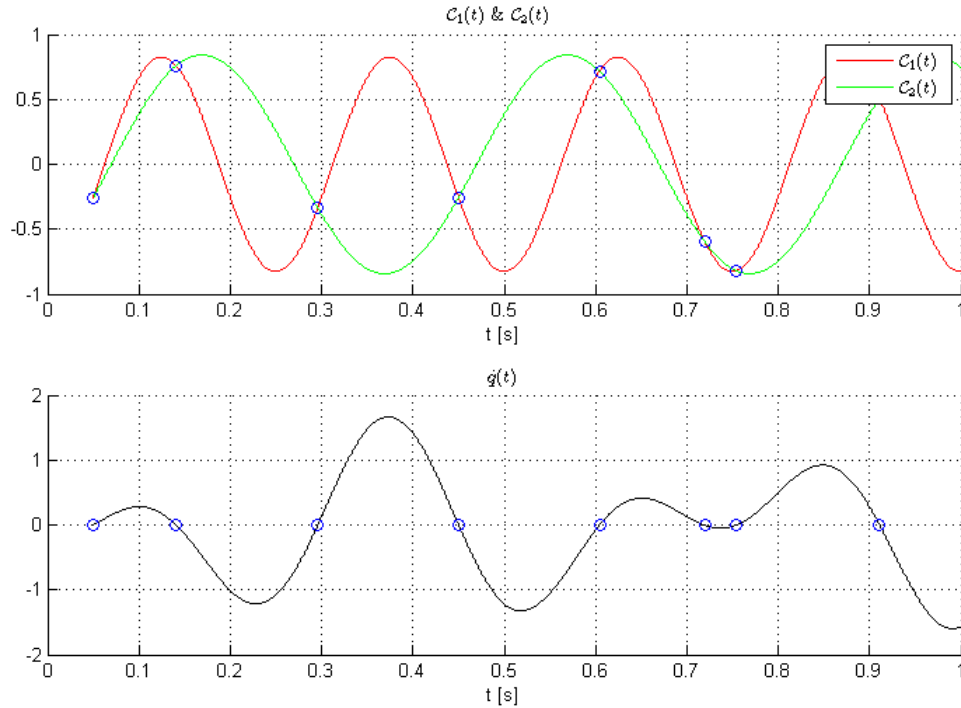


FIGURE 2.20 : Graphique - Illustration condition de sortie d'une phase de *slip* ; 1^{er} graphique : Rouge - courbe $C_1(t)$, Vert - courbe $C_2(t)$, Ronds bleus vides - intersections entre les courbes $C_1(t)$ et $C_2(t)$; 2^e graphique : Noir - $\dot{q}(t)$, Ronds bleus vides - $\dot{q} = 0$

La courbe en rouge représentée au premier graphique de la Figure 2.20 correspond au membre de droite de l'équation de l'équation 2.51 et est notée $C_1(t)$ et la courbe en vert correspond au membre de gauche et est notée $C_2(t)$. Les abscisses des intersections entre ces deux courbes, localisées par des ronds bleus à la Figure 2.20, correspondent donc aux instants pour lesquels la vitesse relative est nulle. Afin de s'en assurer, il est possible, à partir de l'expression 2.40 précédemment développée, de représenter l'évolution au cours du temps de la vitesse relative. La courbe en noir présentée au deuxième graphique de la Figure 2.20 correspond à $\dot{q}(t)$ et les ronds bleus localisent les valeurs de

$\dot{q}(t)$ aux mêmes instants que les intersections entre les courbes $\mathcal{C}_1(t)$ et $\mathcal{C}_2(t)$. Il apparaît directement que la vitesse relative est effectivement nulle lorsque les courbes $\mathcal{C}_1(t)$ et $\mathcal{C}_2(t)$ s'intersectent.

Dans cet exemple, le moment de recollement correspondrait donc au premier rond bleu se trouvant après t_0 , C'est-à-dire approximativement à 0,15s.

Il a donc été montré que l'instant de recollement doit satisfaire l'équation 2.51 pour assurer une vitesse relative nulle. Cependant, ceci ne constitue pas une condition suffisante pour entrer dans une phase de *stick*. Effectivement, si la masse recolle sur le support, la force de frottement devant contrebalancer les autres forces entrant en jeu, elle ne peut toujours pas être plus grande (en valeur absolue) que la limite de glissement. En d'autres termes, il faut vérifier que l'instant de recollement t^* soit tel que la force de frottement calculée comme si la masse collait au support (cf. équation 2.20) soit inférieure à la limite de glissement \tilde{F}_f (en valeur absolue).

Il faut donc que l'équation 2.52 soit également vérifiée pour que t^* soit véritablement un instant de recollement.

$$|A\omega^2 \sin(\omega t^*) - \omega_1^2 q(t^*)| \leq \mu g \quad (2.52)$$

Où $q(t^*)$ est évidemment évalué à partir de l'équation 2.39 (i.e. en considérant donc l'expression de $q(t)$ en phase de *slip*). Il est de nouveau trop laborieux de déterminer analytiquement une solution à cette équation pour t^* mais il est toujours possible de s'en sortir de manière semi-numérique. Effectivement, il suffit de calculer numériquement le membre de gauche de l'équation 2.52 et de trouver les intervalles de temps à l'intérieur desquels le membre de gauche est inférieur à \tilde{F}_f et supérieur à $-\tilde{F}_f$.

Afin d'illustrer cette procédure, l'exemple numérique utilisé pour la Figure 2.20 est considéré et les courbes $\mathcal{C}_1(t)$ et $\mathcal{C}_2(t)$ sont à nouveau illustrées à la Figure 2.21. Par contre, le deuxième graphique représenté à la Figure 2.21 correspond cette fois-ci à l'expression du membre de gauche de l'équation 2.52 dénommé $\mathcal{C}_3(t)$.

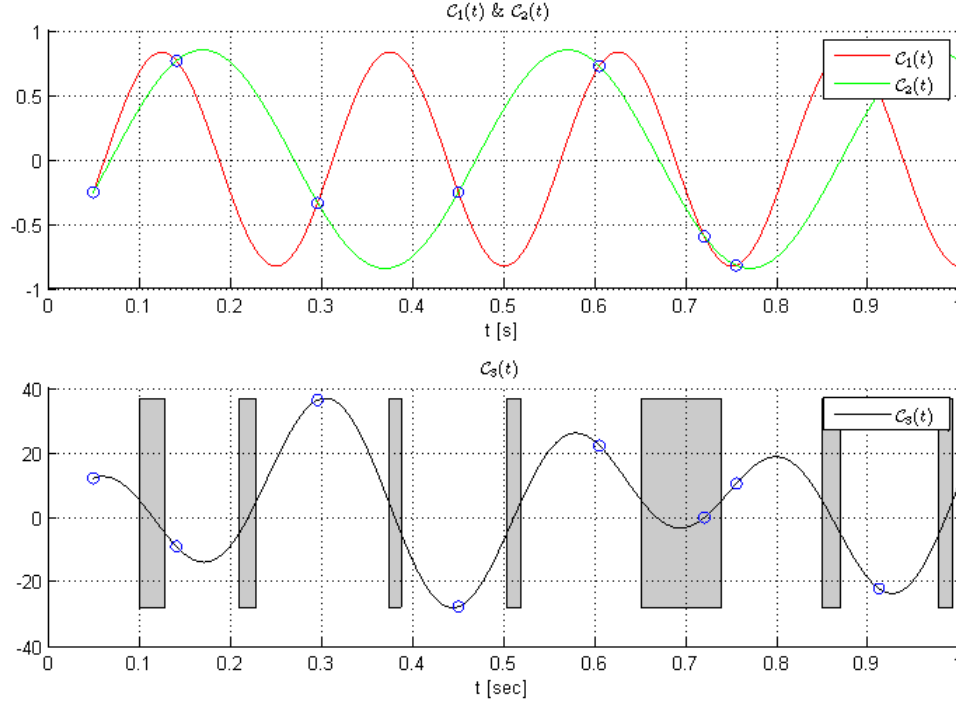


FIGURE 2.21 : Graphique - Illustration deuxième condition de sortie d'une phase de *slip*; 1^{er} graphique : Rouge - courbe $C_1(t)$, Vert - courbe $C_2(t)$, Ronds bleus vides - intersections entre les courbes $C_1(t)$ et $C_2(t)$; 2^e graphique : Noir - courbe $C_3(t)$, Ronds bleus vides - intersections entre les courbes $C_1(t)$ et $C_2(t)$, Zones grisées - intervalles de temps pour lesquels l'expression 2.52 est vérifiée

Les zones grisées représentées à la Figure 2.21 correspondent aux intervalles de temps pour lesquels la courbe $C_3(t)$ est inférieure en valeur absolue à μg . Ensuite, les ronds bleus représentant une intersection entre la courbe $C_1(t)$ et la courbe $C_2(t)$ sont également représentés sur ce graphique. Afin d'avoir un recollement effectif entre l'objet et le support, les deux conditions de sortie (i.e. : expressions 2.51 et 2.52) doivent être remplies. Graphiquement, cela signifie que le véritable instant de recollement correspond au premier rond bleu se trouvant dans une zone grisée dans le deuxième graphique de la Figure 2.21.

Dans l'exemple considéré ici, la Figure 2.21 montre que l'instant de recollement effectif n'est en réalité pas le premier instant de recollement potentiel (i.e. le premier rond bleu après t_0). Effectivement, le premier rond bleu se trouvant dans une zone grisée se trouve au temps $t = 0,7s$.

Il apparaît donc qu'il n'existe pas une mais deux conditions à satisfaire pour sortir d'une phase de *slip*.

2.3.3 Construction solution

Il est maintenant facile de construire une solution analytique complète en se basant sur les solutions de l'équation de base dans les deux régimes différents et en automatisant les conditions de sortie de phase précédemment développées. Une routine MATLAB permettant d'établir la solution analytique a ainsi été créée.

Le principe utilisé dans cette routine est simple. Brièvement, lorsque l'objet entre dans une phase ou une autre en un temps t_0 , le code évalue dans un sous-intervalle de temps allant de t_0 à un temps suffisamment long¹ les quatre variables principales ($q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$ et $F_f(t)$) à partir des expressions analytiques déterminées dans la section 2.3.1. A partir de ces évaluations des variables principales et des procédures développées dans la section 2.3.2, la routine détermine ensuite l'instant de sortie de phase t_{end} . Finalement, le code sauvegarde les variables principales sur l'intervalle de temps allant de t_0 à t_{end} , met à jour les conditions initiales t_0 , q_0 et \dot{q}_0 et recommence cette même démarche pour la phase suivante.

De cette manière, il est possible de construire la solution présentée à la Figure 2.22 pour laquelle les valeurs numériques suivantes ont été utilisées :

$f = 1\text{Hz}$	$A = 0,2\text{m}$	$m = 10\text{kg}$
$f_1 = 0,667\text{Hz}$	$\dot{q}_0 = 0\text{m/s}$	$\mu = 0,5$
$\delta = 1,5$	$q_0 = 0\text{m}$	

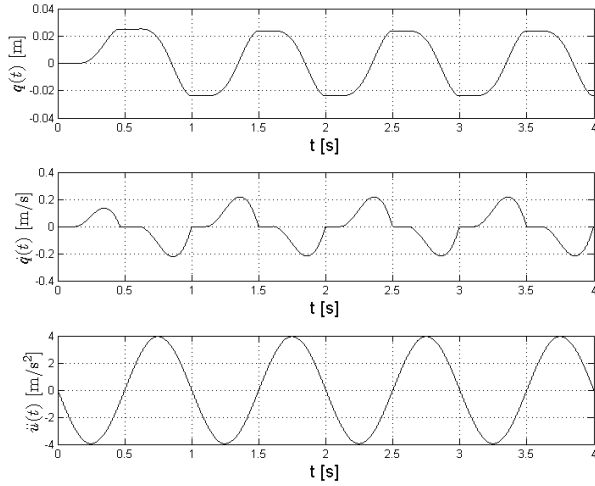


FIGURE 2.22 : Graphique - Solution obtenue pour l'exemple traité dans la section 2.3.3; 1^{er} graphique : déplacement relatif $q(t)$; 2^e graphique : vitesse relative $\dot{q}(t)$; 3^e graphique : accélération du support $\ddot{u}(t)$

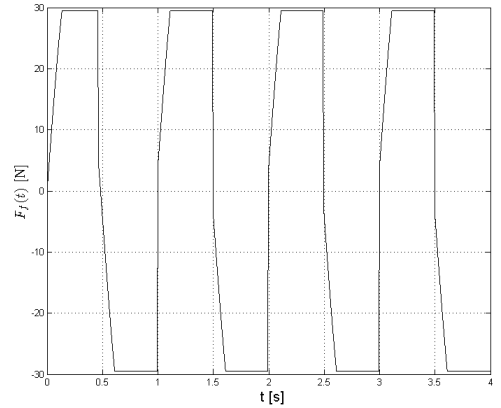


FIGURE 2.23 : Graphique - Force de frottement obtenue pour l'exemple traité dans la section 2.3.3

La Figure 2.22 montre que le déplacement relatif de la masse reste nul pendant un temps avant de décoller de son support. L'objet est donc dans une phase de *stick* et la Figure 2.23 montre que la force de frottement évolue jusqu'à ce qu'elle atteigne la valeur de \tilde{F}_f ($\approx 29,4\text{N}$). Ensuite, la force de frottement ne pouvant plus augmenter, la masse entre dans une phase de *slip*. Durant ce régime, l'objet se déplace par rapport à son support comme le montre la Figure 2.22. A la fin

¹La fin du sous-intervalle doit être suffisamment long de façon à ce que la condition de sortie de phase puisse se réaliser.

de la phase, la vitesse relative est nulle² et l'objet recolte sur son support. Dès lors, le système est à nouveau dans un régime de *stick* et le déplacement relatif reste constant pendant un temps. L'objet redécolle ensuite de son support lorsque la force de frottement, en valeur absolue, atteint la valeur de \tilde{F}_f . Ainsi de suite, la masse oscille au cours du temps entre une phase de *stick* et une phase de *slip*.

Il en résulte que le déplacement de la masse a un comportement global qui est périodique. A partir de la Figure 2.22, il est possible de déterminer la fréquence de la réponse qui est approximativement de 1Hz. Elle donc égale à la fréquence d'excitation. Cela signifie que le système ainsi constitué s'aligne sur la période de la sollicitation. Au niveau de l'amplitude du déplacement relatif, la Figure 2.22 montre que la masse va osciller entre un déplacement positif de 0,025m et un déplacement négatif de -0,024m.

Une autre manière de mettre en évidence ce comportement oscillatoire est de présenter la solution dans un plan de phase défini par le déplacement relatif et la vitesse relative. Autrement dit, la solution est représentée sur un graphique dont l'abscisse correspond au déplacement relatif et l'ordonnée à la vitesse relative. La Figure 2.24 est le plan de phase pour l'exemple considéré ici. Sur ce graphique, le point rouge correspond au temps initial et le point noir au temps final. Il apparaît directement que le déplacement relatif possède un comportement oscillatoire. Effectivement, la Figure 2.24 montre que le déplacement relatif finit par osciller entre une valeur positive (0,025m) et négative (-0,024m) lorsque la vitesse relative est nulle. Il apparaît également qu'il faut un certain temps avant que le système entre dans ce comportement périodique. Effectivement, le déplacement relatif après le premier régime de *slip* est différent du déplacement maximum qui se produit pendant le comportement oscillatoire. Il y a donc une phase globale transitoire avant que le système n'adopte un comportement périodique.

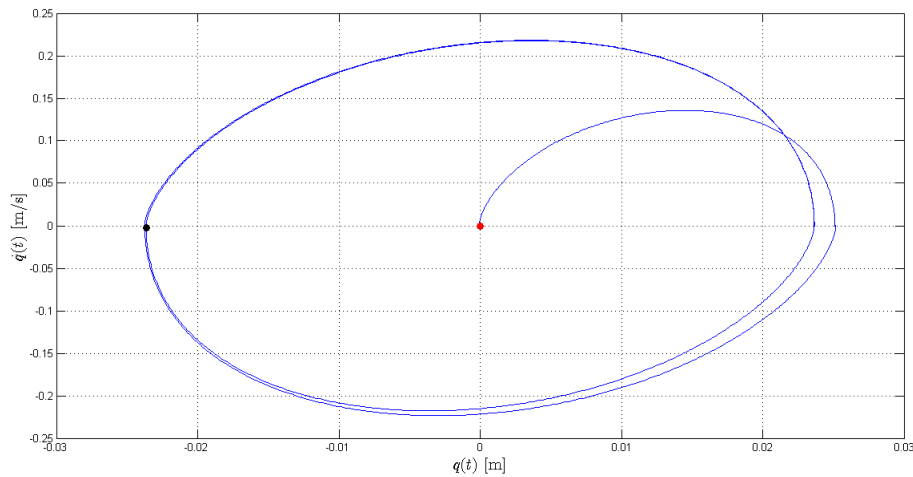


FIGURE 2.24 : Graphique - Plan de phase pour l'exemple traité dans la section 2.3.3; Bleu - plan de phase; Point rouge - temps initial; Point noir - temps final

2.3.4 Conclusion

Les limites de la solution analytique développée dans ce chapitre portent d'une part sur le type de ligature pris en compte et d'autre part sur le mouvement imposé au support.

²Et la deuxième condition de sortie de phase de *slip* est également remplie

Premièrement, la loi du ressort utilisé dans cette partie étant linéaire, la solution analytique ne prend pas en compte les ligatures de pile. Autrement dit, seuls les ligatures de palettes sont modélisées dans cette solution. Cela reste dans des limites raisonnables tant qu'un seul degré de liberté est considéré.

Ensuite, la solution a été développée seulement pour une sollicitation sinusoïdale et pour aucune autre. Cela a notamment permis d'établir des solutions analytiques relativement simples. Malgré tout, ce type de sollicitation n'est pas représentatif de la réalité et un modèle numérique est donc nécessaire pour analyser d'autres types de sollicitation. Il faudra néanmoins valider ce modèle numérique grâce à la solution analytique élaborée dans cette partie que cela sera possible.

Chapitre 3

Approche numérique

3.1 Système à un degré de liberté

3.1.1 Introduction

Même si développer un modèle pour un système à un degré de liberté peut paraître académique, cela permet néanmoins de comprendre convenablement le principe de résolution utilisé dans l'algorithme de calcul et d'introduire certaines particularités à prendre en considération pour pouvoir résoudre numériquement le problème étudié dans ce travail.

Le problème étudié dans cette section est donc le schéma déjà présenté à la Figure 2.18 qui est à nouveau illustré ici à la Figure 3.1.

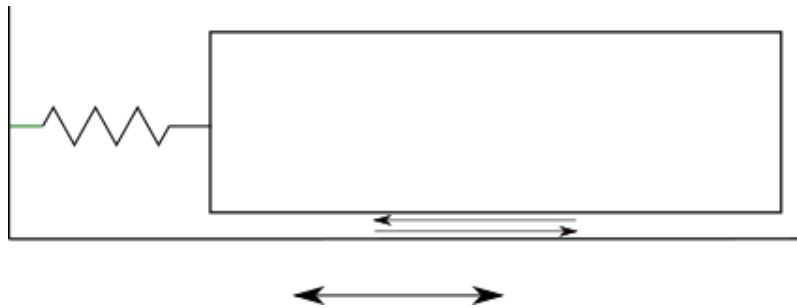


FIGURE 3.1 : Schéma - Système à un degré de liberté

Pour rappel, le système est composé d'un objet de masse m posé sur un support et relié à celui-ci par un ressort linéaire de raideur k . L'interface entre la masse et le support étant caractérisée par une certaine rugosité ¹, des forces de frottement peuvent se développer sous l'objet lorsque le support est mis en mouvement.

Finalement, le but est de pouvoir déterminer numériquement quelle sera l'évolution dans le temps de la position de l'objet par rapport au support afin de pouvoir analyser les efforts dans les ligatures modélisées par le ressort. Pour ce faire, le modèle numérique devra donc résoudre l'équation d'équilibre 3.1 développée au chapitre 2.

$$m \ddot{q}(t) + k q(t) + F_f(t) = -m \ddot{u}(t) \quad (3.1)$$

¹i.e. : un coefficient de frottement μ

Où $F_f(t)$ est donnée par l'expression 3.2 et est représentée à la Figure 2.14 de la section 2.2.

$$\begin{cases} F_f = \tilde{F}_f \text{ signe}(\dot{q}(t)) & \text{Si } \dot{q}(t) \neq 0 \\ |F_f| \leq \tilde{F}_f & \text{Si } \dot{q}(t) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Où

$\tilde{F}_f = \mu N g$ - Force de frottement limite [N]

N - Poids vertical appliqué sur le plat [kg]

μ - Coefficient de frottement [-]

g - Accélération de la pesanteur [m/s²]

Le modèle qui va être présenté est basé sur une résolution numérique de l'équation d'équilibre avec détection d'événements.

La détection d'événements, autrement dit la détection de changements de phase, est nécessaire pour modéliser le problème car l'algorithme va résoudre numériquement l'équation 3.1 de manière différente en fonction du régime dans lequel se trouve l'objet (i.e. en phase de *stick* ou de *slip*). Il faut donc pouvoir déterminer quand se produisent les changements de phase et c'est grâce à la détection d'événements que cela est possible.

Une méthode d'intégration temporelle doit également être fixée. Il a été choisi de se baser sur la méthode de Newmark dans un premier temps mais le choix d'une autre méthode sera également discuté.

3.1.2 Algorithme

Globalement, à partir des conditions initiales q_0 et \dot{q}_0 , des caractéristiques du système m, k et μ et du mouvement du support $\ddot{u}(t)$, le modèle numérique permet de déterminer le déplacement relatif $q(t)$, la vitesse relative $\dot{q}(t)$, l'accélération relative $\ddot{q}(t)$ de l'objet ainsi que les forces de frottement $F_f(t)$ se développant à l'interface. Ces différents paramètres correspondent en réalité aux entrées et sorties du code de calculs édité dans MATLAB.

La Figure 3.2 présente sous la forme d'un pseudo-code le principe général de l'algorithme développé dans cette partie.

Algorithme 1 :	Modèle numérique à un degré de liberté
<i>Entrées :</i>	Conditions initiales, Caractéristiques du système, Mouvement du support
<i>Sorties :</i>	Déplacement relatif, Vitesse relative, Accélération relative, Force de frottement

```

while  $t \leq t_{end}$ 
(1)      Initialisation temps  $t_{i+1}$ 
(2)      Calcul sollicitation et force de frottement au temps  $t_{i+1}$ 
(3)      Intégration temporelle - Calcul  $q(t_{i+1})$ ,  $\dot{q}(t_{i+1})$  et  $\ddot{q}(t_{i+1})$ 
(4)      Calcul variables de contrôle
(5)      Détection d'événements : Si changement de phase  $\rightarrow$  Flag = 1
(6)      if Flag == 1
(7)          Localisation événement  $\rightarrow t_{i+1}^*$ 
(8)          Mise à jour variables en  $t_{i+1}^*$ 
(9)          Changement de phase
(10)     end %if
end %while

```

FIGURE 3.2 : Pseudo-code - Algorithme à un degré de liberté

L'algorithme est construit autour d'une boucle qui tourne tant que le temps de calcul courant est inférieur au temps final t_{end} . A l'intérieur de cette boucle principale, plusieurs étapes vont être effectuées afin d'intégrer l'équation d'équilibre sur le pas de temps courant. En outre, une variable de phase est créée afin de stocker le régime dans lequel se trouve la masse au temps de calcul courant. Cette variable vaut 1 si l'objet est dans une phase de *stick* et vaut -1 si l'objet est dans une phase de *slip*. Dans le but de modéliser les deux comportements distincts en fonction de la phase au temps courant, les étapes principales à l'intérieur de la boucle sont effectuées différemment en fonction de la valeur de la variable de phase.

A l'intérieur d'un pas de temps, il faut d'abord calculer la sollicitation et la force de frottement pour le temps de calcul courant t_{i+1} (lignes 1 et 2 dans la Figure 3.2) afin de pouvoir déterminer les variables d'état en t_{i+1} à l'aide d'une méthode d'intégration temporelle adaptée en fonction de la phase considérée (ligne 3 dans la Figure 3.2). Jusqu'ici, il est considéré qu'aucun changement de phase ne peut se produire entre l'instant t_i et t_{i+1} .

Après la détermination des quatre variables d'état ($q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$ et $F_f(t)$), il faut vérifier si l'hypothèse qu'aucun changement de phase ne peut se produire à l'intérieur d'un pas de temps est toujours valide ou pas. En d'autres termes, il détermine s'il y a un changement de phase. Pour ce faire, des variables dites de contrôle sont calculées (différemment en fonction de la phase) afin de pouvoir détecter si un événement² s'est produit à l'intérieur de l'intervalle $[t_i ; t_{i+1}]$ (lignes 4 et 5 dans la Figure 3.2). Si un changement de phase se produit, la sous-routine de détection d'événements renvoie à la variable dénommée **Flag** dans la Figure 3.2 une valeur unitaire afin de prévenir qu'il faut changer la variable de phase avant de passer à l'itération suivante. Dès lors, l'algorithme entre dans les lignes 7 à 9 du pseudo-code présenté à la Figure 3.2 où l'événement est d'abord localisé dans le temps (détermination de t_{i+1}^*) avant de mettre à jour les variables d'état

²i.e. un changement de phase

en cet instant. Finalement, la variable de phase est modifiée et les conditions initiales sont mises à jour avant que la boucle ne reprenne depuis le début pour le temps de calcul suivant.

Si à la ligne 5 du pseudo-code aucun changement de phase n'est détecté, la variable **Flag** reste nulle et la boucle reprend depuis le début pour le temps de calcul suivant en restant dans le même régime qu'au temps de calcul précédent.

Le principe général peut être résumé en trois étapes principales. En premier lieu, il faut déterminer les sollicitations et les forces de frottement au temps de calcul courant t_{i+1} afin de pouvoir calculer, avec un intégrateur numérique adapté, les trois inconnues $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$ en t_{i+1} . Ensuite, il faut vérifier si un changement de régime se produit à l'intérieur du pas de temps courant. Si ce n'est pas le cas, la boucle retourne à la première étape pour le temps de calcul suivant. A l'opposé, si un changement de phase apparaît, une dernière étape est nécessaire afin de localiser l'instant du changement de phase, de mettre à jour les variables d'état à cet instant et de changer la variable de phase.

Maintenant que le fil conducteur de l'algorithme a été présenté, chacune des étapes importantes va être détaillée dans les sous-sections suivantes.

3.1.2.1 Intégration temporelle

Cette sous-section détaillent d'abord comment les sollicitations et les forces de frottement sont calculées en fonction de la phase considérée et puis présente la méthode d'intégration temporelle utilisée.

La sollicitation du support³ étant fixée comme entrée du modèle, il est simple à partir de l'expression donnée à $\ddot{u}(t)$ de la déterminer. Cette sollicitation est évidemment calculée indépendamment de la phase considérée. Ce n'est cependant plus le cas pour le calcul de la force de frottement. Effectivement, il a été montré que l'expression de la force de frottement est différente en fonction du régime dans lequel se trouve la masse.

Si la masse colle sur son support, la force de frottement contrebalance toutes les autres forces entrant encore en jeu pendant une phase de *stick* et est donc donnée par l'expression 3.3. A l'opposé, si la masse glisse sur son support la force de frottement est constante et est donnée par l'expression 3.4.

$$F_f(t_{i+1}) = -m \ddot{u}(t_{i+1}) - k q_0 \quad \text{Si } \textit{stick} \quad (3.3)$$

$$F_f(t_{i+1}) = \mu m g \text{signe}(\dot{q}(t_i)) \quad \text{Si } \textit{slip} \quad (3.4)$$

Il est supposé que pendant une phase de *slip* le signe de $\dot{q}(t)$ ne change pas entre l'instant t_i et t_{i+1} . Effectivement, le signe adopté pour calculer la force de frottement est celui de $\dot{q}(t_i)$ et pas celui de $\dot{q}(t_{i+1})$. Cette hypothèse est faite car au début d'une itération le signe de $\dot{q}(t_{i+1})$ est à priori inconnu. Néanmoins, il est tout de même raisonnable de supposer que le signe ne changera pas en t_i et t_{i+1} .

³i.e. $-m \ddot{u}(t)$

L'intégration temporelle utilisée est basée sur la méthode de Newmark. Pour rappel, cette méthode permet de résoudre l'équation différentielle de la dynamique (expression 3.5) en se basant sur des estimations d'intégrales. En fonction des paramètres d'intégration utilisés, le type d'estimation d'intégrale utilisé est différent. C'est une méthode très répandue, notamment dans les problèmes de dynamique des structures.

$$m \ddot{q}(t) + c \dot{q}(t) + k q(t) = p(t) \quad (3.5)$$

Où

m est une masse

c est un coefficient d'amortissement

k est une raideur

$p(t)$ est une sollicitation

Le formalisme général de la méthode de Newmark s'écrit sous la forme des expressions 3.6 à 3.8.

$$\dot{q}_{t+\Delta t} = \dot{q}_t + [(1 - \delta) \ddot{q}_t + \delta \ddot{q}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (3.6)$$

$$q_{t+\Delta t} = q_t + \dot{q}_t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \ddot{q}_t + \alpha \ddot{q}_{t+\Delta t}\right] \Delta t^2 \quad (3.7)$$

$$m \ddot{q}_{t+\Delta t} + c \dot{q}_{t+\Delta t} + k q_{t+\Delta t} = p_{t+\Delta t} \quad (3.8)$$

Où :

δ et α sont les paramètres d'intégration numérique

Δt est le pas de temps utilisé dans le modèle

\ddot{q}_t , \dot{q}_t et q_t sont connus

Ce système est composé de trois équations avec trois inconnues ($\ddot{q}_{t+\Delta t}$, $\dot{q}_{t+\Delta t}$ et $q_{t+\Delta t}$). Il est dès lors possible de déterminer ces inconnues en résolvant ce système d'équations.

L'équation qui doit être résolue dans cette partie du travail (i.e. équation 3.1) n'est pas si différente que celle traitée par la méthode de Newmark. Effectivement, le problème étudié dans ce travail fait intervenir des forces de frottement que le modèle de Newmark ne prend pas en compte. Cependant, en intégrant les forces de frottement avec la sollicitation du support dans l'expression de $p(t)$, les deux équations deviennent identiques⁴. Il est ainsi possible d'intégrer numériquement l'équation 3.1 à l'aide de la méthode de Newmark.

En pratique, α est fixé à 1/6 et δ est fixé à 1/2. Cela correspond donc en réalité à la méthode de l'accélération linéaire.

⁴En supposant que l'amortissement apporté par les ligatures est nul

Finalement, l'intégration numérique doit également pouvoir modéliser les deux comportements différents en fonction de la phase considérée. C'est-à-dire que le déplacement relatif doit rester constant pendant une phase de *stick* et doit satisfaire l'équation 3.1 pendant une phase de *slip*.

En réalité, pour une phase de *slip* il suffit simplement d'utiliser la méthode de Newmark afin de résoudre numériquement l'équation 3.1. Par contre, dans une phase de *stick*, ce n'est plus possible de procéder de la même façon afin de modéliser convenablement le comportement attendu dans cette phase. Effectivement, si la méthode de Newmark était utilisée sans aucune adaptation, l'algorithme calculerait un déplacement relatif variable pendant les phases de *stick* alors qu'il est censé être constant.

Afin de palier ce problème, une astuce numérique est mise en place afin d'imposer un déplacement relatif constant pendant les phases de *stick*. C'est-à-dire que l'algorithme continue d'utiliser la méthode de Newmark lorsque l'objet est dans un régime de *stick* mais la rigidité est modifiée de façon à obtenir ce qui est souhaité, à savoir un déplacement relatif constant. En d'autres termes, une phase de *stick* est traitée de la même manière qu'une phase de *slip* à l'exception que la rigidité du ressort est augmentée considérablement de façon à ce que la force de rappel résultante empêche l'objet de se déplacer par rapport à son support. D'un point de vue pratique, le modèle numérique multiplie la rigidité du ressort par 10^4 lorsqu'une phase de *stick* est considérée. Il est ainsi possible de simuler convenablement un déplacement relatif constant pendant les phases de *stick*. Il faut finalement s'assurer que le déplacement relatif calculé comme constant correspond au déplacement relatif initial de début de phase. Pour ce faire, il faut modifier la sollicitation du modèle de Newmark $p(t)$ en y intégrant un effort correspondant au produit du déplacement relatif initial de début de phase q_0 avec la rigidité numérique $k \times 10^4$.

3.1.2.2 Détection d'événements

La détection d'événements est basée sur des variables de contrôle évaluées différemment en fonction de la phase considérée. Autrement dit, les variables de contrôle doivent permettre de déterminer si un changement de phase s'est produit à l'intérieur du pas de temps courant. Ces variables de contrôle sont donc déterminées à partir des conditions de sortie de phase présentées au chapitre 2.

La condition de sortie d'une phase de *stick* porte sur la force de frottement. Effectivement, il faut que la force de frottement, en valeur absolue, atteigne la limite de glissement \tilde{F}_f pour que l'objet décolle de son support. Dès lors, durant un régime de *stick* la variable de contrôle dénommée var_c est donnée par l'expression 3.9. Pour une phase de *slip*, la condition de sortie porte sur la vitesse relative entre l'objet et son support direct. La variable de contrôle durant ce régime sera donc simplement égale à $\dot{q}(t)$ comme le montre l'expression 3.10.

$$var_c(t) = |F_f(t)| - \tilde{F}_f \quad \text{Si } stick \quad (3.9)$$

$$var_c(t) = \dot{q}(t) \quad \text{Si } slip \quad (3.10)$$

La sous-routine de détection d'événements détermine ensuite si la variable de contrôle passe par zéro entre l'instant t_i et t_{i+1} . Pour ce faire, la routine regarde simplement si la variable de contrôle a changé de signe entre t_i et t_{i+1} . Pour une phase de *stick* cela revient donc regarder si la force de frottement n'a pas dépassé la limite de glissement. Pour une phase de *slip* cela revient donc à regarder si la vitesse relative est passée par zéro ou pas.

Si, peu importe la phase au temps de calcul courant, la sous-routine a détecté un événement, la variable drapeau **Flag** est égale à l'unité.

3.1.2.3 Localisation événement

Si la variable drapeau **Flag** est égale à l'unité, un changement de phase s'est produit lors de l'intégration numérique. Par conséquent, il faut déterminer à quel instant t_{i+1}^* ce changement de phase est arrivé. Pour ce faire une routine de localisation est utilisée. Une fois t_{i+1}^* déterminé, les variables d'état sont mises à jour à cet instant, les conditions initiales de début de phase sont réinitialisées et la variable de phase est modifiée.

La localisation d'un événement est basé sur les valeurs des variables de contrôle en t_i et t_{i+1} . Afin d'illustrer le principe utilisé dans cette sous-routine, la Figure 3.3 représente l'évolution d'une variable de contrôle quelconque au cours du temps lorsque le système arrive à un changement de phase⁵.

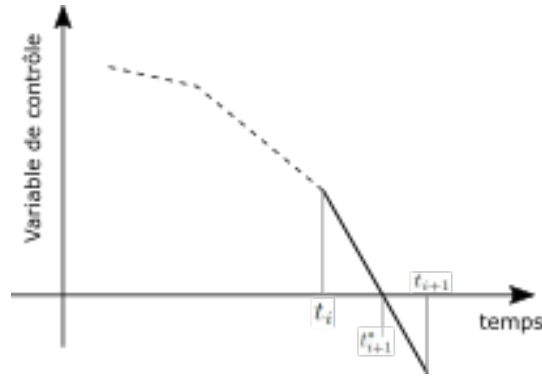


FIGURE 3.3 : Schéma - Illustration localisation événement

Le but est donc de déterminer le temps t_{i+1}^* pour lequel la variable de contrôle est nulle. Pour ce faire, la valeur des temps t_i et t_{i+1} ainsi que la valeur de la variable de contrôle en ces instants sont disponibles. Dès lors, il est simple d'interpoler linéairement la variable de contrôle entre t_i et t_{i+1} . Par conséquent, déterminer t_{i+1}^* revient à trouver l'intersection entre la droite d'interpolation (représentée en trait continu à la Figure 3.3) et l'axe des abscisses. C'est donc ce qui est fait dans la sous-routine de localisation d'événement.

Une fois l'instant t_{i+1}^* déterminé, il faut remettre à jour les variables d'état. L'intégration temporelle numérique étant la méthode de l'accélération linéaire, l'accélération relative en t_{i+1}^* est recalculée en se basant sur une interpolation linéaire de $\ddot{q}(t)$ entre les instants t_i et t_{i+1} .

Finalement, le déplacement relatif et la vitesse relative sont réévalués en se basant sur la valeur de $\ddot{q}(t_{i+1}^*)$ précédemment déterminée ainsi que sur les équations du système de Newmark (expressions 3.6 et 3.7).

⁵Autrement dit, lorsque la variable de contrôle passe par 0.

3.1.3 Validation

Il est nécessaire de valider le modèle ainsi construit avant de pouvoir l'exploiter ou de passer à un algorithme à plusieurs degrés de liberté. Pour ce faire, la solution analytique développée au chapitre 2 va être comparée à la solution obtenue numériquement avec l'algorithme présenté à la section 3.1.2.

La solution analytique ayant été développée pour une sollicitation sinusoïdale d'amplitude A et de pulsation ω , le mouvement du support imposé dans le modèle numérique est donc de la forme de l'expression 3.11.

$$\ddot{u}(t) = -A\omega^2 m \sin(\omega t) \quad (3.11)$$

Les différents paramètres physiques utilisés dans cette partie sont les suivants :

$f = 1\text{Hz}$	$A = 0,1\text{m}$	$m = 10\text{kg}$
$f_1 = 0,667\text{Hz}$	$\dot{q}_0 = 0\text{m/s}$	$\mu = 0,3$
$\delta = 1,5$	$q_0 = 0\text{m}$	

La Figure 3.4 présente les résultats en terme de déplacement relatif, de vitesse relative et d'accélération relative pour la solution obtenue analytiquement (traits discontinus rouge) et numériquement (trait continu bleu). Un pas de temps dt de $5 \times 10^{-5}\text{s}$ a été utilisé pour établir la solution numérique.

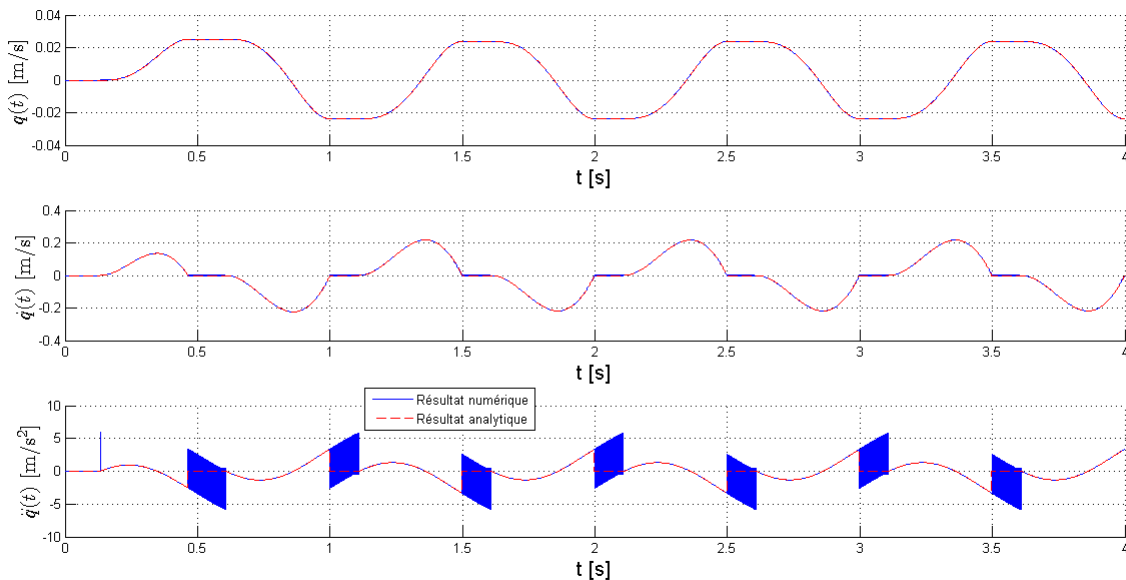


FIGURE 3.4 : Graphique - Validation Algorithme un degré de liberté ; 1^{er}graphique : Déplacement relatif ; 2^egraphique : Vitesse relative ; 3^egraphique : Accélération relative ; Pour les trois graphiques : Bleu - résultat numérique ; Rouge - résultat analytique

Au niveau des déplacements relatifs, Il apparaît directement que la courbe bleue et la courbe rouge se recouvrent plus ou moins complètement. Afin de quantifier la différence globale entre les deux courbes, l'intégrale de ces courbes a été déterminée à l'aide de la méthode du trapèze⁶. De la sorte, la différence globale entre les deux courbes est égale à 5×10^{-5} ms. Il est cependant plus intéressant de considérer l'erreur relative entre les deux courbes qui est égale à seulement 0,56%. Cette erreur étant suffisamment faible, il peut être conclu que le code représente assez bien la théorie.

L'évolution de la vitesse relative est également semblable dans les deux solutions représentées à la Figure 3.4. La principale différence entre les deux courbes apparaît pendant les phases de *stick*, c'est-à-dire quand $\dot{q}(t)$ est censée être égale à 0. Effectivement, la solution numérique montre que la vitesse oscille autour de 0 alors que la solution analytique impose une vitesse nulle. La Figure 3.5 étant un zoom sur une phase de *stick* de la Figure 3.4 permet d'illustrer ce problème.

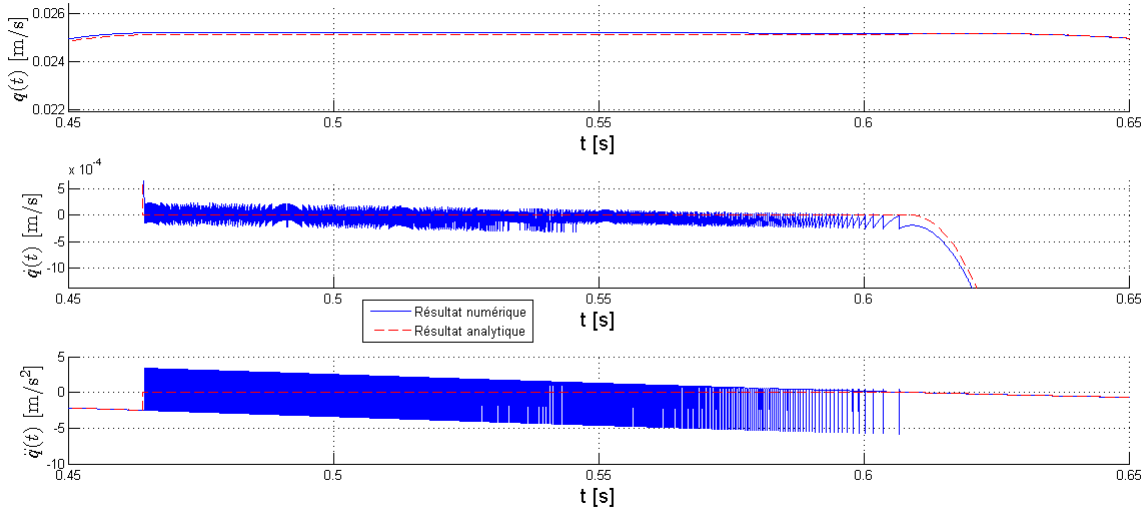


FIGURE 3.5 : Graphique - Zoom Figure 3.4 & mise en évidence du phénomène de "chattering" ; 1^{er}graphique : Déplacement relatif ; 2^egraphique : Vitesse relative ; 3^egraphique : Accélération relative ; Pour les trois graphiques : Bleu - résultat numérique ; Rouge - résultat analytique

Le deuxième graphique de cette Figure montre effectivement que la vitesse relative déterminée à l'aide du modèle numérique à un degré de liberté oscille autour de 0. Ce phénomène est appelé "chattering". Afin de comprendre pourquoi ce phénomène apparaît, la Figure 3.6 représente l'évolution de la force de frottement. Cette Figure montre que, durant ces phases, la force de frottement oscille entre \tilde{F}_f et $-\tilde{F}_f$ alors que selon la théorie, elle devrait suivre la courbe en rouge.

Juste avant qu'un phénomène de "chattering" apparaisse, la vitesse relative passe par 0 et le code détecte donc un changement de phase⁷. Le système passe donc dans une phase de *stick* et la force de frottement est calculée à partir de l'expression 2.20. Cependant, la force de frottement calculée de cette manière est plus grande (en valeur absolue) que \tilde{F}_f et le système repasse donc dans une phase de *slip* avec $F_f = \tilde{F}_f$. Il en résulte que la vitesse relative qui était négative devient

⁶En d'autres termes, la courbe est supposée être linéaire entre deux instants constitutifs pour calculer l'intégrale

⁷La deuxième condition de sortie d'une phase de *slip* étant également remplie

maintenant positive. Le système voit donc que la vitesse relative est de nouveau passée par 0 et détecte donc un changement de phase. La force de frottement calculée à l'aide de l'expression 2.20 étant de nouveau plus grande (en valeur absolue) que \tilde{F}_f , le système détecte un nouveau changement de phase et la vitesse relative rechange de signe. En procédant ainsi de suite, il apparaît le phénomène de "chattering".

Même si le modèle numérique ne représente donc pas convenablement le problème durant ces phases, les résultats finaux en termes de déplacements et donc d'efforts dans les ligatures correspondent néanmoins à la réalité.

En outre, le phénomène de "chattering" entraîne également des problèmes au niveau de l'accélération relative. En effet, durant les phases de *stick*, l'accélération relative calculée numériquement oscille au lieu d'être constante. A nouveau, cela n'entraîne des problèmes qu'au niveau de l'interprétation mais n'empêche pas d'avoir des résultats cohérents.

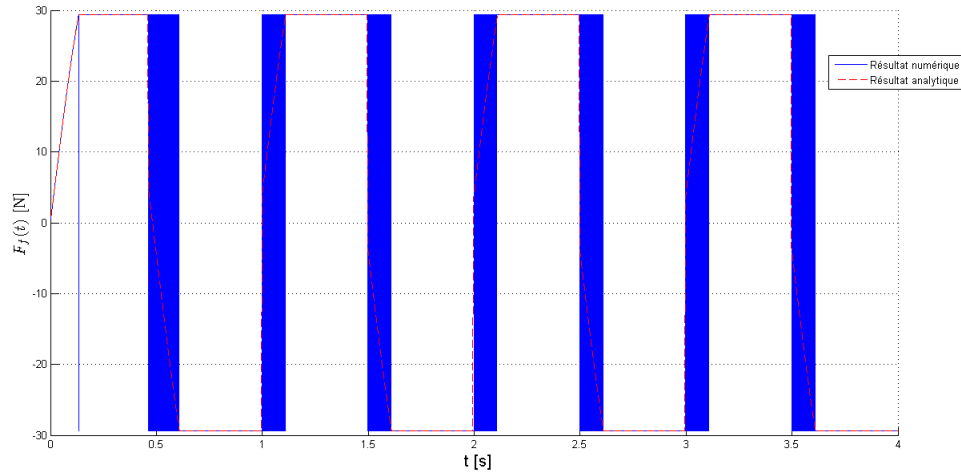


FIGURE 3.6 : Graphique - Validation force de frottement : Bleu - résultat numérique ; Rouge - résultat analytique

Finalement, les résultats numériques peuvent être comparés aux résultats analytiques dans le plan de phase comme le montre la Figure 3.7.

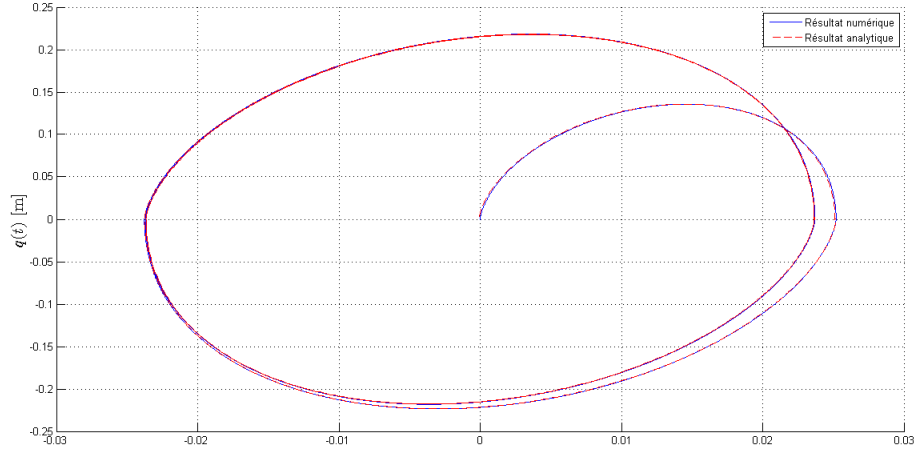


FIGURE 3.7 : Graphique - Validation dans le plan de phase : Bleu - résultat numérique ; Rouge - résultat analytique

Sans surprise, la Figure 3.7 révèle que les solutions, numérique et analytique, se superposent presque parfaitement. Effectivement, autant la réponse transitoire mise en évidence à la section 2.3.3 que la réponse périodique finale sont simulées convenablement par le modèle numérique.

En conclusion, même si quelques dissimilitudes existent entre la solution analytique et numérique, la méthode de résolution mise en place dans l'algorithme présenté dans cette partie représente raisonnablement la réalité.

3.2 Système à plusieurs degrés de liberté

3.2.1 Introduction

Le modèle à plusieurs degrés de liberté est construit de façon à caractériser le plus précisément possible la dynamique d'une pile de plats. Par rapport au modèle développé à la section 3.1, le schéma présenté dans ce chapitre est plus complet notamment par le fait que l'effet des ligatures de pile sont désormais prises en compte. Par conséquent, l'intégration temporelle doit être adaptée afin de prendre en compte les non-linéarités apportées par les ligatures de pile.

Le schéma présenté à la Figure 3.8 illustre le système étudié où il y a, de manière générale, N plats⁸ constituant une pile sanglée à l'aide de ligatures de pile et de ligatures de palette et où la rugosité des interfaces entre chaque plat est traduite par des forces de frottement pouvant se développer entre chaque flanc.

⁸i.e. N degrés de liberté

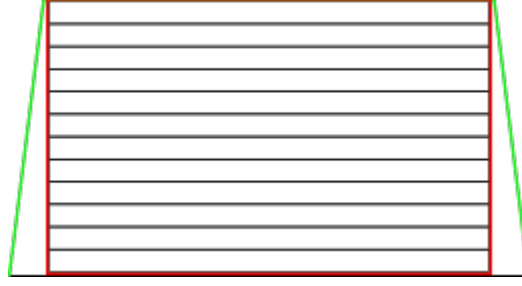


FIGURE 3.8 : Schéma - Système à N degrés de liberté ; Rouge : ligature de pile ; Vert : Ligature de palette

L'équation d'équilibre qu'il faut désormais résoudre est l'expression 3.12 déjà établie au chapitre 2.

$$\underline{\underline{M}} \underline{\ddot{q}} + \underline{F}_R + \Delta \underline{F}_{Frottement} = -\underline{\underline{M}} \underline{\ddot{u}} \quad (3.12)$$

Où

- $\underline{\underline{M}}$ - Matrice diagonale de taille $N \times N$ dont tous les éléments correspondent à la masse m d'un plat.
- \underline{F}_R - Vecteur de taille N reprenant les efforts de rappel exercés par les ligatures.
- $\Delta \underline{F}_{Frottement}$ - Vecteur de taille N reprenant le bilan des forces de frottement s'appliquant sur un plat.

L'expression 3.12 écrite sous format matriciel correspond en réalité à N équations d'équilibre pour chacun des plats constituant la pile étudiée. Pour un plat i quelconque, l'équation d'équilibre est donc donnée par l'expression 3.13.

$$m_i \ddot{q}_i(t) + F_{R,i}(t) + F_{f,i}(t) - F_{f,i+1}(t) = -m_i \ddot{u}(t) \quad (3.13)$$

Où la force de frottement est toujours déterminée de la même manière que précédemment.

Ce modèle est toujours basé sur la détection d'événements mais la méthode d'intégration temporelle est différente. Effectivement, les efforts de rappel apportés par les ligatures de pile dépendant d'une part s'il y a contact ou pas entre un plat et la ligature et d'autre part, s'il y a contact, de l'angle formé entre le plat et la ligature, il n'est plus possible d'exprimer cette force de rappel comme le produit d'une constante de raideur avec le déplacement. Il est donc nécessaire d'utiliser une méthode implicite permettant de prendre en compte cette non-linéarité. Autrement dit, il faut implémenter une méthode où il faut réaliser, à chaque pas de temps de calcul, des itérations secondaires permettant de déterminer les variables d'états en t_{i+1} à partir des variables en t_i .

Il a été choisi d'utiliser une méthode de résolution toujours basée sur les équations de Newmark mais en utilisant cette fois-ci le principe d'une matrice tangente pour effectuer les itérations secondaires.

3.2.2 Algorithme

Le modèle est implémenté dans MATLAB et les paramètres d'entrées et de sorties sont identiques aux paramètres du modèle à un degré de liberté. En outre, il faut évidemment préciser le nombre de plats constituant la pile ainsi que la raideur des ligatures de pile qui n'étaient pas prises en compte auparavant.

Le principe de l'algorithme est illustré à la Figure 3.9 sous la forme d'un pseudo-code.

Algorithme 2 :	Modèle numérique à N degrés de liberté
<i>Entrées :</i>	Conditions initiales, Caractéristiques du système, Mouvement du support
<i>Sorties :</i>	Déplacement relatif, Vitesse relative, Accélération relative, Force de frottement
<hr/>	
while $t \leq t_{end}$	
(1)	Initialisation temps t_{i+1}
(2)	Calcul sollicitation au temps t_{i+1}
(3)	Initialisation itération secondaire et Calcul matrice tangente $\underline{\underline{MT}}$
(4)	while conv==0
(5)	$\underline{X}_{it2+1} = \underline{X}_{it2} + \underline{\underline{MT}}^{-1} \underline{FHE}_{it2}$
(6)	Calcul \underline{FHE}_{it2+1}
(7)	Convergence : Si $\underline{FHE}_{it2+1} \approx 0 \rightarrow \text{conv} = 1$
(8)	end %while
(9)	Calcul contact, \underline{F}_R et \underline{F}_f en t_{i+1}
(10)	Calcul variables de contrôle
(11)	Détection d'événements : Si changement de phase $\rightarrow \text{Flag} = 1$
(12)	if Flag == 1
(13)	Localisation 1 ^{er} événement $\rightarrow t_{i+1}^*$
(14)	Mise à jour variables en t_{i+1}^*
(15)	Changement de phase
(16)	end %if
end %while	

FIGURE 3.9 : Pseudo-code - Algorithme N degrés de liberté

Comme pour le modèle présenté à la section 3.1, l'algorithme est construit autour d'une boucle qui parcourt le temps de calcul pendant lequel plusieurs opérations sont effectuées de façon à intégrer l'équation d'équilibre sur le pas de temps courant. Il existe toujours une variable de phase mais qui est cette fois-ci un vecteur de taille N de manière à enregistrer le régime de tous les plats constituant la pile. Mis à part l'intégration temporelle, cette adaptation d'une variable scalaire à une variable vecteur constitue la principale différence entre l'algorithme à un degré de liberté et l'algorithme à N degrés de liberté. Ainsi, il n'y a plus une variable de contrôle mais N variables de contrôle permettant de détecter les éventuels changements de phase pouvant se produire aux différentes interfaces. Les lignes 1 à 2 et 10 à 16 du pseudo-code présentées à la Figure 3.9 sont donc semblables aux lignes 1 à 2 et 4 à 10 du pseudo-code présentées à la Figure 3.2.

La première particularité supplémentaire de l'algorithme à N degrés de liberté est qu'il faut pouvoir traiter les problèmes de contact afin de prendre en compte les ligatures de pile. Effectivement, les effets de rappel des ligatures de pile sur un plat n'apparaissant que s'il y a contact entre eux, il est nécessaire d'avoir une routine permettant de déterminer les contacts entre les plats et la ligature une fois que les déplacements sont déterminés (ligne 9 du pseudo-code présenté à la Figure 3.9).

En outre, les efforts de rappel des ligatures de pile dépendant indirectement des déplacements des plats, une résolution explicite n'est plus possible et une méthode implicite demandant plusieurs sous-itérations est nécessaire (lignes 3 à 8 du pseudo-code de la Figure 3.9). Effectivement, le système d'équations formé par les équations de Newmark (équations 3.14-3.15) et l'équation d'équilibre (équation 3.12) ne peut plus s'écrire sous une forme matricielle à cause des ligatures de palettes.

$$\dot{\underline{q}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{q}}_t + [(1 - \delta) \ddot{\underline{q}}_t + \delta \ddot{\underline{q}}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (3.14)$$

$$\underline{q}_{t+\Delta t} = \underline{q}_t + \dot{\underline{q}}_t \Delta t + [(\frac{1}{2} - \alpha) \ddot{\underline{q}}_t + \alpha \ddot{\underline{q}}_{t+\Delta t}] \Delta t^2 \quad (3.15)$$

Afin de comprendre la méthode implicite implémentée pour intégrer l'équation d'équilibre, la variable \underline{X}_t est introduite. Cette variable est obtenue en assemblant les vecteurs \underline{q}_t , $\dot{\underline{q}}_t$ et $\ddot{\underline{q}}_t$ ensembles de manière à former un vecteur de taille $3 \times N$ (cf. équation 3.16). Il est ainsi possible de mettre le système d'équations formé par les équations de Newmark et l'équation d'équilibre sous la forme de l'expression 3.17.

$$\underline{X}_t = \begin{bmatrix} \underline{q}_t \\ \dot{\underline{q}}_t \\ \ddot{\underline{q}}_t \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\underline{r}(\underline{X}_{t+\Delta t}) = \underline{fct}(\underline{X}_t) + \underline{b} \quad (3.17)$$

Ce système est simplement obtenu en réarrangeant les termes des trois équations. De la sorte et en utilisant les expressions des forces de rappel exercées par les ligatures, le système d'équations 3.17 s'écrit sous la forme du système 3.18.

$$\begin{cases} \underline{M} \ddot{\underline{q}}_{t+\Delta t} + \underline{K}_{p,eq} \underline{q}_{t+\Delta t} + \sin(\theta_{t+\Delta t}) \left(\frac{EA_s}{L_{0s}} (l_{s,t+\Delta t} - L_{0s}) + T_s \right) + \Delta \underline{F}_{f,t+\Delta t} = -\underline{M} \ddot{\underline{u}}_{t+\Delta t} \\ \dot{\underline{q}}_{t+\Delta t} - \delta \Delta t \ddot{\underline{q}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{q}}_t + (1 - \delta) \Delta t \ddot{\underline{q}}_t \\ \underline{q}_{t+\Delta t} - \alpha \Delta t^2 \ddot{\underline{q}}_{t+\Delta t} = \underline{q}_t + \dot{\underline{q}}_t \Delta t + (1/2 - \alpha) \Delta t^2 \ddot{\underline{q}}_t \end{cases} \quad (3.18)$$

Ce système composé de $3 \times N$ équations permet de déterminer $\underline{X}_{t+\Delta t}$ à partir de \underline{X}_t qui est connue au début d'un pas de temps de calcul. Concrètement, la non-linéarité apportée par les ligatures de pile se trouve dans le troisième terme de l'équation d'équilibre où θ^9 et l_s^{10} dépendent indirectement de \underline{q} .

Un tel système peut être représenté schématiquement dans le plan de \underline{X} . Cependant, \underline{X} étant de dimension $3 \times N$, la représentation d'un tel système devrait être faite dans un plan à $3 \times N$ dimensions. Dès qu'il y a plus d'un degré de liberté, ce n'est plus possible de représenter le système

⁹Angle formé entre une ligature de pile et un plat

¹⁰Longueur déformée de la ligature de pile

convenablement dans toutes les dimensions. Afin de pouvoir tout de même expliquer le principe de résolution de manière générale, la Figure 3.10 représente schématiquement un système \underline{r} quelconque dans une seule des dimensions tout en gardant à l'esprit qu'il en existe $3 \times N$ en réalité.

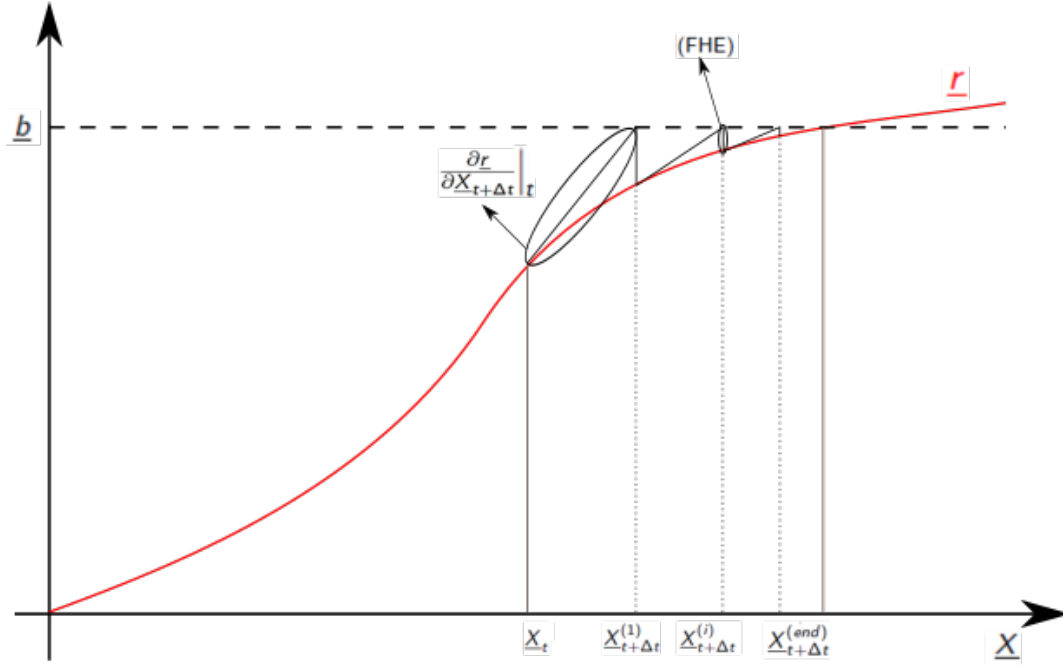


FIGURE 3.10 : Schéma - Méthode de Newton-Raphson

Le but est de déterminer, à partir de \underline{X}_t , l'abscisse $\underline{X}_{t+\Delta t}$ défini par l'intersection entre le niveau de chargement \underline{b}^{11} et la courbe rouge représentant le système \underline{r} . L'allure de la courbe rouge après l'instant t étant inconnue au début d'un pas de temps, l'idée est de linéariser le système en déterminant la tangente de la courbe à l'instant t . En d'autres termes, la courbe en rouge est remplacée par une droite dont la pente est donnée par la dérivée du système d'équations 3.18 par rapport à $\underline{X}_{t+\Delta t}$ évaluée à l'instant t . Cette dérivée est en réalité une matrice dénommée matrice tangente.

Si l'expression analytique de cette matrice peut être déterminée, il est possible de trouver l'intersection entre le niveau de chargement \underline{b} et cette droite permettant ainsi de déterminer une nouvelle abscisse $\underline{X}_{t+\Delta t}^1$. A l'aide l'expression analytique du système (expression 3.18), la valeur de \underline{r} à l'abscisse $\underline{X}_{t+\Delta t}^1$ peut être ensuite évaluée. Si cette dernière valeur est suffisamment proche du niveau de chargement, l'abscisse trouvée correspond à ce qui est recherché, à savoir la vraie valeur de $\underline{X}_{t+\Delta t}$.

A l'opposé, si la différence entre $\underline{r}(\underline{X}_{t+\Delta t}^1)$ et \underline{b} notée FHE¹² à la Figure 3.10 n'est pas suffisamment proche de zéro, une seconde itération est effectuée où la tangente à la courbe est éventuellement recalculée afin de déterminer une nouvelle abscisse. Ainsi de suite, des itérations à l'intérieur d'un pas de temps sont effectuées jusqu'à la convergence des résultats ou autrement dit, jusqu'à ce que les forces hors équilibres deviennent suffisamment proches de zéro.

¹¹qui est évidemment connu vu qu'il ne dépend que de la sollicitation et de \underline{X}_t

¹²Forces Hors Équilibres - FHE

Ce principe de résolution s'apparente à la méthode de Newton-Raphson qui est notamment répandue en éléments finis non-linéaires. Il est intéressant de noter que l'évaluation de la matrice tangente à l'intérieur des itérations secondaires n'est pas nécessaire pour obtenir la convergence des résultats. C'est-à-dire que, à l'intérieur d'un pas de temps, le système est linéarisé pendant toutes les itérations secondaires avec la même matrice tangente de départ. Graphiquement, cela se traduit simplement par le fait que chaque itération est effectuée avec la tangente de la courbe à l'instant t au lieu de l'actualiser à chaque itération. La Figure 3.11 représentant graphiquement cette méthode montre que même si la tangente n'est pas recalculée à chaque itération, les résultats finissent tout de même par converger même si plus d'itérations sont requises. En d'autres termes, la convergence n'est assurée que si les forces hors équilibres sont convenablement calculées peu importe que la matrice tangente soit actualisée ou pas. Ce principe de résolution est en réalité une méthode de Newton-Raphson modifiée et est la méthode finalement adoptée dans cet algorithme.

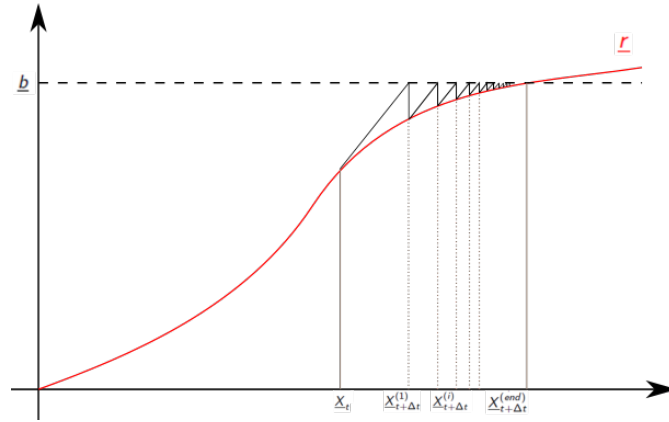


FIGURE 3.11 : Schéma - Méthode de Newton-Raphson modifiée

L'intégration temporelle est donc cette fois-ci effectuée en plusieurs étapes. Après l'initialisation des itérations secondaires et le calcul de la matrice tangente de départ, le code entre dans une boucle secondaire qui tourne tant que les résultats calculés à l'intérieur n'ont pas convergé. Tout l'enjeu de cette méthode réside dans la détermination de la matrice tangente à chaque pas de temps.

Globalement, la structure de l'algorithme présenté à la Figure 3.9 est identique à celle présentée pour l'algorithme à un degré de liberté à l'exception de l'intégration temporelle implicite nécessaire pour prendre en compte les ligatures de pile. La deuxième différence principale par rapport à l'algorithme à un degré de liberté est qu'il faut également pouvoir traiter les problèmes de contact entre les plats et les ligatures de pile.

Les sous sections suivantes présentent les différentes étapes importantes de l'algorithme.

3.2.2.1 Contact - Force de rappel ligatures - Force de frottement

Contact Afin de présenter le fonctionnement de la routine permettant de déterminer les contacts entre les plats et la ligature de pile, l'exemple illustré à la Figure 3.12 est considéré.

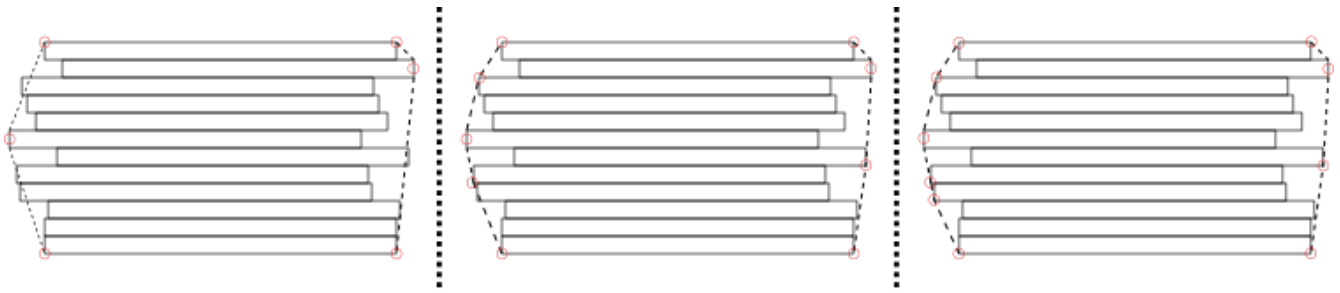


FIGURE 3.12 : Schéma - Contact

Globalement, la routine de contact détermine à partir des déplacements relatifs ainsi que des propriétés géométriques des plats¹³, les contacts avec la ligature.

Les premiers contacts pouvant être fixés, peu importe la déformée adoptée par la pile de plats, correspondent au premier et au dernier plat qui sont effectivement toujours en contact avec la ligature de pile. Ensuite, la droite et la gauche de la pile sont traitées séparément. Afin de présenter le principe utilisé dans la routine, seule la partie gauche de la pile de plats présentée à la Figure 3.12 est prise en considération dans la suite des explications mais les mêmes opérations sont également effectuées sur le côté droit de la pile.

Pour déterminer les contacts sur la gauche de la pile, le routine commence d'abord par trouver quel est le plat possédant le déplacement relatif minimum. Effectivement, ce plat étant celui le plus à gauche, il est forcément en contact avec la ligature de pile. De la même manière, le plat ayant le déplacement maximum, ou autrement dit se trouvant le plus à droite, est également en contact avec la ligature de pile. Le premier schéma de la Figure 3.12 illustre ces premières opérations où le 7^eplat en partant du bas de la pile est en contact avec la ligature à gauche et le 11^eplat en partant du bas est en contact avec la ligature à droite. Les contacts sont représentés à la Figure 3.12 par des ronds rouges.

Une fois que le premier plat en contact avec la ligature est connu, des droites sont tracées entre ce plat et les plats d'extrémités. Ces droites sont représentées en traits discontinus à la Figure 3.12. Si la droite ainsi tracée coupe un plat à un endroit quelconque, cela signifie qu'en réalité ce plat-là est en contact avec la ligature de pile. Dès lors, une fois la première étape terminée, la routine parcourt la pile dans deux sens, d'une part du premier contact déterminé au plat se trouvant en tête de pile et d'autre part du premier contact déterminé au plat se trouvant à la base de la pile et cherche le premier plat qui coupe la droite. Une fois celui-ci trouvé, une droite est tracée entre ce plat et le plat d'extrémité (inférieur ou supérieur en fonction de l'endroit où se trouve ce plat par rapport au premier contact déterminé) et la routine cherche, parmi les plats suivants, le premier plat coupant cette droite. Ainsi de suite, la routine détermine tous les contacts entre les plats et la ligature de pile. Dans l'exemple illustré à la Figure 3.12, trois étapes sont nécessaires pour déterminer tous les contacts de chaque côté. En premier lieu, les plats avec les déplacements maximums sont trouvés et reliés aux plats d'extrémités de façon à pouvoir tracer les droites en traits discontinus. Ensuite, la pile de plats est parcourue afin de déterminer les éventuels contacts parmi les plats se trouvant au-dessus ou en-dessous du premier contact déterminé. Si un contact est trouvé, les droites sont retracées et puis la routine continue de parcourir la pile.

Finalement, la routine retourne donc les indices des plats qui sont en contacts avec la ligature. En outre, les angles formés entre les plats et la ligature sont également calculés dans cette routine.

¹³et plus précisément de l'épaisseur des plats

De même, la longueur déformée de la ligature de pile est également calculée dans cette routine. Ces derniers éléments ne sont en fait que des problèmes géométriques.

Cette routine ayant tout de même un rôle capital dans le fonctionnement du modèle, il est nécessaire de vérifier sa validité mais également sa robustesse. Pour ce faire, plusieurs cas tests ont été analysés pour lesquels les contacts ont été déterminés d'une part manuellement et d'autre part numériquement dans le but de les comparer. Afin de pouvoir apprécier la robustesse de la routine, une multitude d'exemples différents ont été étudiés en vue de parcourir tous les types de cas pouvant être rencontrés en réalité. Il en est ainsi ressorti que la routine de contact détermine convenablement tous les contacts dans toutes les situations examinées.

Force de rappel ligature Une fois les contacts déterminés, il est possible de calculer les efforts de rappel apportés par les ligatures de pile. En effet, pour un plat quelconque en contact avec la ligature de pile, l'effort de rappel est donné par l'expression de 3.19.

$$F_{lig.pile} = \sin(\theta) \left(\frac{E_s A_s}{L_{0s}} (l_s - L_{0s}) + T_s \right) \quad (3.19)$$

Où θ représente l'angle formé entre la ligature et le plat considéré. Cependant, comme le montre la Figure 3.13, il y a en réalité deux angles à prendre en compte, l'angle formé au-dessus du plat ainsi que l'angle formé en-dessous du plat. Dès lors, lorsqu'il est noté $\sin(\theta)$ dans la formule 3.19 cela signifie en fait que c'est la somme de $\sin(\theta_{up})$ et de $\sin(\theta_{down})$.

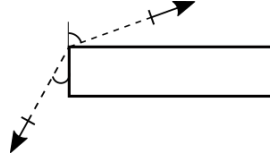


FIGURE 3.13 : Schéma - Détail calcul force de rappel ligature de pile

Si le plat est en contact avec la ligature de pile des deux côtés, il y a donc quatre angles à prendre en compte.

Les forces de rappel exercées par les ligatures de palette correspondent simplement au produit du déplacement du plat se trouvant en tête de pile avec la raideur équivalente des ligatures de palette. Évidemment, cette force ne s'applique que sur le dernier plat de la pile.

Force de frottement Le calcul de la force de frottement est semblable à ce qui a été fait dans l'algorithme à un degré de liberté. Si un plat quelconque est en phase de *slip*, la force de frottement est simplement donnée par la limite de glissement de cette interface multipliée par le signe de la vitesse relative du plat par rapport à son support direct¹⁴. Si un plat quelconque est en phase de *stick*, la force de frottement est telle qu'elle contrebalance toutes les autres forces entrant en jeu dans le système. La différence par rapport à l'algorithme à un degré de liberté est que l'accélération relative peut maintenant être différente de zéro même si le plat considéré colle à son support direct. Effectivement, si le support direct glisse sur son support à lui, le plat juste au-dessus aura une accélération relative non nulle qu'il faut donc désormais prendre en compte dans l'équilibre des forces. Dès lors, la force de frottement pour un plat qui colle à son support direct est donnée par l'expression 3.20.

¹⁴C'est soit le support de la pile si le premier plat est considéré, soit le plat se trouvant juste en-dessous du plat considéré.

$$F_{f,i}(t) = -m_i (\ddot{q}_i(t) + \ddot{u}(t)) - F_{R,i}(t) + F_{f,i+1}(t) \quad (3.20)$$

Cette expression montre également qu'il faut prendre en compte la force de frottement se développant au plat juste au-dessus. Plus précisément, il faut que la force de frottement au degré de liberté i reprenne, en plus des forces s'appliquant sur ce degré de liberté, la force de frottement présente à l'interface juste au-dessus.

3.2.2.2 Intégration temporelle

L'intégration temporelle est encore effectuée sur base du modèle de Newmark mais nécessite des itérations secondaires pour obtenir la solution à l'intérieur d'un pas de temps.

Avant de commencer ces itérations, il est donc nécessaire de les initialiser et de calculer la matrice tangente. Ensuite, le code entre dans une boucle secondaire qui tourne tant que la variable `conv` est nulle. Cette variable permet de stocker la convergence des résultats à chaque itération, si les résultats ont convergé, elle est mise égale à 1 et le code sort de la boucle secondaire. Il est donc nécessaire de déterminer un critère de convergence afin de savoir si les résultats calculés à l'itération secondaire courante sont corrects ou pas.

Avant de déterminer la convergence, il faut évidemment calculer la solution à l'itération suivante à partir des données à l'itération précédente. En se basant sur le principe de linéarisation du système d'équations présenté au début de ce chapitre, il suffit de déterminer l'intersection entre le niveau de chargement et la tangente à la courbe pour trouver l'itération suivante. En d'autres termes, il faut simplement déterminer l'intersection entre deux droites dont les expressions sont connues. Pour ce faire, il suffit donc de calculer l'expression 3.21.

$$\underline{X}_{it2+1} = \underline{X}_{it2} + \underline{MT}^{-1} \quad \underline{FHE}_{it2} \quad (3.21)$$

Où les Forces Hors Équilibres correspondent à la différence entre le niveau de chargement et l'évaluation du système d'équation en \underline{X}_{it2} . Les \underline{FHE} sont donc données par l'expression 3.22. La matrice tangente étant un élément capital de cette méthode de résolution, la section 3.2.3 est totalement consacrée au développement de cette matrice.

$$\underline{FHE}_{it2} = \underline{r}(\underline{X}_{it2}) - \underline{b} \quad (3.22)$$

Afin de déterminer correctement $\underline{r}(\underline{X}_{it2})$, il est nécessaire de réévaluer les forces de rappel exercées par les ligatures à chaque itération. Avant de pouvoir déterminer les Forces Hors Équilibres, il faut donc recalculer les forces de rappel. Pour ce faire, il est supposé que les contacts ne changent pas à l'intérieur d'un pas de temps de calcul. De cette manière, les contacts ne sont déterminés qu'après l'intégration temporelle. Cette hypothèse est plausible vu qu'un pas de temps de calcul étant relativement petit, les contacts varient très peu à l'intérieur des itérations secondaires et peuvent donc être considérés comme constants.

Finalement, le niveau de chargement défini comme \underline{b} correspond simplement aux membres de droite du système d'équations \underline{r} défini à l'équation 3.18.

Il est intéressant de noter que le système d'équations 3.18 peut être transformée de façon à ce que toutes les équations s'expriment dans les unités d'une accélération ($[m/s^2]$). Il suffit simplement de diviser l'équation d'équilibre par la masse (ou plus précisément par la matrice de masse), de diviser

la première équation de Newmark par Δt (le pas de temps de calcul) et de diviser la deuxième équation de Newmark par Δt^2 . De cette manière, toutes les équations sont exprimées dans les mêmes unités permettant ainsi de résoudre le système de manière plus adéquate. Le code a donc été construit avec le système d'équations exprimé en terme d'accélération.

Une fois que \underline{X}_{it2+1} est connu, les Forces Hors Équilibres en $it2 + 1$ sont déterminées à l'aide de l'équation 3.21 permettant ainsi de vérifier la convergence de cette dernière solution. Afin de déterminer si les résultats ont convergé ou pas, un critère de convergence est fixé. Les résultats sont corrects si le système d'équations 3.18 est vérifié. Autrement dit, il faut que les Forces Hors Équilibres soient le plus proche possible de zéro. Dès lors, le critère de convergence consiste à calculer les trois normes des Forces Hors Équilibres¹⁵ et de regarder si ces normes sont suffisamment proches de zéro. Mais que signifie être *suffisamment* proche de zéro ? C'est-à-dire qu'une tolérance de convergence est définie de façon à ce que, si les normes sont inférieures à cette tolérance, la convergence est assurée. Concrètement, la valeur numérique attribuée à cette tolérance va de $0,05m/s^2$ à $0,001m/s^2$.

Il est donc ainsi possible d'effectuer l'intégration temporelle et de déterminer par conséquent la position, la vitesse et l'accélération relatives de chacun des plats.

Tout comme dans le modèle à un degré de liberté, il faut pouvoir modéliser convenablement le comportement pendant les deux régimes qui peuvent se produire (phase de *stick* et phase de *slip*). Pour les phases de glissement, les équations d'équilibre doivent simplement être résolues mais ce n'est plus le cas lors des régimes de *stick*. Effectivement, durant ces phases il faut que le plat considéré reste collé à son support direct. Par conséquent, il est nécessaire de modifier l'équation d'équilibre en rajoutant de la rigidité entre le plat qui est supposé coller et son support. En d'autres termes, la matrice présentée à l'expression 3.23 doit être rajoutée à la matrice de rigidité¹⁶ aux éléments $(i - 1, i - 1)$ à (i, i) .

$$\begin{bmatrix} k_{num} & -k_{num} \\ -k_{num} & k_{num} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Où k_{num} est pris égal au maximum de la matrice de rigidité multiplié par 10^4 . De la sorte, une force de rappel est rajouté au plat i de manière à ce que son déplacement soit identique à celui d'en-dessous, autrement dit son support direct. Si, par exemple, le cas d'une pile de 4 plats dont les deux derniers collent sur leurs supports directs se présente, la matrice de rigidité devra être modifiée comme le montre l'expression 3.24.

$$\underline{K}_{\text{modifiée}} = \overbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}}^{\underline{K}_{\text{initiale}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{num} & -k_{num} & 0 \\ 0 & -k_{num} & k_{num} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Plat 4 colle sur Plat 3}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{num} & -k_{num} \\ 0 & 0 & -k_{num} & k_{num} \end{bmatrix}}_{\text{Plat 5 colle sur Plat 4}} \quad (3.24)$$

¹⁵Il y a une norme pour chaque équation du système d'équations 3.18

¹⁶La matrice de rigidité correspond à la sous-matrice 11 de la matrice tangente (cf. section 3.2.3)

Finalement, si un déplacement différentiel existe entre un plat et son support direct avant qu'il n'entre dans une phase de *stick*, ce déplacement différentiel doit être conservé. Dès lors, il faut insérer dans le niveau de chargement \underline{b} un effort correspondant au déplacement initial multiplié par la matrice de rigidité numérique.

3.2.2.3 Détection d'événements

La détection d'événements est toujours effectuée de la même manière que dans l'algorithme à un degré de liberté. Seule une adaptation des variables de contrôle en vecteur est nécessaire. En outre, lorsqu'un plat glisse, ce n'est plus simplement la vitesse relative du plat qui constitue la variable de contrôle mais la variation de vitesse relative du plat par rapport à la vitesse relative de son support direct.

A partir des variables de contrôle ainsi déterminées, la routine de détection d'événements est appelée de façon à déterminer quels sont les plats de la pile qui changent de phase pendant le pas de temps de calcul courant. En d'autres termes, la routine regarde si, pour un plat quelconque, la variable de contrôle passe par zéro entre l'instant t_i et t_{i+1} pour tous les plats de la pile. Si oui, un changement de phase se produit pour les plats en question et les éléments correspondants dans le vecteur **Flag** sont mis égaux à 1.

3.2.2.4 Localisation événement

A nouveau, le principe utilisé dans l'algorithme à un degré de liberté est réutilisé ici. C'est-à-dire que le temps de changement de phase est déterminé en effectuant une interpolation linéaire entre la variable de contrôle au temps t_i et la variable de contrôle au temps t_{i+1} et en cherchant l'abscisse précise pour laquelle la variable de contrôle est nulle. La différence vient du fait qu'il faut maintenant déterminer ce temps pour tous les plats qui ont changé de phase à l'intérieur du pas de temps.

Cependant, seul le premier changement de phase est retenu. En d'autres termes, l'algorithme impose que un seul changement de phase peut se produire à l'intérieur d'un pas de temps. Si, à priori, plusieurs plats changent de phase dans un pas temps, le changement se produisant en premier est retenu et le pas de temps est adapté pour arriver à ce temps précis. De cette manière, les autres plats n'ont pas encore changé de régime mais ils le feront au pas de temps suivant.

Une fois le changement de phase localisé, il ne reste plus qu'à mettre à jour les variables d'état à cet instant. Pour ce faire, l'accélération relative est interpolée linéairement, vu que la méthode d'intégration utilisée est la méthode de l'accélération linéaire¹⁷. Ensuite, les deux équations du système de Newmark sont utilisées afin de pouvoir calculer la vitesse et la position relative du plat.

3.2.3 Matrice tangente

Comme il a été montré, l'intégration temporelle ne peut se faire que si l'expression de la matrice tangente est à priori connue. Cette section est donc totalement dédiée au développement de cette matrice.

¹⁷Méthode de Newmark avec $\alpha = 1/6$ et $\delta = 1/2$

De manière générale, la matrice tangente est définie comme la dérivée du système d'équations \underline{r} par rapport à $\underline{X}_{t+\Delta t}$. En dénommant les trois équations du système \underline{r} (expression 3.18) respectivement \underline{r}_1 , \underline{r}_2 , et \underline{r}_3 , la matrice tangente $\underline{\underline{MT}}$ est donnée par l'expression 3.25.

$$\underline{\underline{MT}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{r}_1}{\partial \underline{q}_{t+\Delta t}} & \frac{\partial \underline{r}_1}{\partial \underline{\dot{q}}_{t+\Delta t}} & \frac{\partial \underline{r}_1}{\partial \underline{\ddot{q}}_{t+\Delta t}} \\ \frac{\partial \underline{r}_2}{\partial \underline{q}_{t+\Delta t}} & \frac{\partial \underline{r}_2}{\partial \underline{\dot{q}}_{t+\Delta t}} & \frac{\partial \underline{r}_2}{\partial \underline{\ddot{q}}_{t+\Delta t}} \\ \frac{\partial \underline{r}_3}{\partial \underline{q}_{t+\Delta t}} & \frac{\partial \underline{r}_3}{\partial \underline{\dot{q}}_{t+\Delta t}} & \frac{\partial \underline{r}_3}{\partial \underline{\ddot{q}}_{t+\Delta t}} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

En d'autres termes, il faut déterminer la dérivée des équations composant le système d'équations étudié par rapport aux variables composant le vecteur $\underline{X}_{t+\Delta t}$. Une première évaluation de cette matrice est présentée à l'équation 3.26.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{r}_1}{\partial \underline{q}_{t+\Delta t}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}} & -\delta \Delta t \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} & -\alpha \Delta t^2 \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Pour la plupart des éléments de cette matrice, ces dérivées se calculent aisément. Premièrement, la dérivée de l'équation d'équilibre par rapport à $\underline{\ddot{q}}_{t+\Delta t}$ correspond à la matrice de masse. Ensuite, la dérivée de l'équation d'équilibre par rapport à $\underline{\dot{q}}_{t+\Delta t}$ est nulle tant qu'aucun amortissement n'est pris en compte. Ainsi de suite, il est facile de déterminer toutes les sous-matrices déjà calculées dans l'expression 3.26.

En exprimant le système d'équations \underline{r} dans les unités d'une accélération uniquement et en notant $\underline{\underline{K}}$ la sous-matrice $\underline{\underline{MT}}_{11}$ ¹⁸, la matrice tangente devient l'expression 3.27.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{0}} & \frac{1}{\Delta t} \underline{\underline{I}} & -\delta \underline{\underline{I}} \\ \frac{1}{\Delta t^2} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} & -\alpha \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

La plus grande difficulté réside dans la dérivée de l'équation d'équilibre par rapport à $\underline{q}_{t+\Delta t}$. Cela consiste donc à dériver les forces de rappel par rapport aux déplacements relatifs. Pour les ligatures de palette, cela est très simple vu que l'effort est donné par $\underline{\underline{K}}_p \underline{q}(t)$ ¹⁹. Dès lors, la dérivée par rapport aux déplacements relatifs correspond à la matrice $\underline{\underline{K}}_p$.

Pour les ligatures de pile, ce n'est plus aussi trivial. De manière générale, la dérivée de la force de rappel des ligatures de pile est notée $\underline{\underline{K}}_s$ de façon à ce que la dérivée de la première équation puisse être écrite sous la forme de l'expression 3.28.

$$\frac{\partial \underline{r}_1}{\partial \underline{q}_{t+\Delta t}} = \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}_p + \underline{\underline{K}}_s \quad (3.28)$$

¹⁸Qui est donc la sous-matrice correspondant à la dérivée de l'équation d'équilibre par rapport $\underline{q}_{t+\Delta t}$. Cela représente par conséquent la dérivée des forces de rappel par rapport aux déplacements. Autrement dit, c'est une matrice de rigidité qui est donc dénommé $\underline{\underline{K}}$

¹⁹La matrice $\underline{\underline{K}}_p$ est une matrice dont tous les éléments sont nuls à l'exception de l'élément (N, N) qui est égal à la rigidité équivalente des ligatures de palettes.

Où $\underline{\underline{K}}_s$ est donc donné par la dérivée des forces de rappel des ligatures de pile par rapport aux déplacements relatifs. Autrement dit, $\underline{\underline{K}}_s$ peut s'écrire sous la forme de l'expression 3.29.

$$\underline{\underline{K}}_s = \frac{\partial}{\partial \underline{q}_{t+\Delta t}} \left(\sin(\underline{\theta}) \left(\frac{E_s A_s}{L_{0s}} (l_s - L_{0s}) + T_s \right) \right) \quad (3.29)$$

En utilisant les propriétés des dérivées, l'expression 3.29 peut se réécrire sous la forme de l'équation 3.30.

$$\underline{\underline{K}}_s = \frac{\partial(\sin(\underline{\theta}))}{\partial \underline{q}_{t+\Delta t}} \left(\frac{E_s A_s}{L_{0s}} (l_s - L_{0s}) T_s \right) - \sin(\underline{\theta}) \frac{\partial l_s}{\partial \underline{q}_{t+\Delta t}} \frac{E_s A_s}{L_{0s}} \quad (3.30)$$

Il apparaît ainsi que tout l'enjeu de la détermination d'une expression analytique de la matrice tangente est de pouvoir évaluer la dérivée de $\sin(\underline{\theta})$ par rapport aux déplacements relatifs ainsi que la dérivée de la longueur déformée de la ligature de pile par rapport aux déplacements relatifs. En outre, il faut garder en tête que lorsqu'il est noté $\sin(\underline{\theta})$, c'est en réalité la somme des sinus de tous les angles de contacts qu'il faut prendre en considération. Si un plat est contact avec la ligature de pile seulement sur un de ces côtés, il existe deux angles de contact. A l'opposé, si un plat est en contact avec la ligature mais sur ces deux côtés²⁰, il existe en réalité quatre angles de contact. Finalement, si un plat n'est pas en contact avec la ligature, l'angle n'existe pas, la force de rappel exercée par les ligatures est nulle et la ligne correspondante dans $\underline{\underline{K}}_s$ est composée uniquement de zéros.

Matrice de rigidité $\underline{\underline{k}}_{s1}$ Dans un premier temps, il faut déterminer la dérivée de $\sin(\underline{\theta})$ par rapports aux déplacements. Cette grandeur correspond à une matrice et est notée $\underline{\underline{k}}_{s1}$. En développant un peu, cela revient à déterminer l'expression 3.31.

$$\frac{\partial \sin(\underline{\theta})}{\partial \underline{q}_{t+\Delta t}} = \underline{\underline{k}}_{s1} = \cos(\underline{\theta}) \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial \underline{q}_{t+\Delta t}} \quad (3.31)$$

Autrement dit, il faut évaluer comment un angle de contact entre une ligature et un plat quelconque i évolue quand un autre plat j de la pile subit une petite perturbation dans ses déplacements. Premièrement, cette grandeur existe seulement si un contact existe entre le plat i et la ligature de pile. Ensuite, il est nécessaire que le plat j soit également en contact avec la ligature pour qu'il puisse avoir une influence sur l'angle de contact en i . Cela signifie donc que l'élément (i, j) est potentiellement non nul que si le plat i et le plat j sont en contacts avec la ligature de pile.

Afin d'illustrer la suite des développements, l'exemple présenté à la Figure 3.14 est considéré.

²⁰Comme c'est le cas par exemple pour le premier et le dernier plat constituant une pile.

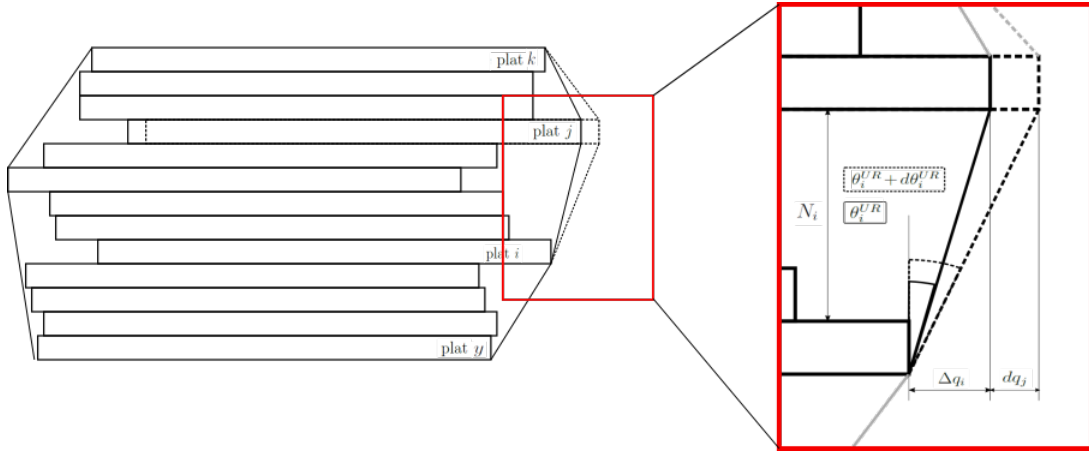


FIGURE 3.14 : Schéma - Exemple pile déformée

Un plat i quelconque est en contact avec la ligature de pile sur le côté droit où il existe donc deux angles de contact dénommés θ_i^{UR} et θ_i^{DR} ²¹. Lorsqu'un autre plat quelconque j également en contact avec la ligature de pile subit une légère perturbation notée dq_j , l'angle de contact θ_i^{UR} devient égal à $\theta_i^{UR} + d\theta_i^{UR}$. Il faut remarquer qu'une perturbation au plat j n'a d'effets sur l'angle de contact au plat i que si le plat j correspond au contact se trouvant juste au-dessus du plat i pour θ_i^{UR} ou juste en-dessous du plat i pour θ_i^{DR} . En outre, la distance entre le plat i et le plat j est noté N_i et correspond au nombre de plats entre les deux plats en considération multiplié par l'épaisseur des plats.

La valeur de $d\theta_i^{UR}$ correspondant à la manière dont l'angle de contact au plat i varie lorsque le plat j subit une légère perturbation, c'est effectivement cette grandeur qu'il faut déterminer pour calculer la dérivée de l'angle de contact i par rapport au déplacement q_j .

En reprenant les notations présentées à la Figure 3.14, les angles θ_i^{UR} et $\theta_i^{UR} + d\theta_i^{UR}$ peuvent être déterminés à partir de la configuration géométrique. De la sorte, ces deux angles sont données de manière générale par les équations 3.32 et 3.33 respectivement.

$$\tan(\theta_i^{UR}) = \frac{\Delta q_i}{N_i} \quad (3.32)$$

$$\tan(\theta_i^{UR} + d\theta_i^{UR}) = \frac{\Delta q_i + dq_j}{N_i} \quad (3.33)$$

En utilisant les propriétés des tangentes, l'expression 3.33 peut être développée et ré-écrite sous la forme de l'expression 3.34.

$$\tan(\theta_i^{UR} + d\theta_i^{UR}) = \frac{\tan(\theta_i^{UR}) + \tan(d\theta_i^{UR})}{1 - \tan(\theta_i^{UR}) \tan(d\theta_i^{UR})} \quad (3.34)$$

Comme le but est de déterminer une dérivée, la perturbation dq_j est considérée comme infinitésimale. Par conséquent, l'angle $d\theta_i^{UR}$ est extrêmement faible de façon à pouvoir utiliser l'approximation de la tangente des petits angles présentée à l'équation 3.35.

$$d\theta \ll \rightarrow \tan(d\theta) \approx d\theta \quad (3.35)$$

²¹UR pour Up et Right - DR pour Down et Right. De la même manière, si un plat est en contact du côté gauche, les angles de contact sont nommés θ_i^{UL} et θ_i^{DL} .

L'expression 3.34 peut ainsi être réécrite sous la forme de l'équation 3.36.

$$\frac{\Delta q_i}{N_i} + \frac{dq_j}{N_i} = \tan(\theta_i^{UR}) + \frac{dq_j}{N_i} = \frac{\tan(\theta_i^{UR}) + d\theta_i^{UR}}{1 - \tan(\theta_i^{UR}) d\theta_i^{UR}} \quad (3.36)$$

En développant cette dernière équation un peu plus loin, il est possible d'établir l'équation 3.37

$$\frac{dq_j}{N_i} - \tan^2(\theta_i^{UR}) d\theta_i^{UR} - \frac{\tan(\theta_i^{UR})}{N_i} \underbrace{dq_j d\theta_i^{UR}}_{=0} = d\theta_i^{UR} \quad (3.37)$$

Le produit de dq_j avec $d\theta_i^{UR}$ peut être considéré comme nul vu que ce sont deux grandeurs infinitésimales. Par conséquent, il est ainsi possible de déterminer l'équation 3.38 correspondant à la dérivée de θ_i^{UR} par rapport à dq_j .

$$\frac{\partial \theta_i^{UR}}{\partial q_j} = \frac{d\theta_i^{UR}}{dq_j} = \frac{1}{(1 + \tan^2(\theta_i^{UR})) N_i} = \frac{\cos^2(\theta_i^{UR})}{N_i} \quad (3.38)$$

L'élément $(i \times j)$ de la matrice $\underline{k}_{s1,UR}$ donné par l'expression 3.31 correspond donc finalement à l'équation 3.39

$$k_{s1,UR}^{(i,j)} = \cos(\theta_i^{UR}) \frac{\partial \theta_i^{UR}}{\partial q_j} = \frac{\cos^3(\theta_i^{UR})}{N_i} \quad (3.39)$$

De cette façon, il est possible de déterminer la dérivée de tous les angles de contact et de construire ainsi complètement la matrice \underline{k}_{s1} .

Finalement, il faut également noter qu'une attention particulière doit être portée pour l'assemblage de cette matrice. Dans un premier temps, un élément quelconque (i, j) ne peut exister que si le plat i et le plat j sont en contacts avec la ligature. Ensuite, si les deux plats sont en contact, il faut également qu'ils soient deux plats en contact consécutif. En d'autres termes, si l'exemple de la Figure 3.14 est à nouveau considéré, le plat k n'aura aucune influence sur les angles de contact à l'opposé des plats numéro j et y correspondant à des plats également en contact avec la ligature de pile et étant consécutif au plat i .

Matrice de rigidité \underline{k}_{s2} Afin de déterminer totalement la matrice de raideur \underline{K} , il faut également pouvoir exprimer la dérivée de la longueur déformée de la ligature de pile par rapport aux déplacements relatifs. Cette grandeur correspond à un vecteur et est notée \underline{k}_{s2} . Un élément i quelconque de ce vecteur quantifie donc comment la longueur de la ligature de pile est impactée quand le plat i subit une légère perturbation. Premièrement, cette valeur ne peut être différente de zéro que si le plat i est en contact avec la ligature de pile.

Un exemple (présenté à la Figure 3.15) est à nouveau considéré pour illustrer les développements.

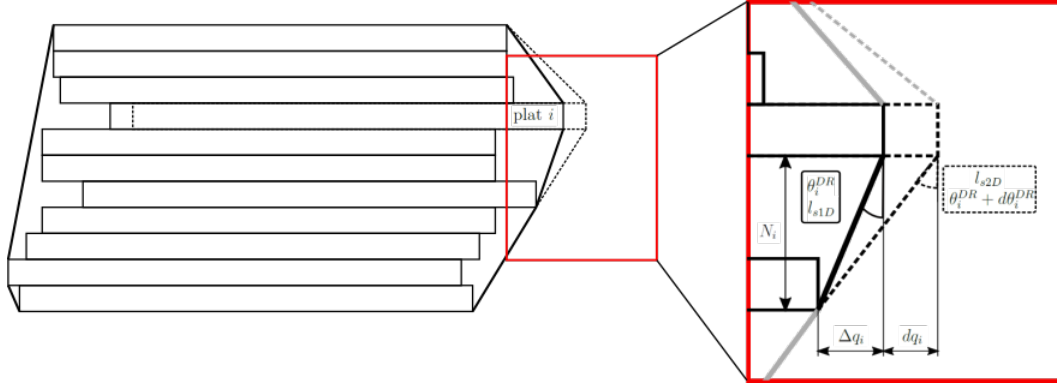


FIGURE 3.15 : Schéma - Exemple pile déformée

Sur cet exemple, le plat i est en contact avec la ligature de pile et possède dès lors au moins deux angles de contact. La longueur de la ligature de pile à l'état initial est notée l_{s1} . Si le plat i subit une légère perturbation notée dq_i , la ligature se déforme d'avantage (traits discontinus à la Figure 3.15) et sa longueur devient égale à l_{s2} . En reprenant les notations introduites à la Figure 3.15 et à partir de la configuration géométrique décrite de manière générale, il est possible de déterminer les valeurs de l_{s1D} et l_{s2D} comme le montre les équations 3.40 et 3.41 respectivement.

$$l_{s1D} = \frac{\Delta q_i}{\sin(\theta_i^{DR})} \quad (3.40)$$

$$l_{s2D} = \frac{\Delta q_i + dq_i}{\sin(\theta_i^{DR} + d\theta_i^{DR})} \quad (3.41)$$

En utilisant les propriétés des sinus, l'expression 3.41 devient l'équation 3.42.

$$l_{s2D} = \frac{\Delta q_i + dq_i}{\sin(\theta_i^{DR}) \cos(d\theta_i^{DR}) + \cos(\theta_i^{DR}) \sin(d\theta_i^{DR})} \quad (3.42)$$

Sachant que l'angle $d\theta_i^{UR}$ peut être considéré comme infiniment petit, l'expression de l_{s2D} devient l'équation 3.43.

$$l_{s2D} = \frac{\Delta q_i + dq_i}{\sin(\theta_i^{DR}) (1 + \cos(\theta_i^{DR}) d\theta_i^{DR})} \quad (3.43)$$

De cette manière, la variation de la longueur de la ligature de pile entre le plat i et le plat k peut être écrite sous la forme de l'expression 3.44.

$$dl = l_{s2D} - l_{s1D} = \frac{\Delta q_i + dq_i}{\sin(\theta_i^{DR}) + \cos(\theta_i^{DR}) d\theta_i^{DR}} - \frac{\Delta q_i}{\sin(\theta_i^{DR})} \quad (3.44)$$

En ré-arrangeant les termes de cette dernière équation, dl peut finalement s'écrire sous la forme de l'expression 3.45.

$$dl = \frac{dq_i \sin(\theta_i^{DR}) - d\theta_i^{DR} \Delta q_i \cos(\theta_i^{DR})}{\sin^2(\theta_i^{DR}) + d\theta_i^{DR} \sin(\theta_i^{DR}) \cos(\theta_i^{DR})} = \frac{dq_i \sin(\theta_i^{DR}) - d\theta_i^{DR} \Delta q_i \cos(\theta_i^{DR})}{\sin^2(\theta_i^{DR})(1 + d\theta_i^{DR} \cot(\theta_i^{DR}))} \quad (3.45)$$

Afin de pouvoir de pouvoir continuer, le dénominateur de l'équation 3.45 est développé en série de Taylor (équation 3.46).

$$\frac{1}{(1 + d\theta_i^{DR} \cot(\theta_i^{DR}))} = \left(1 - d\theta_i^{DR} \cot(\theta_i^{DR}) + \underbrace{(d\theta_i^{DR} \cot(\theta_i^{DR}))^2 - (d\theta_i^{DR} \cot(\theta_i^{DR}))^3 + \dots}_{\rightarrow 0}\right) \quad (3.46)$$

L'angle $d\theta_i^{DR}$ étant infiniment petit, tout ce qui est d'ordre supérieur à 1 tend vers zéro. Par conséquent, l'expression 3.45 peut se réécrire comme l'équation 3.47.

$$dl = \frac{dq_i \sin(\theta_i^{DR}) - d\theta_i^{DR} \Delta q_i \cos(\theta_i^{DR})}{\sin^2(\theta_i^{DR})} (1 - d\theta_i^{DR} \cot(\theta_i^{DR})) \quad (3.47)$$

En négligeant à nouveau tous les termes correspondant à un produit de deux quantités infinitésimales et en ré-arrangeant les termes, l'expression de la variation de la longueur de la ligature lorsqu'un plat j subit une légère perturbation devient finalement l'équation 3.49.

$$dl = \frac{dq_i}{\sin(\theta_i^{DR})} - \frac{d\theta_i^{DR} \Delta q_i \cos(\theta_i^{DR})}{\sin^2(\theta_i^{DR})} \quad (3.48)$$

$$\frac{dl}{dq_i} = \frac{1}{\sin(\theta_i^{DR})} - \frac{d\theta_i^{DR}}{dq_i} \Delta q_i \frac{\cot(\theta_i^{DR})}{\sin(\theta_i^{DR})} \quad (3.49)$$

L'expression de la dérivée de θ_i^{DR} par rapport à dq_i étant donnée par l'équation 3.38, l'élément i du vecteur \underline{k}_{s2} correspond donc à l'expression 3.50.

$$k_{s2}^i = \frac{\partial l}{\partial q_i} = \frac{1}{\sin(\theta_i^{DR})} - \cos^2(\theta_i^{DR}) \tan(\theta_i^{DR}) \frac{\cot(\theta_i^{DR})}{\sin(\theta_i^{DR})} = \sin(\theta_i^{DR}) \quad (3.50)$$

En procédant de la sorte pour tous les angles de contact "Down" à droite et à gauche, il est possible de déterminer complètement le vecteur \underline{k}_{s1} .

Résumé En conclusion, la matrice tangente est donnée par l'équation 3.51 où la matrice $\underline{\underline{K}}$ correspond à la matrice de rigidité et s'écrit sous la forme de l'expression 3.52

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{0}} & \frac{1}{\Delta t} \underline{\underline{I}} & -\delta \underline{\underline{I}} \\ \frac{1}{\Delta t^2} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} & -\alpha \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}_p + \underline{\underline{K}}_s \quad (3.52)$$

Finalement, les deux derniers paragraphes de cette section ont pu montrer que la matrice de rigidité pouvait s'exprimer sous la forme de l'expression 3.53.

$$\underline{\underline{K}}_s = \underline{k}_{s1} \left(\frac{E_s A_s}{L_{0s}} (L_{0s} - l_s) + T_s \right) - \sin(\theta) \underline{k}_{s2} \frac{E_s A_s}{L_{0s}} \quad (3.53)$$

Une routine a donc été créée dans MATLAB permettant sur base des dernières équations présentées dans cette section de construire totalement la matrice tangente pour une configuration quelconque de pile déformée.

Validation Matrice Tangente Même si la matrice tangente ne conditionne pas forcément la convergence des itérations secondaires, elle influence fortement le nombre d'itérations nécessaires pour arriver à la convergence à l'intérieur d'un pas de temps et par conséquent le temps d'exécution total du code de calculs. Il est dès lors capital de vérifier que la matrice tangente soit au plus proche de la réalité afin d'assurer un temps d'exécution optimal. Concrètement, il n'est pas nécessaire de vérifier toutes les sous-matrices de la matrice tangente mais seulement la matrice de rigidité $\underline{\underline{K}}$ et même plus précisément $\underline{\underline{k}}_{s1}$ et $\underline{\underline{k}}_{s2}$.

Pour ce faire, ces matrices sont calculées numériquement à l'aide de la routine de contact dans des cas particuliers et sont ensuite comparées aux mêmes matrices mais déterminées cette-fois ci avec la routine de construction de la matrice tangente.

Un exemple quelconque de pile déformée est donc considéré pour lequel les angles de contact initiaux ainsi que la longueur de la ligature de pile initiale sont calculés. Ensuite, la longueur déformée de la ligature de pile et les angles de contact sont recalculés lorsqu'un des plats de la pile a subi une légère perturbation permettant ainsi de trouver la variation des angles de contact et de la longueur de la ligature entre la configuration initiale et perturbée. En effectuant cette opération pour tous les plats de la pile, il est ainsi possible de déterminer numériquement la matrice $\underline{\underline{k}}_{s1}$ et le vecteur $\underline{\underline{k}}_{s2}$.

Les trois exemples de pile déformée présentés à la Figure 3.16 illustrent la validation qui a été effectuée. En réalité, un plus grand nombre de cas tests ont été étudiés afin de vérifier la matrice tangente mais seulement trois sont représentés ici dans le but d'illustrer cette opération.

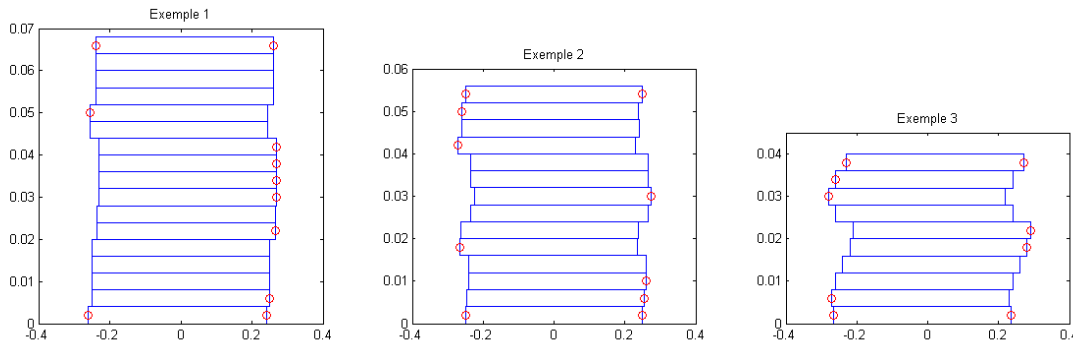


FIGURE 3.16 : Schéma - Exemples considérés pour la validation de la matrice tangente ; Rond rouge - Contact

La matrice $\underline{\underline{k}}_{s1}$ et le vecteur $\underline{\underline{k}}_{s2}$ sont donc calculés d'une part avec la routine de contact et d'autre part avec la routine de construction de la matrice tangente. Afin de différencier les deux méthodes de calculs, un indice c est utilisé pour les résultats sortant de la routine de contact et un indice mt est utilisé pour les résultats issus de la routine de construction de la matrice tangente. La Figure 3.17 présente les matrices $\underline{\underline{k}}_{s1}$ obtenues avec les deux méthodes de calculs pour les trois exemples considérés. Afin de représenter graphiquement une matrice, une couleur est attribuée à chaque cellule de la matrice en fonction de sa valeur.

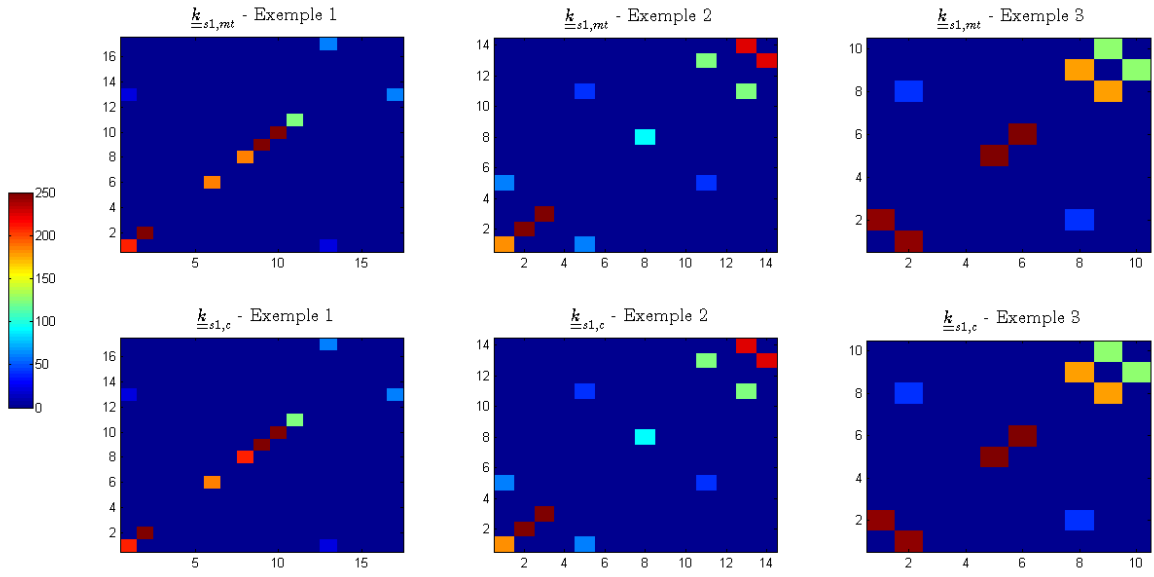


FIGURE 3.17 : Représentations matrices \underline{k}_{s1} dans les exemples considérés pour la validation de la routine de construction de la matrice tangente

Il apparaît directement que dans les trois exemples présentés ici, les deux matrices calculées de manières différentes correspondent à chaque fois. Au niveau des valeurs numériques, il subsiste toujours une petite différence entre les deux matrices résultant du choix fait pour l'intensité de perturbation imposée à chaque degré de liberté lorsque la matrice est calculée à l'aide de la routine de contact.

De la même manière, il est possible de tracer l'évolution des éléments du vecteur $\underline{k}_{s2,c}$ et $\underline{k}_{s2,mt}$ en fonction du plat considéré pour chacun des trois exemples comme le montre la Figure 3.18.

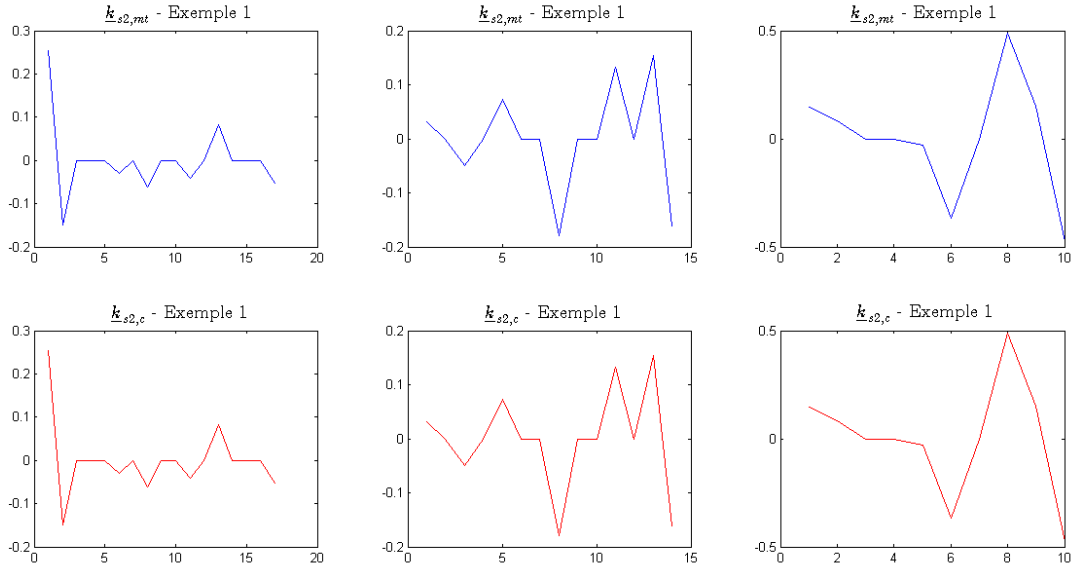


FIGURE 3.18 : Représentations vecteur \underline{k}_{s2} dans les exemples considérés pour la validation de la routine de construction de la matrice tangente

A nouveau, il apparaît directement que les deux méthodes de calcul permettent d'obtenir des résultats identiques. Une faible erreur existe tout de même en fonction de la valeur attribuée à la perturbation donnée à chacun des plats.

En plus de ces vérifications numériques, quelques cas tests simples ont également été calculés manuellement afin de pouvoir les comparer aux solutions obtenues avec la routine de construction de la matrice tangente. Il en est ressorti que toutes les méthodes de calculs permettent d'obtenir les mêmes matrices \underline{k}_{s1} et les mêmes vecteurs \underline{k}_{s2} .

De cette façon, il est assuré que la matrice tangente calculée dans le code de calculs est au plus proche de la réalité permettant ainsi de garantir un temps d'exécution optimal.

3.2.4 Validation

Une fois que le modèle est construit et implémenté, il est nécessaire de le valider afin de s'assurer qu'il représente convenablement la réalité. Pour ce faire, trois des essais (test 1, 2 et 3) réalisés par Mr. Denoël dans le travail [1] sont simulés dans le modèle de calculs afin de comparer les résultats numériques aux mesures expérimentales.

Ces essais consistaient à mesurer à l'aide d'un système d'acquisition optique les déplacements d'une pile de 60 plats de dimensions ($1200mm \times 250mm \times 4mm$) lorsque celle-ci est déposée sur une table à secousse dont l'accélération est fixée. En comparant les résultats expérimentaux avec les résultats obtenus par le modèle numérique, il est possible de vérifier si le code de calculs permet de représenter convenablement la réalité.

Les données correspondant aux tests effectués et utilisées dans le modèle sont résumées ci-dessous.

- 60 plats de dimensions ($1200mm \times 250mm \times 4mm$) et de $9,42kg$

- 2 ligatures de palette ($E_p = 200GPa$, $A_p = 12mm^2$, angle 78° , $T_p = 1600N$)
- 2 ligatures de pile ($E_s = 200GPa$, $A_s = 12mm^2$, $T_s = 1600N$)
- coefficient de frottement 0,2
- pas de temps $\Delta t = 0,45 \times 1e - 4$
- nombre itérations secondaires maximums $N_{it2} = 70$, précision convergence $2.10^{-3}m/s^2$

Les Figures 3.19, 3.20 et 3.21 représentent les déplacements absolus du premier et du dernier plat de la pile obtenus numériquement et expérimentalement pour les tests 1, 2 et 3 respectivement.

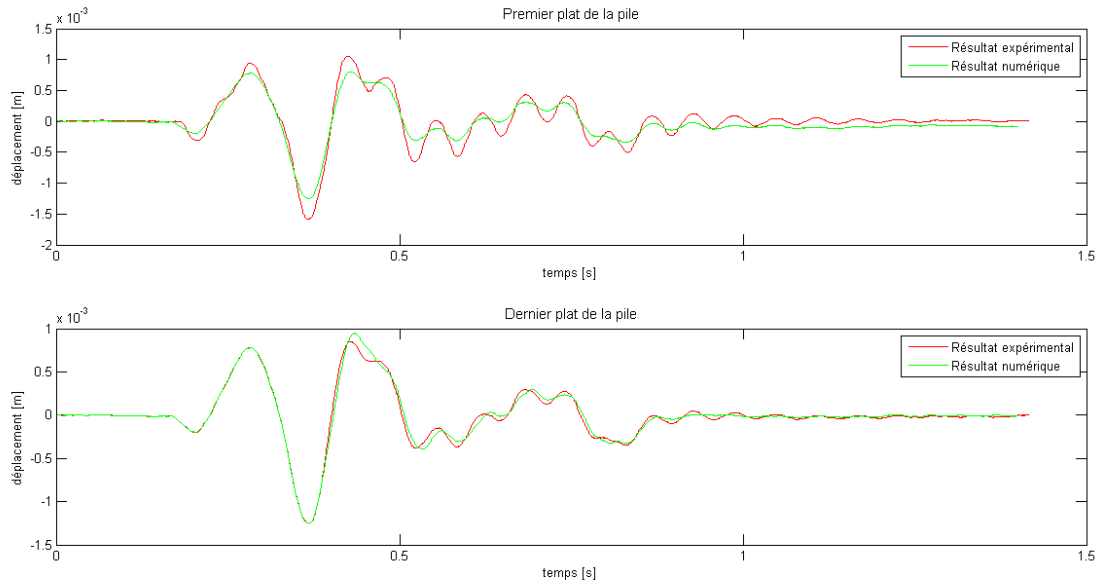


FIGURE 3.19 : Graphique - Validation algorithme à N degrés de liberté test1 ($0,2g$)- Évolution déplacement absolu dans le temps du premier et du dernier plat de la pile; Rouge - résultat expérimental; Vert - résultat numérique

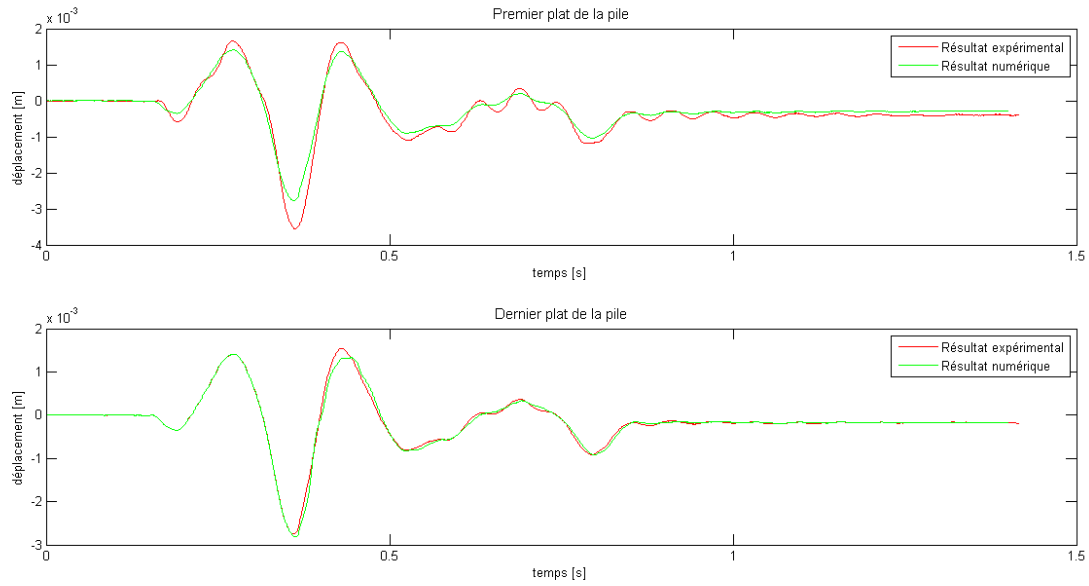


FIGURE 3.20 : Graphique - Validation algorithme à N degrés de liberté test2 ($0,4g$)- Évolution déplacement absolu dans le temps du premier et du dernier plat de la pile; Rouge - résultat expérimental; Vert - résultat numérique

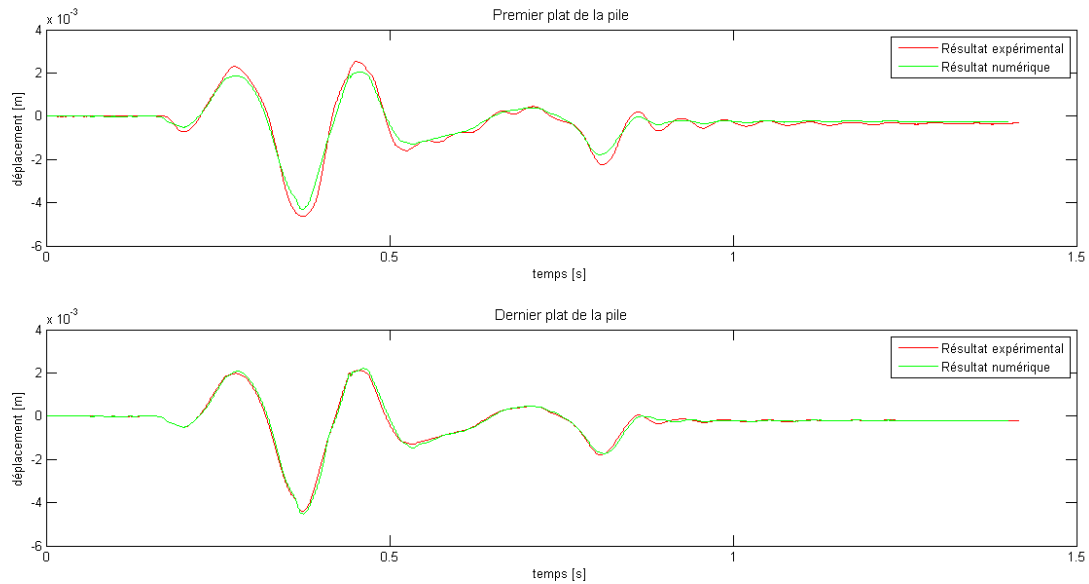


FIGURE 3.21 : Graphique - Validation algorithme à N degrés de liberté test1 ($0,6g$)- Évolution déplacement absolu dans le temps du premier et du dernier plat de la pile; Rouge - résultat expérimental; Vert - résultat numérique

Pour les trois cas étudiés, il apparaît directement que les résultats numériques sont très proches des mesures effectuées pendant les essais. Afin de quantifier l'erreur commise par le modèle numérique, l'aire de la surface se trouvant entre les deux courbes est calculée dans chaque cas. Le tableau suivant résume les erreurs obtenues dans chacun des tests analysés.

Test n°	Premier plat de la pile	Dernier plat de la pile
1	1,8e-2 m	2,2e-4 m
2	2,7e-2 m	4,1e-3 m
3	4,0e-2 m	8,4e-3 m

Ces valeurs étant relativement faibles, il peut être conclu que le modèle numérique représente suffisamment correctement la réalité. Les Figures 3.19 à 3.21 montrent tout de même certaines dissemblances entre les deux résultats, surtout pour le premier plat de la pile. Effectivement, plusieurs phénomènes comme par exemple l'enfoncement des plats dans la palette en bois ne sont pas modélisés alors qu'ils existent en réalité. En outre, la loi de comportement de la ligature n'est en réalité pas simplement linéaire élastique comme il est supposé dans ce travail. Il a effectivement été montré dans l'étude [1] que les ligatures ont un comportement qui se rapproche à celui des câbles. Finalement, il existe également en réalité une rotation des plats les uns sur les autres qui n'est pas modélisé dans le modèle numérique. Par conséquent, quelques différences persistent entre la solution numérique et les mesures.

Chapitre 4

Application

4.1 Accélération - Mesures sur site

4.1.1 Introduction

Afin de pouvoir quantifier et caractériser au mieux les sollicitations qu'une pile de plats peut subir, plusieurs essais consistant à mesurer les accélérations sur des engins pendant des opérations de manoeuvre ont été réalisées.

4.1.2 Dispositif expérimental

ArcelorMittal Tailored Blanks utilisant des transpalettes électriques pour manipuler les piles de plats à l'intérieur de l'usine, les premiers essais ont été réalisés avec un de ces engins. Ensuite, des essais ont été réalisés avec un camion afin de pouvoir également quantifier les impacts que peuvent subir des piles de plat lorsqu'elles sont transportées de l'usine jusqu'au client.

Afin de mesurer les accélérations des véhicules, des accéléromètres de la marque MicroSys ont été utilisés. Ces accéléromètres permettent de mesurer les accélérations dans les trois directions de l'espace et de les transmettre directement à un ordinateur. Afin de fixer ces appareils sur les véhicules, du simple ruban adhésif a été utilisé. La Figure 4.1 est un cliché d'un des accéléromètres utilisés.

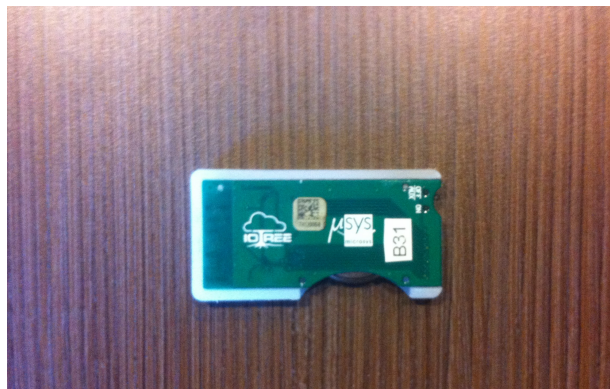


FIGURE 4.1 : Photographie - Accéléromètre

Une partie des essais réalisés avec le chariot élévateur ont été faits à vide et une autre partie ont été faits en transportant une pile de plats afin de pouvoir apprécier l'effet d'une charge sur le profil des accélérations. La masse de la palette et de la pile de plats utilisée avec le transpalette est de 1,38 tonne.

4.1.3 Liste des essais

Les essais sont présentés dans la suite chronologique dans laquelle ils ont été réalisés. Dans un premier temps, deux accéléromètres ont été posés sur le chariot élévateur à vide pendant qu'il effectuait des freinages d'urgence dans la cour extérieure de l'usine (Essai n° 1). Les deux accéléromètres ont été posés symétriquement sur le cadre des fourches du transpalette.

Ensuite, toujours avec le transpalette à vide, des mesures ont été effectuées à l'intérieur de l'usine permettant ainsi de mettre en évidence des freinages d'urgence mais également des virages (Essai n° 2).

Une fois les essais avec le chariot élévateur vide terminés, une pile de plats de 1,38 tonne a été placée sur le chariot élévateur et des freinages d'urgence ont encore été effectués (Essai n° 3). Finalement, les dernières mesures effectuées avec le transpalette chargé consistait à effectuer des freinages d'urgence dans la cour extérieure de l'usine (Essai n° 4).

Les deux accéléromètres ont été ensuite placés sur le camion mis à disposition par ArcelorMittal Tailored Blanks (Essai n° 5). Cet essai permet de mettre en évidence le type de freinage d'urgence d'un camion mais également les accélérations latérales que subira une pile de plats si le camion effectue des virages à grande vitesse.

En conclusion, voici un tableau récapitulatif reprenant les différents essais réalisés ainsi que le type de sollicitation mis en évidence par chacun de ces essais.

Essai	Descriptif Essai	Sollicitation mise en évidence
n° 1	Transpalette vide extérieur	Freinage d'urgence avant et arrière
n° 2	Transpalette vide intérieur	Freinage d'urgence & Virage
n° 3	Transpalette chargé intérieur	Freinage d'urgence
n° 4	Transpalette chargé extérieur	Freinage d'urgence
n° 5	Camion extérieur	Freinage d'urgence & Virage

4.1.4 Dépouillement résultats bruts

Cette section présente les résultats bruts ressortis des accéléromètres et localise les événements intéressants à étudier.

Essai n° 1 Les mesures du premier essai sont représentées à la Figure 4.2. Les trois graphiques correspondent respectivement aux accélérations dans les sens x, y et z .

Les virages capturés dans cet essai ne sont pas suffisamment marqués pour pouvoir en tirer de l'information utile. C'est pourquoi, seuls des freinages d'urgence sont identifiés dans cette partie. Le sens de la conduite étant y , les freinages d'urgence s'observent sur le deuxième graphique.

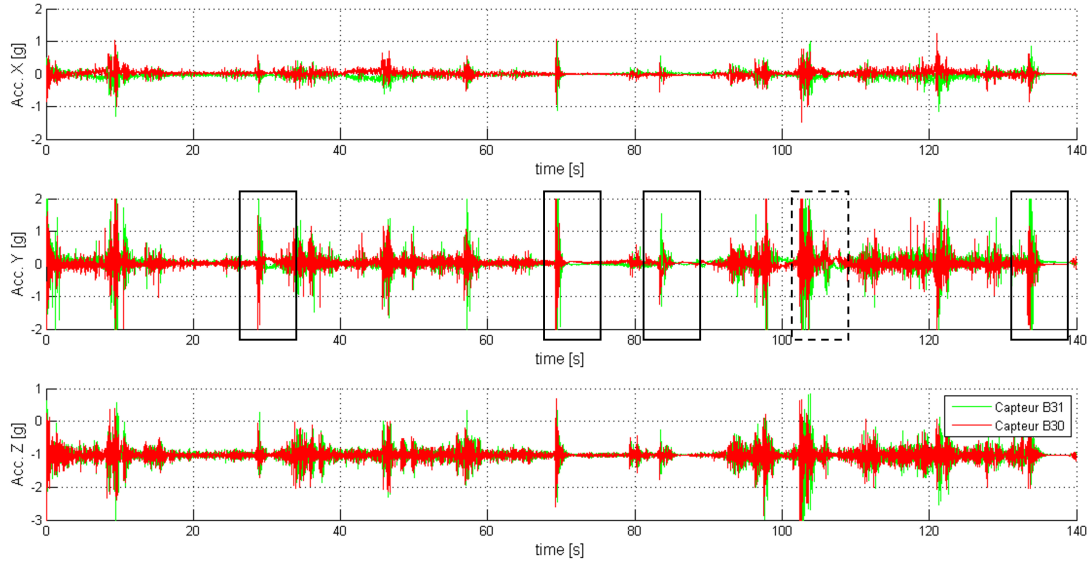


FIGURE 4.2 : Graphique - Résultats bruts Essai n° 1; 1^{er} graphique : Accélération selon x ; 2^e graphique : Accélération selon y ; 3^e graphique : Accélération selon z ; Pour les trois graphiques : Rouge - capteur B30; Vert - capteur B31

Le deuxième graphique de la Figure 4.2 affiche 5 freinages d'urgence localisés par des cadres noirs. Les 4 cadres en trait continu correspondent à des freinage effectués en marche avant alors que le cadre en traits discontinus correspond à un freinage en marche arrière.

A l'aide d'un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure a été choisie adéquatement¹, il est possible de supprimer les vibrations à hautes fréquences correspondant, par exemple, aux vibrations induites par le moteur du chariot élévateur. En d'autres termes, le filtre lisse les résultats bruts en supprimant les fréquences représentant le bruit ambiant gênant pour l'analyse des mesures. De la sorte, il est possible de représenter lisiblement les freinages d'urgence localisés à la Figure 4.2. La Figure 4.3 représente les quatre freinages d'urgence effectués en marche avant et la Figure 4.4 représente le freinage d'urgence effectué en marche arrière.

¹Concrètement, un filtre de type moyenne mobile classique a été utilisé et le nombre de points pris en considération dans la moyenne mobile a été choisie de façon à ce que toutes les fréquences plus hautes que la fréquence du freinage d'urgence (environ 1Hz) soient atténuées. En outre, les données sont également filtrées en parcourant le temps en sens inverse de manière à effacer les éventuels déphasages résultant d'un simple filtre à moyenne mobile. Toutes ces opérations sont effectuées à l'aide de fonctions prédéfinies dans MATLAB.

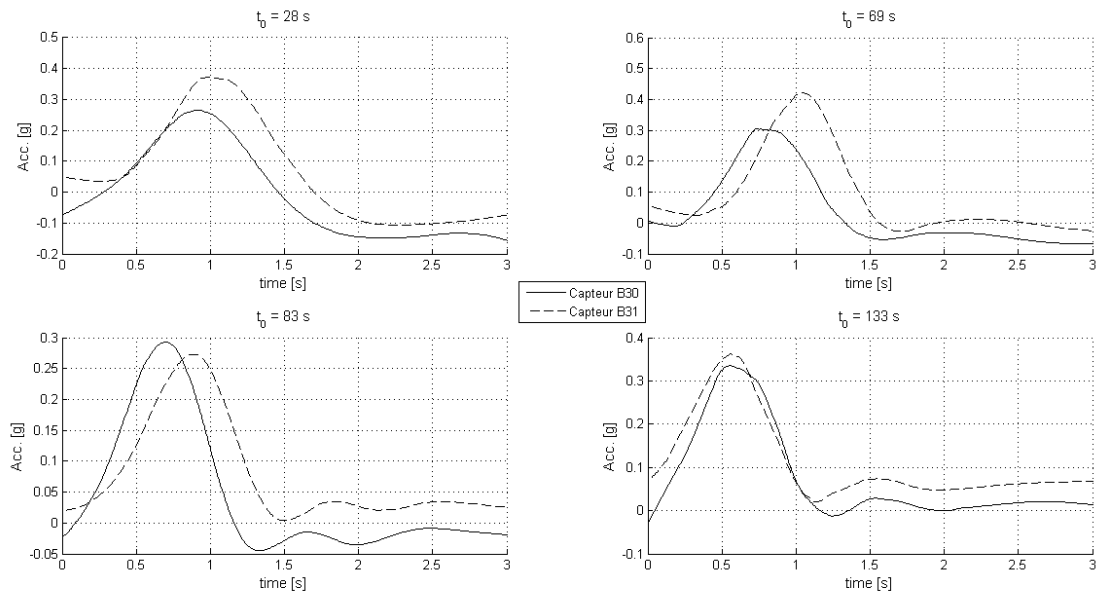


FIGURE 4.3 : Graphique - Résultats lissés Frein avant Essai n° 1

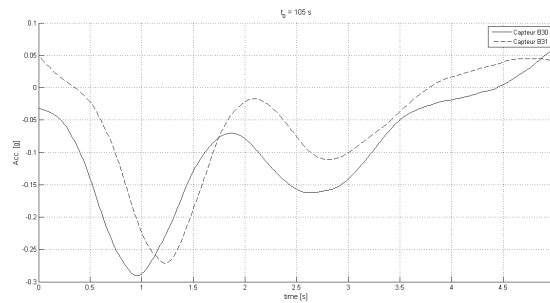


FIGURE 4.4 : Graphique - Résultats lissés Frein arrière Essai n° 1

Ces graphiques montrent que l'intensité d'un freinage d'urgence effectué en marche avant va de $0,3g$ à $0,4g$ alors que le freinage d'urgence effectué en marche arrière a une intensité nominale $0,27g$. Les freinages d'urgence en marche arrière sont donc moins violents que les freinages effectués en marche avant.

En outre, le comportement après que le pic soit atteint est également différent en fonction du sens dans lequel le freinage d'urgence est effectué. Pendant un freinage en marche avant, l'accélération retourne à sa valeur initiale sans trop osciller. À l'opposé, de grandes oscillations et un temps avant de retomber à zéro plus long sont observés lorsqu'un freinage en marche arrière est effectué. Cette différence dans le comportement du freinage correspond en fait aux différences entre les caractéristiques des systèmes de freinage en marche avant et arrière.

Essai n° 2 Les mesures du second essai se déroulant à l'intérieur de l'usine sont représentées à la Figure 4.5. Les trois graphiques correspondent respectivement aux accélérations dans les sens x, y et z .

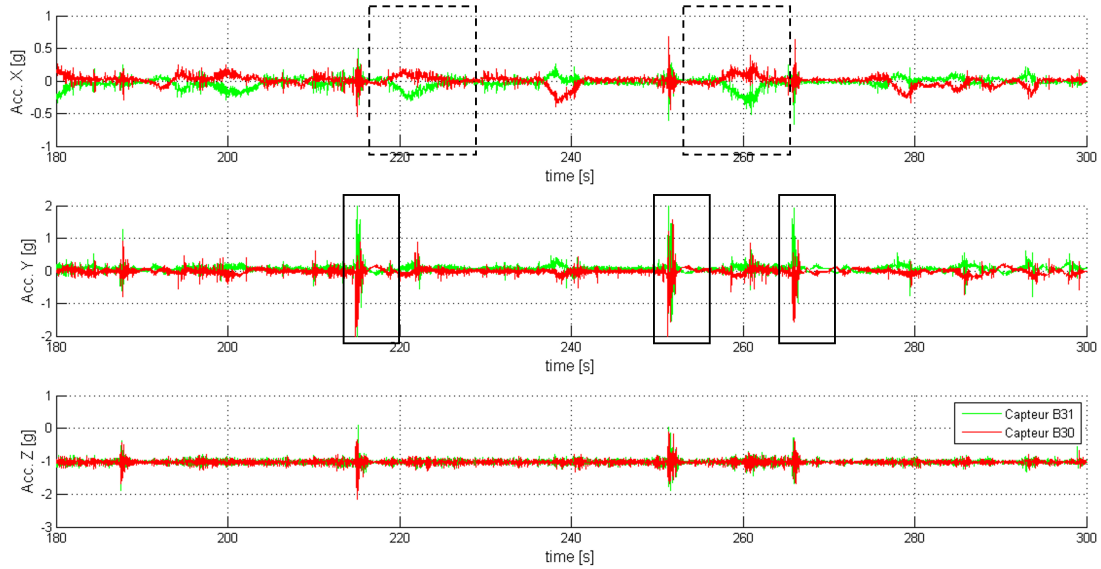


FIGURE 4.5 : Graphique - Résultats bruts Essai n° 2; 1^{er} graphique : Accélération selon x ; 2^e graphique : Accélération selon y ; 3^e graphique : Accélération selon z ; Pour les trois graphiques : Rouge - capteur B30; Vert - capteur B31

Le deuxième graphique de la Figure 4.5 illustrant les accélérations dans le sens de la conduite permet de localiser trois freinages d'urgence. Ils sont indiqués sur la Figure 4.5 par des cadres noirs en trait continu.

Cet essai permet également de mettre en évidence l'accélération latérale subie par le chariot élévateur lorsqu'il effectue un demi-tour. Ces événements sont localisés par des cadres noirs en traits discontinus sur le premier graphique de la Figure 4.5 représentant les accélérations latérales.

De la même manière que pour le premier essai, il est possible de lisser les freinages d'urgence ainsi que les virages mesurés dans cet essai de manière à obtenir des courbes lisibles et exploitables. Les Figures 4.6 et 4.7 représentent respectivement les freinages et le virage capturés après avoir filtré les données brutes.

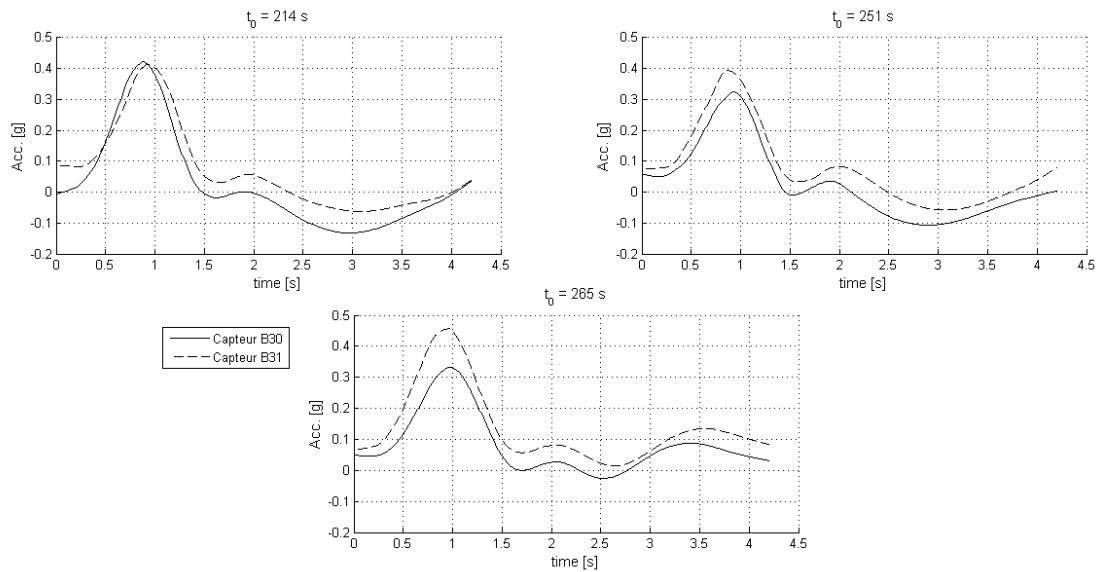


FIGURE 4.6 : Graphique - Résultats lissés Frein avant Essai n° 2

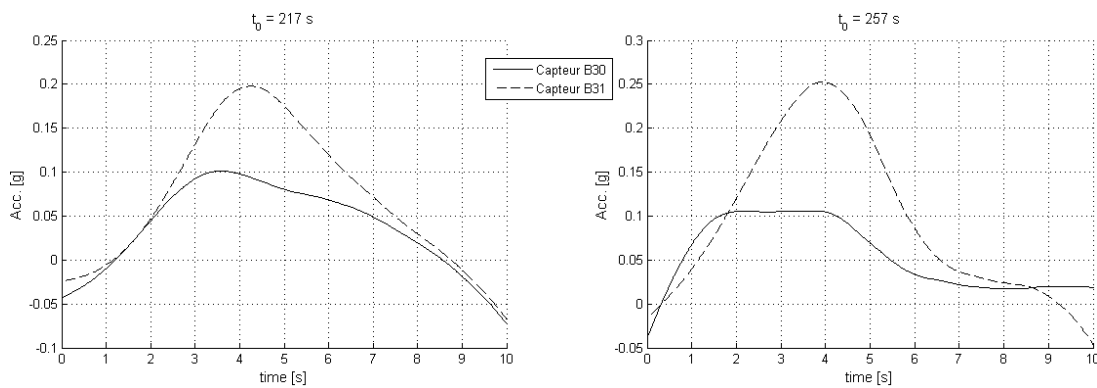


FIGURE 4.7 : Graphique - Résultats lissés Virage Essai n° 2

L'intensité des freinages est toujours du même ordre de grandeur que ceux effectués à l'extérieur (essai n° 1), à savoir de $0,3g$ à $0,4g$. Cependant, l'allure de la courbe après le pic diffère légèrement. Premièrement, le temps global pour l'accélération se stabilise est plus important. Lors des freinages exécutés à l'extérieur ce temps était d'environ 2,5 secondes alors qu'à l'intérieur ce temps varie de 3,5 à 4 secondes. Il faut donc un temps plus long pour effectuer un freinage à l'intérieur. Le sol à l'extérieur n'ayant pas subi de traitement de surface particulier à l'opposé du sol à l'intérieur de l'usine, la rugosité du sol à l'extérieur est plus importante qu'à l'intérieur. Dès lors, le transpalette met moins de temps pour s'arrêter à l'extérieur.

L'évolution de l'accélération latérale subit par les plats pendant un virage est assez différente de l'évolution de l'accélération pendant un freinage. Premièrement, une différence notable est observée entre les accélérations mesurées par les deux capteurs. Comme les accéléromètres sont placés à deux endroits différents sur le transpalette, le bras de levier par rapport au centre de rotation du virage effectué est différent pour les deux capteurs. Il en résulte d'une part une intensité différente entre les deux capteurs et d'autre part une allure de l'évolution qui est également différente pour les deux

capteurs. Du point de vue des intensités globales, le côté se trouvant le plus au centre subit une accélération de l'ordre de $0,1g$ alors que le côté avec le plus grand rayon de courbure subit une accélération allant de $0,2g$ à $0,25g$.

Pour la pile de plats, la sollicitation est donc différente de chaque côté. C'est-à-dire que, globalement, la pile de plats subirait en réalité une accélération dont l'évolution se placerait entre les deux courbes présentées aux graphiques de la Figure 4.7.

Essai n° 3 La Figure 4.8 présente les accélérations obtenues lorsque le chariot élévateur est chargé avec une pile de plats de 1,38 tonne. Les trois graphiques correspondent respectivement aux accélérations dans les sens x, y et z .

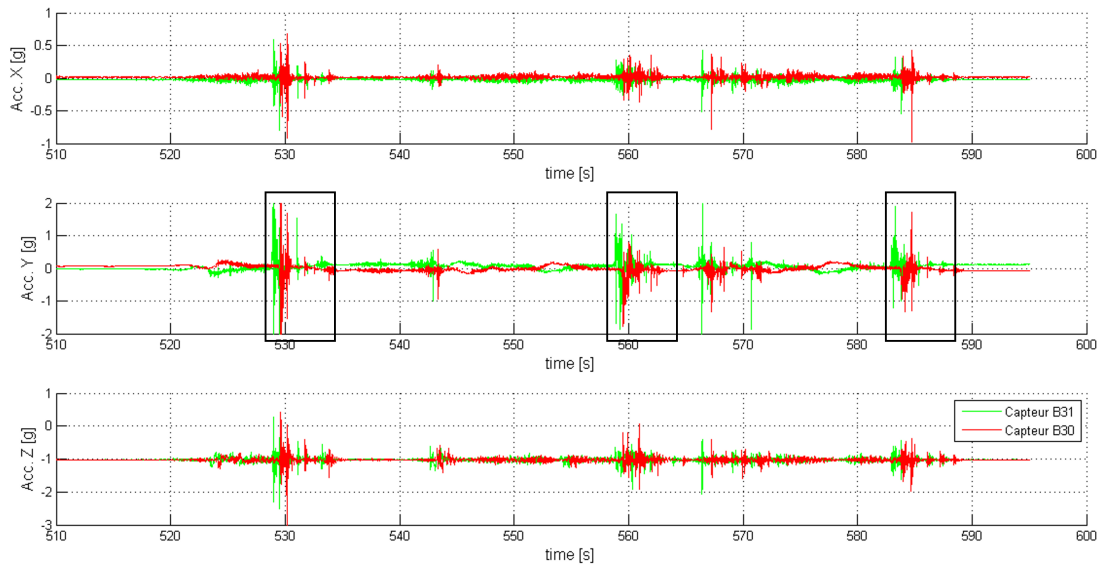


FIGURE 4.8 : Graphique - Résultats bruts Essai n° 3; 1^{er} graphique : Accélération selon x ; 2^e graphique : Accélération selon y ; 3^e graphique : Accélération selon z ; Pour les trois graphiques : Rouge - capteur B30; Vert - capteur B31

Trois freinages d'urgence distincts sont localisés par des cadres noirs sur le deuxième graphique de la Figure 4.8. Les virages effectués n'étant pas suffisamment prononcés durant cet essai, il est difficile d'obtenir des informations utiles concernant l'accélération latérale.

La Figure 4.9 représente les trois freinages d'urgence définis à la Figure 4.8 obtenus après lissage.

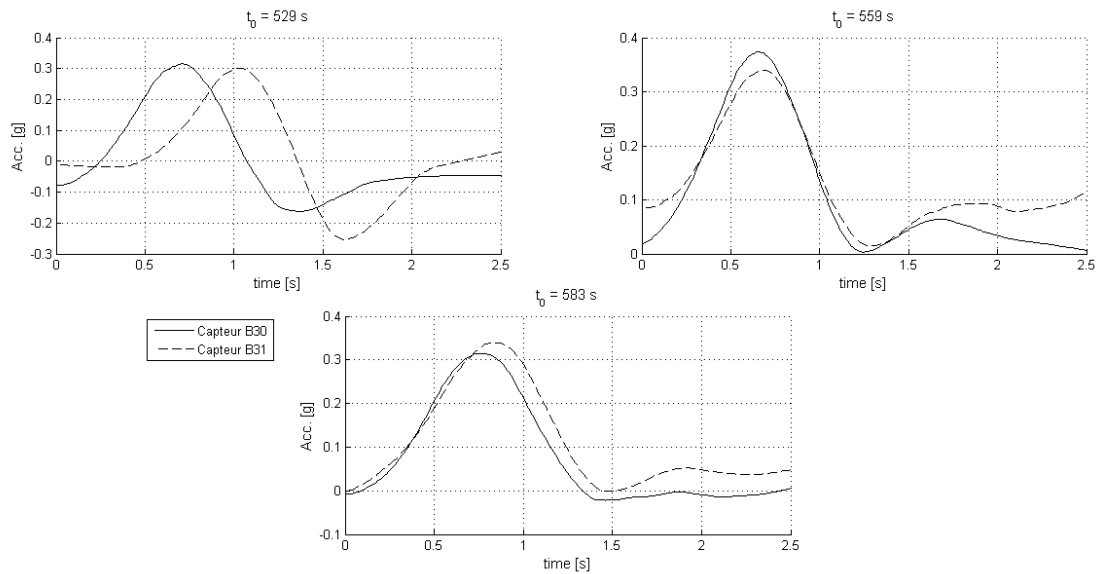


FIGURE 4.9 : Graphique - Résultats lissés Frein avant Essai n° 3

Par rapport aux freinages d'urgence effectués sans chargement, la principale différence s'observe après le pic. Effectivement, le freinage effectué avec chargement présente moins d'oscillation après la retombée d'accélération et se stabilise donc plus vite. Le freinage est donc plus brusque dans ces conditions. Les intensités globales du pic d'accélération sont semblables à celles observées pour le test sans chargement.

Essai n° 4 Les mesures prises lorsque le transpalette chargé manoeuvre dans la cour extérieure de l'usine sont représentées à la Figure 4.10. Les trois graphiques correspondent respectivement aux accélérations dans les sens x, y et z .

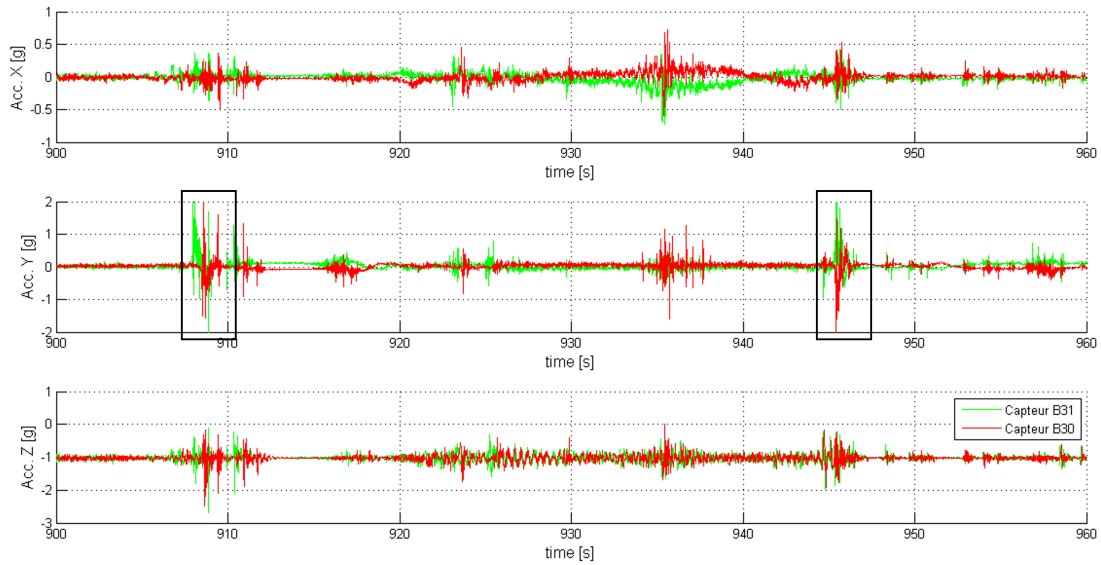


FIGURE 4.10 : Graphique - Résultats bruts Essai n° 4; 1^{er} graphique : Accélération selon x ; 2^e graphique : Accélération selon y ; 3^e graphique : Accélération selon z ; Pour les trois graphiques : Rouge - capteur B30; Vert - capteur B31

Dans ce dernier essai effectué avec le chariot élévateur, seulement deux freinages d'urgence peuvent être convenablement dégagés des données brutes. Sur la Figure 4.10, ils sont localisés par les cadres noirs.

La Figure 4.11 présente ensuite ces deux freinages d'urgence obtenus après la procédure de lissage.

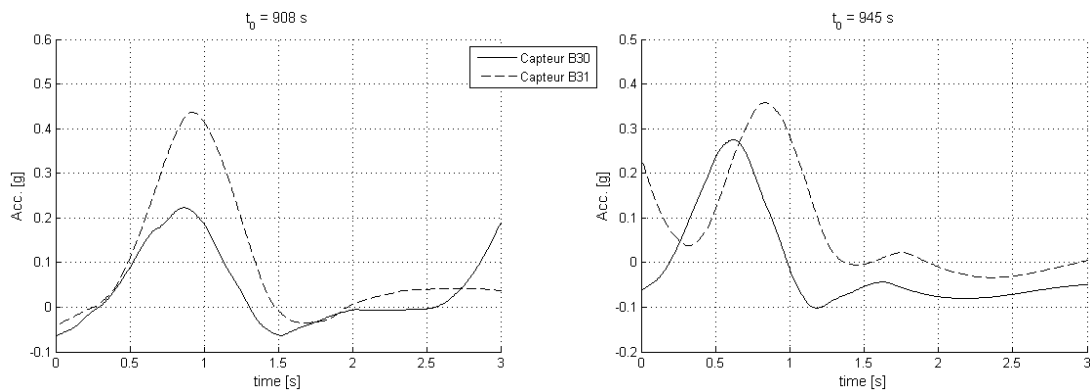


FIGURE 4.11 : Graphique - Résultats lissés Frein avant Essai n° 4

Ces graphiques montrent à nouveau que le temps de freinage est plus court à l'extérieur qu'à l'intérieur. Pour un freinage à l'intérieur avec chargement le temps de freinage était de plus ou moins 2,5 secondes alors que maintenant le temps de freinage est d'environ 2 secondes. Par rapport au freinage à vide effectué à l'extérieur, ce temps est plus court. Le freinage est donc plus brusque lorsque le transpalette est chargé.

Essai n° 5 La Figure 4.12 illustre les accélérations brutes obtenues lorsque les accéléromètres étaient placés sur le camion. Les trois graphiques correspondent respectivement aux accélérations dans les sens x, y et z .

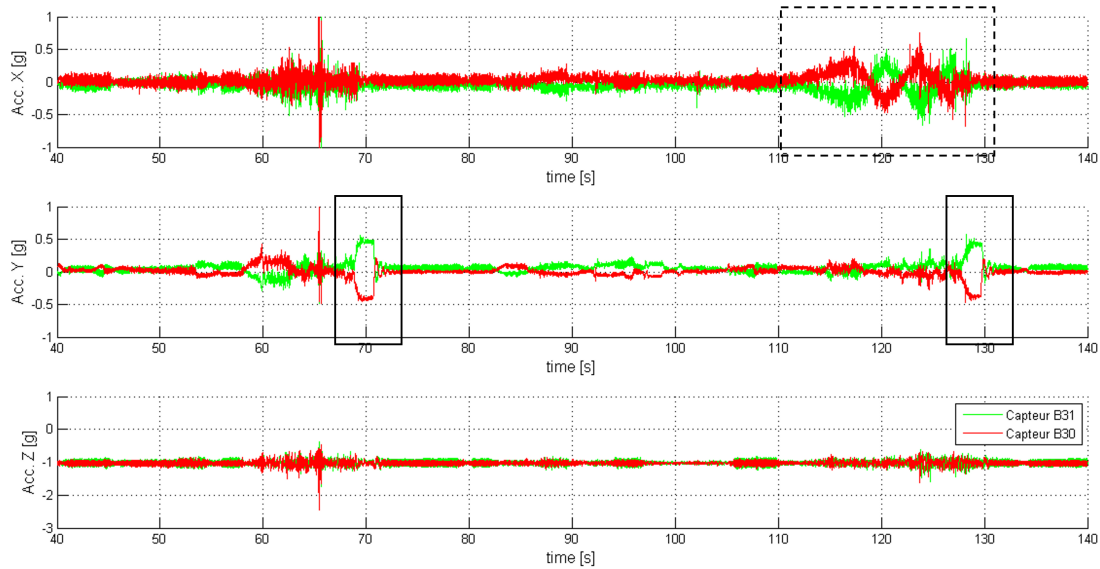


FIGURE 4.12 : Graphique - Résultats bruts Essai n° 5; 1^{er} graphique : Accélération selon x ; 2^e graphique : Accélération selon y ; 3^e graphique : Accélération selon z ; Pour les trois graphiques : Rouge - capteur B30; Vert - capteur B31

Les cadres noirs en trait continu représentés à la Figure 4.12 correspondent aux deux freinages d'urgence effectués avec le camion. Le cadre noir en traits discontinus présenté au premier graphique de la Figure 4.12 correspond à l'accélération latérale subie par le camion pendant que celui-ci suit une trajectoire sinusoïdale. Autrement dit, cela correspond à des virages avec un grand rayon de courbure effectués à grande vitesse.

Comme pour les autres essais, les événements intéressants sont lissés et représentés aux Figures 4.13 et 4.14.

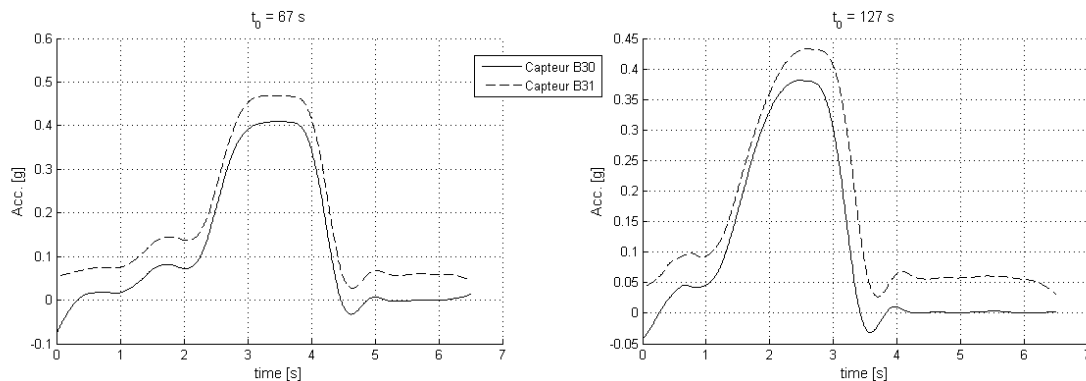


FIGURE 4.13 : Graphique - Résultats lissés Frein avant Essai n° 5

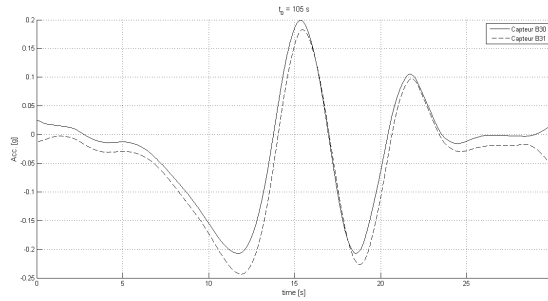


FIGURE 4.14 : Graphique - Résultats lissés Virage Essai n° 5

L'allure des accélérations longitudinales subit par un élément à l'intérieur du camion est totalement différente de celle obtenue pour le transpalette. Premièrement, le pic d'accélération maximale correspond plus à un palier pour le freinage du camion alors que le freinage du transpalette possède un pic assez prononcé. Par conséquent, le temps total de freinage pour le camion est beaucoup plus grand. En outre, la réponse après la retombée d'accélération diffère également par rapport au transpalette. Effectivement, des oscillations existent toujours mais elles sont très vite amorties contrairement aux freinages effectués avec le chariot élévateur. Au niveau des intensités nominales, les ordres de grandeur restent semblable à ceux obtenus pour le chariot élévateur, à savoir approximativement $0,4g$.

Lorsque les virages présentés ici ont été mesurés, le camion, roulant à grande vitesse, effectuait des ondulations de droite à gauche. En d'autres termes, le rayon de courbure des virages effectués ici est beaucoup plus grand que le rayon de courbure des virages effectués avec le transpalette. Dès lors, il n'y a pas vraiment de sens à comparer ces deux sollicitations. Les accéléromètres étant placés à deux endroits différents dans la direction latérale, les bras de levier du centre de giration aux capteurs sont différents pour les deux capteurs et les intensités sont donc également différentes entre les deux capteurs. Cependant, les rayons de courbure étant relativement grands par rapport à la distance entre les deux capteurs, la différence d'intensité est faible et l'accélération latérale peut être considérée comme constante sur toute la largeur du camion.

4.1.5 Résumé résultats

4.1.5.1 Freinage d'urgence

Le but de cette section est de définir une expression analytique pour les différents types de freinage qui ont pu être mesurés lors de la campagne de mesure. Pour rappel, il y a six types de freinage qui ont pu être capturés.

1. Freinage avant - Transpalette à vide - Extérieur (Essais n° 1)
2. Freinage arrière - Transpalette à vide - Extérieur (Essais n° 1)
3. Freinage avant - Transpalette à vide - Intérieur (Essais n° 2)
4. Freinage avant - Transpalette chargé - Intérieur (Essais n° 3)
5. Freinage avant - Transpalette chargé - Extérieur (Essais n° 4)
6. Freinage avant - Camion - Extérieur (Essais n° 5)

Afin de pouvoir caractériser ces différentes sollicitations, l'idée est de se baser sur les réalisations présentées à la section précédente en les ajustant sur une expression analytique paramétrée. Il y a donc plusieurs paramètres relatifs à une expression analytique pour chaque réalisation d'un type de freinage. En moyennant les paramètres obtenus pour chaque réalisation, il est possible de définir une courbe caractéristique pour le type de freinage considéré.

Afin d'ajuster les résultats lissés et présentés à la section précédente, une approximation basée sur la série de Fourier de la réalisation considérée est utilisée. En d'autres termes, chacune des réalisations vont être ajustées sur une expression du type 4.1.

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \quad (4.1)$$

Où a_i et b_i correspondent aux coefficients de Fourier de la réalisation étudiée. En fixant le nombre de coefficients pris en compte dans la série de Fourier, il est ainsi possible de déterminer une expression analytique pour chaque réalisation. Le nombre de coefficients utilisés varie entre 4 et 7 en fonction du type de freinage considéré.

En utilisant la moyenne des coefficients de Fourier obtenus pour chaque réalisation, une courbe caractéristique est définie pour les 6 types de freinage d'urgence.

La Figure 4.15 représente l'évolution caractéristique normalisée des différents freinages d'urgence opérés par le chariot élévateur et le camion. Le premier graphique à gauche permet de comparer un freinage d'urgence en marche arrière à un freinage d'urgence en marche avant. Le graphique se situant dans le coin supérieur droit représente les freinages caractéristiques obtenus avec le transpalette. Finalement, le graphique en partie inférieure illustre le freinage d'urgence effectué par un camion.

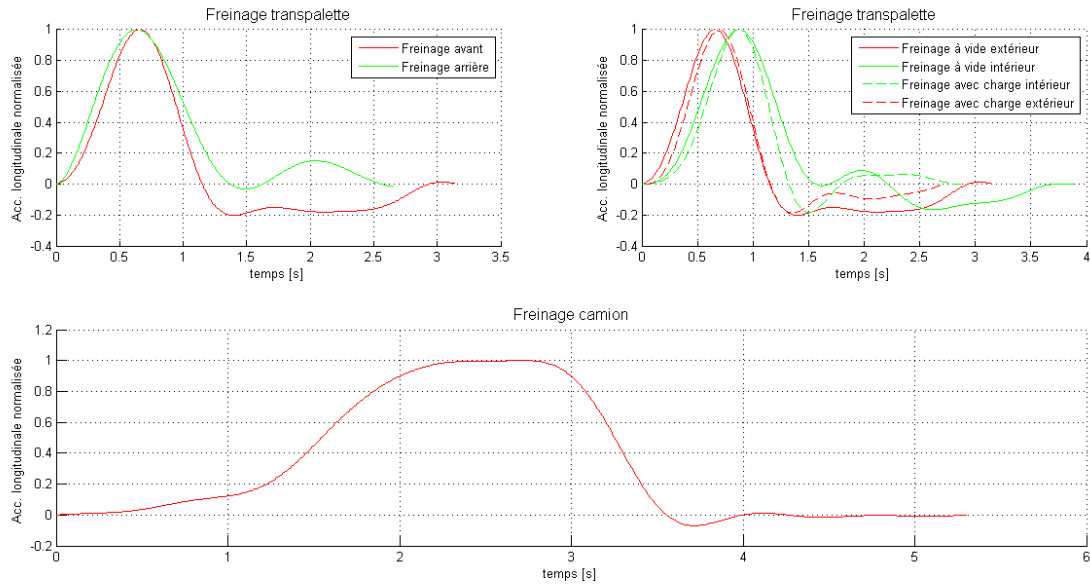


FIGURE 4.15 : Graphique - Profils d'accélération normalisée Freinage d'urgence

4.1.5.2 Virage

De la même manière que pour les freinages, il est possible de définir des courbes caractéristiques normalisées pour l'accélération latérale subie par une pile de plats lorsque qu'un camion ou un transpalette effectue un virage. A nouveau, les approximations des réalisations ont été faites sur base des coefficients de leur série de Fourier.

Il est donc ainsi possible de tracer les courbes représentées à la Figure 4.16 correspondant à un demi-tour effectué par le transpalette et à des virages effectués à grande vitesse par le camion.

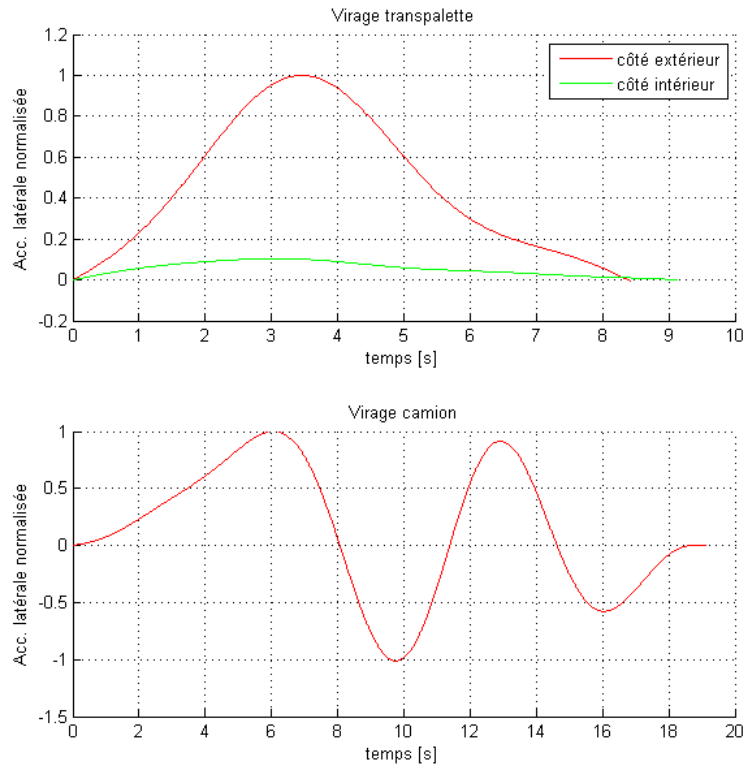


FIGURE 4.16 : Graphique - Profils d'accélération normalisée Virage

4.1.6 Conclusion

Grâce à ces différents essais, il a été possible de déterminer des profils d'accélération dans différentes configurations rencontrées en pratique. Tous ces profils correspondent donc des mouvements pouvant apparaître réellement au niveau du support.

L'évolution de l'accélération dans la direction de la pesanteur n'a pas été discutée dans cette analyse mais elle revêt tout de même un caractère important dans le problème étudié. Effectivement, si une accélération négative dans le sens de la pesanteur apparaît, il se produira une décompression des plats les uns sur les autres et la limite de glissement aux interfaces en sera diminuée. Par conséquent, la dynamique de la pile de plats en sera également influencée. Évidemment, cette considération est d'autant plus importante que le terrain sur lequel roule les engins de manoeuvre est accidenté ou bosselé.

Ces effets ne sont pas pris en compte dans le modèle développé dans ce travail. Cependant, une éventuelle décompression des plats restent un chemin d'amélioration qui pourrait être intégré dans ce modèle.

4.2 Étude principe de dimensionnement

En pratique, le principe de dimensionnement utilisé par ArcelorMittal Tailored Blanks est assez simple. Cela consiste à incliner d'un angle de 7° le support d'une pile de plats ligaturée et de regarder si les ligatures sont suffisantes pour maintenir la pile de plats stable. Si ce n'est pas le cas et que les déplacements sont trop importants ou voire même que les agrafes des ligatures s'ouvrent, il faut augmenter le nombre de ligatures. A l'opposé, si la pile de plats reste stable, le nombre de ligatures est considéré comme suffisant et la commande peut être envoyée aux clients.

Néanmoins, cette vérification permet-elle effectivement de garantir que le nombre de ligatures est suffisant pour maintenir la stabilité de la pile de plats lorsque celle-ci subit un quelconque incident ? C'est à cette question que toute cette partie va apporter des éléments de réponse.

Pour ce faire, des simulations dans plusieurs configurations² différentes sont effectuées d'une part pour une sollicitation correspondant à une inclinaison du support de 7° et d'autre part pour des sollicitations correspondant à des incidents pouvant réellement se produire. Grâce à ces simulations, un coefficient de sécurité représentant la stabilité de la pile est calculé à la fois pour la sollicitation correspondante à l'inclinaison du support et pour les sollicitations correspondantes à des incidents.

L'idée est d'ensuite comparer le coefficient de sécurité pour l'inclinaison du support aux coefficients de sécurité pour les incidents. Si le coefficient pour l'inclinaison du support dit que la pile est stable et que les coefficients pour les incidents le montrent également, il ne devrait pas y avoir de soucis. De la même manière, si le coefficient pour l'inclinaison du support dit que la pile ne sera pas stable et que les coefficients relatifs aux incidents le montrent également, cela signifierait que la méthode de dimensionnement est effectivement efficace. Par ailleurs, même si les coefficients relatifs aux incidents montrent qu'en réalité la pile restera stable alors que le coefficient pour l'inclinaison dit qu'il faut augmenter le nombre de ligatures, la méthode de dimensionnement resterait valide et serait même sécuritaire. Par contre, le cas le plus dangereux serait celui pour lequel le coefficient pour l'inclinaison dit que la pile sera stable alors que au moins un des coefficients pour les incidents montre que dans un cas particulier, elle ne le sera pas. Cela signifierait par conséquent que la méthode de dimensionnement des ligatures utilisée par ArcelorMittal Tailored Blanks ne permet pas de garantir la stabilité de la pile de plats si celle-ci subit un incident donné.

Il est possible de représenter ce raisonnement dans un graphique où l'abscisse correspond au coefficient de sécurité pour l'inclinaison du support et où l'ordonnée correspond aux coefficients de sécurité pour les différents incidents considérés. De la sorte, un point dans le graphique correspond à couple composé du coefficient pour l'inclinaison du support pour la configuration considérée ainsi que du coefficient pour l'incident considéré pour la même configuration. Sachant que si les coefficients de sécurité sont supérieurs à l'unité alors le système est considéré comme instable, il est possible de retrouver les quatre zones décrites au paragraphe précédent comme l'illustre la Figure 4.17.

²Une configuration est définie par le type de plats constituant la pile (paramètres géométriques), les caractéristiques de la pile (nombre de plats, coefficients de frottement) ainsi que par les caractéristiques des ligatures

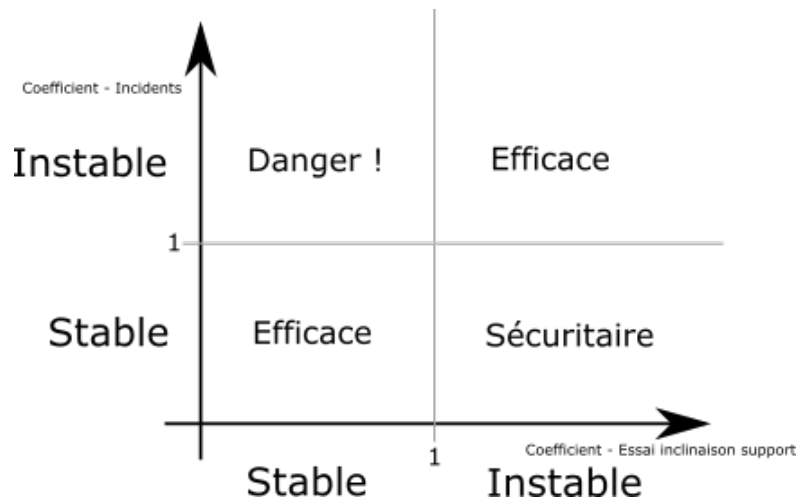


FIGURE 4.17 : Schéma - Validation méthode de dimensionnement

Afin d'obtenir des résultats réalistes, il est nécessaire de considérer des incidents qui puissent être plausibles. Dès lors, les profils d'accélération déterminés à la section 4.1 pour des freinages effectués par un camion et un chariot élévateur vont être utilisés pour représenter ce qu'il pourrait se produire en réalité.

L'intensité nominale attribuée à ces différents profils d'accélération varie en fonction du type d'incident pris en considération. En outre, il faut tout de même conserver des valeurs plausibles et ne pas prendre des accélérations trop élevées ne représentant pas la réalité. Pour les freinages d'urgence effectués avec le transpalette, il est considéré que l'accélération nominale ne peut pas aller au-dessus de $1,5g$. Cela correspondant à une vitesse maximale de 30km/h, c'est effectivement la vitesse maximum à laquelle peut aller les chariots élévateurs présents sur le site d'ArcelorMittal Tailored Blanks.

Un camion pouvant rouler plus vite que le transpalette, les accélérations pendant un freinage effectué par le camion peuvent monter jusqu'à $1g$ voire même davantage si des situations exceptionnelles veulent être prises en considération. Par exemple, une accélération nominale de $1,5g$ correspond à une vitesse de 120km/h avant de freiner.

Un nouveau type de sollicitation correspondant à l'inclinaison du support d'un angle donné doit également être intégré au code de calculs. Une inclinaison du support se traduit premièrement par un profil de compression des plats les uns sur les autres multiplié par le cosinus de l'angle d'inclinaison et deuxièmement par une sollicitation de plus en plus faible au fur et à mesure que le plat considéré est de plus en plus haut dans la pile.

Finalement, il est supposé qu'il faut 0,2 seconde pour passer d'une palette horizontale à une palette inclinée. De cette façon, la sollicitation du système varie d'abord linéairement entre zéro et la valeur finale avant de palier à une valeur constante.

Il faut également définir correctement la manière de calculer les coefficients de sécurité ainsi que la limite pour lesquelles le système est considéré comme instable.

Il existe deux situations pour lesquels le système peut être considéré comme instable. Premièrement, si les efforts à l'intérieur des ligatures dépassent la limite de rupture, l'agrafe de la ligature concernée s'ouvre et le système est considéré comme instable. Ensuite, il existe également une

limitation sur le déplacement relatif du plat se trouvant en tête de pile. Effectivement, Arcelor-Mittal Tailored Blanks s'engage à ce que le déplacement maximal de la tête de pile n'excède pas $5mm$ lorsque la commande arrive chez le client. Le défaut initial étant fixé à $2mm$, le déplacement admissible pendant les opérations de transport est de $3mm$. Cette contrainte est nécessaire car un déplacement de tête de pile trop important pourrait entraîner des problèmes pratiques lorsque les plats doivent être chargés sur les lignes de production des clients. Il est donc également nécessaire de pouvoir analyser l'effet d'une accumulation d'impacts sur une pile de plats. Pour chaque configuration il y a donc deux critères à déterminer, le premier portant sur la résistance des ligatures et le deuxième portant sur les déplacements admissibles au sommet de la pile. De cette façon, les deux coefficients de sécurité peuvent se calculer selon les expressions 4.2 et 4.3.

$$S_{F,r} = \frac{T_{max}}{T_{lim}} \quad (4.2)$$

$$S_{F,d} = \frac{q_{end}}{q_{lim}} \quad (4.3)$$

Où

- $S_{F,r}$ - Coefficient de sécurité par rapport à la résistance des ligatures
- T_{max} - Tension maximum dans les ligatures
- T_{lim} - Tension de rupture ($= 280MPa^3 \times A$)
- $S_{F,d}$ - Coefficient de sécurité par rapport aux déplacements relatifs du dernier plat de la pile
- q_{end} - Déplacement relatif final du dernier plat de la pile
- q_{lim} - Déplacement relatif maximum admissible 3mm

En prenant le coefficient le plus critique entre celui portant sur les déplacements et celui portant sur les efforts dans les ligatures, il est finalement possible de définir un coefficient de sécurité final. Et à partir de ce dernier coefficient, il est possible d'entrer dans un graphique du même type que celui présenté à la Figure 4.17. Si le coefficient de sécurité final est supérieur à l'unité, cela signifie que soit les déplacements sont trop importants, soit les efforts dans les ligatures sont trop importants et que le nombre de liens utilisé n'est pas suffisant.

Plusieurs configurations différentes sont étudiées de façon à essayer de couvrir le plus de cas possibles. les caractéristiques de chacune des configurations sont résumées dans les tableaux suivants.

Modèle 1 :

Plat	$N = 50, (300 \times 200 \times 3)mm, m=1,17kg$
Coefficient de frottement	0,35
Ligature de palette	5 ligatures ($E = 200GPa, A = 12mm^2, T_p = 1600N$), $\theta = 75^\circ$
Ligature de pile	5 ligatures ($E = 200GPa, A = 12mm^2, T_s = 1600N$)
Sollicitation	Camion 1g, 2g, Chariot élévateur extérieur 0,5g, 1g, 1,5g, Chariot élévateur intérieur 0,3g

³cf. section 2.2

Modèle 2 :	
Plat	$N = 30, (800 \times 200 \times 3,5)\text{mm}$, $m=4,40\text{kg}$
Coefficient de frottement	support - plat : 0,5, plat - plat :0,4
Ligature de palette	6 ligatures ($E = 200\text{GPa}$, $A = 12\text{mm}^2$, $T_p = 1600\text{N}$), $\theta = 65^\circ$
Ligature de pile	6 ligatures ($E = 200\text{GPa}$, $A = 12\text{mm}^2$, $T_s = 1600\text{N}$)
Sollicitation	Camion 1, 2g, 2g, Chariot élévateur extérieur 0, 4g, Chariot élévateur intérieur 1g, 1, 2g
Modèle 3 :	
Plat	$N = 30, (1800 \times 600 \times 3)\text{mm}$, $m=21,06\text{kg}$
Coefficient de frottement	0,45
Ligature de palette	7 ligatures ($E = 200\text{GPa}$, $A = 31,2\text{mm}^2$, $T_p = 4160\text{N}$), $\theta = 80^\circ$
Ligature de pile	8 ligatures ($E = 200\text{GPa}$, $A = 31,2\text{mm}^2$, $T_s = 4160\text{N}$)
Sollicitation	Camion 2g, Chariot élévateur extérieur 0, 6g, 1g, Chariot élévateur intérieur 1, 2g
Modèle 4 :	
Plat	$N = 60, (750 \times 100 \times 2,5)\text{mm}$, $m=1,47\text{kg}$
Coefficient de frottement	0,3
Ligature de palette	2 ligatures ($E = 200\text{GPa}$, $A = 12\text{mm}^2$, $T_p = 1600\text{N}$), $\theta = 75^\circ$
Ligature de pile	2 ligatures ($E = 200\text{GPa}$, $A = 12\text{mm}^2$, $T_s = 1600\text{N}$)
Sollicitation	Chariot élévateur extérieur 1, 2g
Modèle 5 :	
Plat	$N = 35, (800 \times 110 \times 2)\text{mm}$, $m=1,38\text{kg}$
Coefficient de frottement	0,4
Ligature de palette	6 ligatures ($E = 200\text{GPa}$, $A = 12\text{mm}^2$, $T_p = 1600\text{N}$), $\theta = 75^\circ$
Ligature de pile	6 ligatures ($E = 200\text{GPa}$, $A = 12\text{mm}^2$, $T_s = 1600\text{N}$)
Sollicitation	Chariot élévateur extérieur 1, 5g

A partir de ces différents modèles et des différents incidents pris en considération pour chaque modèle, il est possible de tracer les différents point représentés à la Figure 4.18.

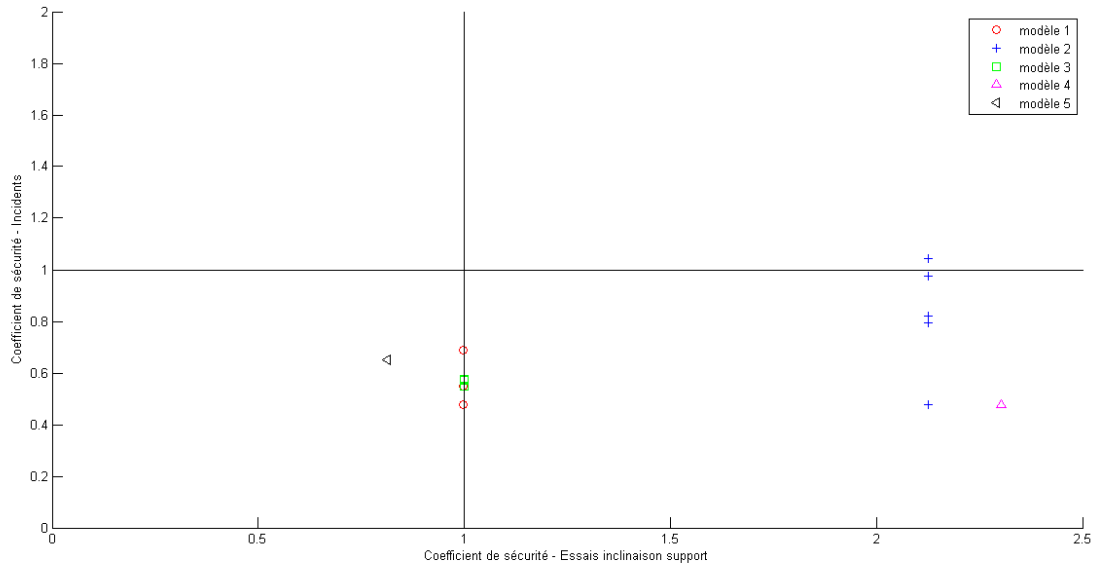


FIGURE 4.18 : Graphique - Validation méthode de dimensionnement ; Rouge - Coefficient de sécurité sur le déplacement du sommet de la pile ; Bleu - Coefficients de sécurité sur la résistance des ligatures

Il apparaît directement que, pour les simulations effectuées, aucun points ne se trouve dans la zone invalidant la méthode de dimensionnement. En d'autres termes, ce graphique montre que si le test de l'inclinaison indique que la pile restera stable et que donc le nombre de ligatures utilisé est suffisant, la pile reste effectivement stable si elle est soumise à des incidents réels.

Par conséquent, la méthode de dimensionnement peut, à priori, être considéré comme valable pour garantir un bon niveau de sécurité pendant des conditions de transport interne et externe. Il serait néanmoins essentiel de réaliser un grand nombre d'autres simulations afin de pouvoir confirmer cette conclusion.

En outre, il apparaît même que pour un grand nombre de situation, la méthode dimensionnement est en fait sécuritaire. Effectivement, la Figure 4.18 montre que pour la majorité des points pour lesquels le test de l'inclinaison indique que le nombre de ligature n'est pas suffisant, la pile reste tout de même stable pour pendant des incidents réels. Il serait donc éventuellement intéressant de revoir la méthode de dimensionnement en diminuant l'angle d'inclinaison.

Chapitre 5

Conclusion Générale

Le but de ce travail était donc de fournir un logiciel à ArcelorMittal Tailored Blanks leur permettant d'analyser les efforts dans les ligatures d'une pile de plats sous une sollicitation quelconque afin de les aider dans la détermination du nombre minimum de ligatures nécessaire pour garantir un bon niveau de sécurité pendant le transport interne et externe.

Pour ce faire, la problématique a été abordée de plusieurs points de vue différents de manière à essayer de répondre au mieux aux attentes de ArcelorMittal Tailored Blanks.

Premièrement, un modèle simplifié pour un système composé d'un seul élément frottant sur son support avec seulement des ligatures de palette a été étudié. Cela a permis d'introduire comment les forces de frottement amènent un problème de discontinuité dans les équations gouvernant la physique du système étudié. Il ensuite a été montré que la solution étant en réalité continue par morceaux, un modèle numérique explicite¹ basé sur la détection d'événements pouvait être implémenté de façon à reproduire convenablement ce que la théorie avait prédit.

Pour ce faire, l'algorithme de résolution est basé sur une variable de phase stockant le régime dans lequel se trouve l'élément au cours du temps de manière à pouvoir résoudre numériquement à l'aide d'une méthode de Newmark des équations différentielles différentes en fonction de la valeur de cette variable. Si l'élément colle sur support, de la rigidité est introduite dans le système entre l'élément et son support de manière à ce que le déplacement relatif reste constant tant que la masse ne glisse pas. A l'opposé, si l'élément glisse sur son support, l'équation différentielle de la dynamique non-modifiée est utilisée pour résoudre le système. En outre, il a évidemment été nécessaire d'implémenter une méthode de détection d'événements afin de pouvoir localiser les éventuels changements de phase pouvant se produire au cours du temps. Cela a notamment permis d'effectuer un raffinement du pas de temps lorsque le système s'approche d'un changement de régime.

Un modèle plus complet prenant en compte à la fois tous les plats individuellement ainsi que les effets des ligatures de pile a ensuite été développé. Afin de pouvoir traiter les particularités apportées par l'existence de deux régimes différents dans les équations gouvernantes, le modèle est toujours construit autour d'une variable de phase qui est maintenant un vecteur permettant de stocker le régime de tous les plats constituant la pile.

¹les ligatures de pile n'étant pas encore prises en compte dans ce modèle, un schéma implicite n'était pas nécessaire

La prise en considération des ligatures de pile dans le système apporte par contre plusieurs particularités à intégrer dans la méthode de résolution. Les forces de rappel exercées par les ligatures de pile dépendant indirectement des déplacements, il a été montré qu'un modèle implicite était nécessaire pour reproduire convenablement les effets de ces ligatures. Effectivement, d'une part ces efforts n'existent que si les plats sont en contact avec les ligatures et d'autre part, s'ils existent, leurs intensités dépendent des angles formés entre les plats et les ligatures qui dépendent eux-mêmes indirectement des déplacements de tous les plats de la pile. Il apparaît ainsi que le modèle doit donc pouvoir traiter à la fois les problèmes de contacts ainsi que les non-linéarités apportées par les ligatures de pile.

Pour ce faire, une méthode de Newton-Raphson modifiée a été mise au point en utilisant toujours une intégration temporelle numérique de Newmark. Il a donc fallu développer une expression de la matrice tangente du modèle pour laquelle il a été possible de vérifier numériquement qu'elle correspondait effectivement à ce qui était attendu.

Finalement, le modèle a pu être validé en comparant les résultats numériques aux mesures effectuées pendant les essais menés par Mr. Denoël dans l'étude [1]. De la sorte, il a été montré que le modèle ainsi développé représente convenablement la réalité même si une certaine erreur subsistait entre les deux résultats.

Le modèle ainsi développé sera introduit à l'intérieur de l'interface graphique utilisateur déjà existante afin de pouvoir rendre le modèle numérique exploitable pour le personnel d'ArcelorMittal Tailored Blanks.

Durant ce travail, une campagne de mesures d'accélération a également été menée chez ArcelorMittal Tailored Blanks dans le but de caractériser au mieux les accélérations apparaissant au niveau du support d'une pile de plats. Pour ce faire des accéléromètres ont été placés sur un chariot élévateur et un camion pendant qu'ils opéraient des freinages ou des virages brusques. De la sorte, il a été possible de déterminer des profils types d'accélération permettant de caractériser le plus précisément possible les sollicitations correspondant par exemple à des freinages d'urgence.

La dernière partie de ce travail s'est ensuite consacrée à exploiter les modèles numériques précédemment développés dans un certain nombre de configurations dans le but de pouvoir valider ou invalider la méthode de dimensionnement des ligatures utilisées par ArcelorMittal Tailored Blanks. Il a ainsi pu être montré que la méthode consistant à regarder la stabilité de la pile lorsque le support est incliné d'un angle de 7° permet, à priori, de garantir un bon niveau de sécurité pendant des conditions de transport interne et externe. Par ailleurs, cette petite étude a également pu montrer que cette méthode de dimensionnement est même sécuritaire et qu'il pourrait être possible d'optimiser la valeur de l'inclinaison donnée au support de façon à obtenir une méthode plus efficace.

Tout au long de ce travail, une multitude de pistes d'amélioration pouvant être apportées à ce travail ont été mises en évidence. La plupart d'entre elles sont très simples à intégrer dans le modèle déjà existant mais demande une charge de travail conséquente. C'est pourquoi ce sujet de recherche capital pour ArcelorMittal Tailored Blanks reste ouvert pour une éventuelle reprise dans le cadre d'un autre mémoire ou tout autre travail.

Table des figures

1.1	Schéma - Illustration pile de plats ligaturés sur une palette en bois	3
2.1	Photographie - Stockage Bobines	6
2.2	Photographie - Bobine sur dérouleuse	6
2.3	Photographie - Presse	6
2.4	Photographie - Plat Exemple 1	7
2.5	Photographie - Plat Exemple 2	7
2.6	Photographie - Système empilement	8
2.7	Photographie - Atelier de cerclage	8
2.8	Schéma - Plats étudiés dans ce travail	10
2.9	Photographie - Rupture d'une ligature causée par l'ouverture de l'agrafe de fermeture	10
2.10	Screenshot - Interface graphique utilisateur créée par Vincent Denoël [1]	12
2.11	Schéma - Système 1 degré de liberté	12
2.12	Schéma - Système constitué de N plats métalliques ligaturés par des ligatures de pile (rouge) et des ligatures de palette (vert)	13
2.13	Schéma - Bilan des Forces; Rouge - Force de rappel ligatures; Vert - Force de frottement aux interfaces; Bleu - Force d'inertie; Noir - Sollicitation	13
2.14	Graphique - Force de frottement F_f en fonction de la différence entre la vitesse relative du plat et celle de son support direct $\Delta\dot{q}$	14
2.15	Photographie - Papier d'emballage de protection des piles de plats	15
2.16	Schéma Ligature de palette	16
2.17	Schéma Ligature de pile	16
2.18	Schéma - Système 1 degré de liberté	18
2.19	Schéma - Système 1 degré de liberté - Exemple	18
2.20	Graphique - Illustration condition de sortie d'une phase de <i>slip</i> ; 1 ^{er} graphique : Rouge - courbe $\mathcal{C}_1(t)$, Vert - courbe $\mathcal{C}_2(t)$, Ronds bleus vides - intersections entre les courbes $\mathcal{C}_1(t)$ et $\mathcal{C}_2(t)$; 2 ^e graphique : Noir - $\dot{q}(t)$, Ronds bleus vides - $\dot{q} = 0$	24
2.21	Graphique - Illustration deuxième condition de sortie d'une phase de <i>slip</i> ; 1 ^{er} graphique : Rouge - courbe $\mathcal{C}_1(t)$, Vert - courbe $\mathcal{C}_2(t)$, Ronds bleus vides - intersections entre les courbes $\mathcal{C}_1(t)$ et $\mathcal{C}_2(t)$; 2 ^e graphique : Noir - courbe $\mathcal{C}_3(t)$, Ronds bleus vides - intersections entre les courbes $\mathcal{C}_1(t)$ et $\mathcal{C}_2(t)$, Zones grisées - intervalles de temps pour lesquels l'expression 2.52 est vérifiée	26
2.22	Graphique - Solution obtenue pour l'exemple traité dans la section 2.3.3; 1 ^{er} graphique : déplacement relatif $q(t)$; 2 ^e graphique : vitesse relative $\dot{q}(t)$; 3 ^e graphique : accélération du support $\ddot{u}(t)$	27
2.23	Graphique - Force de frottement obtenue pour l'exemple traité dans la section 2.3.3	27

2.24	Graphique - Plan de phase pour l'exemple traité dans la section 2.3.3; Bleu - plan de phase; Point rouge - temps initial; Point noir - temps final	28
3.1	Schéma - Système à un degré de liberté	30
3.2	Pseudo-code - Algorithme à un degré de liberté	32
3.3	Schéma - Illustration localisation événement	36
3.4	Graphique - Validation Algorithme un degré de liberté; 1 ^{er} graphique : Déplacement relatif; 2 ^e graphique : Vitesse relative; 3 ^e graphique : Accélération relative; Pour les trois graphiques : Bleu - résultat numérique; Rouge - résultat analytique	37
3.5	Graphique - Zoom Figure 3.4 & mise en évidence du phénomène de "chattering"; 1 ^{er} graphique : Déplacement relatif; 2 ^e graphique : Vitesse relative; 3 ^e graphique : Accélération relative; Pour les trois graphiques : Bleu - résultat numérique; Rouge - résultat analytique	38
3.6	Graphique - Validation force de frottement : Bleu - résultat numérique; Rouge - résultat analytique	39
3.7	Graphique - Validation dans le plan de phase : Bleu - résultat numérique; Rouge - résultat analytique	40
3.8	Schéma - Système à N degrés de liberté; Rouge : ligature de pile; Vert : Ligature de palette	41
3.9	Pseudo-code - Algorithme N degrés de liberté	42
3.10	Schéma - Méthode de Newton-Raphson	44
3.11	Schéma - Méthode de Newton-Raphson modifiée	45
3.12	Schéma - Contact	46
3.13	Schéma - Détail calcul force de rappel ligature de pile	47
3.14	Schéma - Exemple pile déformée	53
3.15	Schéma - Exemple pile déformée	55
3.16	Schéma - Exemples considérés pour la validation de la matrice tangente; Rond rouge - Contact	57
3.17	Représentations matrices \underline{k}_{s1} dans les exemples considérés pour la validation de la routine de construction de la matrice tangente	58
3.18	Représentations vecteur \underline{k}_{s2} dans les exemples considérés pour la validation de la routine de construction de la matrice tangente	59
3.19	Graphique - Validation algorithme à N degrés de liberté test1 (0,2g)- Évolution déplacement absolu dans le temps du premier et du dernier plat de la pile; Rouge - résultat expérimental; Vert - résultat numérique	60
3.20	Graphique - Validation algorithme à N degrés de liberté test2 (0,4g)- Évolution déplacement absolu dans le temps du premier et du dernier plat de la pile; Rouge - résultat expérimental; Vert - résultat numérique	61
3.21	Graphique - Validation algorithme à N degrés de liberté test1 (0,6g)- Évolution déplacement absolu dans le temps du premier et du dernier plat de la pile; Rouge - résultat expérimental; Vert - résultat numérique	61
4.1	Photographie - Accéléromètre	63
4.2	Graphique - Résultats bruts Essai n° 1; 1 ^{er} graphique : Accélération selon x ; 2 ^e graphique : Accélération selon y ; 3 ^e graphique : Accélération selon z ; Pour les trois graphiques : Rouge - capteur B30; Vert - capteur B31	65
4.3	Graphique - Résultats lissés Frein avant Essai n° 1	66

4.4	Graphique - Résultats lissés Frein arrière Essai n° 1	66
4.5	Graphique - Résultats bruts Essai n° 2 ; 1 ^{er} graphique : Accélération selon x ; 2 ^e graphique : Accélération selon y ; 3 ^e graphique : Accélération selon z ; Pour les trois graphiques : Rouge - capteur B30 ; Vert - capteur B31	67
4.6	Graphique - Résultats lissés Frein avant Essai n° 2	68
4.7	Graphique - Résultats lissés Virage Essai n° 2	68
4.8	Graphique - Résultats bruts Essai n° 3 ; 1 ^{er} graphique : Accélération selon x ; 2 ^e graphique : Accélération selon y ; 3 ^e graphique : Accélération selon z ; Pour les trois graphiques : Rouge - capteur B30 ; Vert - capteur B31	69
4.9	Graphique - Résultats lissés Frein avant Essai n° 3	70
4.10	Graphique - Résultats bruts Essai n° 4 ; 1 ^{er} graphique : Accélération selon x ; 2 ^e graphique : Accélération selon y ; 3 ^e graphique : Accélération selon z ; Pour les trois graphiques : Rouge - capteur B30 ; Vert - capteur B31	71
4.11	Graphique - Résultats lissés Frein avant Essai n° 4	71
4.12	Graphique - Résultats bruts Essai n° 5 ; 1 ^{er} graphique : Accélération selon x ; 2 ^e graphique : Accélération selon y ; 3 ^e graphique : Accélération selon z ; Pour les trois graphiques : Rouge - capteur B30 ; Vert - capteur B31	72
4.13	Graphique - Résultats lissés Frein avant Essai n° 5	72
4.14	Graphique - Résultats lissés Virage Essai n° 5	73
4.15	Graphique - Profils d'accélération normalisée Freinage d'urgence	74
4.16	Graphique - Profils d'accélération normalisée Virage	75
4.17	Schéma - Validation méthode de dimensionnement	77
4.18	Graphique - Validation méthode de dimensionnement ; Rouge - Coefficient de sécurité sur le déplacement du sommet de la pile ; Bleu - Coefficients de sécurité sur la résistance des ligatures	80

Bibliographie

- [1] H. Vanvinckenroye C. Vroomen V. Denoël, O. Milis. Étude dynamique d'une pile de plats métalliques rectangulaires : mesure et analyse du glissement et des efforts dans des ligatures, 2016.
- [2] Henk Nijmeijer Remco I. Leine. *Lecture notes in applied and computational mechanics Vol. 18 - Dynamics and bifurcations of non-smooth mechanical systems*. Springer, 2004.
- [3] V. Denoël. Cours Dynamique des structures GCIV2037-1 - Université de Liège, 2015-2016.
- [4] F. Collin V. De Ville. Cours Éléments finis non-linéaires GCIV2171-1 - Université de Liège, 2016-2017.