

## Effet du couplage modal sur le contrôle du comportement vibratoire de passerelles

**Auteur** : Loore, Thibault

**Promoteur(s)** : Denoel, Vincent

**Faculté** : Faculté des Sciences appliquées

**Diplôme** : Master en ingénieur civil des constructions, à finalité spécialisée en "civil engineering"

**Année académique** : 2017-2018

**URI/URL** : <http://hdl.handle.net/2268.2/4556>

---

### *Avertissement à l'attention des usagers :*

*Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.*

*Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.*

---



UNIVERSITÉ DE LIÈGE - FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

# **Effet du couplage modal sur le contrôle du comportement vibratoire de passerelles**

Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade de Master en  
Ingénieur Civil des Constructions par LOORE Thibault

Promoteur académique : Vincent DENOËL

Jury :  
Vincent DE VILLE DE GOYET  
Yves DUCHÊNE (Bureau GREISCH)

Année académique 2017-2018



*"Les hommes construisent trop de murs, et pas assez de ponts"*

---

I. Newton

## **Remerciements**

Un travail de cette ampleur ne peut être réalisé seul. Je tiens donc à remercier particulièrement Vincent Denoël pour son temps précieux et sa créativité sans bornes. Ses idées brillantes et sa faculté d'aborder des problèmes complexes avec une facilité déconcertante ont été les fondements de ce travail. J'ai réellement apprécié son dynamisme et son intérêt tout au long de mon cheminement. Je voudrais aussi remercier le bureau GREISCH pour sa confiance et sa précieuse collaboration.

Enfin, je suis très reconnaissant envers ma famille et mes proches pour leur compréhension et leur soutien inconditionnel. Ils m'ont offert un cadre de travail et de vie idéal, et ce durant tout mon parcours universitaire. Sans cela, il n'aurait pas été possible pour moi d'arriver où je suis aujourd'hui.

Thibault Loore, 08/06/2018

## Abstract

Modern footbridges are lightweight and flexible structures that have to meet strict comfort criteria as far as their acceleration levels under dynamic loading are concerned. Given their slenderness, external dampers are a typical solution to keep these accelerations under thresholds. The most commonly used damping devices are tuned mass dampers (TMD). One of their main limitation though is their allowed mass. Furthermore, their design is usually based on simplifying assumptions that do not account for modal coupling. Yet, this can have a significant impact on their dynamic response, especially when eigen frequencies are closely spaced.

This paper investigates the viability of a new damping technology for harmonic loading, in the instance of *inertor dampers*. It is shown that they outperform conventional TMD thanks to their mass amplification effect. Then, modal coupling is studied by means of a mathematical method coming from *perturbations theory*. This allows to set up a closed-form expression for the transfer matrix of a coupled system. This one is general, simple, but meaningful. This tool is then used to derive analytical elementary expressions for the coupled or uncoupled design of dampers. The basic understanding of modal coupling also enables a totally new approach proposing to use only one damper to control two closey-spaced modes of vibration. Applicability criteria for the method as well as the parameters to be provided for the damper and its suitable positions are also derived in an analytical manner. The use of inertor dampers appears very convenient for the purpose of this method. The latter is finally applied on a real-life case study and happens to be competitive with conventional damping techniques (use of 2 dampers for 2 modes).

## Résumé

Les passerelles piétonnes modernes sont des structures légères et flexibles devant remplir des objectifs de confort stricts en termes d'accélération sous chargement dynamique. Vu leur élancement, des dispositifs d'amortissement externes sont habituellement utilisés pour limiter les accélérations qu'elles subissent. Les plus courants sont des amortisseurs à masse accordée (TMD). Une des principales limitations de l'efficacité de ceux-ci est la masse qui peut leur être conférée. De plus, ils sont généralement dimensionnés sur base d'hypothèses simplificatrices, ne prenant pas en compte le couplage modal. Ce dernier peut pourtant avoir un effet particulièrement considérable et néfaste lorsque plusieurs fréquences propres de la structure sont proches.

Ce travail investigate premièrement la viabilité d'une nouvelle technologie pour l'amortissement sous charges harmoniques, en l'espèce les *amortisseurs à inertie*. Il est montré que ceux-ci permettent de surpasser les performances des TMD grâce à leur effet d'amplification de masse. Ensuite, le couplage modal est étudié au moyen d'une méthode mathématique dite *par perturbations*. Celle-ci permet d'établir pour la matrice de transfert d'un système couplé une expression analytique générale, simple, mais riche en signification. Cet outil est alors utilisé pour établir des expressions analytiques simples pour le dimensionnement en situation découplée et couplée. La compréhension fondamentale du couplage modal permet aussi de développer une nouvelle approche générale tirant profit de cette interaction pour amortir 2 modes proches de vibration avec un unique amortisseur. Un critère d'applicabilité de la méthode et les caractéristiques à conférer à l'amortisseur ainsi que son positionnement sont établies. L'utilisation d'amortisseurs à inertie trouve une place avantageuse au sein de cette méthode. Cette dernière est finalement appliquée sur un exemple concret et s'avère concurrentielle avec les solutions habituelles d'amortissement (1 amortisseur par mode).

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1	Mise en contexte . . . . .	3
2	Démarche . . . . .	4
<b>II</b>	<b>Effet d'un amortisseur sur des systèmes à 1 ddl</b>	<b>6</b>
1	Amortisseurs à masse accordée . . . . .	6
1.1	Amortisseur de <i>Frahm</i> . . . . .	6
1.2	TMD . . . . .	7
2	Amortisseurs à inertie . . . . .	10
2.1	Histoire et concept . . . . .	10
2.1.1	<i>L'inertier</i> . . . . .	10
2.1.2	Applications . . . . .	12
2.1.3	Inertance . . . . .	12
2.2	Configurations étudiées . . . . .	13
2.3	Comparaison des performances . . . . .	15
2.4	Positionnement et efficacité . . . . .	17
2.5	Propriétés intéressantes . . . . .	19
2.5.1	Ratio de masse de <i>l'inertier</i> . . . . .	19
2.5.2	Sensibilité au dérèglement . . . . .	19
2.5.3	Gamme de fréquences impactée . . . . .	20
2.6	Conclusions . . . . .	21
<b>III</b>	<b>Effet d'un amortisseur sur des systèmes à plusieurs ddl</b>	<b>22</b>
1	Modèle analytique . . . . .	22
1.1	Passage en base modale . . . . .	23
1.1.1	Poutre bi-appuyée sans amortisseur . . . . .	23
1.1.2	Ajout d'un amortisseur . . . . .	24
2	Etude de la matrice de transfert d'un système couplé . . . . .	27
2.1	Forme adimensionnelle du système . . . . .	27
2.2	Etude par la méthode des perturbations . . . . .	30
2.2.1	Etablissement des équations . . . . .	30
2.2.2	Premier ordre d'approximation . . . . .	32
2.2.3	Second ordre d'approximation . . . . .	33
2.3	Proposition d'une expression simplifiée . . . . .	34
2.4	Domaine de validité . . . . .	35
2.5	Conclusions . . . . .	36
3	Système à 1 mode . . . . .	37
3.1	Réglage optimal . . . . .	37
3.2	Validation . . . . .	39
4	Système à 2 modes . . . . .	40
4.1	Méthodologie pour l'analyse dynamique . . . . .	40
4.2	Objectifs pour les amortisseurs . . . . .	42
4.2.1	Cas découplé . . . . .	42

4.2.2	Cas couplé . . . . .	43
4.3	Approche habituelle - 2 TMD pour 2 modes . . . . .	45
4.3.1	Approche habituelle découplée . . . . .	45
4.3.2	Effet du couplage modal sur un mode donné . . . . .	46
4.3.3	Modification de l'approche découplée pour inclure l'effet du couplage . . . . .	49
4.4	Approche alternative - 1 TMD pour 2 modes . . . . .	50
4.4.1	Motivation . . . . .	50
4.4.2	Enjeu . . . . .	51
4.4.3	Etude du comportement couplé . . . . .	52
4.4.4	Stratégie couplée mise en œuvre . . . . .	58
4.5	Résumé par la proposition d'une démarche générale de dimensionnement . . . . .	76
<b>IV</b>	<b>Etude d'une application</b>	<b>78</b>
1	Présentation du cas d'étude . . . . .	78
1.1	Projet . . . . .	78
1.2	Modes étudiés et paramètres . . . . .	79
1.3	Calcul des charges modales . . . . .	80
2	Implémentation des différentes méthodes de dimensionnement . . . . .	82
2.1	Nécessité d'un dispositif d'amortissement . . . . .	82
2.2	Première option : 2 amortisseurs . . . . .	82
2.2.1	Approche habituelle découplée . . . . .	82
2.2.2	Approche découplée modifiée . . . . .	84
2.3	Seconde option : 1 seul amortisseur . . . . .	85
2.3.1	Vérification préliminaire . . . . .	85
2.3.2	Paramètres de calcul et applicabilité . . . . .	85
2.3.3	Solution proposée . . . . .	85
2.3.4	Validation . . . . .	88
3	Conclusions de l'application . . . . .	88
<b>V</b>	<b>Conclusion</b>	<b>90</b>
<b>Annexes</b>		<b>91</b>
<b>A</b>	<b>Etablissement des fonctions de transfert de systèmes simples</b>	<b>92</b>
1	Amortisseur de <i>Frahm</i> . . . . .	92
2	<i>Tuned Mass Damper</i> (TMD) . . . . .	93
3	<i>Tuned Inerter Damper</i> (TID) . . . . .	94
4	<i>Tuned Mass Damper Inerter</i> (TMDI) . . . . .	95
5	<i>Modified Tuned Mass Damper</i> (TMD modifié) . . . . .	95
<b>B</b>	<b>Formule de l'inertance d'un <i>inerter</i> de type "crémaillère"</b>	<b>97</b>

# Chapitre I

## Introduction

### 1 Mise en contexte

Au vu de leur élancement toujours plus prononcé, les passerelles piétonnes modernes sont des ouvrages particulièrement sujets aux problèmes de vibrations. Ces structures légères et flexibles subissent la charge de la foule, et il s'est souvent avéré dans des réalisations récentes que les accélérations encourues dépassaient les limites de confort. Ces problèmes sont particulièrement marqués dans les structures qui admettent un nombre élevé de fréquences propres dans la gamme des sollicitations piétonnes. Il est donc devenu indispensable d'effectuer des études dynamiques et de prendre en compte ces aspects lors du dimensionnement.

S'il apparaît que les critères de confort ne sont pas respectés, c'est tout le design qui doit être corrigé, ce qui est en général peu commode et peut se montrer très restrictif. La solution alternative habituelle est alors d'équiper les structures de dispositifs externes d'amortissement. Il s'agit généralement d'amortisseurs à masse accordée (TMD), qui admettent toutefois des limites. En particulier, la masse additionnelle que la structure peut accueillir.

De plus, le dimensionnement des appareils d'amortissement s'effectue généralement sans tenir compte du couplage modal. Ce phénomène complexe de vibration est en effet encore mal compris à ce jour. C'est précisément dans les situations les plus problématiques, où un grand nombre de fréquences sont groupées dans les plages critiques de sollicitations, qu'il a un impact important. Dans ce cas, les considérations simplificatrices utilisées pour le dimensionnement ne sont alors plus valides. Il y a donc un intérêt direct à pouvoir développer la compréhension du couplage modal par une démarche analytique.

L'ingénieur pourrait rétorquer que le développement de logiciels de type éléments finis permet aujourd'hui d'inclure les dispositifs d'amortissement au sein même de la modélisation, compromettant ainsi le besoin de méthodes analytiques. L'approche numérique reste en effet, à défaut d'alternatives, la solution privilégiée face à des problèmes de ce niveau de complexité. Cependant, vu le nombre de paramètres à considérer, la recherche numérique de solutions d'amortissement optimales dans des espaces de grande dimension ne peut se faire sans la connaissance très importante d'une première estimation. De la même façon, un projet peut prendre des formes sans cesse différentes lors de sa phase de conception. Il vient donc à point de pouvoir estimer la faisabilité d'une solution rapidement, sans devoir passer par une modélisation complète de la structure, coûteuse en temps et investissement.

L'utilisation de formes analytiques, fussent-elles approchées, permet en outre de comprendre la dynamique réelle qui se cache derrière une structure. Cela rend par conséquent possible de prédire la meilleure façon d'agir pour atteindre un objectif d'amortissement donné.

Tous ces aspects constituent la motivation de ce travail, qui trouve sa place à la croisée de la technologie et des méthodes mathématiques. Sa vocation principale est d'offrir au lecteur, dans le cadre des systèmes d'amortissement mécaniques simples, cette compréhension souvent perdue par l'utilisation de logiciels informatiques.

## 2 Démarche

Ce travail apporte une solution aux problématiques exposées ci-dessus, tout en comblant le besoin pratique d'expressions analytiques simples. La démarche globale suivie se base sur deux grands piliers. Tout d'abord, la mise au point d'un modèle analytique. Ensuite, son utilisation pour l'investigation et le développement de nouveaux résultats.

De façon plus détaillée, le plan d'étude et les contributions de l'auteur sont repris ci-dessous.

- Premièrement, pour surpasser les limitations des amortisseurs actuels, une nouvelle technologie est introduite. Celle-ci est celle d'amortisseurs dits "à inertie", qui semblent déjà avoir des applications prometteuses dans d'autres types de structures de génie civil. Sa viabilité pour la réduction de l'amplification dynamique sous chargement harmonique est évaluée pour les passerelles.
- Ensuite, la compréhension fondamentale (analytique) de la dynamique de systèmes couplés est développée, à l'aide de l'outil mathématique novateur que sont les méthodes par perturbations. Celles-ci offrent un support idéal pour capturer le comportement de tels systèmes au voisinage de la résonance. Elles permettent ici de proposer une expression analytique simple de la matrice de transfert d'un système couplé par la présence d'un amortisseur. Cette formulation originale est générale, parlante et riche. Elle peut être employée pour un problème quelconque sur base de la connaissance de ses matrices de masse, raideur et viscosité. Dans le cadre de ce travail, elle permet en particulier d'enrichir les démarches simplifiées utilisées pour le dimensionnement habituel d'amortisseurs.
- Par ailleurs, la compréhension du couplage modal fait aussi surgir son potentiel pour amortir simultanément un certain nombre de modes de vibrations avec un nombre inférieur d'amortisseurs, ce qui se démarque des stratégies habituelles d'amortissement. Une méthode innovante et tout à fait générale est donc développée, ainsi qu'un critère attestant de son applicabilité. Elle montre une compatibilité particulièrement avantageuse avec l'utilisation d'amortisseurs à inertie. *In fine*, une réponse est donc fournie à la question audacieuse suivante : pour une structure donnée, est-il possible d'amortir 2 modes avec un seul amortisseur ? Dans l'affirmative, quelles en sont les conditions, où doit-on le placer et quelles caractéristiques faut-il lui conférer ?

L'approche mise en place pour répondre à cette question est schématisée à la *Figure I.1* ci-dessous. Chaque point figurant sur cette arbre de décision trouvera dans ce travail une explication.

- Finalement, comme illustration de la méthode proposée, une application pratique sur un exemple réel (passerelle piétonne "L'Enjambée" à Namur) est étudiée, et s'avère concluante.

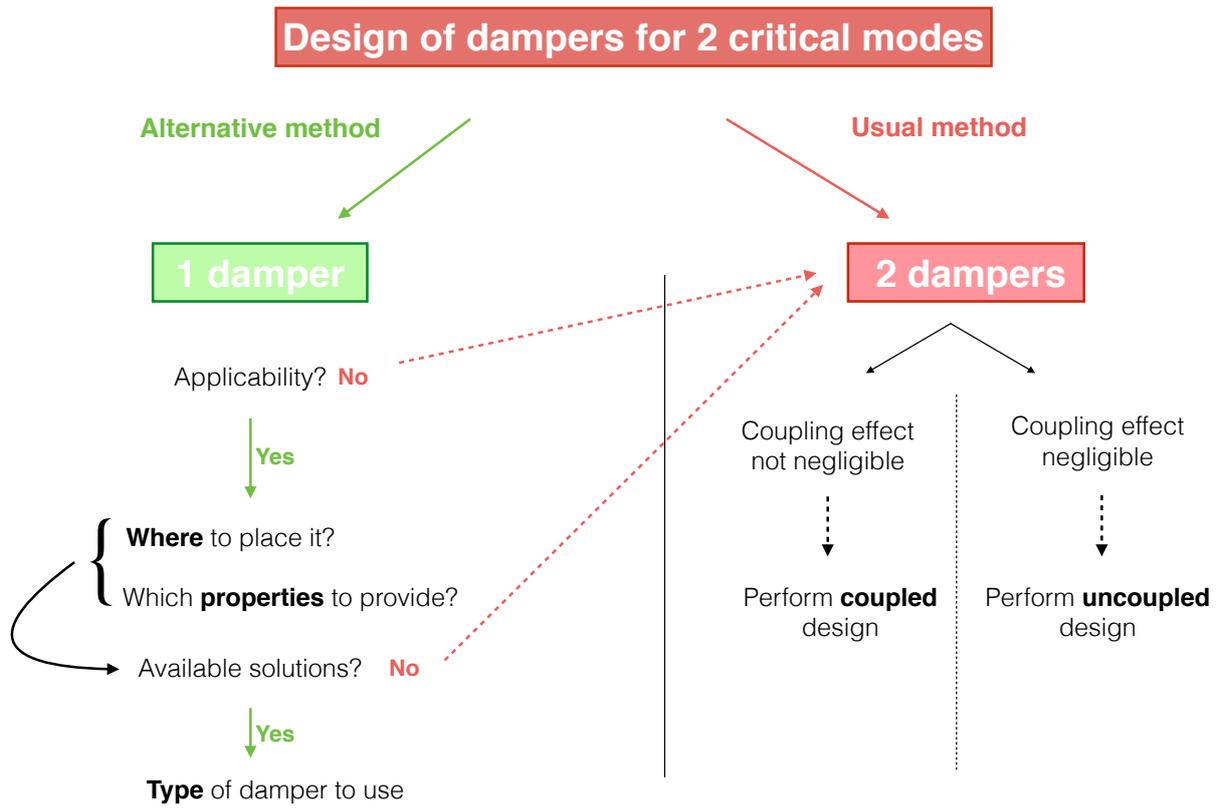


FIGURE I.1 – Récapitulatif de la démarche générale de dimensionnement proposée

## Chapitre II

# Effet d'un amortisseur sur des systèmes à 1 ddl

La première partie de ce travail vise à étudier l'impact d'amortisseurs sur des systèmes à un degré de liberté excités par des charges harmoniques, utilisées pour modéliser la foule lors de l'évaluation du confort de passerelles. Les objets principaux d'étude sont donc des fonctions de transfert, aussi appelées fonctions de réponse fréquentielle (FRF). Le but est ici de comprendre et rappeler les fondements théoriques des techniques d'amortissement, qui serviront de base à la suite de ce travail.

Dans un premier temps, l'évolution des méthodes et appareils d'amortissement sera rapidement rappelée et illustrée. Un intérêt particulier sera porté sur les amortisseurs à masse accordée ("*Tuned Mass Dampers*" - TMD) composés d'une masse, un ressort et un élément visqueux. Ces appareils sont en effet une solution habituelle pour amortir les passerelles actuelles.

Ensuite, nous présenterons une nouvelle technologie appelée "amortisseur à inertie" (*inertor*), qui commence à faire son apparition dans les applications de génie civil et semble être prometteuse pour des passerelles également. Son comportement et ses propriétés principales seront présentés en détails. Différentes configurations d'amortisseurs utilisant la nouvelle composante mécanique dite "à inertie" seront ensuite parcourues.

## 1 Amortisseurs à masse accordée

Dans cette section, les stratégies d'amortissement dites *passives* les plus courantes sont étudiées. En particulier, les amortisseurs linéaires. L'idée fondamentale est d'attacher une masse libre de se mouvoir à une structure soumise à des vibrations de type harmonique, et d'ensuite régler judicieusement le lien qui les unit. Cette stratégie a pour but d'utiliser les forces d'inertie créées par cette masse pour s'opposer au mouvement de la structure en question. Ainsi, l'objectif est qu'à la fréquence critique considérée (à la résonance), le dispositif exerce une force en opposition de phase permettant de diminuer au maximum l'amplitude des vibrations.

### 1.1 Amortisseur de *Frahm*

*Frahm* fut le premier à proposer une solution d'amortissement de ce type. Son amortisseur, illustré ci-dessous, est le plus élémentaire des amortisseurs dynamiques et consiste en une simple masse attachée à la structure primaire par un ressort ajusté sur la fréquence propre du système.

### FRAHM'S DAMPER

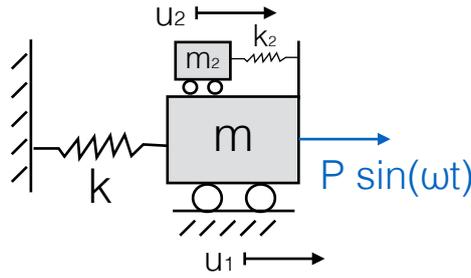


FIGURE II.1 – Amortisseur de *Frahm*

La mise en équation de ce système est élémentaire et présentée en *Annexe A.1*. Sa fonction de transfert donne pour rappel l'amplification dynamique du mouvement stabilisé sous une charge harmonique, qui est le type de chargement considéré pour l'évaluation du confort dans les passerelles. Elle admet une racine en la fréquence propre de l'amortisseur  $\omega_a$ . A la résonance de celui-ci, la masse accordée exerce en effet une force égale et opposée à la force excitatrice, si bien que la masse primaire n'admet plus de mouvement. Ainsi, on règle la fréquence de l'amortisseur sur celle de la structure ( $\omega_n$ ) afin d'annuler complètement la résonance, comme on peut le voir en bleu à la figure ci-dessous.

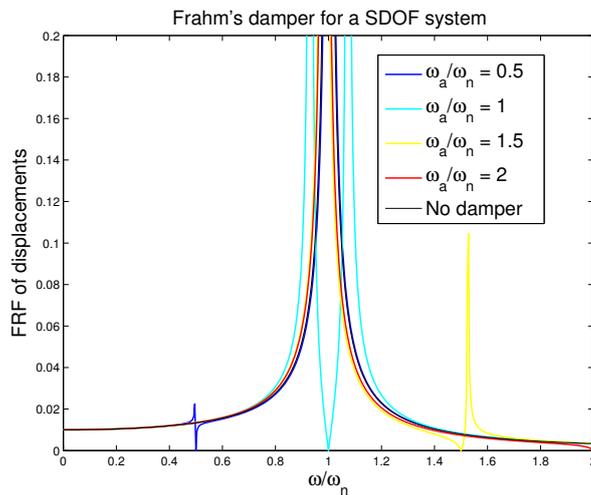


FIGURE II.2 – FRF des déplacements - amortisseur de *Frahm*

L'utilisation d'un amortisseur de *Frahm* permet de supprimer complètement la résonance, mais crée de nouveaux pics d'amplitude considérable au voisinage direct de cette dernière. Il augmente donc l'amplitude du mouvement pour des fréquences assez proches de la résonance. Par conséquent, il ne constitue pas une solution robuste ni utilisable en pratique.

### 1.2 TMD

Fort de ces observations, *Ormondroyd* et *den Hartog* ont eu l'idée d'ajouter une composante visqueuse (dash-pot) en parallèle avec le ressort afin de permettre la dissipation d'une partie de l'énergie cinétique, créant ainsi le bien connu TMD illustré ci-dessous. Ce dernier permet alors d'amortir une gamme plus large de fréquences voisines de la résonance.

### TMD

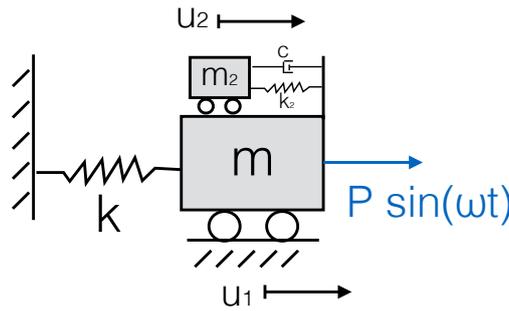


FIGURE II.3 – Amortisseur à masse accordée (TMD)

On définit les grandeurs ci-dessous :

- $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , la pulsation propre de la structure
- $\omega_a = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ , la pulsation propre de l'amortisseur
- $\mu = \frac{m_2}{m}$ , le rapport de masse entre l'amortisseur et la structure
- $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ , la fréquence excitatrice adimensionnée
- $\xi = \frac{c}{2\sqrt{k_2 m_2}}$ , le taux d'amortissement du dash-pot
- $\alpha = \frac{\omega_a}{\omega_n}$ .

On peut alors établir la fonction de transfert de ce système, comme effectué en *Annexe A.2*.

$$|H_{11}(\Omega)|^2 = \frac{1}{k^2} \frac{(\alpha^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\alpha\Omega)^2}{((1 - \Omega^2)(\alpha^2 - \Omega^2) - \alpha^2\Omega^2\mu)^2 + (2\xi\alpha\Omega)^2(1 - \Omega^2 - \Omega^2\mu)^2} \quad (II.1)$$

On remarque donc que l'impact de l'amortisseur dépend logiquement des 4 paramètres suivants :  $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $\xi$  et  $\Omega$ . Le ratio  $\mu$  est généralement fixé, alors que  $\alpha$  et  $\xi$  constituent les paramètres d'intérêt pour le réglage du TMD. Différentes théories ont été établies pour effectuer ce dernier. La plus classique et simple est celle de *den Hartog* [2]. Elle a été établie sous les conditions suivantes :

- Système à 1 *ddl* (représentant généralement le mode visé)
- Amortissement structurel nul
- Excitation harmonique.

Notons que si l'amortissement structurel n'est pas faible ou négligeable, il n'est plus possible de développer une solution analytique. Une optimisation numérique est alors généralement utilisée.

Comme illustré à la *Figure II.4* ci-dessous, la théorie de *den Hartog* se base sur l'observation de l'existence de 2 points fixes dans la fonction de transfert lorsque le réglage de la fréquence du TMD est varié, et ce quelque soit la valeur de l'amortissement qui lui est conféré. Ainsi, l'idée est dans un premier temps de sélectionner le ratio  $\alpha$  de sorte que ces 2 points fixes aient des ordonnées identiques. Ensuite, l'amortissement peut être réglé afin d'obtenir de la façon la plus exacte possible des maxima (tangentes horizontales) en ces 2 points. L'entièreté de la fonction de transfert est de ce fait repoussée sous les 2 points fixes, et l'effet du TMD sur la fonction de transfert est ainsi optimisé.

Les différentes étapes de ce procédé d'optimisation sont illustrées ci-dessous.

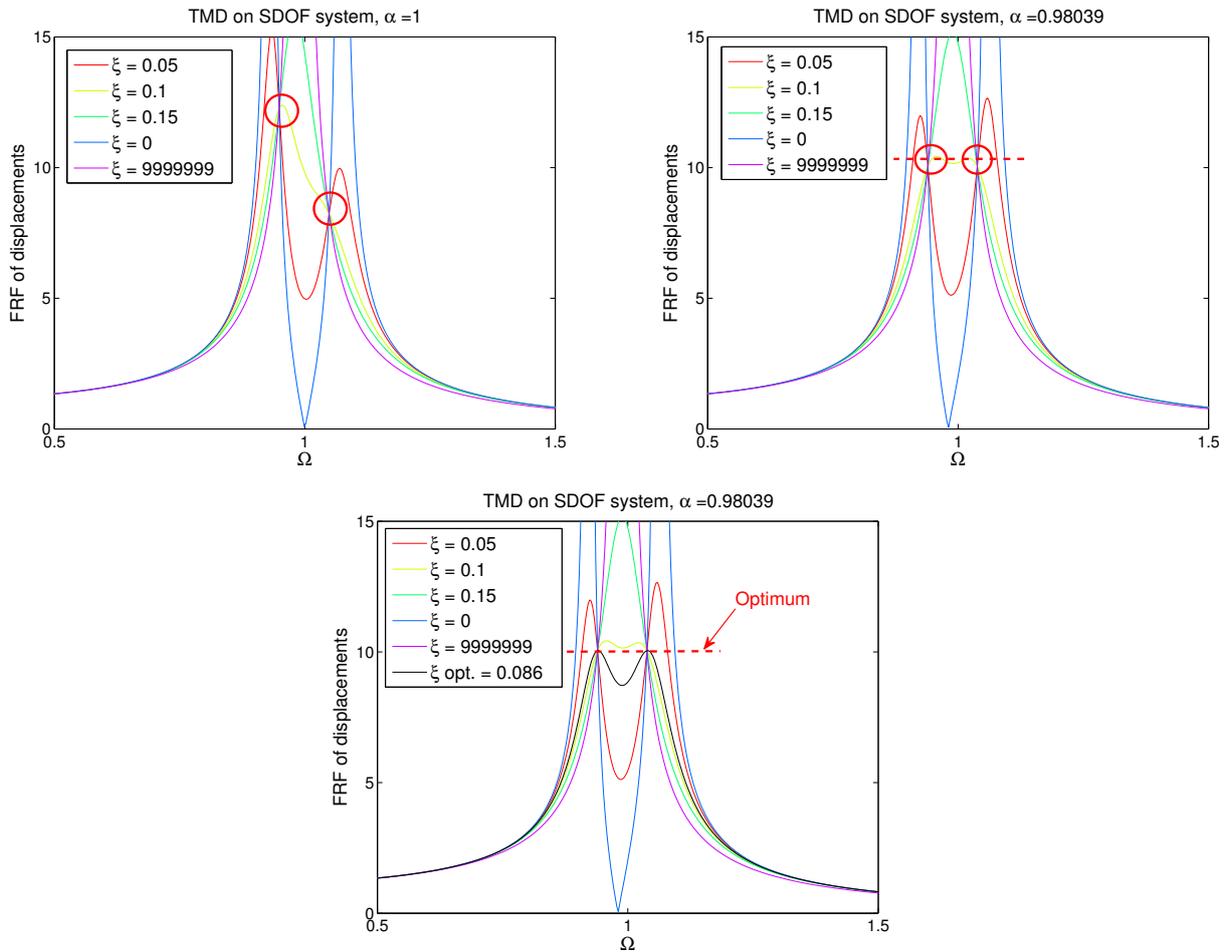


FIGURE II.4 – Stratégie de réglage d'un TMD selon *den Hartog*

Mathématiquement, suivant cette stratégie, on aboutit assez facilement au réglage suivant :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{1 + \mu} \\ \zeta = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)}} \end{cases} \quad (II.2)$$

Le TMD ajoute un *ddl* et donc un pôle à la fonction de transfert, si bien que 2 pics y apparaissent, comme on peut le voir sur les 3 figures ci-dessus. On remarque que, pour un amortissement nul, on retrouve l'amortisseur de *Frahm*. Ensuite, l'augmentation de l'amortissement réduit l'amplitude de la FRF jusqu'à une valeur optimale. Par après, les pics remontent et se rapprochent, jusqu'à fusionner pour des valeurs très élevées d'amortissement. Dans ce cas, le système est équivalent à un système à 1 degré de liberté de masse égale à  $m + m_2$ .

Finalement, il est aussi utile de rappeler les caractéristiques principales et bien connues des TMD :

- Action sur un mode visé unique
- D'autant plus efficace que sa masse est élevée, avec toutefois une limite propre à la structure amortie sur la masse autorisée
- Forte sensibilité au réglage de la fréquence
- Sensibilité moindre au réglage de l'amortissement
- D'autant plus efficace que l'amortissement structurel est faible.

## 2 Amortisseurs à inertie

La solution d'amortisseur la plus courante a été rapidement étudiée. Une solution alternative et beaucoup plus récente est maintenant présentée. Celle-ci utilise une composante mécanique linéaire appelée *inertier*, dont l'effet va être expliqué en détails.

### 2.1 Histoire et concept

#### 2.1.1 L'inertier

Le concept d'*inertier* a été introduit par *Smith* à l'Université de Cambridge en 2002 [17]. Ce chercheur est parti du constat qu'il n'existait en mécanique aucun équivalent au condensateur dans l'analogie classique "force-courant" entre les circuits mécaniques et électriques. La correspondance est parfaite entre le ressort et le dash-pot avec respectivement la bobine et la résistance. Toutefois, la masse mécanique, vu son unique terminal, ne permet en réalité de représenter qu'un condensateur relié à la terre électrique.

Son idée fut donc de proposer un composant mécanique équivalent à une masse, mais possédant 2 terminaux indépendants, et ainsi parfaitement analogue au condensateur électrique. L'*inertier* était né. La force générée aux bornes de celui-ci est donc proportionnelle à l'accélération relative de ses terminaux. L'*inertier* idéal est en effet modélisé par la loi constitutive linéaire suivante :

$$F = b(\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2), \tag{II.3}$$

où  $b$  désigne son *inertance* ([kg]), qui peut être de plusieurs ordres de grandeur supérieure à la masse physique de l'appareil, laquelle est supposée négligeable.

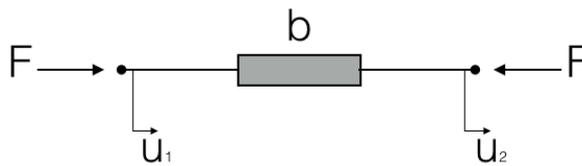


FIGURE II.5 – Schéma de principe d'un *inertier*

L'ajout d'un *inertier* dans un dispositif d'amortissement permet de stocker une partie de l'énergie cinétique de vibration, tout comme la masse d'un TMD le permet. Celle-ci est en réalité stockée en énergie cinétique de rotation d'un volant tournant à grande vitesse, et mis en rotation par le déplacement relatif des terminaux de l'appareil. Cela crée ainsi une certaine inertance  $b$ , qui dépend donc surtout de l'inertie de rotation proposée par le volant et de la vitesse de rotation qu'il peut atteindre, et non de sa masse.

Il existe à ce jour plusieurs types d'*inertiers*, le plus courant étant celui de type "crémaillère", illustré ci-dessous.

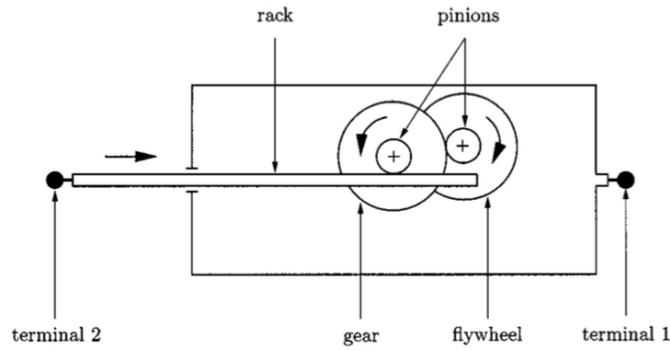


FIGURE II.6 – Schéma d'un *inerte* à crémaillère

Le mouvement axial des terminaux est transformé en un mouvement rotationnel d'un volant à inertie via un système d'engrenages. Par son inertie de rotation et un découplage au travers des engrenages, ce dernier génère ainsi une masse apparente pouvant être supérieure de plusieurs ordres de grandeur à la masse réelle de l'appareil. Pour donner des valeurs indicatives, un prototype d'approximativement 1 kg testé en laboratoire a montré une inertance entre 60 et 200kg, en fonction de la taille du volant [14]. Ce phénomène d'amplification de la masse apparente sera illustré mathématiquement à la *Section 2.1.3*.

Un autre type d'*inerte* est basé sur un mécanisme de vis-à-bille, qui permet également de transformer un mouvement de translation en un mouvement de rotation d'un cylindre entourant cette vis.

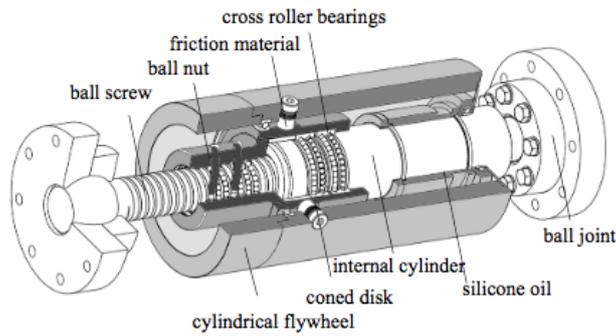


FIGURE II.7 – Schéma d'un *inerte* à vis (issu de [18])

On trouve aussi des *fluid inerters*, qui procurent l'inertie de rotation par la mise en mouvement d'eau dans un canal hélicoïdal, générée par le mouvement d'un piston hydraulique lui-même relié aux terminaux. Ce type d'*inerte* n'a cependant jamais été appliqué dans le domaine du génie civil.

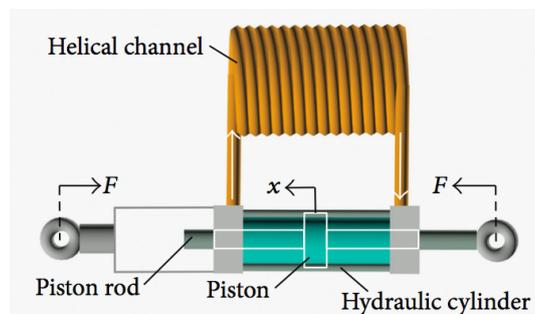


FIGURE II.8 – Schéma d'un *fluid inerte* (issu de [16])

2.1.2 Applications

Le concept d'*inerters* a d'abord été utilisé dans des systèmes de suspension en Formule 1, où il était initialement désigné sous le nom de code "J-damper". Au départ, l'écurie *McLaren* disposait en secret et en accord avec l'Université de Cambridge de cette nouvelle technologie prometteuse et efficace. Finalement, après avoir créé un scandale, le secret fut percé et diffusé à tous les concurrents.

Depuis, la technologie a été étendue avec succès à d'autres domaines d'application tels que le génie civil. Par exemple, elle a été utilisée pour atteindre les objectifs de confort dans des bâtiments de grande hauteur soumis à l'action du vent [7]. Vu leur élancement, ils nécessitent un ajout de masse considérable, qu'il n'est souvent pas possible de fournir aisément avec des TMD, pour des raisons structurelles et architecturales. L'astuce peut alors être d'ajouter un *inerters* à un TMD conventionnel, formant alors un *Tuned mass damper inerters* (TMDI), qui sera présenté ci-après.

Bien plus encore, dans le dimensionnement sismique de gratte-ciels, il est rarement possible de fournir suffisamment d'amortissement avec des TMD. L'effet d'amplification de masse qui caractérise les *inerters* trouve donc parfaitement sa place. Ces derniers sont alors placés en combinaison avec un ressort et un dash-pot, formant ainsi un *Tuned inerters damper* (TID), qui sera également étudié plus loin.

Une option est par exemple de placer ces TID dans les contreventements de la structure [18]. Ils peuvent par exemple être positionnés avantageusement entre le rez-de-chaussée et le premier étage, ce qui rend également leur installation aisée. Il a d'ailleurs été montré pour cette application la possibilité d'amortir plusieurs modes de vibrations à la fois, tout comme le ferait un simple *viscous damper*. Cependant, l'amortisseur à inertie utilisé permet aussi de reproduire le comportement d'un TMD au voisinage de la résonance principale, ce qu'un *viscous damper* n'est pas capable de faire. Finalement, un exemple numérique a montré que pour une même valeur cible d'amortissement, la viscosité à conférer au *viscous damper* devait être 12 fois supérieure à celle à donner au dash-pot de l'arrangement mécanique constituant l'amortisseur à inertie [11]. Intuitivement, on comprend que la présence des effets d'inertie absorbe et stocke une partie conséquente de l'énergie cinétique de la structure, soulageant ainsi considérablement la partie visqueuse de l'amortisseur.

Comme schématisé ci-dessous, l'application de TID a aussi été étudiée pour l'amortissement de haubans de ponts [12], où ils se sont également avérés plus performants que les simples dash-pots utilisés habituellement, pour un positionnement donné. A nouveau, ils permettent les caractéristiques d'amortissement de plusieurs modes, tout en offrant aussi des effets bénéfiques d'inertie.

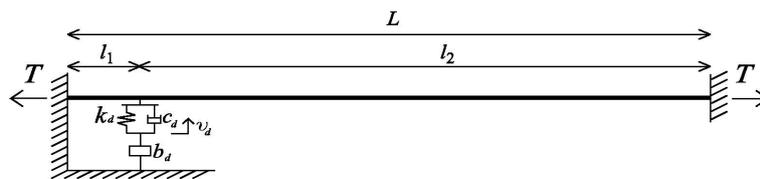


FIGURE II.9 – Schéma de l'utilisation d'un amortisseur sur un câble

Ce type d'amortisseur n'a jamais été utilisé pour des passerelles, mais comme il va être montré, il pourrait toutefois l'être de façon profitable. En effet, les propriétés avantageuses dont il fait preuve pour les applications précitées sont aussi applicables pour ce type d'ouvrage. L'*inerters* s'est révélé particulièrement efficace sous des charges de type harmoniques, qui sont par ailleurs celles considérées lors de la modélisation de la foule pour l'évaluation du confort des passerelles. La potentielle transposition à ce domaine est donc immédiate.

2.1.3 Inertance

L'importance du concept d'inertance a été montrée. On peut maintenant donner une idée de celle qui peut être développée, par l'établissement d'une formule simple. Cela est effectué dans le cas le plus classique d'*inerters* (de type crémaillère), schématisé ci-dessous.

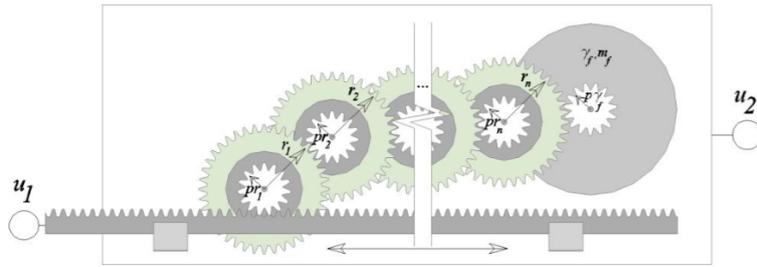


FIGURE II.10 – Schéma du mécanisme d'un *inerteur* à crémaillère (issu de [13])

On considère ici un mécanisme à plusieurs roues. La formule ci-dessous, donnant l'inertance  $b$  en fonction des propriétés géométriques de l'appareil, est démontrée en *Annexe B* :

$$b = m_f \left( \frac{G_f}{p_f} \right)^2 \prod_{i=1}^N \left( \frac{r_i}{p_i} \right)^2 \quad (\text{II.4})$$

où  $r_i$  et  $p_i$  sont respectivement les rayons de la roue  $i$  et de son pignon. La masse, le rayon de giration et le rayon du pignon du volant à inertie sont eux désignés par  $m_f$ ,  $G_f$  et  $p_f$ .

Un cas illustratif suggéré par *Smith* [17] peut-être le suivant. On suppose un *inerteur* avec une roue unique, une masse de 10kg pour le volant à inertie, et des ratios  $G_f/p_f$  et  $r_1/p_1$  classiques de 3. L'inertance obtenue dans ce cas est alors de 810kg, offrant ainsi une masse fictive 81 fois plus élevée que la masse réelle de l'appareil. Bien plus encore, on pourrait augmenter les ratios utilisés ou ajouter une roue supplémentaire, laquelle multiplierait le cas échéant l'inertance par son ratio  $r_2/p_2$  au carré. Ces considérations justifient d'une part le fait de négliger la masse propre de l'appareil pour la modélisation, et montrent d'autre part la flexibilité et le vaste champ de possibilités offertes par le mécanisme d'engrenage.

Néanmoins, il convient de rester très prudent au niveau de l'applicabilité réelle supposée pour ce type d'appareil. En effet, les sollicitations oscillatoires créent une rotation alternée du mécanisme, qui est donc sujet à une usure beaucoup plus marquée. De plus, dans une passerelle, il subira une mise en marche et des arrêts fréquents, ce qui est également un facteur peu apprécié par ses composants.

La formule (II.4) établie ci-dessus peut de même laisser suggérer que l'inertance peut être augmentée à l'infini. En pratique, la résistance propre du mécanisme ne permet cependant pas de générer des forces excessives aux terminaux, sous peine de rupture. L'inertance sera donc bornée pour des raisons technologiques.

Pour ces raisons, nous attirons l'attention sur le fait que, si une inertance trop importante est requise, il est préférable de se tourner vers un appareil de type vis-à-bille, beaucoup plus robuste et résistant. Dans les applications visant la limitation de l'*interstorey drift* en sismique, c'est d'ailleurs systématiquement cette solution qui est utilisée. L'inertance développable est alors de plusieurs ordres de grandeur supérieure à celle offerte par un système à engrenages. Des appareils réalisés ont montré des masses apparentes de plusieurs milliers de tonnes [22], ce qui est de loin suffisant pour une utilisation sur des passerelles. Pour ce type de dispositif, l'effet visqueux peut d'ailleurs être généré de façon assez commode par l'introduction de fluides dans les terminaux de l'*inerteur* [19].

Nous allons maintenant nous intéresser à la configuration et à l'agencement des éléments constitutifs de ces amortisseurs à inertie qui semblent si prometteurs.

## 2.2 Configurations étudiées

Comme déjà introduit et comme nous allons le voir ci-après, l'utilisation d'amortisseurs à inertie permet de surmonter la limitation majeure des TMD en terme d'ajout de masse à une structure. Afin de comprendre parfaitement

cette caractéristique, plusieurs modèles simples d'amortisseurs incluant un *inerteur* ont été étudiés. Ceux-ci sont présentés à la figure ci-dessous.

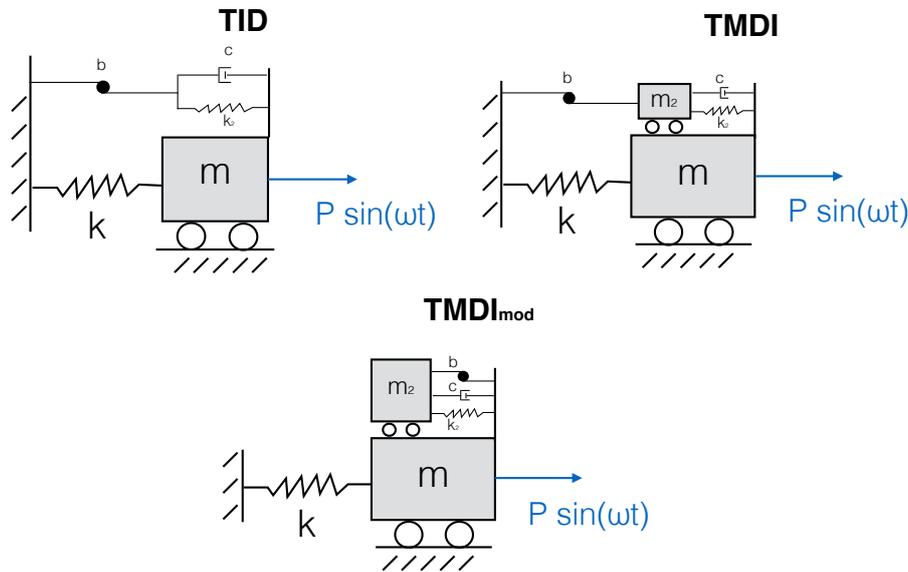


FIGURE II.11 – Configurations d’amortisseurs incluant un *inerteur* étudiées

La première configuration est celle d’un TID (*Tuned inerter damper*), qui est similaire à un TMD dont on aurait remplacé la masse par un *inerteur*, l’extrémité de celui-ci étant alors raccordée à un point fixe. La deuxième configuration est un TMDI (*Tuned mass damper inerter*), et ajoute à un TMD un *inerteur* en série. La troisième, dénommée "TMDI modifié" adjoint également un *inerteur* à un TMD, mais en parallèle avec son ressort et son dash-pot, ce qui permet de garder l’extrémité de l’amortisseur libre (pas de raccord à un point fixe). L’amortisseur se présente alors comme un simple appendice étant activé par le déplacement absolu de la structure.

Notons qu’il est impossible de placer l’*inerteur* en série entre la masse du TMD et le système ressort/piston car celle-ci ne serait alors plus aucunement "retenue". Il faudrait donc envisager une configuration plus complexe, ce qui n’est pas l’objet d’étude présent. En effet, les agencements envisagés ici offrent l’avantage d’être simples et de permettre le plein fonctionnement de l’*inerteur*. Pour cette raison, ce sont ces derniers qui sont généralement présentés dans la littérature.

Les fonctions de transfert des systèmes ci-dessus sont établies en *Annexe A.3-5*. Il apparaît alors clairement que les configurations de TID et TMDI sont en fait similaires à celle d’un TMD, à condition d’utiliser une équivalence de masse pour la définition des paramètres adimensionnels caractérisant l’amortisseur (fréquence  $\omega_a$  et amortissement  $\xi$ ). Cette équivalence revient à substituer à la masse  $m_2$  du TMD l’inertance  $b$  de l’*inerteur* (TID), ou la somme  $b + m_2$  (TMDI). Clairement, on remarque que la masse apparente générée par l’*inerteur* a un effet tout à fait analogue à celle d’un amortisseur conventionnel.

Il est en fait logique d’observer un comportement identique au vu de la loi constitutive de l’*inerteur* (II.5). En effet, le considérant fixé à une de ses extrémités, la force d’inertie qu’il génère est simplement donnée par  $F = m_2 \ddot{u}_2$ , à l’instar de la masse seule du TMD. La différence entre un TMD et les solutions alternatives réside donc dans les ratios de masse qui peuvent être atteints, et dans les propriétés qui découlent de leur augmentation.

Cette observation est très importante, car elle signifie que les réglages simples de *den Hartog* peuvent être transposés pour l’ajustement des paramètres de l’amortisseur à inertie permettant d’amortir un chargement harmonique de façon optimale. Remarquons que pour d’autres sollicitations, par exemple les excitations en base de type sismique, d’autres expressions analytiques que celles de *den Hartog* existent, et ont également été transposées pour des amortisseurs à inertie ([6], [21]). Ce travail se focalise cependant uniquement sur les excitations de passerelles de type

harmonique.

Moyennant l'ajustement énoncé pour le paramètre  $\mu$  dans le cas d'un TID/TMDI, les fonctions de transfert du déplacement de la structure primaire sont données ci-dessous, pour les différentes configurations utilisant un *inert*. Pour la solution de "TMDI modifié",  $\beta$  désigne le ratio entre l'inertance et la masse de la structure primaire :  $\beta = b/m$ .

Configuration	Norme de la fonction de transfert
TID/TMDI	$\frac{1}{k^2} \frac{(\alpha^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\alpha\Omega)^2}{((1 - \Omega^2)(\alpha^2 - \Omega^2) - \alpha^2\Omega^2\mu)^2 + (2\xi\alpha\Omega)^2(1 - \Omega^2 - \Omega^2\mu)^2}$
TMDI "modifié"	$\frac{1}{k^2} \frac{(\alpha^2\mu - \mu\Omega^2)^2 + \mu^2(2\xi\alpha\Omega)^2}{((1 - \Omega^2(1 + \beta))(\alpha^2\mu - \mu\Omega^2) - \alpha^2\Omega^2\mu^2 - (\beta\Omega^2)^2 + 2\alpha^2\Omega^2\beta\mu)^2 + \mu^2(2\xi\alpha\Omega)^2(1 - \Omega^2 - \Omega^2(\mu - \beta))^2}$

TABLE II.1 – Norme des fonctions de transfert des différents amortisseurs à inertie étudiés

Ces fonctions de transfert sont comparées pour différents ensembles de paramètres dans la section ci-dessous.

### 2.3 Comparaison des performances

Les modèles ayant été établis, il peuvent maintenant être examinés. Deux comparaisons (*Type I* et *Type II*) sont effectuées. La première confronte les différents types d'amortisseurs étudiés pour des masses (physiques ou "apparentes") similaires. La seconde explore les possibilités des *inerters* face aux TMD. Les FRF des accélérations plutôt que des déplacements sont présentées, les premières étant les véritables objets d'intérêt pour le critère de dimensionnement au confort. On observera que l'approche de *den Hartog* considère quant à elle les déplacements, et que le réglage qu'il propose n'est donc pas parfaitement optimal en termes d'accéléérations.

Les paramètres  $\alpha$  et  $\xi$  ont toutefois été déterminés suivant les règles de *den Hartog*, généralisées aux différents cas via les paramètres adimensionnels définis plus tôt pour chacun des systèmes. Seul le "TMDI modifié", pour qui les recommandations de *den Hartog* n'étaient pas facilement applicables, a fait l'objet d'un réglage de type numérique. Une stratégie semblable a néanmoins été suivie, amenant les 2 pics de la FRF au même niveau en calibrant  $\alpha$ , puis minimisant leur ordonnée en variant  $\xi$ .

Type I					
TMD	TID	TMDI		TMDI <sub>modif</sub>	
$\mu$	$\beta$	$\mu$	$\beta$	$\mu$	$\beta$
0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01

TABLE II.2 – Set de paramètres pour le Type I

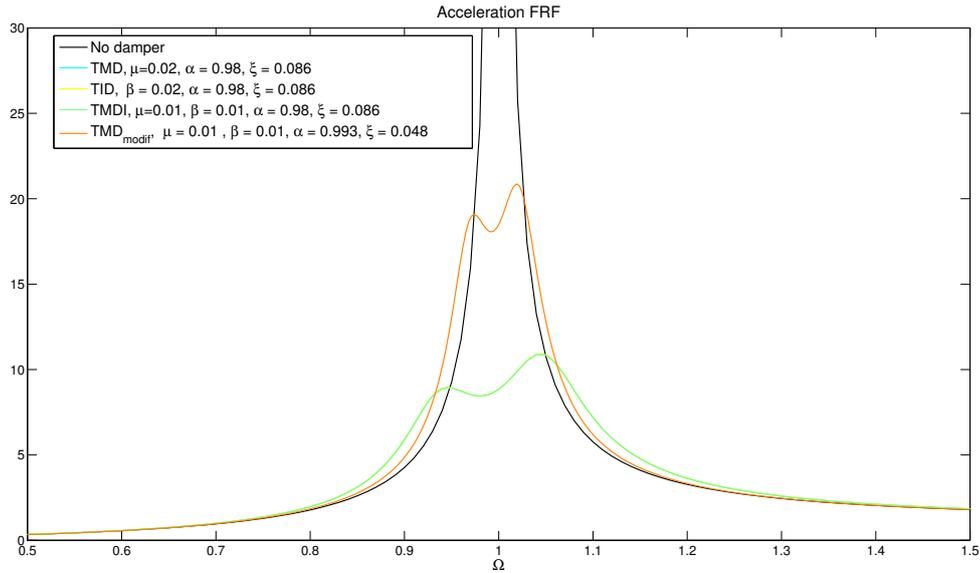


FIGURE II.12 – FRF des accélérations pour les paramètres de Type I

Comme indiqué mathématiquement plus tôt, on remarque que les performances des TMD, TID et TMDI sont identiques lorsque leur masse "effective" l'est également. On observe une très nette réduction de l'amplification dynamique des déplacements grâce à la présence de l'amortisseur, qui a pour effet d'augmenter l'amortissement pour un *ddl* (ou de la même façon, un mode) donné.

La configuration de "TMDI modifié" admet des performances peu concluantes. En effet, l'ajout d'un *inertier* en parallèle avec les ressort et dash-pot entraîne un rapprochement des 2 nouvelles fréquences, en tendant à "fusionner" les 2 masses via l'inertie conférée à leur liaison.

La configuration ci-dessous tire maintenant profit de l'effet d'amplification de masse amené par les *inerters*.

**Type II**

TMD		TID		TMDI		TMDI <sub>modif</sub>	
$\mu$	$\beta$	$\mu$	$\beta$	$\mu$	$\beta$	$\mu$	$\beta$
0.02	0.1	0.02	0.08	0.02	0.08	0.02	0.08

TABLE II.3 – Set de paramètres pour le Type II

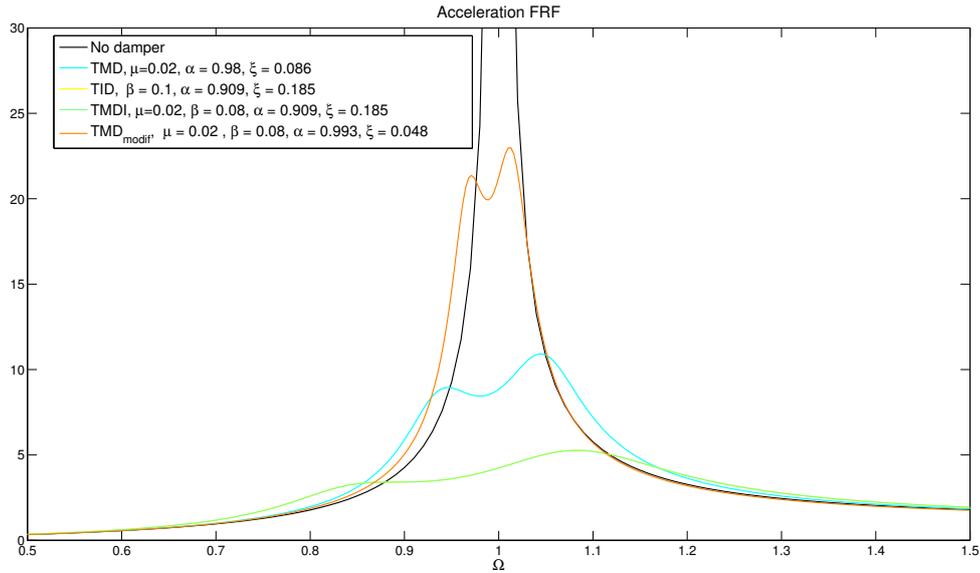


FIGURE II.13 – FRF des accélérations pour les paramètres de Type II

On note cette fois une amélioration sensible du comportement vibratoire grâce à la présence des *inerters* ; les TID et TMDI surpassent d'un facteur 2 la performance de TMD conventionnels. Cela justifie par conséquent la proposition d'utilisation d'amortisseurs à inertie, qui offrent donc une alternative intéressante aux solutions traditionnelles. En effet, si l'amortissement des modes d'une passerelle est prévu selon une stratégie modale entièrement découplée, l'application des règles de *den Hartog* fournit pour les amortisseurs à inertie des performances nettement supérieures pour l'amortissement de vibrations harmoniques.

On remarque également que l'augmentation de l'inertance requiert un  $\xi$  plus élevé.

La performance du "TMDI modifié" n'est pas améliorée par l'ajout d'inertance, au contraire. Nous concluons donc que ce dispositif requiert plus d'investigations pour la compréhension de son comportement exact, qui n'est pas intuitif, ou devrait être réglé de façon différente. Il semble par ailleurs que la meilleure façon d'implémenter des *inerters* consiste à les relier d'une façon ou d'une autre à un point "fixe". C'est cette solution qui sera considérée dans la suite de ce travail.

En particulier, la configuration TID sera systématiquement utilisée, pour éviter la confusion entre les deux "masses" différentes du TMDI. Pour rappel, il n'y a pas de différence formelle entre ces deux agencements. On gardera donc simplement à l'esprit que si l'on est limité par l'inertance à fournir, une solution peut être de coupler l'*inertier* à une masse réelle, comme cela est fait avec un TMDI.

## 2.4 Positionnement et efficacité

Un aspect qui n'a jusqu'à présent pas été mentionné ni pris en compte, et qu'il faut néanmoins garder à l'esprit, est le besoin de 2 terminaux pour l'utilisation d'*inerters*. Les configurations optimales (TID/TMDI) nécessitent en effet, par opposition à l'usage de TMD, de fixer l'extrémité de l'amortisseur sur un point fixe plutôt que de la laisser libre.

Ainsi, dans le cas de passerelles, le positionnement d'*inerters* ne sera généralement possible qu'"horizontalement" : par exemple, dans les diagonales du platelage . Ce type d'amortisseur sera donc préconisé pour les problèmes de vibrations transversales. Ces dernières ne sont néanmoins pas à négliger, bien au contraire. En effet, la tolérance d'accélération dans la direction transversale est bien plus sévère que celle pour les vibrations verticales. C'est notamment

le cas pour éviter le phénomène problématique de *lock-in*, qui est la synchronisation de la foule en phase avec les vibrations, lorsque l'accélération transversale dépasse une certaine limite [15]. Ce phénomène, déjà observé à plusieurs reprises sur des cas réels, s'"auto-alimente" et résulte en une amplification notable des accélérations.

De plus, en une position donnée, le déplacement réel aux 2 bornes de l'amortisseur ne pourra être aussi grand que le déplacement absolu de la passerelle, lequel déterminait directement l'efficacité dans le cas d'un TMD. Ici, c'est bien le déplacement *relatif* entre les extrémités qui sera lié à l'action de l'amortisseur. Le choix du placement sera donc différent de celui effectué pour les TMD. Par exemple, les TID seront plus efficaces proches des supports alors que les TMD seront généralement placés en travée.

Si de plus, l'*inerteur* est placé sur une diagonale, le déplacement relatif transversal devra aussi être minoré par un *facteur d'efficacité*  $\phi_k$  selon l'inclinaison de cette diagonale (facteur 0,7 pour une inclinaison à 45°) [5].

Ainsi, le déplacement utile pour l'amortisseur sera près de 2 ordres de grandeur inférieur à celui pouvant être mobilisable pour un TMD. Si le déplacement absolu du mode est unitaire, il ne faut pas s'attendre à plus de 1 à 2% utilisables par l'amortisseur à inertie à 2 terminaux, en fonction de sa position.

A ce propos, une suggestion ingénieuse pour gagner facilement en efficacité par rapport à une configuration classique est d'utiliser des "découpleurs de mouvements". Ceux-ci permettent, grâce à des dispositions géométriques particulières, de transformer le mouvement relatif de la structure en un mouvement utile plus élevé. Ils offrent ainsi d'élever le facteur d'efficacité à des valeurs bien supérieures à 1. Certaines configurations envisageables sont proposées ci-dessous. Sur les schémas, le facteur d'efficacité est désigné par *f*.

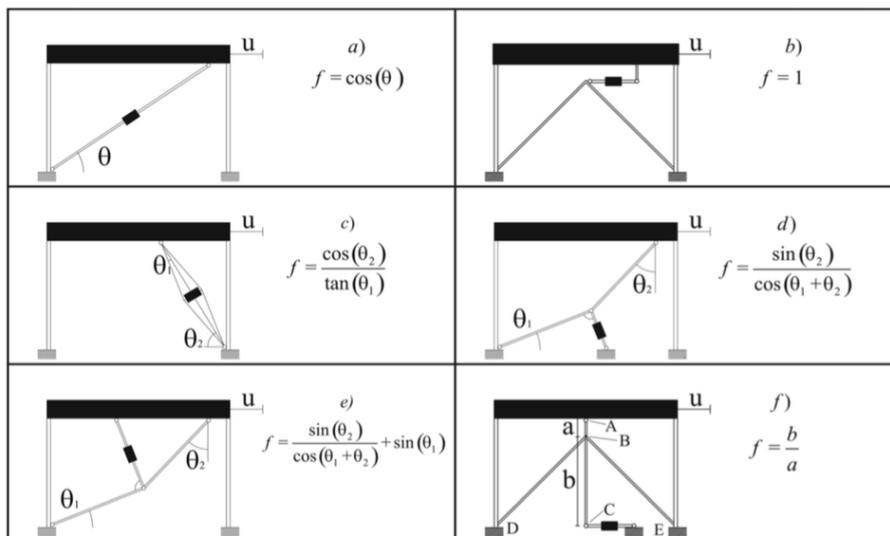


FIGURE II.14 – Configurations de découpleurs de mouvements pour les amortisseurs. Issu de [10]

On remarque que par exemple, pour la dernière configuration, le déplacement relatif *u* peut être amplifié via un bras de levier d'efficacité "*b/a*", ce qui peut facilement amener des valeurs du facteur d'efficacité de l'ordre de 3.

Il n'empêche que le besoin de 2 terminaux réduit l'efficacité des amortisseurs à inertie. Néanmoins, il a été montré précédemment que l'inertance inhérente à un *inerteur* peut prendre des valeurs très élevées, suffisantes pour compenser et même l'emporter sur cet effet. Si cet aspect venait à poser un réel problème, on pourrait aussi bien utiliser une solution de type "TMDI modifié" présentée plus tôt. Ainsi, bien qu'il soit capital de garder cet aspect en tête, il ne compromet pas l'applicabilité d'amortisseurs à inertie sur des passerelles ni sur toute autre structure.

## 2.5 Propriétés intéressantes

Dans cette section, les propriétés engendrées par la possibilité de fournir des ratios de masse plus élevés que pour des TMD sont investiguées. Les observations qui vont être faites posent aussi les fondements de l'idée qui sera proposée plus tard d'amortir 2 modes de vibration avec un seul amortisseur.

### 2.5.1 Ratio de masse de l'inertier

Une des questions importantes est de savoir dans quelle mesure l'augmentation du rapport de masse  $\beta$  de l'inertier est profitable en termes de réduction de l'amplification dynamique au voisinage de la résonance. La figure ci-dessous présente l'évolution du maximum de la fonction de transfert des déplacements relative à un système amorti à 1 *ddl*, en fonction du rapport de masse de son amortisseur.

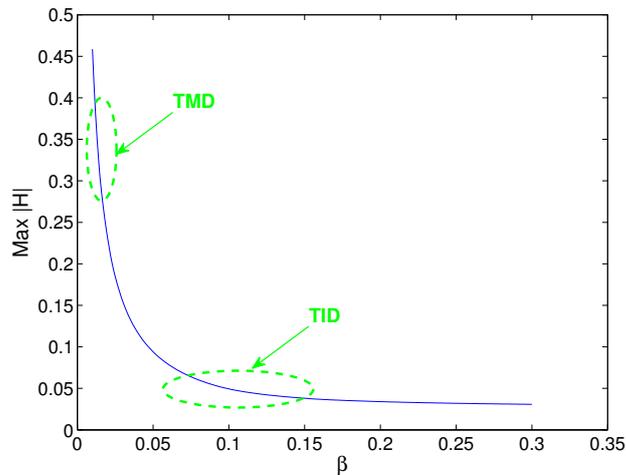


FIGURE II.15 – Maximum de la FRF en fonction du rapport de masse  $\beta$

Comme déjà illustré par la *Figure II.13*, on voit que l'augmentation du ratio de masse par rapport à une situation traditionnelle, où il se trouve proche de 1 à 2%, permet une marge considérable de diminution de l'amplification dynamique des déplacements. On peut aisément la réduire par un facteur 2 ou 3.

Le gain amené par l'inertier est le plus élevé pour des faibles ratios  $\beta$ , après quoi il ne semble plus amener de bénéfice substantiel au-delà d'environ 10%. Dans les études subséquentes, cette valeur sera donc fréquemment prise comme référence pour quantifier les performances développables par l'inertier au sein d'un TID ou TMDI. Il faut savoir que dans les applications de type génie civil, les ratios de masse communs ne dépassent jamais 20 à 30%.

### 2.5.2 Sensibilité au dérèglement

Comme précité, un inconvénient majeur des TMD est leur grande sensibilité au *detuning*. Ce problème est d'autant plus important que de nombreux facteurs peuvent engendrer ce dérèglement durant la vie d'une passerelle. Par exemple, les fluctuations de la charge des piétons, le comportement non-linéaire de la structure ou encore les variations de ses propriétés avec le temps sont autant de facteurs qui peuvent réduire considérablement l'efficacité des amortisseurs. Ainsi, même si l'amortisseur est initialement parfaitement réglé sur la structure, la fréquence même de celle-ci peut varier, menant alors à un certain dérèglement fréquentiel. Pour cette raison, il est d'ailleurs important lors de la conception de vérifier l'ajustement d'un TMD pour une gamme de fréquences donnée plutôt que pour une fréquence cible unique.

Ci-dessous, la *Figure II.16* présente la différence relative entre les maxima des fonctions de transfert des cas parfaitement accordé et admettant un léger dérèglement, pour différents ratios de masse de l'amortisseur.

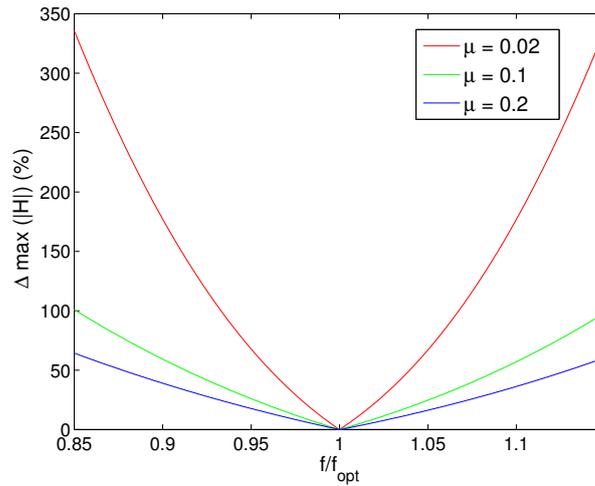


FIGURE II.16 – Sensibilité du maximum de la fonction de transfert au dérèglement de la fréquence

Un TMD conventionnel ( $\mu$  de l'ordre de 2%) s'avère être extrêmement sensible au dérèglement, si bien qu'un écart de seulement 7% par rapport au réglage optimal en fréquence diminue d'un facteur 2 son efficacité. L'utilisation d'un *inerteur* (au sein d'un TID), par exemple caractérisé par une valeur  $\beta$  de 10%, permet comme montré à la figure ci-dessus de doubler la robustesse de l'amortisseur face au problème de dérèglement, ce qui constitue un réel atout.

### 2.5.3 Gamme de fréquences impactée

Une question qui peut être posée est de connaître la largeur de la gamme de fréquences sur laquelle l'amortisseur a un impact lorsqu'il n'est pas réglé selon *den Hartog*. Cet aspect est intéressant pour la suite de ce travail. En effet, lorsque sera présentée l'idée d'amortir 2 modes avec un seul amortisseur, on verra qu'un réglage fréquentiel particulier sera proposé dans le but précis d'avoir un impact sur une gamme élevée de fréquences.

Le paramètre  $\alpha$  a été varié à des valeurs différentes de celle ( $\alpha_{opt}$ ) préconisée par *den Hartog*. Le taux d'amortissement de l'amortisseur a quant à lui été conservé au réglage optimal. La *Figure III.8* montre l'évolution de la différence entre les 2 fréquences propres du système amorti à un *ddl*, pour différentes valeurs de réglage  $\alpha$  et un ratio de masse de 10%.

Notons que l'amortissement étant faible, il a été négligé pour le calcul des fréquences propres.

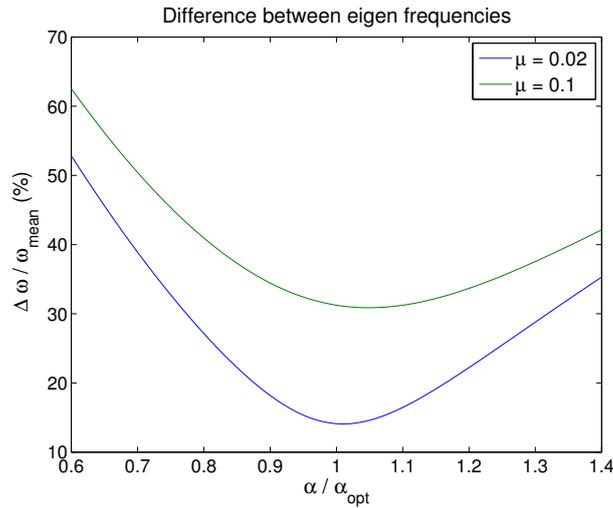


FIGURE II.17 – Différence entre les fréquences propres du système amorti en fonction du réglage  $\alpha$ .

On remarque que globalement, les fréquences propres du système amorti s'éloignent lorsque le réglage diffère de celui de *den Hartog*. Cela signifie que l'impact de l'amortisseur se fait ressentir sur une plage plus vaste de fréquences. De plus, leur éloignement est plus marqué pour des ratios de masse  $\mu$  élevés, typiquement pour un TID face à un TMD. Cela laisse donc pressentir l'idée d'atteindre 2 modes proches en fréquence avec un même amortisseur réglé judicieusement, pour autant que sa masse soit suffisamment importante.

## 2.6 Conclusions

A ce stade, plusieurs conclusions générales peuvent être déduites des études réalisées ci-avant. Elles ne constituent pas une liste exhaustive, mais présentent l'avantage de cerner les enjeux relatifs à l'utilisation d'amortisseurs à inertie, sur base de modèles simples.

L'utilisation d'*inerters* pour amortir des sollicitations harmoniques :

- Peut être basée sur la connaissance des TMD, car elle en constitue une généralisation
- Permet un effet d'amplification de masse sans surcharge, et surpasse donc les performances et limitations des TMD
- Augmente la robustesse face au problème de *detuning*
- Amortit, à l'instar d'un *viscous damper*, également les modes supérieurs au mode cible
- Peut se borner à des rapports de masse de l'ordre de 10%
- Augmente la gamme de fréquences impactée par l'amortisseur
- Requiert 2 terminaux.

Ce type d'amortisseur présente ainsi tous les avantages d'une masse plus élevée sans comporter l'inconvénient de sa masse physique effective. Il s'illustre donc comme une solution alternative viable pour l'amortissement de passerelle dans le cadre d'une évaluation des critères de confort.

Dans le cas d'une analyse en base modale découplée, identique à la considération de plusieurs systèmes à 1 *ddl* indépendants, son réglage peut s'effectuer selon les règles de *den Hartog*. Il amène donc une amélioration directe et évidente par rapport à un TMD.

## Chapitre III

# Effet d'un amortisseur sur des systèmes à plusieurs ddl

L'effet d'amortisseurs sur des systèmes simples à 1 degré de liberté a été étudié. Ces derniers constituent un objet d'étude important dans la mesure où les systèmes continus sont généralement traités comme un ensemble de systèmes à 1 degré de liberté.

Ce chapitre rappelle dans un premier temps les fondements analytiques de l'analyse en base modale, qui est la méthode permettant cette décomposition en sous-systèmes indépendants. Le cas académique d'une poutre bi-appuyée est pris comme exemple.

Ensuite, l'approche est généralisée à un système quelconque contenant un amortisseur. Le but est d'établir une expression approchée simple pour sa matrice de transfert couplée, ce qui est effectué par l'application d'une *méthode par perturbations* sur la forme adimensionnelle des équations qui le gouvernent.

Le modèle analytique établi est ensuite validé pour un cas à un degré de liberté, puis utilisé pour étudier un système à 2 modes. En particulier, après avoir rappelé les recommandations applicables à la vérification dynamique de confort des passerelles, une solution habituelle d'amortissement à 2 amortisseurs est présentée. Cette dernière est ensuite modifiée grâce à l'outil analytique développé pour inclure l'influence du couplage.

Finalement, une méthode alternative n'utilisant qu'un amortisseur pour amortir 2 modes est proposée, après l'étude fine du système couplé. Un critère attestant de son applicabilité est également donné.

Un schéma récapitulatif des méthodes de dimensionnement développées est finalement présenté.

## 1 Modèle analytique

Comme énoncé, les grandes lignes de l'analyse modale sont tout d'abord réexpliquées. L'exemple utilisé pour illustrer le passage en base modale est celui d'une poutre bi-appuyée, de longueur  $L$ . Les caractéristiques de cette dernière sont choisies uniformes : un module de Young  $E$ , une inertie  $I$  et une masse linéique  $\mu$ . Cette poutre sera d'abord étudiée seule, puis l'ajout d'un amortisseur sera considéré, comme illustré ci-dessous.

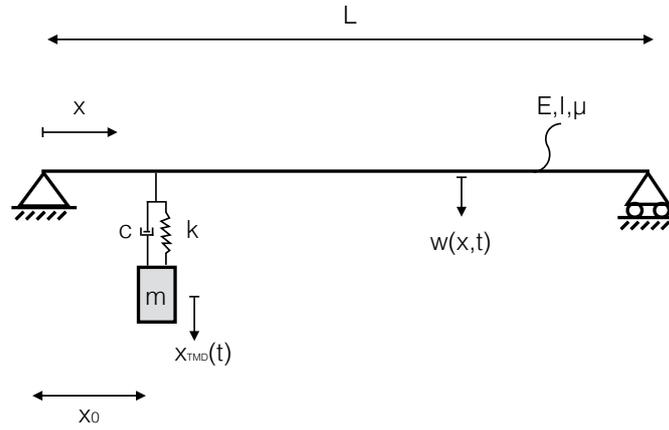


FIGURE III.1 – Poutre bi-appuyée incluant un TMD

La figure ci-dessus représente l'ajout d'un TMD à la poutre. En toute généralité, et comme déjà noté précédemment, la substitution du TMD par un TID (ou un TMDI) n'aura pour seule conséquence qu'augmenter le ratio de masse du TMD, les mêmes équations pouvant être utilisées pour modéliser le système. On fera donc par la suite souvent référence au terme TMD, sachant qu'il peut tout aussi bien s'agir d'un TID si le ratio de masse considéré est grand.

## 1.1 Passage en base modale

### 1.1.1 Poutre bi-appuyée sans amortisseur

L'équation d'équilibre de la poutre seule est celle-ci :

$$\mu \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = p(x,t) \quad (\text{III.1})$$

On décompose la solution dans la base modale selon la combinaison modale suivante (M premiers modes considérés)

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^M \phi_i(x) q_i(t), \quad (\text{III.2})$$

qui n'est autre que la somme des produits des formes (modes) de vibrations par les amplitudes correspondantes.

Les développements élémentaires et traditionnels permettent d'obtenir, pour des conditions d'appui de type poutre bi-appuyée, les pulsations et modes propres de la poutre :

$$\begin{cases} \omega_i = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \\ \phi_i(x) = A \sin \frac{i\pi x}{L} \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Les modes propres sont déterminés à une constante près et ont l'intéressante propriété d'être orthogonaux via la masse et la raideur du système. On peut tirer parti de cette propriété, multiplier membre-à-membre l'équation du mouvement par la forme modale puis intégrer sur le domaine pour obtenir l'équation régissant l'évolution des amplitudes modales :

$$M_i^* \ddot{q}_i(t) + K_i^* q_i = p_i^*(t), \quad i = 1, \dots, M. \quad (\text{III.4})$$

avec, dans notre exemple et pour chaque mode,

$$\begin{cases} M_i^* = \int_0^L \mu \phi_i(x) \phi_i(x) dx = \mu \frac{L}{2}, \text{ la masse généralisée} \\ K_i^* = \int_0^L EI \phi_i(x) \phi_i''''(x) dx = EI \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4, \text{ la raideur généralisée} \\ p_i^*(t) = \int_0^L \phi_i(x) p(x,t) dx, \text{ la force généralisée.} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Le grand avantage de l'analyse modale est que ces équations se présentent alors comme  $M$  équations découplées pouvant être résolues indépendamment. L'amortissement est généralement ensuite inséré sous l'hypothèse qu'il n'affecte pas le découplage modal :

$$M_i^* \ddot{q}_i(t) + \underbrace{2\xi_i \sqrt{K_i^* M_i^*}}_{C_i} \dot{q}_i(t) + K_i^* q_i = p_i^*(t), \quad i = 1, \dots, M. \quad (\text{III.6})$$

La matrice de transfert de ce système est une matrice diagonale, simplement donnée par :

$$\underline{\underline{H}}(\omega) = (-\underline{\underline{M}}^* \omega^2 + i\omega \underline{\underline{C}}^* + \underline{\underline{K}}^*)^{-1} \quad (\text{III.7})$$

### 1.1.2 Ajout d'un amortisseur

En réalité, l'introduction d'un amortisseur sur un système quelconque est assez simple à modéliser. Son effet ne dépend en effet que du déplacement de la structure à l'endroit où il est placé, ce déplacement n'étant rien d'autre qu'une combinaison des modes de la base découplée.

L'amortisseur amène un nouveau degré de liberté ( $x_{TMD}$ ) au système et agit comme une force ponctuelle en l'abscisse  $x_0$  de la structure. Dans le cas illustratif de la poutre bi-appuyée, le système est alors régi par les équations :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + [k(w(x,t) - x_{TMD}(t)) + c(\dot{w}(x,t) - \dot{x}_{TMD}(t))] \delta(x - x_0) = p(x,t) \\ m \ddot{x}_{TMD}(t) + k(x_{TMD}(t) - w(x_0,t)) + c(\dot{x}_{TMD}(t) - \dot{w}(x_0,t)) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Utiliser la décomposition modale (III.2), multiplier les équations par les formes modales et intégrer sur le domaine fait apparaître l'équation générale (alors valable pour un système quelconque) :

$$\begin{cases} M_i^* \ddot{q}_i(t) + K_i^* q_i + \int_0^L \phi_i k \left[ \sum_{j=1}^M (\phi_j(x) q_j(t)) - x_{TMD}(t) \right] \delta(x - x_0) dx + \int_0^L \phi_i c \left[ \sum_{j=1}^M (\phi_j(x) \dot{q}_j(t)) - \dot{x}_{TMD}(t) \right] \delta(x - x_0) dx = p_i^* \\ m \ddot{x}_{TMD}(t) + k \left[ x_{TMD}(t) - \sum_{j=1}^M \phi_j(x_0) q_j(t) \right] + c \left[ \dot{x}_{TMD}(t) - \sum_{j=1}^M \phi_j(x_0) \dot{q}_j(t) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

Ce système d'équations peut se réécrire, pour tout  $i$  allant de 1 jusque  $M$  :

$$\begin{cases} M_i^* \ddot{q}_i(t) + K_i^* q_i + k \phi_i(x_0) \left[ \sum_{j=1}^M (\phi_j(x_0) q_j(t)) - x_{TMD}(t) \right] + c \phi_i(x_0) \left[ \sum_{j=1}^M (\phi_j(x_0) \dot{q}_j(t)) - \dot{x}_{TMD}(t) \right] = p_i^* \\ m \ddot{x}_{TMD}(t) + k \left[ x_{TMD}(t) - \sum_{j=1}^M \phi_j(x_0) q_j(t) \right] + c \left[ \dot{x}_{TMD}(t) - \sum_{j=1}^M \phi_j(x_0) \dot{q}_j(t) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Il peut être remis sous format matriciel. Par simplicité, on prédéfinit la matrice  $\underline{\underline{\Gamma}}$  :

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \begin{bmatrix} \phi_1^2(x_0) & \phi_1(x_0)\phi_2(x_0) & \dots & \phi_1(x_0)\phi_M(x_0) & -\phi_1(x_0) \\ \phi_1(x_0)\phi_2(x_0) & \phi_2^2(x_0) & \dots & \phi_2(x_0)\phi_M(x_0) & -\phi_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \phi_1(x_0)\phi_M(x_0) & \phi_2(x_0)\phi_M(x_0) & \dots & \phi_M^2(x_0) & -\phi_M(x_0) \\ -\phi_1(x_0) & -\phi_2(x_0) & \dots & -\phi_M(x_0) & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

On obtient alors :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2^* & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_M^* & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}^*} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_M \\ \dot{x}_{TMD} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2^* & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_M^* & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}^*} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_M \\ \dot{x}_{TMD} \end{bmatrix} \\ + c\underline{\underline{\Gamma}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_M \\ \dot{x}_{TMD} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2^* & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_M^* & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{K}}^*} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_M \\ x_{TMD} \end{bmatrix} + k\underline{\underline{\Gamma}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_M \\ x_{TMD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ \vdots \\ p_M^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

On définit ensuite les matrices non-diagonales suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\tilde{C}}} = \underline{\underline{C}}^* + c\underline{\underline{\Gamma}} \\ \underline{\underline{\tilde{K}}} = \underline{\underline{K}}^* + k\underline{\underline{\Gamma}} \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

ainsi que le vecteur

$$\underline{y} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_M \quad x_{TMD}]^T. \quad (\text{III.14})$$

Le formalisme obtenu devient alors

$$\underline{\underline{M}}^* \times \ddot{\underline{y}}(t) + \underline{\underline{\tilde{C}}} \times \dot{\underline{y}}(t) + \underline{\underline{\tilde{K}}} \times \underline{y}(t) = \underline{p}^*(t) \quad (\text{III.15})$$

La fonction de transfert du système couplé, notée  $\underline{\underline{H}}^*$ , est donc finalement

$$\underline{\underline{H}}^*(\omega) = (-\underline{\underline{M}}^* \omega^2 + i\omega \underline{\underline{\tilde{C}}} + \underline{\underline{\tilde{K}}})^{-1} \quad (\text{III.16})$$

L'Equation (III.15) fait apparaître un problème couplé (non-diagonal) au travers de ses matrices de raideur et d'amortissement. On peut alors à nouveau en extraire une base modale (diagonale). Celle-ci constitue cette fois la base des modes du système composé de la poutre et de l'amortisseur, par opposition à la base  $\underline{\Phi}$  qui ne comportait que ceux du système sans amortisseur. Sous l'hypothèse que l'amortissement reste faible, la première est constituée par les vecteurs  $\underline{\Psi}$  vérifiant :

$$(\underline{\tilde{K}} - \underline{M}^*)\underline{\Psi} = 0 \tag{III.17}$$

Les vecteurs  $\psi$  formant la base reprennent donc des combinaisons des coordonnées  $(q_1 \dots q_M, x_{TMD})$ , créant ainsi  $M + 1$  nouveaux modes (formes). Ainsi, l'élément  $\underline{\Psi}_{ij}$  désigne l'amplitude de la coordonnée  $i$  du vecteur  $\underline{y}$ , dans le mode  $j$  de la nouvelle base prenant en compte la présence de l'amortisseur.

Il est intéressant de visualiser la variation des formes modales, due à l'ajout d'un amortisseur. Celle-ci est d'autant plus marquée que le couplage est important, *i.e.* que les termes non-diagonaux ont une importance relative élevée. Un exemple délibérément très marqué de ces nouveaux modes est donné ci-dessous, dans le cas d'une structure à 2 modes, de masses modales égales et de fréquences très proches. Notons que les vecteurs  $\psi$  sont normés de sorte que la matrice diagonale de masse  $\underline{M}^*$  reste inchangée dans la nouvelle base modale.

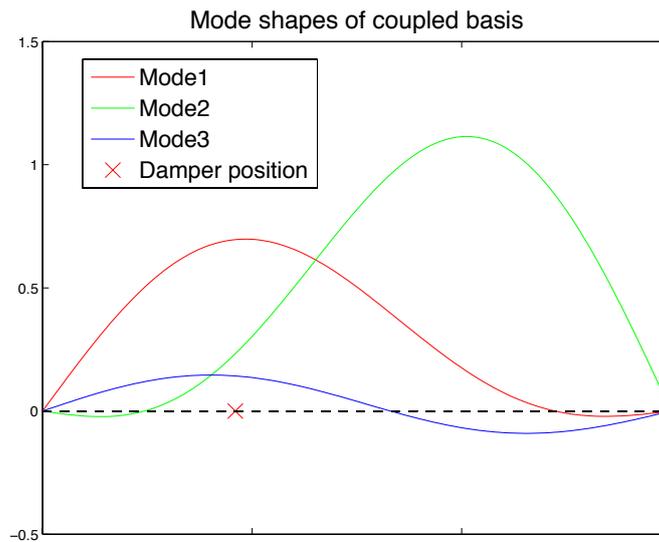


FIGURE III.2 – Modes propres de la base "structure + amortisseur" couplée

Les valeurs importent peu, ce qui est remarquable est de reconnaître les formes sinusoïdales à un ou deux ventres bien connues, mais modifiées comme si l'on avait fictivement appliqué à certains endroits une force ponctuelle empêchant leur développement. Cela n'est autre qu'une manifestation de l'effet "physique" de l'amortisseur.

Afin de résumer les différents développements et clarifier les variables du problème, un tableau récapitulatif est présenté ci-dessous.

Variable	Nom	Matrices associées	Dimensions	FRF
Déplacement nodal structure	$w(x, t)$	$\underline{\underline{K}}, \underline{\underline{M}}$	$N \times N$	$\underline{\underline{H}}_x(\omega)$
Amplitude modale structure	$q(t)$	$\underline{\underline{K}}^*, \underline{\underline{M}}^*, \underline{\underline{C}}^*$	$M \times M$	$\underline{\underline{H}}(\omega)$
Ampl. modale structure + dépl. amortisseur	$y(t)$	$\underline{\underline{K}}, \underline{\underline{M}}^*, \underline{\underline{C}}$	$M + 1 \times M + 1$	$\underline{\underline{H}}^*(\omega)$

TABLE III.1 – Récapitulatif des différentes bases étudiées

## 2 Étude de la matrice de transfert d'un système couplé

Les développements ci-avant ont fait apparaître l'importance de la matrice de transfert  $\underline{\underline{H}}^*$  pour le calcul des phénomènes dynamiques le long de la structure. C'est donc celle-ci qu'on va chercher à comprendre.

Cependant, vu l'expression (III.16) de  $\underline{\underline{H}}^*$  et les matrices issues de (III.12) qui la composent, on se rend facilement compte que la compréhension fine de l'inverse d'une matrice non diagonale n'est pas envisageable. Afin d'évaluer l'éventuel bénéfice et l'impact du couplage entre les différents modes, il est nécessaire de pouvoir étudier une expression plus simple de la fonction de transfert du système couplé.

Ainsi, cette partie consiste en l'établissement d'un tel modèle simplifié, permettant toutefois une représentation fidèle et suffisamment riche du modèle.

Pour ce faire, le système à étudier sera premièrement mis sous forme adimensionnelle. Sa matrice de transfert sera alors évaluée, en réalisant des hypothèses sur les ordres de grandeur des différents termes la constituant. Ensuite, une méthode des perturbations sera utilisée afin de zoomer sur la zone voisine de la fréquence fondamentale de résonance, et en capturer le comportement. Enfin, un regroupement aux différents ordres de grandeur permettra de tronquer l'expression ainsi constituée en une formulation simple.

### 2.1 Forme adimensionnelle du système

La mise sous forme adimensionnelle permet de pouvoir comparer les ordres de grandeur des différents termes composant le *Système* (III.12).

Pour effectuer celle-ci, on commence par définir un temps adimensionnel  $\tau$  tel que

$$\tau = \omega_1 t, \tag{III.18}$$

où  $\omega_1$  désigne (choix arbitraire) la première pulsation propre de la structure. Ainsi, on aura  $\frac{d}{dt} = \omega_1 \frac{d}{d\tau}$ . Les dérivées par rapport à  $\tau$  seront représentées par une apostrophe ( $\cdot$ )'.

On adimensionnalise aussi les charges généralisées. Si on réécrit  $p_1^* = \bar{p}_1 \times \tilde{p}_1$ , avec  $\tilde{p}_1$  une fonction d'ordre 1, on obtient les fonctions d'ordre 1 :

$$\tilde{p} = \frac{p^*}{\bar{p}_1}. \tag{III.19}$$

On adimensionnalise finalement les coordonnées généralisées. Le vecteur  $\underline{y}(t)$  devient donc le vecteur adimensionnel  $\underline{Y}[\tau(t)]$  :

$$\underline{y}(t) = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_M \ x_{TMD}]^T \rightarrow \underline{Y}(\tau) = [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_M \ X_{TMD}]^T, \tag{III.20}$$

où les composantes de  $\underline{Y}$  sont définies selon :

$$y_i = Y_i(\tau) \frac{\bar{p}_1}{M_1^* \omega_1^2}. \quad (\text{III.21})$$

On introduit également les notations suivantes :

$$- \mu_{TMD} = m/M_1^* ;$$

$$- \alpha = \omega_{TMD}/\omega_1 ;$$

et on utilise le fait que  $c = 2m\omega_{TMD}\xi_{TMD}$  et que  $k = m\omega_{TMD}^2$ .

Par simplicité, les éléments du vecteur  $\phi(x_0) = [\phi_1(x_0) \dots \phi_M(x_0)]$  sont simplement référencés par  $\phi_i$ . Les différentes équations du *Système* (III.12) étudié s'écrivent alors :

$$\begin{cases} M_1^* \ddot{q}_1 + 2M_1^* \omega_1 \xi_1 \dot{q}_1 + M_1^* \omega_1^2 q_1 + f_{TMD,1} = p_1^* \\ M_2^* \ddot{q}_2 + 2M_2^* \omega_2 \xi_2 \dot{q}_2 + M_2^* \omega_2^2 q_2 + f_{TMD,2} = p_2^* \\ \vdots \\ M_M^* \ddot{q}_M + 2M_M^* \omega_M \xi_M \dot{q}_M + M_M^* \omega_M^2 q_M + f_{TMD,M} = p_M^* \\ m\ddot{x}_{TMD} + (\dot{x}_{TMD} - \phi_1 \dot{q}_1 - \dots - \phi_M \dot{q}_M)c + (x_{TMD} - \phi_1 q_1 - \dots - \phi_M q_M)k = 0 \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

avec

$$\begin{aligned} f_{TMD,i} = & (\phi_i \phi_1 \dot{q}_1 + \phi_i \phi_2 \dot{q}_2 + \dots + \phi_i \phi_M \dot{q}_M - \phi_i \dot{x}_{TMD})c \\ & + (\phi_i \phi_1 q_1 + \phi_i \phi_2 q_2 + \dots + \phi_i \phi_M q_M - \phi_i x_{TMD})k \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

On passe alors à l'écriture adimensionnelle, qui donne tous calculs faits :

$$\begin{cases} Q_1'' + 2\xi_1 Q_1' + Q_1 + F_{TMD,1} = \tilde{p}_1 \\ Q_2'' \frac{M_2^*}{M_1^*} + 2\xi_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{M_2^*}{M_1^*} Q_2' + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \frac{M_2^*}{M_1^*} Q_2 + F_{TMD,2} = \tilde{p}_2 \\ \vdots \\ Q_M'' \frac{M_M^*}{M_1^*} + 2\xi_M \frac{\omega_M}{\omega_1} \frac{M_M^*}{M_1^*} Q_M' + \left(\frac{\omega_M}{\omega_1}\right)^2 \frac{M_M^*}{M_1^*} Q_M + F_{TMD,M} = \tilde{p}_M \\ X_{TMD}'' - 2\alpha \xi_{TMD} (Q_1' \phi_1 + \dots + Q_M' \phi_M - X_{TMD}') \\ \quad - \alpha^2 (Q_1 \phi_1 + \dots + Q_M \phi_M - X_{TMD}) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

avec

$$\begin{aligned} F_{TMD,i} = & (\phi_i \phi_1 Q_1' + \phi_i \phi_2 Q_2' + \dots + \phi_i \phi_M Q_M' - \phi_i X_{TMD}') 2\mu_{TMD} \alpha \xi_{TMD} \\ & + (\phi_i \phi_1 Q_1 + \phi_i \phi_2 Q_2 + \dots + \phi_i \phi_M Q_M - \phi_i X_{TMD}) \mu_{TMD} \alpha^2 \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

On définit ensuite les matrices suivantes :

$$\underline{\underline{\mu}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{M_2^*}{M_1^*} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{M_M^*}{M_1^*} \end{bmatrix} = \text{diag}\{1, \mu_2, \dots, \mu_M\},$$

$$\underline{\underline{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\omega_2}{\omega_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\omega_M}{\omega_1} \end{bmatrix} = \text{diag}\{1, 1 + \beta_1, \dots, 1 + \beta_M\}, \quad (\text{III.26})$$

$$\text{et } \underline{\underline{\xi}} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \xi_M \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Les notations introduites permettent finalement d'écrire le *Système* (III.12) sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mu}} \underline{\underline{Q}}'' + 2\underline{\underline{\xi}} \underline{\underline{\beta}} \underline{\underline{\mu}} \underline{\underline{Q}}' + 2\underline{\xi}_{TMD} \alpha \underline{\mu}_{TMD} (\underline{\phi}^T \underline{\phi} \underline{\underline{Q}}' - \underline{\phi}^T X'_{TMD}) \\ \quad + \underline{\beta}^2 \underline{\underline{\mu}} \underline{\underline{Q}} + \alpha^2 \underline{\mu}_{TMD} (\underline{\phi}^T \underline{\phi} \underline{\underline{Q}} - \underline{\phi}^T X_{TMD}) = \underline{\tilde{p}} \\ X''_{TMD} - 2\alpha \underline{\xi}_{TMD} (\underline{\phi} \underline{\underline{Q}}' - X'_{TMD}) - \alpha^2 (\underline{\phi} \underline{\underline{Q}} - X_{TMD}) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

Si l'on prend la transformée de Fourier membre à membre du système ci-dessus, on fait apparaître les 2 équations suivantes :

$$\begin{aligned} \left[ -\underline{\underline{\mu}} \widehat{\omega}^2 + 2i\widehat{\omega} \left( \underline{\underline{\xi}} \underline{\underline{\beta}} \underline{\underline{\mu}} + \underline{\xi}_{TMD} \alpha \underline{\mu}_{TMD} \underline{\phi}^T \underline{\phi} \right) + \underline{\beta}^2 \underline{\underline{\mu}} + \alpha^2 \underline{\mu}_{TMD} \underline{\phi}^T \underline{\phi} \right] \underline{\underline{Q}}(\widehat{\omega}) \\ - [2i\widehat{\omega} \underline{\xi}_{TMD} \alpha \underline{\mu}_{TMD} + \alpha^2 \underline{\mu}_{TMD}] \underline{\phi}^T \mathcal{X}_{TMD}(\widehat{\omega}) = \underline{\tilde{\mathcal{P}}}(\widehat{\omega}) \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

$$[-\widehat{\omega}^2 + 2i\widehat{\omega} \alpha \underline{\xi}_{TMD} + \alpha^2] \mathcal{X}_{TMD}(\widehat{\omega}) - [2i\widehat{\omega} \alpha \underline{\xi}_{TMD} + \alpha^2] \underline{\phi} \underline{\underline{Q}}(\widehat{\omega}) = 0 \quad (\text{III.30})$$

où  $\widehat{\omega}$  désigne la fréquence adimensionnée  $\omega/\omega_1$  et où  $\underline{\underline{Q}}(\widehat{\omega})$  et  $\mathcal{X}_{TMD}(\widehat{\omega})$  sont les amplitudes complexes des coordonnées généralisées sans dimension  $\underline{\underline{Q}}$  et  $X_{TMD}$ . En vue d'établir une expression simple de la matrice de transfert du système, ce sont ces expressions fréquentielles qui vont maintenant être analysées par une méthode des perturbations.

## 2.2 Etude par la méthode des perturbations

### 2.2.1 Etablissement des équations

Afin d'établir une expression approchée et plus simple de la matrice de transfert du *Système* (III.12), l'étape suivante consiste à décomposer l'ensemble des variables en série entière de puissances d'un paramètre  $\varepsilon$  supposé petit. Cela permettra par la suite de laisser tomber les contributions suffisamment petites relativement aux autres et de proposer une expression contenant seulement les termes dominants.

Pour ce faire, on pose les hypothèses suivantes :

- L'amortissement structural est petit ; de l'ordre  $\varepsilon$  au plus.
- Le taux d'amortissement de l'amortisseur  $\xi_{TMD}$  est d'ordre  $\varepsilon$ .
- Le ratio de masse  $\mu_{TMD}$  est d'un ordre inférieur à celui de  $\xi_{TMD}$ . Cette hypothèse provient de la considération de l'expression (II.2) de *den Hartog*, pour de faibles  $\mu_{TMD}$ .
- Les fréquences propres des ordres supérieurs à 1 sont proches de la fréquence fondamentale (ordre  $\varepsilon$  d'écart).
- Le réglage en fréquence  $\alpha$  de l'amortisseur est proche de la première fréquence du système, conformément à la proposition (II.2) de *den Hartog*. On considère une proximité d'ordre  $\varepsilon$ .

On obtient alors la décomposition ci-dessous :

$$\underline{\underline{\Xi}} = \varepsilon \underline{\underline{\Xi}}_1, \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\Xi}}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{\xi}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{\xi}_M \end{bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

$$\underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{\beta}}_0 + \varepsilon \underline{\underline{\beta}}_1, \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\beta}}_0 = I_M, \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\beta}}_1 = \begin{bmatrix} v_1^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_1^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & v_1^{(M)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

$$\xi_{TMD} = \varepsilon k_{TMD}, \quad \mu_{TMD} = \varepsilon^2 m_{TMD}, \quad \text{et} \quad \alpha = 1 + \varepsilon v_2, \quad (\text{III.33})$$

où les  $\hat{\xi}_i$ , les  $v_1^{(i)}$ ,  $k_{TMD}$ ,  $m_{TMD}$  et  $v_2$  sont des nombres d'ordre 1.

De plus, on considère des développements en séries entières de puissances de  $\varepsilon$  pour les réponses  $\underline{\underline{\mathcal{Q}}}$  et  $\mathcal{X}_{TMD}$  :

$$\underline{\underline{\mathcal{Q}}} = \frac{1}{\varepsilon} \underline{\underline{\mathcal{Q}}}_{-1} + \underline{\underline{\mathcal{Q}}}_0 + \varepsilon \underline{\underline{\mathcal{Q}}}_1 + \dots = \frac{1}{\varepsilon} (\underline{\underline{\mathcal{Q}}}_{-1} + \varepsilon \underline{\underline{\mathcal{Q}}}_0 + \varepsilon^2 \underline{\underline{\mathcal{Q}}}_1 + \dots) \quad (\text{III.34})$$

$$\mathcal{X}_{TMD} = \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{X}_{-2} + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{X}_{-1} + \mathcal{X}_0 + \dots = \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{X}_{-2} + \varepsilon \mathcal{X}_{-1} + \varepsilon^2 \mathcal{X}_0 + \dots) \quad (\text{III.35})$$

Le choix de l'ordre du terme dominant des séries en  $\varepsilon$  ci-dessus est justifié par la méthode utilisée et apparaît en fait naturellement par "essai-erreur" lorsque les développements sont effectués.

Finalement, inspiré par la méthode proposée par *Denoël* [3], l'utilisation d'une *coordonnée étirée* permet de zoomer sur la zone voisine de la première résonance du système, et ainsi en capturer le comportement.

Sur le plan mathématique, cette méthode permet de faire tomber la singularité présente dans l'approximation au premier ordre de la fonction de transfert du système. Ainsi, l'expression "de base" que l'on peut étoffer en considérant des termes d'ordres plus élevés en  $\varepsilon$  ne comporte plus de singularité, et il est de ce fait tout à fait possible de représenter le comportement amorti autour de la fréquence propre, *i.e.* d'étudier l'effet de l'amortisseur.

La coordonnée étirée introduite  $\eta$  est telle que :

$$\widehat{\omega} = \frac{\omega}{\omega_1} = 1 + \varepsilon\eta, \quad (\text{III.36})$$

avec  $\eta$  d'ordre 1.

En effectuant ce *close-up* sur le voisinage de la résonance, on remonte en fait l'effet de l'amortisseur au premier ordre d'approximation, ce qui permet d'obtenir une expression riche mais simple, en tronquant le développement de la matrice de transfert à son premier élément.

Cela justifie en réalité le choix de l'ordre du développement de  $\underline{\mathcal{Q}}$  (III.34). L'ordre du développement en série de  $\mathcal{X}$  apparaît quant à lui être supérieur de un à celui de  $\underline{\mathcal{Q}}$  (sans quoi il est d'ailleurs impossible de faire figurer l'effet de l'amortisseur dans l'expression au premier ordre de la matrice de transfert).

On injecte les expressions développées (III.31), (III.32), (III.33), (III.34), (III.35) et la coordonnée étirée (III.36) dans le système fréquentiel adimensionnel formé par (III.29) et (III.30). On obtient, après regroupement aux différents ordres :

$$\begin{aligned} & \left[ \left( -2\underline{\eta}\underline{\mu} + 2i\underline{\Xi}_1 \underline{\mu} + 2\underline{\beta}_1 \underline{\mu} \right) + \varepsilon \left( -\underline{\mu} \eta^2 + 2i\underline{\mu} \underline{\Xi}_1 (\eta \underline{I} + \underline{\beta}_1) + \underline{\beta}_1^2 \underline{\mu} + m_{TMD} \underline{\phi}^T \underline{\phi} \right) \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^2 \left( 2i\underline{\eta} \underline{\Xi}_1 \underline{\beta}_1 + 2i k_{TMD} m_{TMD} \underline{\phi}^T \underline{\phi} + 2v_2 m_{TMD} \underline{\phi}^T \underline{\phi} \right) + \dots \right] \times \left[ \underline{\mathcal{Q}}_{-1} + \varepsilon \underline{\mathcal{Q}}_0 + \dots \right] \\ & \quad - \left[ 1 + \varepsilon (2ik_{TMD} + 2v_2) + \varepsilon^2 (2ik_{TMD}(v_2 + \eta) + v_2^2) + \dots \right] m_{TMD} \underline{\phi}^T \\ & \quad \times \left[ \mathcal{X}_{-2} + \varepsilon \mathcal{X}_{-1} + \dots \right] = \widetilde{\mathcal{P}} \quad (\text{III.37}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left[ (-2\underline{\eta} + 2ik_{TMD} + 2v_2) + \varepsilon (-\eta^2 + 2ik_{TMD}(\eta + v_2) + v_2^2) \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^2 (2i k_{TMD} \eta v_2) + \dots \right] \times \left[ \mathcal{X}_{-2} + \varepsilon \mathcal{X}_{-1} + \dots \right] \\ & \quad - \left[ 1 + \varepsilon (2ik_{TMD} + 2v_2) + \varepsilon^2 (2ik_{TMD}(\eta + v_2) + v_2^2) \right] \underline{\phi} \times \left[ \underline{\mathcal{Q}}_{-1} + \varepsilon \underline{\mathcal{Q}}_{-2} + \dots \right] = 0 \quad (\text{III.38}) \end{aligned}$$

En identifiant les termes à l'ordre  $\varepsilon^0$  et  $\varepsilon^1$ , les 2 équations ci-dessus font apparaître 2 systèmes de 2 équations. On a en effet :

- A l'ordre  $\varepsilon^0$  :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mu}} \left( -2\underline{\underline{\eta}}I + 2i\underline{\underline{\Xi}}_1 + 2\underline{\underline{\beta}} \right) \underline{\underline{\mathcal{Q}}}_{-1} - m_{TMD} \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\mathcal{X}}}_{-2} = \underline{\underline{\mathcal{P}}} \\ (-2\underline{\underline{\eta}} + 2ik_{TMD} + 2v_2) \underline{\underline{\mathcal{X}}}_{-2} = \underline{\underline{\phi}} \underline{\underline{\mathcal{Q}}}_{-1} \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

- A l'ordre  $\varepsilon^1$  :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mu}} \left( -2\underline{\underline{\eta}}I + 2i\underline{\underline{\Xi}}_1 + 2\underline{\underline{\beta}} \right) \underline{\underline{\mathcal{Q}}}_0 - m_{TMD} \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\mathcal{X}}}_{-1} = \\ -\underline{\underline{\mu}} \left( -I\underline{\underline{\eta}}^2 + 2i\underline{\underline{\Xi}}_1 (\underline{\underline{\eta}}I + \underline{\underline{\beta}}) + \underline{\underline{\beta}}^2 + \underline{\underline{\mu}}^{-1} m_{TMD} \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\phi}} \right) \underline{\underline{\mathcal{Q}}}_{-1} + 2(i k_{TMD} + v_2) m_{TMD} \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\mathcal{X}}}_{-2} \\ 2(-\underline{\underline{\eta}} + ik_{TMD} + v_2) \underline{\underline{\mathcal{X}}}_{-1} - \underline{\underline{\phi}} \underline{\underline{\mathcal{Q}}}_0 = \\ -(-\underline{\underline{\eta}}^2 + 2i k_{TMD} (\underline{\underline{\eta}} + v_2) + v_2^2) \underline{\underline{\mathcal{X}}}_{-2} + 2(i k_{TMD} + v_2) \underline{\underline{\phi}} \underline{\underline{\mathcal{Q}}}_{-1} \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

Ces équations permettent d'établir, selon nos hypothèses, les formes approchées de la matrice de transfert, au premier et second ordre d'approximation.

### 2.2.2 Premier ordre d'approximation

Du Système (III.39), on tire

$$\underline{\underline{\mathcal{X}}}_{-2} = \frac{\underline{\underline{\phi}} \underline{\underline{\mathcal{Q}}}_{-1}}{2(v_2 - \underline{\underline{\eta}} + ik_{TMD})} \quad (\text{III.41})$$

d'où on dégage une expression de  $\underline{\underline{\mathcal{Q}}}_{-1}$  :

$$\underline{\underline{\mathcal{Q}}}_{-1} = \left[ \underline{\underline{\mu}} \left( -2\underline{\underline{\eta}}I + 2i\underline{\underline{\Xi}}_1 + 2\underline{\underline{\beta}} \right) - \frac{m_{TMD} \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\phi}}}{2(v_2 - \underline{\underline{\eta}} + ik_{TMD})} \right]^{-1} \left[ \underline{\underline{\mathcal{P}}} \right] \quad (\text{III.42})$$

Ainsi, si on étudie  $\underline{\underline{\mathcal{Q}}}$  au premier ordre d'approximation, et qu'on réexprime l'équation ci-dessus en fonction de  $\widehat{\omega}$  au lieu de  $\underline{\underline{\eta}}$ , on trouve aisément :

$$\underline{\underline{\mathcal{Q}}} \simeq \frac{1}{\varepsilon} \underline{\underline{\mathcal{Q}}}_{-1} = \underbrace{\left[ 2\underline{\underline{\mu}} \left( \underline{\underline{\beta}} - \widehat{\omega}I + i\underline{\underline{\Xi}} \right) - \frac{\mu_{TMD} \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\phi}}}{2(\alpha - \widehat{\omega} + i\xi_{TMD})} \right]}_{\underline{\underline{J}}_1}^{-1} \left[ \underline{\underline{\mathcal{P}}} \right] \quad (\text{III.43})$$

qui fait cette fois apparaître les paramètres de base du problème, indépendamment de  $\varepsilon$ . On désigne par  $\underline{\underline{H}}_1^*$  l'expression  $\underline{\underline{J}}_1^{-1}$ . Cette expression, qui constitue une découverte importante, et est capitale pour la suite de ce travail, sera analysée en détails un peu plus loin.

### 2.2.3 Second ordre d'approximation

Nous sommes maintenant en droit de nous demander dans quelle mesure l'évaluation d'un ordre supérieur pour l'approximation de la matrice de transfert permet de se rapprocher de la solution exacte. Cela permettra de conforter l'idée que la méthode mise en place et les hypothèses posées sont adéquates.

On procède de la même manière que précédemment, en utilisant cette fois le système d'équations (III.40). Sa deuxième équation permet d'isoler  $\underline{\mathcal{X}}_{-1}$ . On l'injecte ensuite dans la première pour trouver une expression de  $\underline{\mathcal{Q}}_0$  ne dépendant que de  $\underline{\mathcal{Q}}_{-1}$  et  $\underline{\mathcal{X}}_{-2}$ , qui viennent d'être déterminés grâce au système à l'ordre  $\epsilon^0$ . L'expression qui nous intéresse maintenant est :

$$\underline{\mathcal{Q}} \simeq \frac{1}{\epsilon} \underline{\mathcal{Q}}_{-1} + \underline{\mathcal{Q}}_0 \quad (\text{III.44})$$

Tous calculs faits, utilisant les expressions (III.41) et (III.42) de  $\underline{\mathcal{X}}_{-2}$  et  $\underline{\mathcal{Q}}_{-1}$  et refaisant apparaître les paramètres du problème de départ, on obtient :

$$\underline{\mathcal{Q}} \simeq \underline{H}_1^* \widetilde{\mathcal{P}} + \underline{H}_1^* [\underline{A} \underline{H}_1^*] \widetilde{\mathcal{P}} = \underbrace{\underline{H}_1^* [\underline{I} + \underline{A} \underline{H}_1^*]}_{\underline{H}_2^*} \widetilde{\mathcal{P}} \quad (\text{III.45})$$

qui fait apparaître l'expression de la matrice de transfert au second ordre d'approximation  $\underline{H}_2^*$ , avec :

$$\begin{aligned} \underline{A} = & \frac{-\mu_{TMD} \underline{\phi}^T \underline{\phi} [ -(\widehat{\omega} - 1)^2 + 2i \xi_{TMD} (\widehat{\omega} + \alpha - 2) + (\alpha - 1)^2 ]}{4(\alpha - \widehat{\omega} + i \xi_{TMD})^2} \\ & - \underline{\mu} \left[ -\underline{I} (\widehat{\omega} - 1)^2 + 2i \underline{\Xi} \left( (\widehat{\omega} - 1) \underline{I} + \underline{\beta} - \underline{I} \right) + (\underline{\beta} - \underline{I})^2 + \underline{\mu}^{-1} \mu_{TMD} \underline{\phi}^T \underline{\phi} \right] \\ & + \frac{2\mu_{TMD} \underline{\phi}^T \underline{\phi} (i \xi_{TMD} + \alpha - 1)}{(\alpha - \widehat{\omega} + i \xi_{TMD})} \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

Un exemple pour une structure à 2 modes est donné pour illustrer la convergence vers la solution exacte lorsque la solution approchée est enrichie. Cet exemple considère un TMD ( $\mu_{TMD} = 2\%$ ), réglé selon *den Hartog* sur le premier mode d'une structure ayant ses 2 premières fréquences espacées de 10%. Les amplitudes modales sont égales là où l'amortisseur est placé et son prises arbitrairement à 0.85. Les masses modales sont considérées égales. L'amortissement structural est pris à 2%. Les fonctions de transfert approchées de l'amplitude des modes 1 et 2 de la base modale initiale sont présentées, ainsi que la fonction de transfert nodale en l'abscisse du TMD.

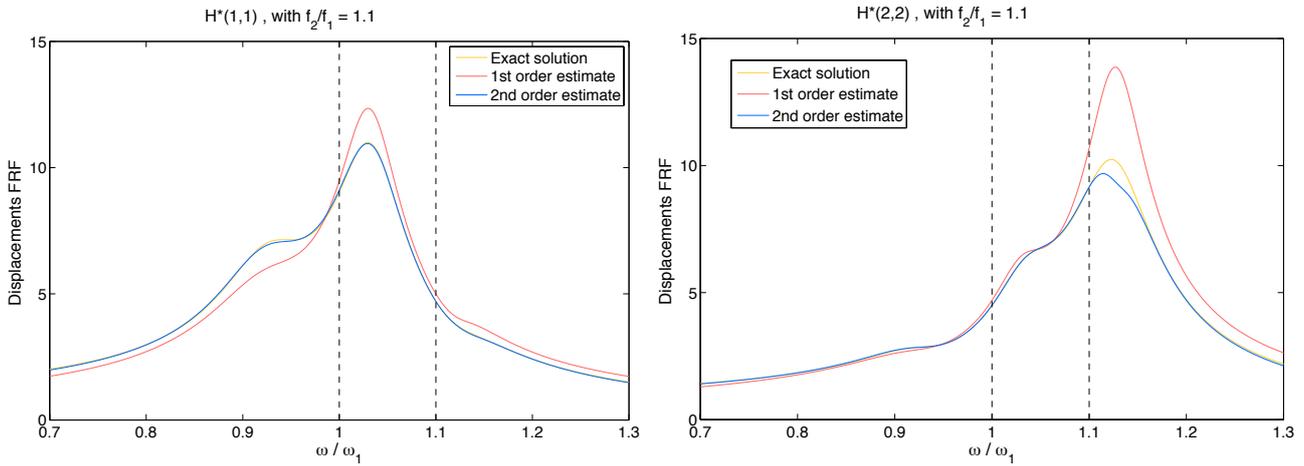


FIGURE III.3 – Comparaison entre les FRF exactes des modes 1 et 2 et leurs solutions approchées au 1er et 2nd ordre

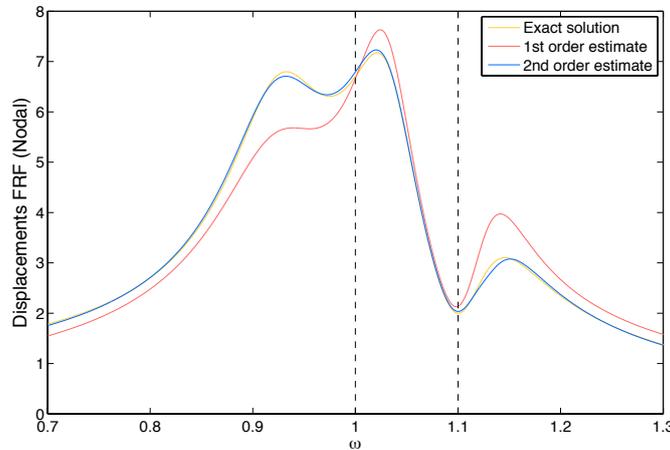


FIGURE III.4 – Comparaison entre la FRF nodale exacte et ses solutions approchées au 1er et 2nd ordre

On remarque clairement une convergence du modèle établi lorsqu’il est étoffé à des ordres supérieurs d’approximation. Le second ordre suffit à donner une représentation presque parfaite de la solution exacte. Cependant, pour sa simplicité formelle, c’est bien l’approximation au premier ordre qui sera étudiée par la suite. Elle offre pour un premier ordre d’approximation une précision notable. Même si les amplitudes ne sont pas toujours très précises, les tendances au voisinage des pics de résonance sont bien modélisées, ce qui est l’essentiel pour la compréhension physique du problème.

### 2.3 Proposition d’une expression simplifiée

Nous revenons donc sur l’outil qui va être utilisé : en l’espèce l’approximation au premier ordre (III.47) ci-dessous.

$$\underline{H}_{\underline{1}}^*(\hat{\omega}) = \left[ \underbrace{2\underline{\mu} \left( \underbrace{\underline{\beta} - \hat{\omega}\underline{I} + i\underline{\xi}}_{\underline{J}_{\underline{1}}} \right)}_{\text{Système}} - \underbrace{\frac{\underline{\mu}_{TMD} \underline{\phi}^T \underline{\phi}}{2(\alpha - \hat{\omega} + i\underline{\xi}_{TMD})}}_{\text{Amortisseur}} \right]^{-1} \tag{III.47}$$

Pour proposer une notation plus habituelle au le lecteur, nous faisons réapparaître dans l’expression ci-dessus les matrices bien connues de la structure.

$$\underline{\underline{H}}_1^*(\omega) = 2 \left[ \underline{\underline{K}}^* - \underline{\underline{M}}^* \underline{\underline{\Omega}} \omega \right] + i\omega_1 \underline{\underline{C}}^* - \frac{m_{TMD} \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\phi}}}{2(\omega_{TMD} - \omega + i\omega_1 \xi_{TMD})} \omega_1^2 \underline{\underline{\Omega}} \quad (\text{III.48})$$

où  $\underline{\underline{\Omega}} = \text{diag}\{\omega_1, \dots, \omega_M\}$  et où l'on peut voir que les termes inerties et visqueux habituels ont été modifiés par le *zoom* sur la première fréquence propre.

On remarque que la matrice de transfert au premier ordre d'approximation est la somme de 2 contributions. La première, diagonale, est entièrement propre au système initial (ses masses modales, ses fréquences propres, et son amortissement). La seconde est non diagonale et relative à l'amortisseur. Elle fait apparaître les 4 paramètres de ce dernier (réglage en fréquence, amortissement, masse et position) et amène des contributions non-diagonales au système. Cela souligne donc à nouveau explicitement le fait que le couplage est apporté via l'amortisseur.

Plusieurs enseignements peuvent être tirés de l'expression (III.47) ci-dessus.

- Si  $M$  modes sont considérés, on aura  $M + 1$  pôles pour  $\underline{\underline{H}}_1^*$ , le pôle additionnel provenant de la remise au même dénominateur de la matrice  $\underline{\underline{J}}_1$ , qui offre une racine de plus en  $\hat{\omega}$  lors du calcul des valeurs propres. Cette simple approximation au premier ordre permet donc de représenter tous les pics de résonance, ce qui fait donc d'elle une représentation assez riche du système.
- La fonction de transfert des  $M$  modes fait apparaître, au travers du produit  $\underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{\phi}}$ , le carré des amplitudes modales  $\phi_i(x_0)$ . Ainsi, on remarque que l'efficacité du TMD sur un mode donné suit le carré de sa position, s'il n'est pas placé où l'amplitude du mode est maximale (unitaire). Nous reviendrons plus loin sur cette considération avec le cas particulier d'un système à 1 degré de liberté.
- L'effet de l'amortisseur est du même ordre que les termes propres à la structure. Contrairement à ce que l'on pourrait penser à première vue, on ne peut donc pas, pour étudier le problème, mettre en place une approche se fondant sur une matrice diagonale dominante, avec des termes diagonaux d'un ordre inférieur comme suggéré par *Denoël* [4]. D'où l'utilité d'une méthode par perturbations.
- De la même façon qu'observé par *Denoël* [3], on remarque que le degré en  $\hat{\omega}$  de la partie "système" de  $\underline{\underline{J}}_1$  est inférieur à celui (quadratique) de l'expression (III.29) et que l'on perd donc pour les pôles les solutions de type complexes conjugués. Cela témoigne du fait que le zoom sur le pic de résonance  $\hat{\omega}_1$  rejette en fait à l'infini le pic  $-\hat{\omega}_1$ , et que l'on ne dispose donc dans ce modèle que de l'information au voisinage de  $+\hat{\omega}_1$ .

Notons finalement que les expressions approchées sont valables lorsque les paramètres du modèle étudié suivent les hypothèses formulées en début de section pour leurs grandeurs relatives. Cet aspect est traité dans la section ci-dessous.

## 2.4 Domaine de validité

Afin de donner une représentation parlante du domaine de validité de la méthode par rapport à la valeur des paramètres, un graphique indicatif est fourni ci-dessous. Il présente, en fonction de la valeur du ratio de masse  $\mu_{TMD}$ , la plage des valeurs licites pour les autres paramètres (d'un ordre inférieur en  $\epsilon$ ). Ce graphique est évidemment indicatif et a été établi en supposant que, si  $\mu_{TMD}$  vaut  $\epsilon^2$ , les autres paramètres seront acceptables dans la gamme  $[\epsilon^{1/2}, \epsilon^{3/2}]$ .

Néanmoins, si leur valeur est inférieure à  $\epsilon^{1/2}$ , les paramètres seront d'ordre inférieur à  $\epsilon$ , ce qui aura comme effet que leur impact passera à l'ordre 2 d'approximation plutôt qu'à l'ordre 1. Les considérer revient donc simplement à inclure des termes qui sont en réalité négligeables au premier ordre d'approximation, ce qui ne pose pas de problème de précision. L'intervalle recommandé est donc  $[0, \epsilon^{3/2}]$ .

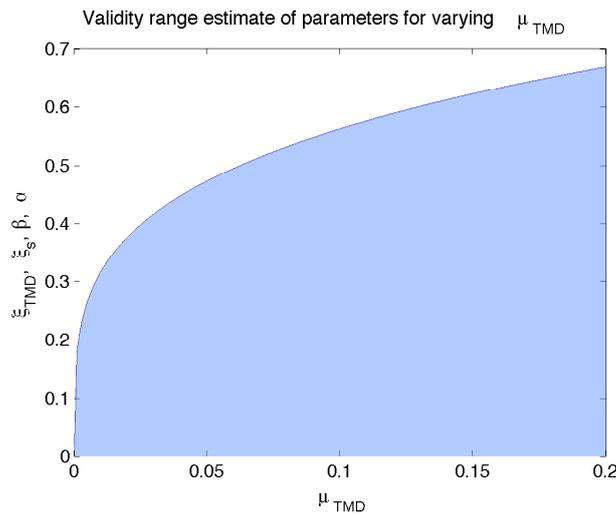


FIGURE III.5 – Intervalle de validité des paramètres pour l’approximation établie, selon le ratio de masse de l’amortisseur.

Il est logique que pour un ratio de masse plus élevé, on puisse couvrir une gamme de fréquences plus large. Car l’effet de l’amortisseur est, comme observé précédemment pour les FRF de systèmes à 1 *ddl*, marqué sur une plage plus étendue de fréquences. De même, un ratio de masse plus élevé nécessite, en accord avec les expressions de *den Hartog*, un taux d’amortissement plus haut pour le dash-pot de l’amortisseur.

On remarque que, pour l’écart des fréquences propres, on se situe entre 30 et 40% si  $\mu_{TMD}$  vaut 2%, et entre 50 et 60% pour le cas où ce ratio est de 10%. Ce qui nous intéresse précisément pour la suite de ce travail est de comprendre les phénomènes qui se produisent lorsque les modes sont proches, ce qui sera donc tout à fait permis par la formule simplifiée qui a été introduite plus tôt.

## 2.5 Conclusions

Une expression permettant de caractériser la dynamique d’un système comportant un amortisseur a donc été construite. Elle fait figurer tous les paramètres du problème d’une façon très explicite. L’utilisation d’une méthode par perturbations s’est donc avérée un outil parfaitement efficace dans la simplification du problème de base. Comme expliqué ci-avant, la formule qui vient d’être mise en place est simple, mais très riche en informations.

Par ailleurs, sa portée est tout à fait générale. La seule hypothèse concerne les ordres de grandeur des différentes variables, et n’est, comme il vient d’être illustré, que peu restrictive. Cette hypothèse pourrait facilement être modifiée. Remarquons aussi que des hypothèses simplificatrices telles que la limitation du nombre de modes considérés ou le fait de négliger l’amortissement structural n’ont nullement été formulées. En outre, la forme des modes peut être tout à fait quelconque ainsi que les masses modales adjacentes.

Bien plus encore, rien n’oblige cette formule à être spécifiquement appliquée à des passerelles. Au prix de quelques ajustements éventuels concernant les ordres de grandeur, on pourrait tout aussi bien l’utiliser pour l’étude d’une structure quelconque. En particulier, l’amortissement de câbles tels que les haubans de ponts pourrait certainement également être investigué.

Tous ces éléments portent à croire que l’expression proposée peut, au-delà de l’usage qu’il va en être fait, constituer un objet d’étude ou un outil parfaitement général pour caractériser la dynamique couplée d’une structure quelconque comportant un amortisseur. De plus, la démarche globale suivie ici pourrait aussi bien être appliquée dans le cas de l’utilisation de plusieurs amortisseurs, ou encore d’amortisseurs plus sophistiqués, ce qui ouvre encore la porte à de nombreuses investigations complémentaires.

### 3 Système à 1 mode

L'étude de certains cas particuliers de l'expression générale (III.47) permet de la comprendre plus en profondeur et de montrer son applicabilité. En particulier, on peut s'intéresser au cas fondamental où 1 seul mode de vibration est considéré et ciblé par l'amortisseur, ce qui sera notamment le cas dans la résolution d'un problème par une approche modale découplée. Ce cas est donc en pratique assez important malgré sa simplicité formelle.

A l'instar de *den Hartog*, l'amortissement structurel est négligé. Sur le plan mathématique, cela revient simplement à supposer que son ordre de grandeur est  $\varepsilon^2$  et non  $\varepsilon$  (cf. Section 2.2). Dans le cas de structures de génie civil, ce dernier est typiquement très petit. En particulier, dans les passerelles, il tourne généralement aux alentours de 0,5%, et est alors tout à fait négligeable. Il vient donc :

$$H_1(\hat{\omega}) = \left[ 2(1 - \hat{\omega}) - \frac{\mu_{TMD} \phi_1^2}{2(\alpha - \hat{\omega} + i\xi_{TMD})} \right]^{-1}, \quad (\text{III.49})$$

où, à nouveau, on voit que la masse du TMD n'est effective qu'à raison de  $\phi_1^2$ . On suppose par la suite que l'amortisseur est placé en  $\phi_1 = 1$ .

#### 3.1 Réglage optimal

La même approche que celle de *den Hartog* est utilisée pour déterminer le réglage en fréquence  $\alpha$  optimal de l'amortisseur. On observe en effet que, tout comme cela avait été observé à la *Figure II.4*, il existe dans la fonction de transfert 2 points fixes indépendants de l'amortissement de l'appareil.

Le réglage en fréquence est effectué de sorte que ces points fixes aient une amplitude égale. Pour ce faire, et par définition de ces points fixes, on exploite des cas particuliers d'amortissement qui sont :

$$\begin{cases} \lim_{\xi_{TMD} \rightarrow \infty} |H_1|^2 = \frac{1}{4(1 - \hat{\omega})^2} \\ \lim_{\xi_{TMD} \rightarrow 0} |H_1|^2 = \frac{4(\alpha - \hat{\omega})^2}{((\hat{\omega} - 1)(4\alpha - 4\hat{\omega}) + \mu_{TMD})^2} \end{cases} \quad (\text{III.50})$$

Égalant ces 2 expressions, on obtient que les points fixes se trouvent aux abscisses :

$$\hat{\omega}_{1,2} = \frac{1}{4} \left( \pm \sqrt{2} \sqrt{2\alpha^2 - 4\alpha + \mu_{TMD} + 2} + 2\alpha + 2 \right) \quad (\text{III.51})$$

Dans le cas où  $\xi_{TMD} \rightarrow \infty$ , l'égalité des ordonnées correspondantes amène pour condition non-triviale que la somme des racines (qui vaut aussi, vu (III.51),  $\alpha + 1$ ), est :

$$\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 = 2. \quad (\text{III.52})$$

On a donc

$$\alpha_{opt} = 1. \quad (\text{III.53})$$

On repart de cette valeur pour déterminer l'amortissement optimal. La fonction de transfert (III.49) devient :

$$H_1(\hat{\omega}) = \left[ 2(1 - \hat{\omega}) - \frac{\mu_{TMD} \phi_1^2}{2(1 - \hat{\omega} + i\xi_{TMD})} \right]^{-1} \quad (III.54)$$

On voit que pour  $\xi_{TMD} = 0$ , il est possible d'annuler cette expression en  $\hat{\omega} = 1$ . Néanmoins, une telle expression admet 2 pics voisins de grande amplitude, comme également visible sur la *Figure II.4*. Il y a donc une valeur optimale qui ne soit ni trop faible, ni trop élevée (auquel cas on observe un unique pic de grande valeur).

La stratégie imaginée ici est donc de trouver la valeur de  $\xi_{TMD}$  telle que les 2 points fixes soient au même niveau que le point localisé en  $\hat{\omega} = 1$ , ce qui constitue une bonne approximation de la solution optimale (points fixes correspondant aux maxima, cf. [2]) et permet d'établir aisément une expression analytique simple.

De l'Equation (III.54), on obtient après calcul :

- En  $\hat{\omega} = 1$  :  $|H_1|^2 = \frac{4\xi_{TMD}^2}{\mu_{TMD}^2}$
- En  $\hat{\omega} = \hat{\omega}_{1,2}$  :  $|H_1|^2 = \frac{2}{\mu_{TMD}}$

Ces expressions sont égales pour

$$\xi_{opt} = \sqrt{\frac{\mu_{TMD}}{2}}. \quad (III.55)$$

On remarque que, pour  $\mu_{TMD}$  petit (hypothèse inhérente au modèle établi), les paramètres optimaux (III.53) et (III.55) sont proches de ceux stipulés par *den Hartog* (II.2), comme illustré à la figure ci-dessous.

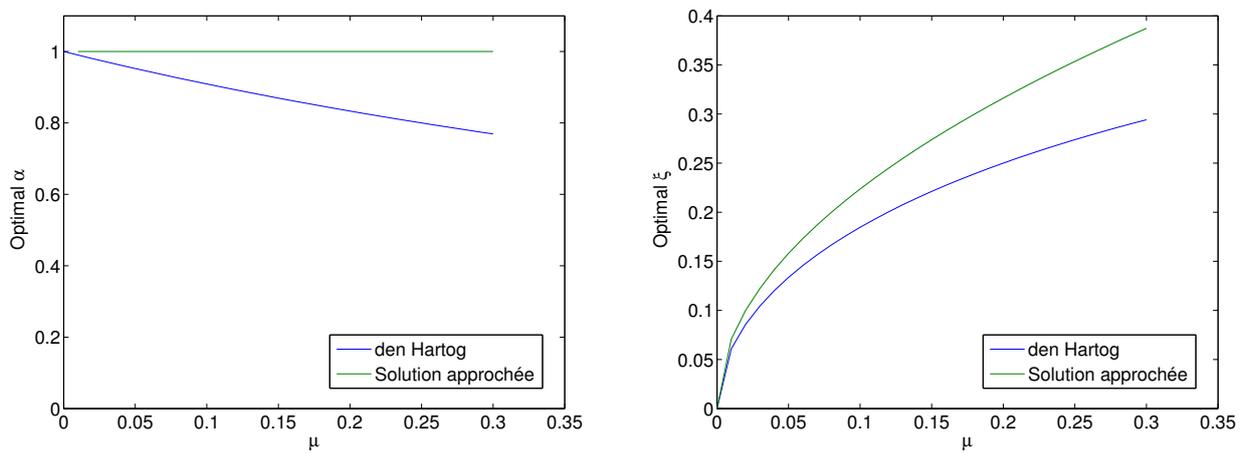


FIGURE III.6 – Comparaison entre les paramètres optimaux de *den Hartog* et du modèle approché

De plus, le niveau imposé aux 2 points fixes et en  $\hat{\omega} = 1$  vaut  $|H_1| = \sqrt{\frac{2}{\mu_{TMD}}}$ . Cette expression est également proche de la valeur maximale calculée par *den Hartog* [2] pour de faibles ratios de masse :

$$\sqrt{\frac{2}{\mu_{TMD}}} \simeq \sqrt{1 + \frac{2}{\mu_{TMD}}}. \quad (III.56)$$

ce qui laisse présager que la fonction de transfert approchée sera certainement une bonne approximation de la fonction de transfert exacte. Cela est vérifié à la section ci-dessous.

### 3.2 Validation

On peut se demander dans quelle mesure les expressions optimales établies mènent à l'optimum en terme de minimisation de la fonction de transfert approchée. La figure ci-dessous présente le maximum de celle-ci pour toutes les combinaisons possibles de réglage d'un amortisseur dont le ratio de masse est de 10%. Ce dernier a été normé par la valeur obtenue pour le couple optimal des paramètres de l'amortisseur.

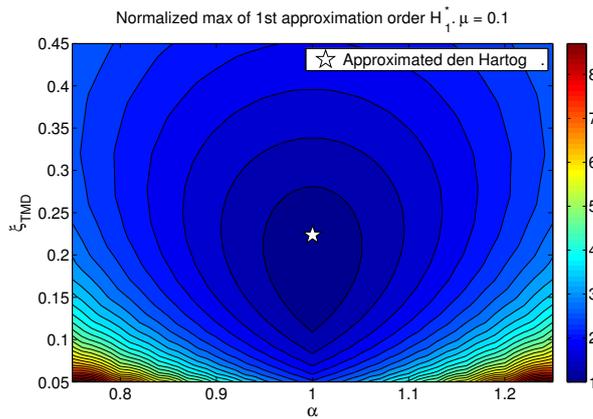


FIGURE III.7 – Maximum de la FRF du système à 1 ddl, pour différents couples  $(\xi_{TMD}, \alpha)$ , avec  $\mu_{TMD} = 0, 1$ .

On voit que, pour le modèle approché, les expressions présentées ci-avant amènent une valeur quasiment optimale.

Finalement, il est utile de vérifier que les fonctions de transfert obtenues aussi bien par la méthode exacte que par la méthode approchée donnent des résultats proches. Ces derniers sont comparés ci-dessous. Les pointillés indiquent, pour le cas approché, l'abscisse des points fixes. Pour cette courbe, on voit que les maxima et les points fixes correspondent pratiquement, ce qui confirme l'approche utilisée pour établir les paramètres optimaux.

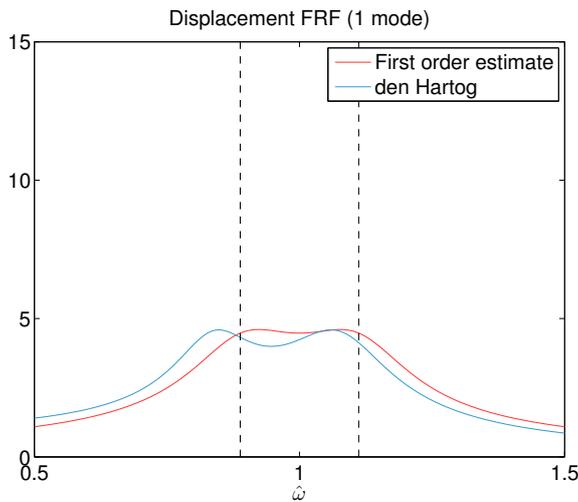


FIGURE III.8 – Comparaison entre les FRF optimales du modèle exact et approché au premier ordre.

Le modèle approché est capable d'approximer d'une façon très satisfaisante la solution (en particulier, l'amplitude maximale) du problème complet dans le cas d'un modèle à un degré de liberté, tout en fournissant une expression

analytique simple.

Ces résultats valident ainsi, d'une part, l'adéquation du modèle approché développé et d'autre part, les paramètres optimaux attendus qui ont été trouvés.

## 4 Système à 2 modes

Le modèle établi est capable de représenter précisément un système à 1 *ddl*, ou une structure considérée dans un mode isolé. C'est une bonne chose, mais jusqu'ici, rien n'a été proposé de mieux que *den Hartog*. Il est donc maintenant encore plus intéressant de voir dans quelle mesure les informations concernant la dynamique d'un système traité selon 2 modes simultanément peuvent apparaître grâce à l'expression approchée au premier ordre. En particulier, le phénomène de couplage entre 2 modes pourra être maîtrisé et analysé. C'est en effet principalement cette partie qui est mal comprise et peu investiguée de façon analytique dans la littérature. Presque systématiquement, recours est fait à des procédés d'optimisation numérique lorsqu'il s'agit de la conception d'amortisseurs en situation couplée. La motivation de l'auteur est de combler cette lacune.

Typiquement, l'implémentation d'amortisseurs visant différents modes de vibrations problématiques se fait donc avec une approche découplée, les expressions de *den Hartog* pouvant être utilisées comme une première estimation pour les paramètres optimaux à conférer à ces amortisseurs. Ces derniers sont ainsi considérés indépendamment les uns des autres. Cette approche est valable lorsque les fréquences sont suffisamment éloignées. Il a été observé à de nombreuses reprises ([1], [20]) que ce n'est plus le cas lorsque les fréquences se rapprochent, ce qui est dû au phénomène de couplage entre les modes.

L'idée développée ici est de tirer parti de la compréhension du couplage pour préconiser des solutions prenant celui-ci en compte. Bien plus, le but est de parvenir à utiliser ce couplage afin de pouvoir amortir simultanément plusieurs modes (ici 2) en utilisant un nombre inférieur de TMD, ce qui se démarque alors complètement de l'approche usuelle de dimensionnement des amortisseurs. Les paramètres requis et les conditions d'application de cette méthode vont être établis.

On sort donc maintenant des analyses théoriques pour se tourner vers le côté pratique du problème de vérification dynamique des passerelles pour les critères de confort.

### 4.1 Méthodologie pour l'analyse dynamique

Afin de proposer une démarche de dimensionnement adaptée au besoin du concepteur, il est d'abord primordial de définir clairement les objectifs que ce dernier désire atteindre. Pour ce faire, référence est faite au guide de dimensionnement des passerelles piétonnes proposé par le *Sétra* [15]. Il est bon de rappeler en quelques lignes les recommandations y étant formulées, et surtout la méthodologie devant être mise en place pour évaluer le confort des piétons.

Tout d'abord, la classe de la passerelle doit être choisie par le maître d'ouvrage en fonction du trafic attendu. Ensuite, un calcul des fréquences propres est effectué. En fonction de la nature des vibrations et de leur proximité avec les plages de sollicitation des piétons, le risque de résonance est évalué pour chacune des fréquences.

**Range 1:** maximum risk of resonance.  
**Range 2:** medium risk of resonance.  
**Range 3:** low risk of resonance for standard loading situations.  
**Range 4:** negligible risk of resonance.  
 Table 2.3 defines the frequency ranges for vertical vibrations and for longitudinal horizontal vibrations. Table 2.4 concerns transverse horizontal vibrations.

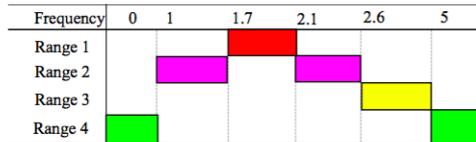


Table 2.3: Frequency ranges (Hz) of the vertical and longitudinal vibrations

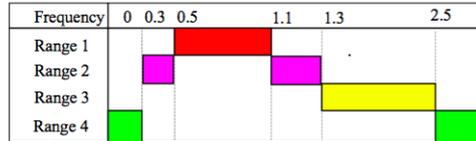


Table 2.4: Frequency ranges (Hz) of the transverse horizontal vibrations

FIGURE III.9 – Plages de fréquences pour les différents risques de résonance

Ensuite, selon la plage dans laquelle tombe la fréquence considérée, un chargement équivalent est prescrit. Celui-ci se base sur un nombre équivalent de piétons supposés marcher en phase et à la fréquence étudiée. Le sens (signe) de ce chargement doit être appliqué selon la forme modale correspondante. On applique aussi sur la charge un coefficient réducteur  $\psi$ , traduisant le fait que le risque de résonance est réduit lorsqu'on s'éloigne de la zone critique de sollicitation. Un exemple de ce facteur est donné ci-dessous.

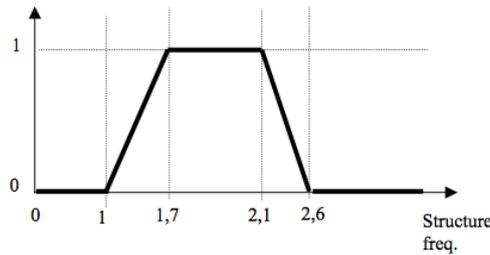


FIGURE III.10 – Coefficient réducteur  $\psi$  pour l'intensité du chargement

L'accélération sous ce chargement est alors calculée.

Enfin, sur base de la classe de confort spécifiée par le maître d'ouvrage, cette accélération est comparée à la limite de confort autorisée. Si elle l'excède, le design de la passerelle doit être modifié ou des amortisseurs doivent être prévus.

La démarche est répétée pour chacune des fréquences "à risque" déterminées lors du calcul des fréquences propres. Il est important de noter que les chargements utilisés doivent donc être appliqués selon un et un seul mode à la fois.

Un récapitulatif de la démarche de vérification du confort est présenté avec le schéma ci-dessous, issu du guide du Sétra.

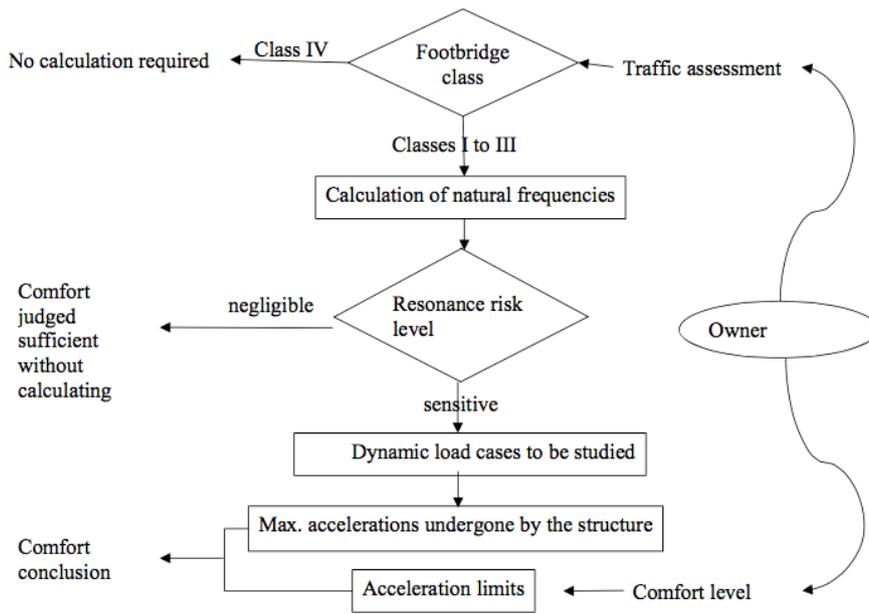


FIGURE III.11 – Schéma récapitulatif de la démarche de dimensionnement

## 4.2 Objectifs pour les amortisseurs

Dans le cas où l'utilisation d'amortisseurs est envisagée, le but perpétré est alors de garantir, en tout point de la passerelle et sous le chargement imposé, une accélération inférieure à la limite de confort. Les objectifs à atteindre en termes d'accélération sont présentés ci-dessous, dans le cas d'un système à 2 modes. Selon l'approche, la comparaison à ces objectifs est effectuée différemment. Pour cette raison, on distinguera les 2 cas ci-dessous.

Le premier, le plus élémentaire, est celui où une analyse dynamique découplée est effectuée. Elle utilise les expressions des fonctions de transfert modales découplées pour l'évaluation de l'amplification dynamique. Le second sera utile pour une approche plus fondamentale, où les 2 modes seront considérés simultanément (approchée couplée). Il utilise l'amplification dynamique des accélérations en tout point de la passerelle.

### 4.2.1 Cas découplé

Dans le cas découplé, il n'est pas nécessaire d'utiliser la théorie établie précédemment. Vu que l'on considère les 2 modes complètement indépendamment l'un de l'autre, on peut simplement appliquer 2 fois la même méthodologie.

Celle-ci est la suivante : on considère que, grâce à l'amortissement structural, le mode  $i$  observé possède une amplification dynamique maximale valant  $1/2\xi_{i,s}$ , à sa fréquence propre  $f_i$ . L'accélération modale associée vaut simplement, sur base du déplacement statique modal amplifié :

$$a_{i,undamped} = (2\pi f_i)^2 \frac{P_i^*}{K_i^*} \frac{1}{2\xi_{i,s}}, \quad (\text{III.57})$$

où  $P_i^*$  est la charge modale sous le chargement prescrit par le *Sétra*. Elle peut, par définition, être obtenue par  $P_i^* = \int_{struct.} \phi_i(s) \times F_i(s) ds$ , avec  $F_i$  le vecteur des charges nodales.

On commence par comparer cette valeur à l'accélération limite  $a_{crit.}$  ( $[m/s^2]$ ) spécifiée par le critère de confort. Si elle y est supérieure, on prévoit de réduire l'amplification dynamique de la façon suivante :

$$\frac{\max\{|H_{i,undamped}^*|\}}{\max\{|H_{i,damped}^*|\}} = \frac{a_{i,undamped}}{a_{crit.}}, \quad (\text{III.58})$$

c'est-à-dire qu'on aura donc à satisfaire la condition :

$$\max\{|H_{i,damped}^*|\} \leq \frac{a_{crit.}}{a_{i,undamped}} \frac{1}{2\xi_{i,s}} = a_{crit.} \frac{K_i^*}{(2\pi f_i)^2 P_i^*} = a_{crit.} \frac{M_i^*}{P_i^*} \triangleq \theta_i \quad (\text{III.59})$$

où on introduit la notation  $\theta_i$  ( $[-]$ ), qui désigne donc le niveau d'amplification dynamique associé à l'accélération limite. Il faudra remplir cette condition pour chacun des 2 modes à risque. On aura ainsi à effectuer les 2 vérifications :

$$\begin{cases} \max\{|H_{1,damped}^*|\} \leq \theta_1 \\ \max\{|H_{2,damped}^*|\} \leq \theta_2 \end{cases} \quad (\text{III.60})$$

Ces vérifications sont pour rappel chacune relatives à un chargement donné, à la fréquence du mode considéré et selon son sens (signe).

#### 4.2.2 Cas couplé

Ce cas prend en compte la dynamique couplée pour la vérification des limites d'accélération. L'objectif est ici comparé à l'amplification dynamique des accélérations, dont l'étude fondamentale ne peut se faire qu'au travers des fonctions de transfert. Cela est en pratique effectué avec la matrice de transfert approchée au premier ordre  $\underline{H}_1^*$ .

En une abscisse  $s_0$  donnée, l'accélération adimensionnelle scalaire est donnée par une simple combinaison linéaire des accélérations des différents modes, au prorata des amplitudes modales. On a :

$$\ddot{\underline{Q}}_{s_0}(\hat{\omega}) = \underline{\phi}_{s_0} \times \ddot{\underline{Q}}(\hat{\omega}) = \underline{\phi}_{s_0} \times \hat{\omega}^2 \underline{H}_1^*(\hat{\omega}) \widetilde{\underline{\mathcal{P}}}(\hat{\omega}) \quad (\text{III.61})$$

où le vecteur  $\underline{\phi}_{s_0} = [\phi_1(s_0), \dots, \phi_M(s_0)]^T$  reprend les amplitudes modales des différents modes en la position  $s_0$ . Par souci de légèreté, les composantes de ce vecteur seront par la suite désignées par  $\underline{\phi}_{s_0} = [\phi_1, \dots, \phi_M]^T$ .

Comme déjà expliqué, dans le cas où 2 modes sont considérés (et que ces derniers doivent tous 2 faire l'objet d'une vérification), 2 situations de chargement devront être successivement et indépendamment considérées. Le vecteur de chargement modal adimensionnel  $\widetilde{\underline{\mathcal{P}}}$  prendra ainsi l'une des formes suivantes :

$$\begin{cases} \widetilde{\underline{\mathcal{P}}} = [1 \quad 0]^T & \text{(Première vérification)} \\ \underline{\mathcal{P}} = [0 \quad \mathcal{P}_2^*/\mathcal{P}_1^*]^T & \text{(Seconde vérification)} \end{cases} \quad (\text{III.62})$$

correspondant à l'application d'une charge selon un (et un seul) mode.

Sous ces 2 cas de charge, l'accélération devrait, rigoureusement, être calculée en toutes les positions possibles de la passerelle. Cependant, on sait que la matrice  $\underline{H}_1^*$  est une matrice dont les termes diagonaux sont dominants. Ainsi, on considère de façon pragmatique que le cas le plus défavorable sous le chargement d'un mode donné prend place où l'amplitude de ce dernier est maximale (unitaire, vu la normalisation des modes). La combinaison (III.61) appliquée à ces cas mène alors à une valeur supposée maximale pour le cas de charge étudié.

La valeur maximale d'accélération nodale adimensionnelle est par suite donnée, pour les 2 cas de chargement respectifs, par le maximum sur toutes les fréquences de : <sup>1</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{Q}_{s_0,1}(\hat{\omega}) = \hat{\omega}^2 \underbrace{[1 * H_1^*(1,1) + \varphi_2 * H_1^*(1,2)]}_{\triangleq FRF_{nod.,1}} \times 1 \quad \text{(Première vérification)} \\ \ddot{Q}_{s_0,2}(\hat{\omega}) = \hat{\omega}^2 \underbrace{[1 * H_1^*(2,2) + \varphi_1 * H_1^*(2,1)]}_{\triangleq FRF_{nod.,2}} \times \mathcal{P}_2^* / \mathcal{P}_1^* \quad \text{(Seconde vérification)} \end{array} \right. \quad \text{(III.63)}$$

Le signe des modes n'a ici pas été détaillé. Vu le formalisme établi (utilisation de coefficients "+1"), l'amplitude maximale du mode désigne l'endroit où le mode admet un maximum en valeur absolue. Ainsi, les signes à donner aux  $\varphi_i$  seront à spécifier en accord avec cette convention. Les valeurs des amplitudes modales où l'amortisseur est placé ( $\phi_1$  et  $\phi_2$ ) sont, elles, définies de façon naturelle selon le signe du mode. Le schéma ci-dessous illustre ces indications.

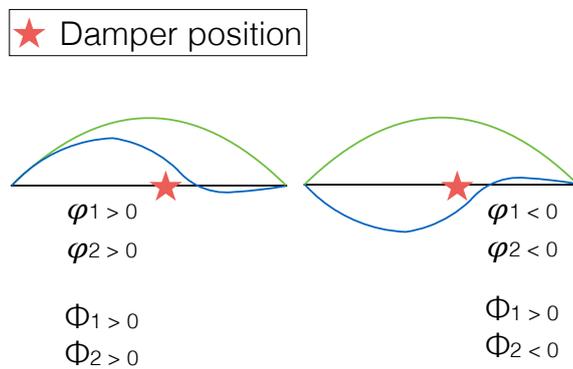


FIGURE III.12 – Indications pour les signes des amplitudes modales

*In fine*, les modes étant définis à une constante près, les 2 situations schématisées ci-dessus amèneront des résultats similaires, pour autant que les recommandations ci-dessus soient suivies.

Cette clarification étant faite, il reste à comparer les 2 niveaux d'accélération à la limite de confort autorisée. Il ne faut pas oublier de transformer ces valeurs cibles en leur équivalent adimensionnel afin de permettre la comparaison. Si le critère d'accélération maximale est désigné par  $a_{crit.}$  ( $[m/s^2]$ ), on obtient pour les fonctions de transfert nodales les limites d'accélération (dénommées  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ( $[-]$ )) suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = a_{crit.} \times \frac{M_1^*}{|\mathcal{P}_1^*|} = a_{crit.} \times \frac{M_1^*}{P_1^*} \\ \theta_2 = a_{crit.} \times \frac{M_1^*}{|\mathcal{P}_2^*|} = a_{crit.} \times \frac{M_1^*}{P_2^*} \end{array} \right. \quad \text{(III.64)}$$

Les facteurs multiplicateurs permettant le passage en adimensionnel sont en accord avec les choix posés précédemment pour l'adimensionnalisation du système. On reconnaît ici des expressions similaires à celles présentées pour la vérification découplée, à la différence que la masse généralisée utilisée pour l'adimensionnalisation est cette fois toujours celle du mode 1. Notons que les  $\theta_i$  sont des niveaux d'amplification pour les accélérations. Ainsi, à critère de confort donné, une valeur de ces derniers plus élevée constitue une borne moins contraignante.

Les forces modales dimensionnelles  $P_i^*$  ( $[N]$ ) peuvent être obtenues de la même façon que précédemment expliqué.

1. Ces combinaisons d'amplification des accélérations modales seront par la suite et par simplicité désignées par "fonctions de transfert combinées" ou encore simplement "fonctions de transfert nodales".

Ainsi, il ne reste qu'à vérifier que :

$$\begin{cases} |FRF_{nod.,1}|_{max} \leq \theta_1 & \text{(Première vérification)} \\ |FRF_{nod.,2}|_{max} \leq \theta_2 & \text{(Seconde vérification)} \end{cases} \quad \text{(III.65)}$$

pour s'assurer qu'en tout point de la passerelle, l'accélération dans la situation réelle amortie est inférieure aux limites autorisées.

### 4.3 Approche habituelle - 2 TMD pour 2 modes

Les critères à remplir pour le confort des usagers d'une passerelle et la façon de les vérifier viennent d'être exposés. Nous nous intéressons maintenant au moyen de les satisfaire, c'est-à-dire aux propriétés à fournir aux amortisseurs. Nous nous focalisons tout d'abord sur une approche classique utilisant 2 amortisseurs pour amortir les 2 modes.

#### 4.3.1 Approche habituelle découplée

Généralement, une passerelle est considérée comme un ensemble de  $M$  modes indépendants. Comme déjà expliqué, cela revient simplement à projeter le système dans ses formes modales propres, créant ainsi  $M$  sous-systèmes pouvant être analysés séparément les uns des autres.

Ainsi, on suppose que le placement d'un amortisseur n'a pas d'effet sur les autres modes, et on néglige de ce fait le couplage. Sur le plan mathématique, cela revient à négliger les termes non diagonaux de la matrice de transfert du système. L'amortissement est alors prévu en considérant un ensemble de systèmes à 1 degré de liberté sur lesquels sont réglés les différents amortisseurs, comme schématisé ci-dessous.

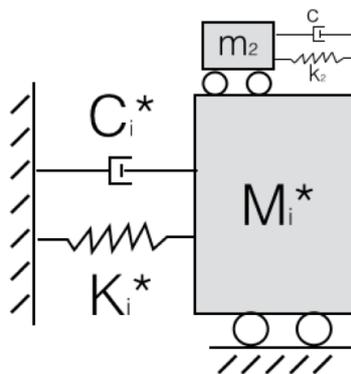


FIGURE III.13 – Schéma de la simplification en modes indépendants

Comme il vient d'être expliqué, les niveaux cibles sont donc :

$$\begin{cases} \theta_1 = a_{crit.} \frac{M_1^*}{P_1^*} & \text{(Pour la première vérification)} \\ \theta_2 = a_{crit.} \frac{M_2^*}{P_2^*} & \text{(Pour la seconde vérification)} \end{cases} \quad \text{(III.66)}$$

On applique alors simplement les règles de *den Hartog* pour atteindre ces valeurs. On sait que le niveau atteint par la fonction de transfert (réelle, pas approchée) des déplacements vaut dans ce cas  $\sqrt{1 + 2/\mu_{TMD}}$ . Il faut donc prévoir :

$$\begin{cases} \mu_{TMD,1} = \frac{2}{\theta_1^2 - 1} \\ \mu_{TMD,2} = \frac{2}{\theta_2^2 - 1} \end{cases} \quad (\text{III.67})$$

et ensuite régler les paramètres  $\alpha$  et  $\xi_{TMD}$  de chacun des amortisseurs au moyen des formules de *den Hartog*.

Ce que ce dernier ne permet toutefois pas de représenter est la situation où un amortisseur ne serait pas placé où l'amplitude du mode qu'il vise à amortir est unitaire. Ainsi, nous proposons une formule alternative à utiliser dans le cas où cette situation est rencontrée. Si l'on repart de l'expression (III.49) pour un mode, qu'on suppose les réglages optimaux établis précédemment en fréquence et amortissement, et que l'on regarde en  $\hat{\omega} = 1$ , on obtient :

$$|H_1^*|_{max} = \frac{1}{\phi_1^2} \sqrt{\frac{2}{\mu_{TMD}}} \quad (\text{III.68})$$

Egaliser cette expression aux niveaux cibles amène :

$$\begin{cases} \mu_{TMD,1} = \frac{2}{\theta_1^2 \phi_1^4} \\ \mu_{TMD,2} = \frac{2}{\theta_2^2 \phi_2^4} \end{cases} \quad (\text{III.69})$$

et l'on voit qu'en terme de masse à fournir, le positionnement de l'amortisseur a un rôle prépondérant et un impact majeur. Par exemple, si un TMD est placé où l'amplitude du mode qu'il doit amortir est de 0.85, il aura besoin d'une masse 2 fois plus élevée pour parvenir au même niveau que s'il avait été placé à l'endroit où le mode est maximum (unitaire).

Sur base de ces nouveaux ratios de masse, on applique alors les règles de *den Hartog* "approchées" établies précédemment pour les systèmes à 1 ddl. Ce sont en effet ces valeurs qui sont supposées pour établir cette formule, et il faut garantir la cohérence au sein de l'approche utilisée.

### 4.3.2 Effet du couplage modal sur un mode donné

L'approche découplée est adéquate dans les cas courants où les modes sont bien distincts. On veut maintenant évaluer dans quelle mesure elle le reste dans les situations où ce n'est pas le cas. Pour ce faire, on va établir des expressions mathématiques approchées mais parlantes.

Pour étudier le phénomène de couplage, on se détache des expressions de *den Hartog* et on utilise l'outil au premier ordre qui a été développé précédemment. L'approche reste en tous points similaire à l'approche découplée simple définie ci-dessus. La seule différence est que l'on va maintenant considérer l'influence du couplage pour le maximum des fonctions de transfert modales. On va donc simplement modifier l'expression donnée par *den Hartog* pour  $\max_{\hat{\omega}} \{|H_{i,damped}^*|\}$ . Pour alléger les notations, on utilisera le symbole  $H_i^*$ .

On suppose que le mode d'intérêt est le "premier" des 2 modes du système. Comme déjà expliqué plus tôt, on choisit de négliger l'amortissement structural. Selon notre modèle adimensionnel, il vient :

$$H_{1,1}^*(\hat{\omega}) = \frac{2\mu_2(1 + \beta - \hat{\omega}) - \gamma\phi_2^2}{4\mu_2(1 - \hat{\omega})(1 + \beta - \hat{\omega}) - 2\gamma[(1 - \hat{\omega})\phi_2^2 + \mu_2(1 + \beta - \hat{\omega})\phi_1^2]} \quad (\text{III.70})$$

où  $\gamma = \frac{\mu_{TMD}}{2(\alpha - \hat{\omega} + i\xi_{TMD})}$  et où on utilise par simplicité la notation  $\beta_1 = \beta$  (seulement 2 modes).

Une hypothèse très accommodante est de supposer que le maximum de la fonction de transfert est situé en  $\hat{\omega} = 1$ . Cela permet d'obtenir, pour le maximum de l'amplification dynamique, l'expression très simple :

$$H_{1,1}^*|_{\hat{\omega}=1} = \frac{-1}{\gamma|_{\hat{\omega}=1} \phi_1^2} + \frac{1}{2\mu_2\beta} \left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2. \tag{III.71}$$

On reconnaît en réalité la somme de la fonction de transfert modale découplée en  $\hat{\omega} = 1$  et d'un terme majorateur dû au couplage. Celui-ci est indépendant des paramètres de l'amortisseur (sauf son placement) et inversement proportionnel à la proximité des modes en fréquence. Il peut donc devenir conséquent si les modes sont proches. Si l'on place l'amortisseur du mode 1 en un endroit où le mode 2 est nul, tout couplage disparaît et ce terme tombe logiquement.

Sous l'hypothèse que les maxima des fonctions de transfert modales couplée et découplée ont lieu à la fréquence adimensionnelle  $\hat{\omega} = 1$ , on peut alors écrire :

$$H_{1,1}^*|_{max,coupled} = H_{1,1}^*|_{max,uncoupled} + \frac{1}{2\mu_2\beta} \left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2 \tag{III.72}$$

Plusieurs enseignements importants peuvent encore être tirés de cette expression.

Tout d'abord, la présence d'un autre mode de fréquence proche peut altérer les propriétés d'amortissement dans un mode donné. Ainsi, il est fort possible que dans certaines situations, un amortisseur soit calibré sur un mode et subisse l'influence d'un mode voisin, pour autant que celui-ci admette une amplitude appréciable où l'amortisseur est positionné.

Supposons tout d'abord qu'un seul amortisseur soit prévu dans l'approche découplée. Cette situation pourrait se produire si, par exemple, le mode considéré se situe "au bord" de la plage de fréquences critiques à amortir. Le mode voisin pourrait alors se trouver hors des fréquences à étudier et ne ferait l'objet d'aucun dispositif d'amortissement. Cela pourrait aussi avoir lieu dans le cas où ce mode voisin subirait des accélérations inférieures au critère de confort sous le chargement étudié, et qu'aucun amortisseur ne serait requis pour lui. On peut par exemple avoir la situation schématisée ci-dessous.

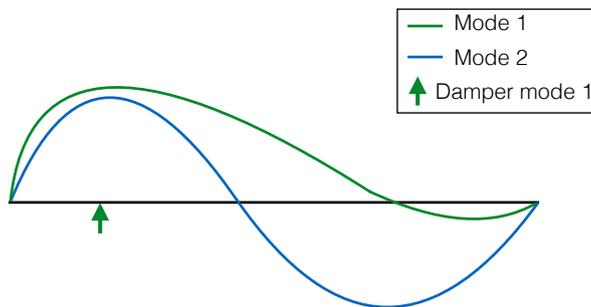


FIGURE III.14 – Schéma explicatif d'une situation couplée avec un amortisseur

Dans cette configuration, l'amortisseur réglé sur le mode 1 peut perdre en efficacité si le deuxième mode est proche en fréquence ( $\beta$  petit).

Ensuite, on peut imaginer que 2 amortisseurs ont été placés pour amortir les 2 modes en question. Si il s'avère que l'amortisseur du second mode est placé là où le premier mode est très faible, il n'a aucun effet sur ce dernier et la situation est équivalente au cas qui vient d'être expliqué.

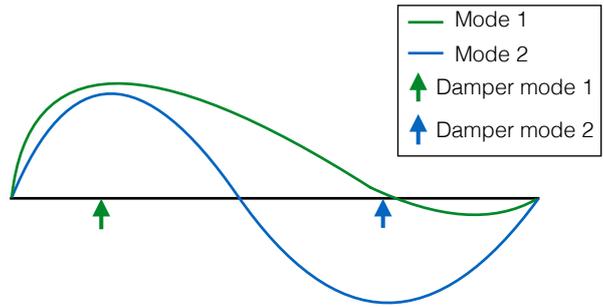


FIGURE III.15 – Schéma explicatif d'une situation couplée avec 2 amortisseurs

Afin de chiffrer ces observations, considérons un exemple rapide. Soient les 2 modes schématisés ci-dessus, assez proches en fréquence. Prenons par exemple  $\beta = f_2/f_1 - 1 = 5\%$ . Supposons qu'à l'endroit où l'amortisseur du mode 1 est placé, le mode 2 a une amplitude de 0.9, et le mode 1 est unitaire. Par simplicité, considérons des masses modales égales. Imaginons finalement que l'amortisseur du mode 1 présente un ratio de masse de 2%.

On règle ce dernier suivant les paramètres établis pour les systèmes à 1 ddl (III.53) (III.55). Le réglage en fréquence est ainsi pour rappel calibré sur la fréquence du mode cible ( $\alpha = 1$ ), et le taux d'amortissement donné par  $\xi_{TMD,i} = \sqrt{\frac{\mu_{TMD,i}}{2}}$ . En norme, il vient, dans les situations découplée et couplée respectivement :

$$|H_{1,1}^*|_{max} = \frac{1}{\phi_1^2} \sqrt{\frac{2}{\mu_{TMD,1}}} \tag{III.73}$$

et

$$|H_{1,1}^*|_{max,coupled} = \frac{1}{\phi_1^2} \sqrt{\frac{2}{\mu_{TMD,1}} + \frac{\phi_2^4}{4\mu_2^2\beta^2}} \tag{III.74}$$

et le terme additionnel apparaît alors comme un terme majorateur dans tous les cas. Selon notre exemple, on obtient respectivement des niveaux de 10 et 12.87, soit une différence de presque 30% en efficacité ! Ce cas illustratif montre toute l'importance que peut avoir le couplage modal dans ces conditions particulières. Cela est d'autant plus vrai que l'estimation du couplage est effectuée à la baisse, de près d'un facteur 2 pour un si petit  $\beta$ .

En effet, l'hypothèse sur la position du maximum permet une approche analytique très simple mais n'est pas la plus fidèle. Elle est illustrée ci-dessous pour l'exemple qui vient d'être donné.

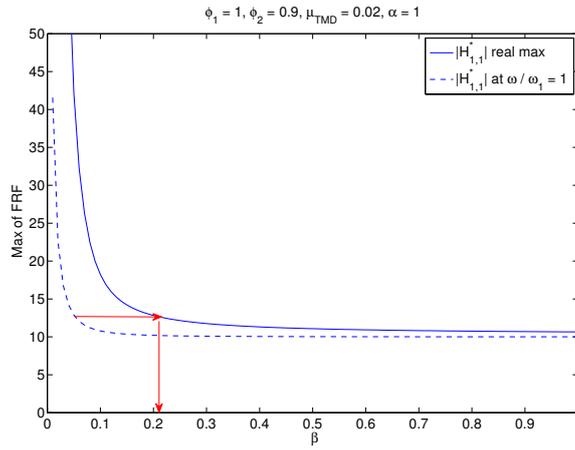


FIGURE III.16 – Amplification dynamique maximale et en  $\hat{\omega} = 1$  pour un système à 1 ddl prenant en compte le couplage modal

On remarque que l'amplification annoncée a en réalité lieu pour une différence en fréquence de près de 20%, ce qui n'est pas tellement petit. Le phénomène de couplage modal peut donc dans certaines configurations avoir un impact significatif, et mener à des erreurs conséquentes s'il n'est pas pris en compte.

### 4.3.3 Modification de l'approche découplée pour inclure l'effet du couplage

Dans cette section, une modification est suggérée pour inclure l'effet du couplage qui vient d'être mis en lumière, lors du dimensionnement de 2 amortisseurs pour amortir 2 modes.

Chacun des amortisseurs est considéré indépendamment, et réglé de façon optimale sur sa fréquence cible. Comme juste expliqué, le maximum de la norme de la fonction de transfert modale couplée du premier des 2 modes peut dans ce cas être approximé par :

$$|H_{1,1}^*|_{max,coupled} = \frac{1}{\phi_1^2} \sqrt{\frac{2}{\mu_{TMD,1}} + \frac{\phi_2^4}{4\mu_2^2\beta^2}} \quad (III.75)$$

Comme précédemment, on égale le niveau cible et l'expression de la fonction de transfert pour obtenir :

$$\mu_{TMD,1} = \frac{2}{\theta_1^2\phi_1^4 - \frac{\phi_2^4}{4\mu_2^2\beta^2}} \quad (III.76)$$

et l'on retombe bien sur l'expression établie précédemment si  $\phi_2 = 0$  (pas de couplage). Le réglage du 2<sup>ème</sup> TMD est effectué de la même manière, sauf que le  $\beta$  et le  $\mu_2$  sont alors calculés avec comme référence ce deuxième mode et non plus le premier. Moyennant ces précautions, on obtient :

$$\mu_{TMD,2} = \frac{2}{\theta_2^2\phi_2^4 - \frac{\phi_1^4}{4\mu_1^2\beta'^2}} \quad (III.77)$$

où c'est cette fois l'amplitude du premier mode qui apparaît dans le terme de couplage et où les amplitudes modales sont celles à l'endroit où le second amortisseur est placé.

Les réglages correspondant sont ceux de *den Hartog* "approché". Notons qu'il est bien connu qu'à cause du couplage, ceux-ci ne sont plus exactement optimaux [20]. Cette différence est d'autant plus élevée que  $\mu_{TMD}$  est grand, ce qui dans notre cas reste cependant limité.

Remarquons que l'estimation de  $\mu_{TMD}$  n'est pas très fidèle et est purement indicative. En effet, comme montré ci-avant, l'hypothèse que le maximum se situe à la fréquence propre n'est pas sécuritaire. Cependant, on a ici négligé l'impact d'un des 2 amortisseurs, qui peut avoir un effet positif conséquent sur le mode voisin qu'il n'est pas prévu pour lui d'amortir.

Pour ces raisons, une analyse plus poussée devrait être effectuée, et on utilisera donc seulement ces expressions dans l'optique d'évaluer l'importance ou non du couplage modal. On a généralement systématiquement recours à des procédures d'optimisation numérique pour traiter ces cas de façon rigoureuse et optimale, et ces formules permettent donc d'estimer ce besoin ou non.

Suivant l'approche développée précédemment, il pourrait être facile de généraliser les équations et modéliser le couplage dans un système à 2 modes comportant 2 amortisseurs. Ce n'est cependant pas l'objet d'étude actuel.

#### 4.4 Approche alternative - 1 TMD pour 2 modes

Dans cette section, une stratégie consistant à amortir 2 modes à l'aide d'un seul amortisseur est développée. Celle-ci prend en compte la dynamique réelle du système couplé et surpasse les nombreuses simplifications effectuées dans les approches découplées présentées jusqu'à présent. En effet, la présence d'un amortisseur change fortement la dynamique d'une structure. Il est donc bon d'incorporer cet effet dans la phase de conception pour éviter que le couplage entre les modes n'entraîne des niveaux d'accélération excessifs, non soupçonnés dans une approche découplée.

##### 4.4.1 Motivation

L'idée d'amortir deux modes avec un seul amortisseur résulte tout d'abord des besoins de l'ingénieur. Pour des raisons économiques, il peut être avantageux d'économiser en appareillage, et surtout en main d'œuvre nécessaire. Les modes à amortir pouvant être nombreux et très proches en fréquence, ce type de solution apparaît naturellement. Pour des raisons structurelles, il est appréciable de limiter la masse supplémentaire attachée à la structure. Finalement, pour des raisons architecturales, il peut être commode de positionner moins d'amortisseurs ou de disposer d'une certaine flexibilité dans leur placement. La demande pour une telle solution est donc bien présente, et sa pertinence est justifiée.

Sur le plan mathématique, et par des raisonnements similaires à ceux effectués ci-dessus, on peut établir, dans le cas d'un système à 2 modes amorti par un seul TMD, les expressions suivantes :

$$\begin{cases} H_1^*(1,1)|_{\hat{\omega}=1} = \frac{-1}{\gamma|_{\hat{\omega}=1} \phi_1^2} + \frac{1}{2\mu_2\beta} \left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2 \\ H_1^*(2,2)|_{\hat{\omega}=1+\beta} = \frac{-1}{\gamma|_{\hat{\omega}=1+\beta} \phi_2^2} - \frac{1}{2\beta} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^2 \end{cases} \quad (\text{III.78})$$

qui sont les fonctions de transfert modales des 2 modes étudiés. Supposant que les maxima des fonctions de transfert se situent aux abscisses 1 et  $1 + \beta$ , on trouve

$$\begin{cases} H_1^*(1,1)|_{max,coupled} = H_1^*(1,1)|_{max,uncoupled} + \frac{1}{2\mu_2\beta} \left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2 \\ H_1^*(2,2)|_{max,coupled} = H_1^*(2,2)|_{max,uncoupled} - \frac{1}{2\beta} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^2 \end{cases} \quad (\text{III.79})$$

Une observation intéressante est que le couplage a un effet négatif inévitable dans les expressions ci-dessus prises en norme. L'amplification dynamique d'un mode donné sur lequel est réglé un amortisseur ne sera donc jamais réduite grâce à la présence d'un mode proche. Il est par conséquent impossible d'"envoyer" grâce au couplage une partie des sollicitations (de l'énergie) dans un mode voisin qui aurait une amplitude faible là où le mode cible est le plus élevé, en espérant ainsi réduire la réponse globale en ce point critique.

Par contre, si l'amortisseur est réglé sur le mode 1, le couplage permet également d'amortir le mode 2, ce qui n'était pas du tout le cas en situation découplée. Ainsi, au coût d'une réponse un peu plus élevée dans le mode 1, on amortit 2 modes pour le prix d'un, pour autant que  $\phi_1$  et  $\phi_2$  soient suffisamment grands. En effet,  $H_1^*(2,2)|_{max,uncoupled}$  a une valeur bien plus basse que  $\frac{1}{2\xi_{2,3}}$ . L'effet du couplage sur la réponse du mode 2 est donc négligeable par rapport au gain que celui-ci lui apporte. Ainsi, à la Figure III.16, on avait souligné que la réponse dans le mode 1 étant amplifiée, mais il n'avait pas été dit que la réponse dans le mode 2 était, elle, bien réduite !

Ceci est illustré à la figure ci-dessous, où l'augmentation du couplage est par exemple apportée par un rapprochement des fréquences. Le réglage de l'amortisseur est effectué selon *den Hartog* sur le premier mode, et la fréquence du second est rapprochée. Les amplitudes modales sont choisies égales et suffisamment élevées. Les masses modales sont égales.

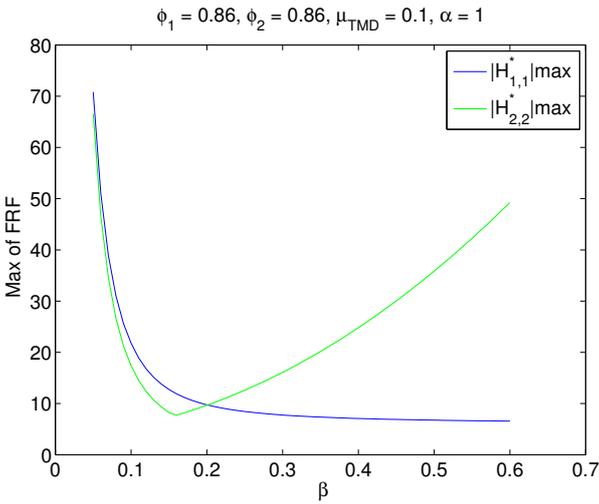


FIGURE III.17 – Amplification dynamique des 2 modes considérés en fonction de leur proximité

On voit que l'amplification dynamique du mode 2 est fortement réduite grâce au couplage, tant que celui-ci n'est pas trop marqué. On voudrait cependant bien plus que cela. On aimerait pouvoir régler l'amortisseur autrement que selon *den Hartog*, pour atteindre les objectifs définis précédemment de façon exacte, en utilisant le couplage modal pour "relier" les vibrations dans les 2 modes et ainsi amortir 2 modes simultanément et de la façon désirée.

**4.4.2 Enjeu**

Au vu de ses nombreux paramètres, le problème posé est complexe. Le but est de capturer le comportement des fonctions de transfert des accélérations, quelles que soient les combinaisons de tous les paramètres. Qui plus est, les contraintes (vérifications) sont au nombre de 2 et indépendantes, ce qui ne permet pas l'optimisation par une solution unique. Tout le défi est donc de réussir à appréhender de façon simple le comportement général (en particulier, le maximum) de ces fonctions très inégales. A la clé, un outil suffisamment robuste, précis, mais simple doit être fourni pour le concepteur.

Afin de faciliter la compréhension et de poser le cadre du problème, le tableau ci-dessous en reprend les différents paramètres. D'une part sont reprises ses données, principalement propres à la structure. D'autre part se trouvent les paramètres à fournir au concepteur, relatifs à l'amortisseur.

DONNÉES

Paramètre	Signification
$\beta$	Différence relative entre les fréquences de la structure
$\mu_2$	Ratio des masses modales
$\varphi_1$	Amplitude du mode 1 où le mode 2 est max.
$\varphi_2$	Amplitude du mode 2 où le mode 1 est max.
$\theta_1$	Niveau cible sous chargement du mode 1
$\theta_2$	Niveau cible sous chargement du mode 2

INCONNUES

Paramètre	Signification
$\phi_1$	Amplitude du mode 1 à la position du TMD
$\phi_2$	Amplitude du mode 2 à la position du TMD
$\mu_{TMD}$	Ratio de masse du TMD
$\xi_{TMD}$	Taux d'amortissement du TMD
$\alpha$	Ratio de fréquence du TMD

TABLE III.2 – Paramètres du problème couplé à 1 TMD

Notons que pour garder la méthode générale, aucune relation n'est présupposée entre  $\phi_1$  et  $\phi_2$ .

Le but est donc de prédire la position adéquate et les caractéristiques d'un amortisseur pour amortir 2 modes connus et de caractéristiques données à des niveaux cibles d'accélération.

4.4.3 Etude du comportement couplé

La clé du raisonnement réside dans une bonne compréhension des fonctions de transfert. Si l'on comprend leurs fondements, on pourra alors prédire comment elles varient.

Pour ce faire, l'outil mathématique développé au premier ordre d'approximation va être utilisé, dans le cas d'un système à 2 degrés de liberté comportant un amortisseur. Les expressions qui nous intéressent sont, au premier ordre, celles-ci :

$$\begin{cases} H_1^*(1,1) + \varphi_2 \times H_1^*(1,2) = \frac{2\mu_2(1 + \beta - \widehat{\omega}) + \gamma(\varphi_2\phi_1\phi_2 - \phi_2^2)}{4\mu_2(1 - \widehat{\omega})(1 + \beta - \widehat{\omega}) - 2\gamma[(1 - \widehat{\omega})\phi_2^2 + \mu_2(1 + \beta - \widehat{\omega})\phi_1^2]} \\ H_1^*(2,2) + \varphi_1 \times H_1^*(2,1) = \frac{2(1 - \widehat{\omega}) + \gamma(\varphi_1\phi_1\phi_2 - \phi_1^2)}{4\mu_2(1 - \widehat{\omega})(1 + \beta - \widehat{\omega}) - 2\gamma[(1 - \widehat{\omega})\phi_2^2 + \mu_2(1 + \beta - \widehat{\omega})\phi_1^2]} \end{cases} \quad (III.80)$$

où, pour rappel,  $\gamma = \frac{\mu_{TMD}}{2(\alpha - \widehat{\omega} + i\xi_{TMD})}$ .

4.4.3.1 Préambule : exemple utilisé

Dans la suite de ce rapport, les résultats seront régulièrement illustrés au moyen d'un exemple. Pour garder ceux-ci très parlants et faciles à analyser, on considèrera les paramètres repris dans le tableau ci-dessous.

Paramètre	$\beta$	$\mu_2$	$\theta_2/\theta_1$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\alpha$
Valeur	0.1	1	1	0.86	0.86	0	0	1.05

TABLE III.3 – Paramètres du cas exemplatif

Par simplicité, ce sont généralement les fonctions de transfert modales qui seront étudiées ( $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  pris à zéro). On prendra 2 modes de masse modale équivalente et espacés de 10% en fréquence. On supposera qu'il doivent être amortis identiquement. Le positionnement de l'amortisseur sera arbitrairement choisi tel que  $\phi_1 = \phi_2 = 0.86$ , qui est par exemple l'amplitude commune aux 2 premiers modes d'une poutre bi-appuyée. Le réglage en fréquence suit la logique qui sera présentée ultérieurement, et importe pour le moment peu.

Ces choix sont faits par simplicité et sont donc purement arbitraires. Cependant, ils ne compromettent en rien l'applicabilité des résultats présentés ci-après et permettront au lecteur de comprendre plus aisément les concepts introduits.

#### 4.4.3.2 Observations

Par opposition à l'approche utilisée par *den Hartog*, le paramètre majeur d'intérêt pour le concepteur est le ratio de masse  $\mu_{TMD}$ . L'enjeu est en effet de savoir quelle valeur de celui-ci est suffisante pour éventuellement permettre d'amortir 2 modes à la fois avec un seul amortisseur. On s'intéresse donc particulièrement à la variation des fonctions de transfert selon cette variable. On va regarder le comportement du système successivement pour des valeurs faibles ou élevées de celle-ci.

##### 1) $\mu_{TMD}$ faible

En l'absence d'amortisseur, ou pour un ratio de masse  $\mu_{TMD}$  très faible, les termes multipliés par  $\gamma$  sont négligeables devant le reste de l'expression et il vient simplement :

$$\begin{cases} H_1^*(1,1) + \varphi_2 \times H_1^*(1,2) \sim \frac{1}{2(1 - \widehat{\omega})} \\ H_1^*(2,2) + \varphi_1 \times H_1^*(2,1) \sim \frac{1}{2\mu_2(1 + \beta - \widehat{\omega})} \end{cases} \quad (\text{III.81})$$

On retombe bien sur le cas découplé, qui inclut des pôles en 1 et  $1 + \beta$ . Ainsi, pour des faibles masses d'amortisseur, on s'attend à observer des pôles en ces fréquences, respectivement pour les 2 fonctions de transfert nodales d'intérêt. Ce cas est illustré ci-dessous. L'amortissement structural étant ici négligé, il est normal en regard des expressions analytiques que l'amplification dynamique soit infinie aux pôles.

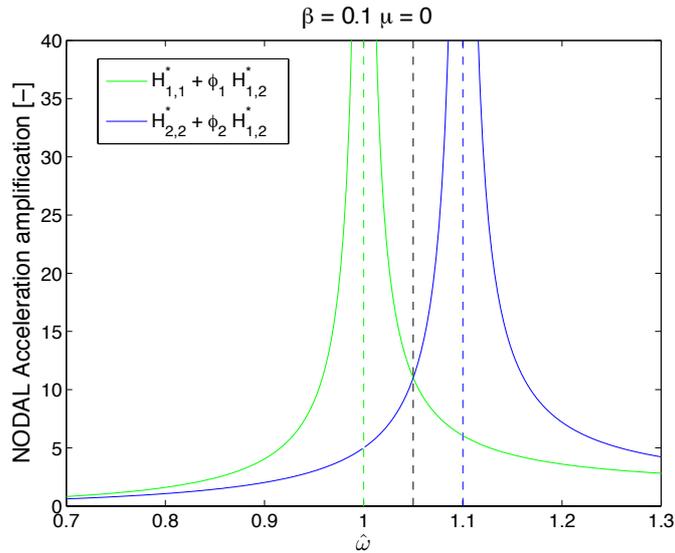


FIGURE III.18 – Fonctions de transfert sans amortisseur

On observe que les 2 expressions (III.81) sont égales en  $\hat{\omega} = 1 + \beta/2$  et valent en cette fréquence  $1/\beta$ . Cette valeur est indépendante de tout amortissement et est purement due au couplage entre les modes. Elle est inversement proportionnelle à leur proximité, et peut donc être conséquente si les modes sont très proches. Il est intéressant de la garder à l'esprit pour la suite des investigations. *Abé et Igusa* (1995) faisaient également état d'une borne de ce type à la fréquence "moyenne" dans leur étude de structures à modes proches [1]. La valeur obtenue est fortement similaire à celle qu'ils proposent ( $\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}$  pour ce cas).

## 2) $\mu_{TMD}$ élevé

Si la masse de l'amortisseur est suffisamment élevée par rapport aux autres paramètres du problème, alors les termes en  $\gamma$  sont dominants et on trouve que les expressions des fonctions de transfert se comportent de cette façon :

$$\begin{cases} H_1^*(1,1) + \phi_2 \times H_1^*(1,2) \sim \frac{\phi_2^2}{2 [(1 - \hat{\omega})\phi_2^2 + \mu_2(1 + \beta - \hat{\omega})\phi_1^2]} \\ H_1^*(2,2) + \phi_1 \times H_1^*(2,1) \sim \frac{\phi_1^2}{2 [(1 - \hat{\omega})\phi_2^2 + \mu_2(1 + \beta - \hat{\omega})\phi_1^2]} \end{cases} \quad (III.82)$$

Les pôles correspondent à l'annulation du dénominateur, ce qui a lieu dans les 2 cas pour :

$$\hat{\omega}^* = \frac{\phi_2^2 + (1 + \beta)\mu_2\phi_1^2}{\phi_2^2 + \mu_2\phi_1^2} = 1 + \frac{\beta \mu_2 \phi_1^2}{\phi_2^2 + \mu_2\phi_1^2}. \quad (III.83)$$

Il y a donc un pôle commun aux 2 expressions, *i.e.* les 2 fonctions de transfert nodales admettent leur maximum en une même fréquence.

Cette fréquence constitue une sorte de moyenne pondérée entre 1 et  $1 + \beta$ . A titre illustratif, dans le cas où  $\phi_1 = \phi_2$  et où les masses modales sont égales, on trouve  $\hat{\omega} = 1 + \beta/2$  qui est alors précisément le milieu de 1 et  $1 + \beta$ . Intuitivement, c'est bien ce que l'on attend lorsque la situation est "parfaitement équilibrée" entre les 2 modes.

Ce deuxième cas "extrême" est illustré ci-dessous pour l'exemple introduit plus tôt, pour une valeur de  $\mu_{TMD}$  prise arbitrairement à 50%.

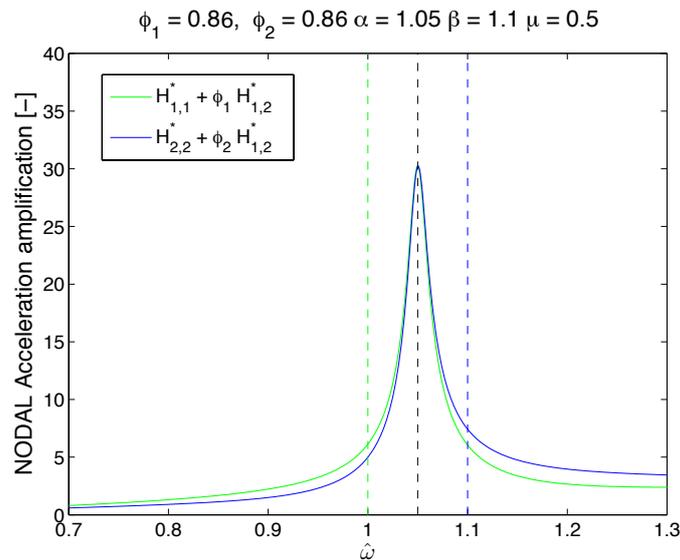


FIGURE III.19 – Fonctions de transfert avec amortisseur -  $\mu_{TMD}$  élevé

Comme annoncé, les fonctions de transfert combinées admettent leur maximum (pôle dominant) en une même fréquence  $\hat{\omega}^*$  (III.83), représentée ici avec un trait noir pointillé.

### 3) $\mu_{TMD}$ intermédiaire

On peut se demander de quelle façon le système se comporte lorsqu'aucun des 2 pôles n'est réellement dominant.

La Figure III.20 ci-dessous représente l'évolution des fonctions de transfert combinées pour des valeurs variables de  $\mu_{TMD}$ . Outre les cas limites mis en exergue ci-avant, il est maintenant possible d'évaluer la variation de comportement pour des valeurs intermédiaires de  $\mu_{TMD}$ .

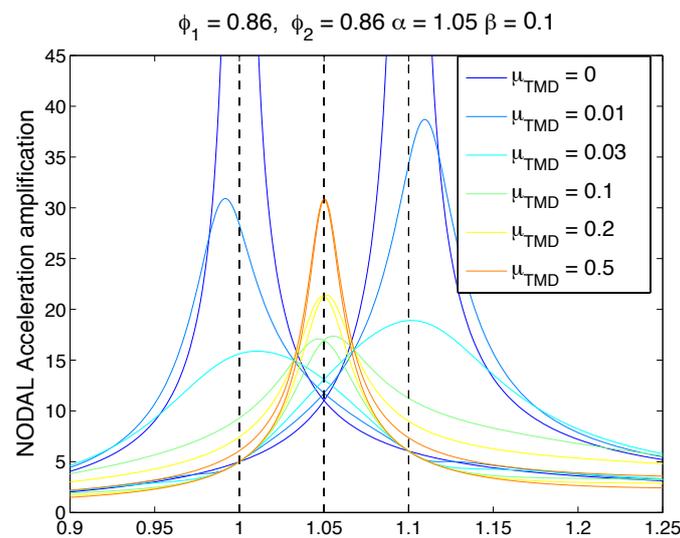


FIGURE III.20 – Fonctions de transfert avec amortisseur -  $\mu_{TMD}$  variable

Deux observations intéressantes peuvent être formulées à ce stade. Tout d'abord, on remarque que le maximum des fonctions se déplace progressivement des pôles 1 et  $1 + \beta$  vers le pôle commun  $\hat{\omega}^*$ . Ensuite, il semble que ce maximum décroisse d'abord lorsque les pôles sont 1 et  $1 + \beta$ , puis croisse ensuite lorsque le pôle s'est déplacé en  $\hat{\omega}^*$ . Cela laisse donc supposer une situation optimale intermédiaire.

La première observation est traduite par le graphe ci-dessous, qui présente la fréquence admettant l'amplification maximale pour l'exemple étudié, en fonction du ratio de masse de l'amortisseur.

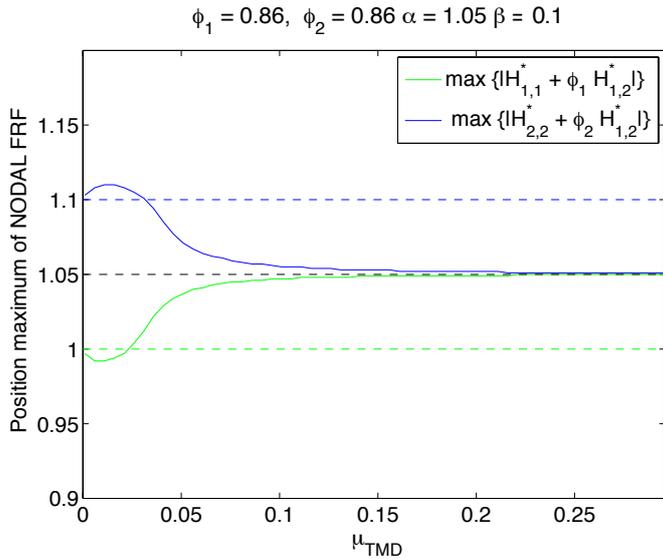


FIGURE III.21 – Fréquence admettant l'amplification dynamique maximale, selon  $\mu_{TMD}$

On remarque bel et bien que le maximum des fonctions d'intérêt se déplace des 2 pôles initiaux vers un pôle commun en  $\hat{\omega}^*$ , après s'être écarté quelque peu au-delà de  $1 + \beta$  et en-deçà de 1. La transition entre les 2 comportements et la proximité entre la position réelle du maximum et ces pôles dépendent bien évidemment du problème ; le cas présenté ci-dessus est purement illustratif.

La seconde observation, fondamentale pour la suite de la démarche présentée, est représentée ci-dessous pour le même exemple. Le maximum de la norme des 2 fonctions de transfert d'intérêt est donné en fonction de  $\mu_{TMD}$ .

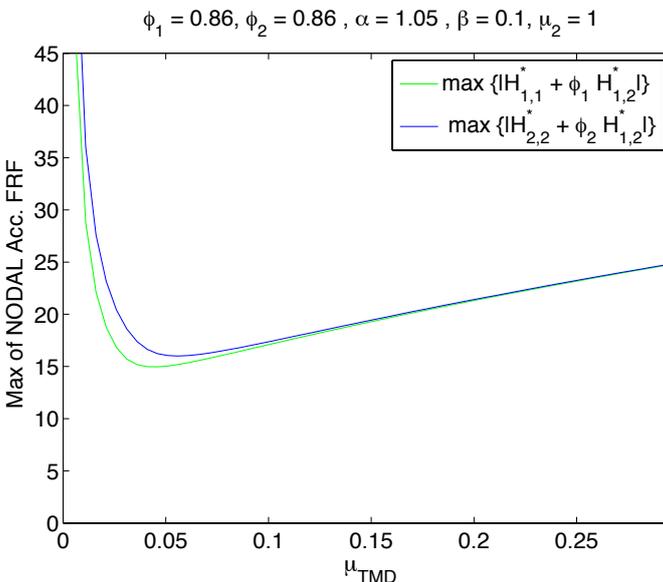


FIGURE III.22 – Maximum des fonctions de transfert combinées, selon  $\mu_{TMD}$

Il existe donc bien une valeur de  $\mu_{TMD}$  optimale en terme de minimisation de l'accélération. Une autre observation intéressante est que la deuxième partie de la courbe est beaucoup moins raide que la première. Cela laisse donc suggérer que lorsque le maximum se situe en  $\hat{\omega}^*$ , les fonctions étudiées sont moins sensibles aux variations de  $\mu_{TMD}$ .

Un des objectifs va être d'essayer de déterminer le ratio de masse menant à l'optimum des courbes ci-dessus. Pour cela, il est toutefois encore nécessaire de mettre au point certains outils analytiques, ce qui va être maintenant étudié.

4.4.3.3 Approximation du comportement

On cherche à connaître le maximum des fonctions de transfert combinées. Mathématiquement, il est très difficile de déterminer l'emplacement exact de ce maximum. En réalité, l'annulation du dénominateur des Equations (III.80) requiert de trouver les racines d'un polynôme du troisième degré peu accommodant. Aussi, et fort des observations qui viennent d'être faites, l'idée développée est d'approcher les fonctions de transfert par leurs expressions en  $\hat{\omega} = 1, 1 + \beta$  et  $\hat{\omega}^*$ . En effet, on a pu observer à la Figure III.21 que le maximum peut en bonne approximation être trouvé à ces fréquences.

On va donc particulariser les expressions (III.80) aux fréquences stratégiques mises en lumière, expressions qui s'y simplifient spécialement bien. Le tableau ci-dessous reprend ces dernières, obtenues aisément sur base du système initial.

Fonction de transfert	Expression en $\hat{\omega} = 1$	Expression en $\hat{\omega} = \hat{\omega}^*$
$H_1^*(1, 1) + \phi_2 \times H_1^*(1, 2)$	$\frac{-1}{\gamma _{\hat{\omega}=1} \phi_1^2} - \frac{[\phi_2 \phi_1 \phi_2 - \phi_2^2]}{2\mu_2 \beta \phi_1^2}$	$\frac{1}{2(1 - \hat{\omega}^*)} + \frac{\gamma _{\hat{\omega}=\hat{\omega}^*} [\phi_2 \phi_1 \phi_2 - \phi_2^2]}{4\mu_2(1 - \hat{\omega}^*)(1 + \beta - \hat{\omega}^*)}$

Fonction de transfert	Expression en $\hat{\omega} = 1 + \beta$	Expression en $\hat{\omega} = \hat{\omega}^*$
$H_1^*(2, 2) + \phi_1 \times H_1^*(1, 2)$	$\frac{-1}{\gamma _{\hat{\omega}=1+\beta} \phi_2^2} + \frac{[\phi_1 \phi_1 \phi_2 - \phi_1^2]}{2\beta \phi_2^2}$	$\frac{1}{2\mu_2(1 + \beta - \hat{\omega}^*)} + \frac{\gamma _{\hat{\omega}=\hat{\omega}^*} [\phi_2 \phi_1 \phi_2 - \phi_1^2]}{4\mu_2(1 - \hat{\omega}^*)(1 + \beta - \hat{\omega}^*)}$

TABLE III.4 – Fonctions de transfert d'intérêt

Utilisant ces équations, on peut évaluer l'exactitude de l'approximation suggérée par les valeurs des fonctions de transfert aux pôles particuliers précités. Ceci est illustré par la figure ci-dessous, pour le même exemple que précédemment.

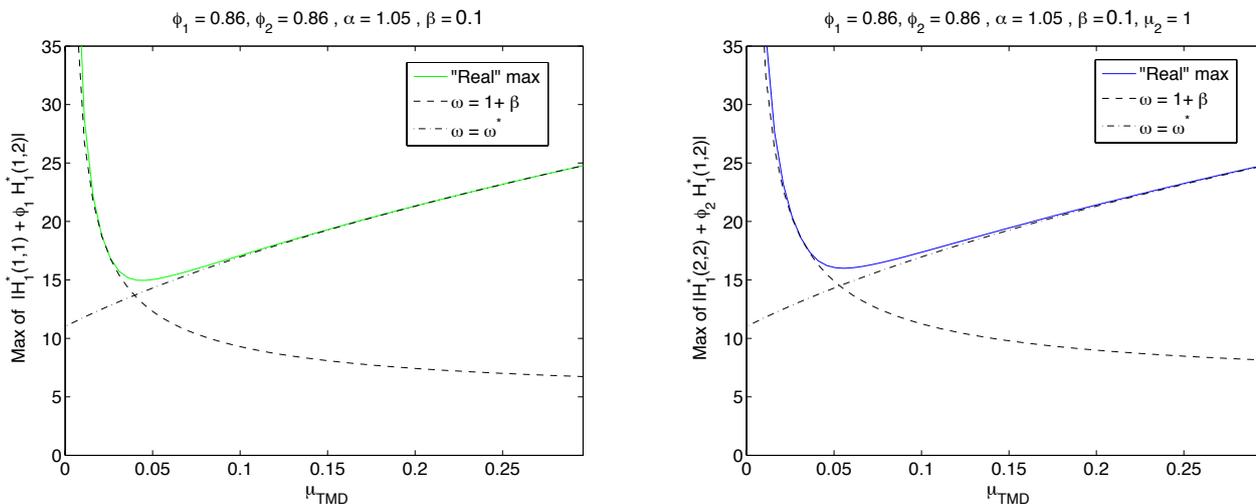


FIGURE III.23 – Maximum des fonctions de transfert combinées et approximations en  $\hat{\omega} = 1, 1 + \beta$  et  $\hat{\omega}^*$ , selon  $\mu_{TMD}$

On remarque que, si les positions et valeurs exactes du maximum des fonctions de transfert ne peuvent être

connues précisément, le maximum des 2 approximations aux valeurs stratégiques offre toutefois une très bonne estimation du maximum réel de ces fonctions selon  $\mu_{TMD}$ . De plus, l'intersection des 2 courbes approchées donne une bonne prévision de la position réelle de l'optimum de ces courbes. C'est donc cette approche qui sera utilisée par la suite pour caractériser le maximum des accélérations du système.

On a maintenant à disposition un outil opérationnel pour estimer le maximum des fonctions de transfert. Grâce à celui-ci, il est désormais possible de développer une stratégie explicite de dimensionnement.

#### 4.4.4 Stratégie couplée mise en œuvre

L'approche proposée pour amortir 2 modes avec un seul amortisseur est qualifiée de "couplée", car elle se base sur les fonctions de transfert réelles des accélérations du système amorti et couplé. Les maxima considérés pour estimer le niveau de confort sous le chargement d'un mode donné dépendront donc de la réponse dans ce mode, mais aussi dans l'autre mode, ainsi que des propriétés de l'amortisseur. Cette approche est la plus complète qui puisse être utilisée, se démarquant des approches habituelles par les caractéristiques importantes suivantes :

- Prise en compte du couplage dans les FRF modales
- Combinaison nodale des FRF modales
- Considération de l'amplification dynamique des accélérations (pas des déplacements), et donc de ce fait aussi des fréquences "amorties".

Tous ces aspects ne peuvent bien sûr être pris en compte qu'au prix d'une complexité supérieure des modèles mathématiques, qui comportent alors un nombre bien plus élevé de paramètres. Cependant, les outils simplifiés développés précédemment permettent de traiter ces problèmes de façon tout à fait abordable. C'est ce qui va maintenant être expliqué.

Dans un premier temps, une proposition sera formulée pour déterminer les paramètres optimaux du problème. Elle permettra de définir un critère d'applicabilité de la méthode d'amortissement à 1 amortisseur pour 2 modes. Ensuite, la démarche sera généralisée pour convertir la marge disponible entre les valeurs cibles et l'optimum déterminé en liberté pour le concepteur, en terme de positionnement de l'appareil.

##### 4.4.4.1 Cas optimum

Nous commençons donc par la recherche des paramètres optimaux du problème. Les graphes montrés précédemment (par exemple, la *Figure III.23*) ont laissé suggérer l'existence d'un tel optimum pour le réglage d'un amortisseur dans une situation couplée donnée. La question qui est maintenant posée est de déterminer les paramètres de l'amortisseur menant à cet optimum, c'est-à-dire  $\alpha$ ,  $\mu_{TMD}$ ,  $\xi_{TMD}$ , ainsi que son positionnement. Bien plus, vu que 2 conditions doivent être remplies simultanément (*cf.* (III.65)), on cherche à déterminer l'état optimum commun permettant de remplir cet objectif de double minimisation.

#### Approche développée

La recherche d'un optimum dans un espace de grande dimension passe inévitablement par le développement d'une stratégie, à l'instar du travail effectué par *den Hartog*, par exemple. Celle-ci ne peut être efficace que si les cibles qu'elle doit atteindre sont bien définies.

Tout d'abord, comme expliqué précédemment, l'amortisseur doit satisfaire les exigences en terme de niveau d'accélération atteint (*cf.* III.65). Si on définit  $\lambda = \theta_1/\theta_2$ , il faut donc que le ratio entre les maxima observés des 2 fonctions de transfert combinées soit égal à  $\lambda$ . Dans ce cas, la marge sera donc identique entre les 2 critères et les valeurs cibles qui doivent y être comparées. Cela laissera donc autant de latitude dans "un sens" et "dans l'autre", ce qui permettra d'offrir la plus grande généralité.

Ensuite, si l'on considère l'approximation par 2 comportements expliquée plus tôt, le maximum se situe soit en un pôle (premier comportement), soit en l'autre (second comportement). L'optimum à atteindre est donc celui pour lequel les 2 pôles ont une importance égale (intersection des 2 comportements). Cette situation permet d'offrir un niveau minimum aux fonctions de transfert combinées. La figure ci-dessous illustre la première des fonctions de transfert nodales pour l'exemple considéré précédemment, et ses 2 comportements. On voit que le maximum se déplace de 1 à  $\hat{\omega}^*$ , et que la situation minimisant le pic d'amplitude a lieu lorsque les valeurs en ces 2 pôles sont égales. Cette valeur minimale est alors en approximation raisonnable la valeur aux deux pôles pour ce ratio de masse.

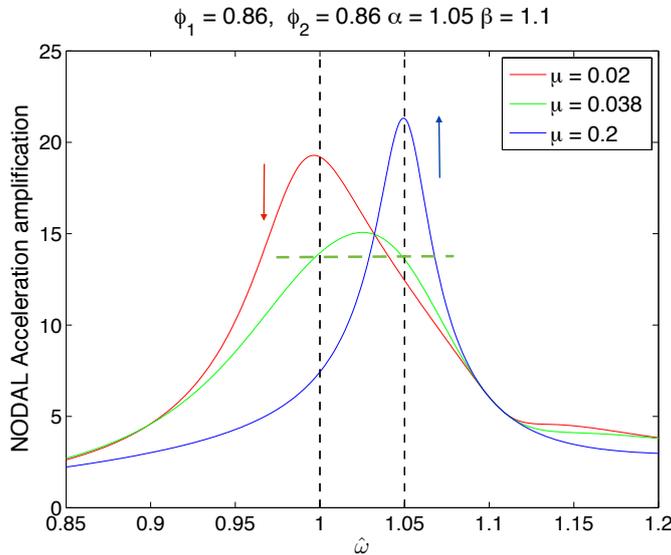


FIGURE III.24 – Illustration des 2 régimes de la fonction de transfert selon  $\mu_{TMD}$

La situation optimale visée est donc celle qui présente les caractéristiques ci-dessous.

- Offrir un écart d'un facteur  $\lambda = \theta_1/\theta_2$  entre le niveau atteint par les 2 fonctions de transfert nodales
- Présenter pour chacune de ces fonctions la configuration optimale où les 2 pôles sont d'importance égale (niveau minimal atteint).

Ces critères sont schématisés à la figure ci-dessous, qui esquisse la situation recherchée.

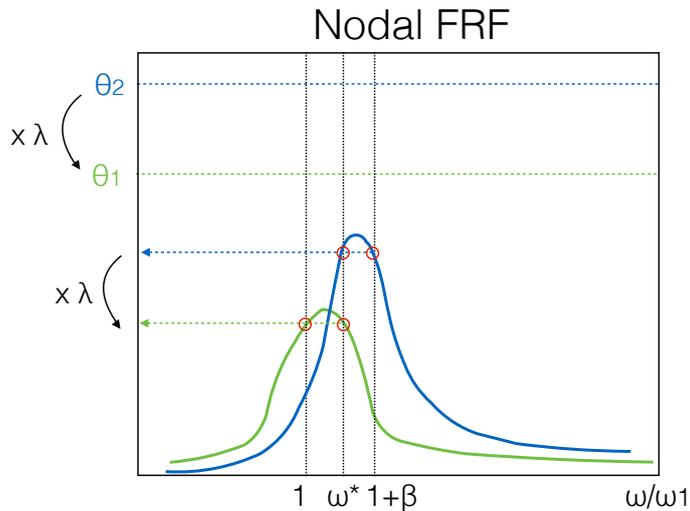


FIGURE III.25 – Schéma de la situation optimale visée pour les formes des fonctions de transfert combinées

Mathématiquement, ces cibles se traduisent en toute généralité par les 3 contraintes suivantes :

$$\widehat{\omega}^{*2} [ |H_1^*(1,1) + \varphi_2 \times H_1^*(1,2)| |_{\widehat{\omega}=\widehat{\omega}^*} ] = \lambda \times \widehat{\omega}^{*2} [ |H_1^*(2,2) + \varphi_1 \times H_1^*(1,2)| |_{\widehat{\omega}=\widehat{\omega}^*} ] \quad (\text{III.84})$$

$$1 |H_1^*(1,1) + \varphi_2 \times H_1^*(1,2)| |_{\widehat{\omega}=1} = \widehat{\omega}^{*2} [ |H_1^*(1,1) + \varphi_2 \times H_1^*(1,2)| |_{\widehat{\omega}=\widehat{\omega}^*} ] \quad (\text{III.85})$$

$$(1 + \beta)^2 [ |H_1^*(2,2) + \varphi_1 \times H_1^*(1,2)| |_{\widehat{\omega}=1+\beta} ] = \widehat{\omega}^{*2} [ |H_1^*(2,2) + \varphi_1 \times H_1^*(1,2)| |_{\widehat{\omega}=\widehat{\omega}^*} ] \quad (\text{III.86})$$

De façon purement pratique, il est peu commode d'utiliser ces équations qui mènent à des expressions très lourdes et peu parlantes. Dans la plupart des cas pratiques, en vue de proposer une expression analytique simple et explicite, on peut négliger l'impact de la combinaison modale sur les paramètres optimaux. On détermine alors ceux-ci à partir des équations suivantes :

$$|H_1^*(1,1)| |_{\widehat{\omega}=\widehat{\omega}^*} = \lambda \times [ |H_1^*(2,2)| |_{\widehat{\omega}=\widehat{\omega}^*} ] \quad (\text{III.87})$$

$$1 |H_1^*(1,1)| |_{\widehat{\omega}=1} = \widehat{\omega}^{*2} [ |H_1^*(1,1)| |_{\widehat{\omega}=\widehat{\omega}^*} ] \quad (\text{III.88})$$

$$(1 + \beta)^2 [ |H_1^*(2,2)| |_{\widehat{\omega}=1+\beta} ] = \widehat{\omega}^{*2} [ |H_1^*(2,2)| |_{\widehat{\omega}=\widehat{\omega}^*} ] \quad (\text{III.89})$$

où les différents éléments diagonaux de la matrice de transfert incluent cependant bel et bien la présence du phénomène de couplage.

La première de ces équations comprend 3 inconnues :  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\alpha$ . Les 2 suivantes mènent à déterminer 2 valeurs de  $\mu_{TMD}$  (en toute généralité, différentes) permettant de remplir les conditions pour une valeur donnée des 3 premières inconnues. Pour surmonter cette indétermination du problème, on choisira un  $\alpha$  judicieux et on se contentera d'une relation entre  $\phi_1$  et  $\phi_2$ .

Une stratégie globale pertinente est donc la suivante :

- 1) Choisir  $\alpha$  en amont du problème, de façon à amortir aussi efficacement un mode que l'autre.
- 2) Régler alors le positionnement ( $\phi_1$  et  $\phi_2$ ) pour satisfaire les niveaux d'amortissement effectivement recherchés. (Equation III.87)
- 3) Pour ces paramètres, déterminer ensuite les valeurs de  $\mu_{TMD}$  pour se trouver, pour les 2 fonctions cibles, à l'intersection des 2 comportements exposés ci-avant (pôles de même importance). (Equations III.88 et III.89)

Ce schéma de résolution n'est pas unique, mais a l'avantage d'être sensé et simple sur le plan formel. Il est expliqué plus en détails dans les paragraphes ci-dessous.

### Réglage de $\alpha$

Les 2 fonctions de transfert d'intérêt (III.80) doivent être amorties *simultanément* par un seul et unique amortisseur. Or, pour de faibles  $\mu_{TMD}$ , elles admettent des maximum en des fréquences différentes (proches de 1 et  $1 + \beta$ ). Le réglage de l'amortisseur ne pourra donc pas agir de la même façon sur l'une et l'autre. Par exemple, si on règle l'amortisseur à une fréquence proche de 1, ce sera au détriment du pic en  $1 + \beta$ , et *vice versa*. On a donc tout intérêt à se placer "au milieu" des 2 (typiquement, en  $\alpha = \widehat{\omega}^*$ ), pour ne pas négliger l'une par rapport à l'autre, ce qui est assez intuitif.

De même, les investigations antérieures ont permis de faire apparaître un pôle commun  $\widehat{\omega}^*$  aux fonctions de transfert d'intérêt, pour des ratios de masse  $\mu_{TMD}$  suffisamment élevés. Dans cette gamme, il est donc évident que la

minimisation simultanée des 2 fonctions étudiées a lieu pour  $\alpha = \widehat{\omega}^*$ .

Le choix du réglage optimal en fréquence, désigné par  $\alpha_{opt}$ , se porte donc naturellement, pour être efficace dans un maximum de cas possibles, sur :

$$\alpha_{opt} = \widehat{\omega}^* = 1 + \frac{\beta \mu_2 \phi_1^2}{\phi_2^2 + \mu_2 \phi_1^2} \triangleq 1 + \beta \kappa \phi_1^2, \quad (III.90)$$

où on a introduit la variable  $\kappa$  en vue de simplifier les développements :

$$\kappa = \frac{\mu_2}{\phi_2^2 + \mu_2 \phi_1^2} \quad (III.91)$$

Par la suite seront utilisées les normes des fonctions de transfert nodales (combinées), mais aussi modales (non-combinées). La valeur de  $\alpha$  étant fixée, on particularise donc la norme des expressions de la Table III.4 pour obtenir les résultats ci-dessous. Il ne faudra pas oublier dans les développements ultérieurs de multiplier par la fréquence correspondante au carré afin de manipuler des accélérations et non des déplacements.

Fonction de transfert	Expression en $\widehat{\omega} = 1$	Expression en $\widehat{\omega} = \widehat{\omega}^*$
$ H_1^*(1,1) $	$\left[ \left( \frac{1}{2\mu_2\beta} \left( \frac{\phi_2}{\phi_1} \right)^2 - \frac{2\beta\kappa}{\mu_{TMD}} \right)^2 + \frac{4\xi_{TMD}^2}{\mu_{TMD}^2 \phi_1^4} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[ \frac{1}{4\beta^2 \kappa^2 \phi_1^4} + \frac{\mu_{TMD}^2}{64\xi_{TMD}^2 \beta^4 \kappa^4 \phi_1^4} \right]^{\frac{1}{2}}$
$ H_1^*(1,1) + \phi_2 \times H_1^*(1,2) $	$\left[ \left( \frac{1}{2\mu_2\beta} \frac{\phi_2}{\phi_1} \left( \frac{\phi_2}{\phi_1} - \phi_2 \right) - \frac{2\beta\kappa}{\mu_{TMD}} \right)^2 + \frac{4\xi_{TMD}^2}{\mu_{TMD}^2 \phi_1^4} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[ \frac{1}{4\beta^2 \kappa^2 \phi_1^4} + \frac{\mu_{TMD}^2 (\phi_2 \phi_1 \phi_2 - \phi_2^2)^2}{64\xi_{TMD}^2 \beta^4 \kappa^4 \phi_1^4 \phi_2^4} \right]^{\frac{1}{2}}$
Fonction de transfert	Expression en $\widehat{\omega} = 1 + \beta$	Expression en $\widehat{\omega} = \widehat{\omega}^*$
$ H_1^*(2,2) $	$\left[ \left( \frac{2\beta\kappa}{\mu_{TMD}\mu_2} - \frac{1}{2\beta} \left( \frac{\phi_1}{\phi_2} \right)^2 \right)^2 + \frac{4\xi_{TMD}^2}{\mu_{TMD}^2 \phi_2^4} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[ \frac{1}{4\beta^2 \kappa^2 \phi_2^4} + \frac{\mu_{TMD}^2}{64\xi_{TMD}^2 \beta^4 \kappa^4 \phi_2^4} \right]^{\frac{1}{2}}$
$ H_1^*(2,2) + \phi_1 \times H_1^*(1,2) $	$\left[ \left( \frac{1}{2\beta} \frac{\phi_1}{\phi_2} \left( \phi_1 - \frac{\phi_1}{\phi_2} \right) + \frac{2\beta\kappa}{\mu_{TMD}\mu_2} \right)^2 + \frac{4\xi_{TMD}^2}{\mu_{TMD}^2 \phi_2^4} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[ \frac{1}{4\beta^2 \kappa^2 \phi_2^4} + \frac{\mu_{TMD}^2 (\phi_1 \phi_1 \phi_2 - \phi_1^2)^2}{64\xi_{TMD}^2 \beta^4 \kappa^4 \phi_1^4 \phi_2^4} \right]^{\frac{1}{2}}$

TABLE III.5 – Norme des fonctions de transfert d'intérêt, pour  $\alpha = \alpha_{opt} = \widehat{\omega}^*$

### Positionnement optimum

Le positionnement préférentiel de l'amortisseur peut maintenant être déterminé. Pour la valeur de  $\alpha$  préconisée, la résolution de l'Equation (III.87) donne, en vertu des expressions présentées dans la Table III.5 ci-dessus :

$$\left[ \frac{1}{4\beta^2 \kappa^2 \phi_1^4} + \frac{\mu_{TMD}^2}{64\xi_{TMD}^2 \beta^4 \kappa^4 \phi_1^4} \right]^{\frac{1}{2}} = \lambda \times \left[ \frac{1}{4\beta^2 \kappa^2 \phi_2^4} + \frac{\mu_{TMD}^2}{64\xi_{TMD}^2 \beta^4 \kappa^4 \phi_2^4} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (III.92)$$

d'où on tire simplement

$$\phi_2^2 = \lambda \phi_1^2 \quad (III.93)$$

Physiquement, ce résultat est attendu. Si l'amortisseur est réglé ( $\alpha_{opt}$ ) pour avoir un effet similaire sur les fonctions de transfert d'intérêt, mais que celles-ci doivent atteindre des objectifs différents, le déséquilibre entre ces objectifs est simplement contrebalancé par un placement compensateur. Cela fait donc apparaître une relation très simple entre l'amplitude des 2 modes là où l'amortisseur est placé, indépendante des autres paramètres du problème.

On peut aussi remarquer que, vu les expressions de  $|H_1^*(1, 1)|$  et  $|H_1^*(2, 2)|$  ci-dessus, on a en réalité affaire à un compromis entre l'amortissement du premier mode ( $\phi_1$  élevé) ou du second ( $\phi_2$  élevé). Si  $\phi_2^2 < \lambda\phi_1^2$ , alors le mode 1 sera amorti de façon privilégiée, et *vice versa*. La situation équitable en terme d'amortissement relativement aux objectifs d'accélération est alors celle où  $\phi_2^2 = \lambda\phi_1^2$ .

### Ratio de masse $\mu_{TMD}$ optimum

Connaissant le paramètre  $\alpha$  et une relation entre  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , on cherche maintenant à déterminer le ratio de masse menant à l'amplification minimale de chacune des combinaisons modales étudiées. Il n'y a *a priori* aucune raison que la valeur optimale soit exactement similaire pour les 2 fonctions à envisager.

Les paramètres  $\alpha_{opt}$  et  $\kappa$  utilisés (alors rebaptisés  $\alpha^*$  et  $\kappa^*$ , par clarté) prennent dans le cas optimal la forme :

$$\alpha^* = 1 + \frac{\beta\mu_2}{\lambda + \mu_2} \quad \text{et} \quad \kappa^* = \kappa\phi_1^2 = \frac{\mu_2}{\lambda + \mu_2} \quad (\text{III.94})$$

Les conditions (III.88) et (III.89) élevées au carré deviennent alors respectivement, sur base des formules données dans la *Table III.5* et de cet ajustement :

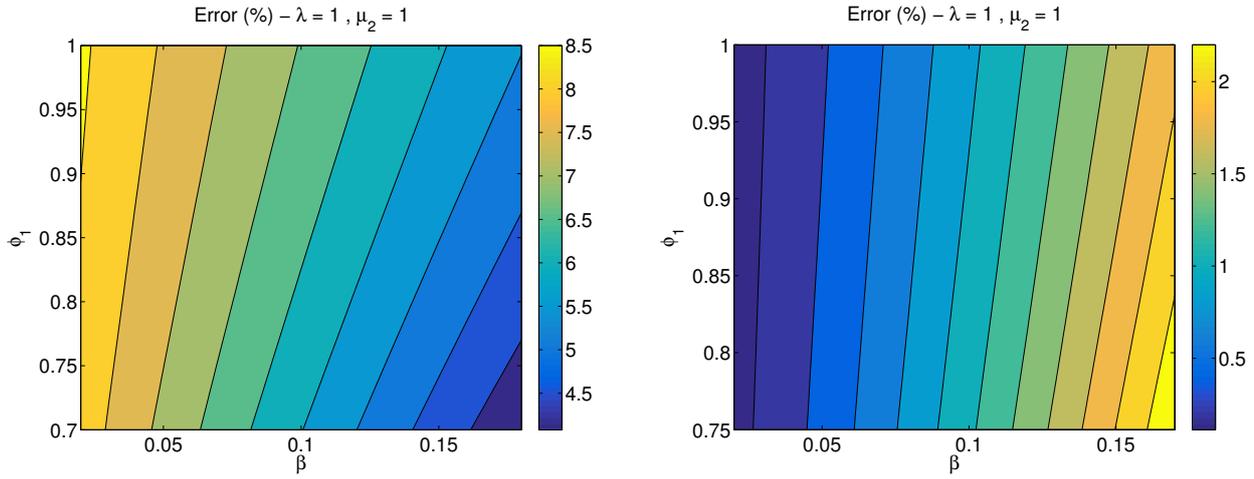
$$1^4 \left( \frac{\lambda}{2\mu_2\beta} - \frac{2\beta\kappa^*}{\mu_{TMD}\phi_1^2} \right)^2 + \frac{4\xi_{TMD}^2}{\mu_{TMD}^2\phi_1^4} = \alpha^{*4} \times \left[ \frac{1}{4\beta^2\kappa^{*2}} + \frac{\mu_{TMD}^2\phi_1^4}{64\xi_{TMD}^2\beta^4\kappa^{*4}} \right] \quad (\text{III.95})$$

$$(1 + \beta)^4 \left[ \left( \frac{2\beta\kappa^*}{\mu_{TMD}\mu_2\phi_1^2} - \frac{1}{2\beta\lambda} \right)^2 + \frac{4\xi_{TMD}^2}{\mu_{TMD}^2\phi_1^4\lambda^2} \right] = \alpha^{*4} \times \left[ \frac{1}{4\beta^2\kappa^{*2}\lambda^2} + \frac{\mu_{TMD}^2\phi_1^4}{64\xi_{TMD}^2\beta^4\kappa^{*4}\lambda^2} \right] \quad (\text{III.96})$$

On remarque au passage que comme désiré pour la situation optimale, les membres de droite des 2 équations ci-dessus sont égaux à un facteur  $\lambda$  (ici élevé au carré) près.

La résolution de ces équations pour  $\mu_{TMD}$  revient à annuler un polynôme du quatrième degré, ce qui ne permet pas de tirer des résultats simples. Il est donc très tentant, après une rapide analyse dimensionnelle, de négliger le terme en " $1/\mu_{TMD}$ " pour n'avoir à résoudre qu'une avantageuse expression quadratique en  $\mu_{TMD}^2$ . Cela semble en effet licite en bonne approximation dans les gammes de paramètres qui nous intéressent. Les graphiques ci-dessous présentent l'erreur relative (%) sur les valeurs obtenues de  $\mu_{TMD}$  lorsque ces termes sont négligés, en fonction de  $\phi_1$  et de  $\beta$ . La gamme présentée est également celle d'applicabilité des formules dans ce cas. Les autres paramètres sont pris à  $\lambda = 1$ ,  $\mu_2 = 1$ , qui sont les valeurs autour desquelles la majorité des applications se situera, en moyenne.

La valeur de  $\xi_{TMD}$  a été choisie à  $\xi_{TMD} = \sqrt{\frac{\mu_{TMD}(1+1/\mu_2)}{2}}$ , ce qui simplifie les formules et sera justifié à la section suivante.


 FIGURE III.26 – Erreur (%) due à la résolution simplifiée des *Equations* (III.95) (gauche) et (III.96) (droite)

Dans le pire des cas, l'erreur reste inférieure à 10% et dans les cas les plus susceptibles de se présenter, elle avoisine les 5%. On conclut donc que l'hypothèse simplificatrice peut raisonnablement être faite. Il vient donc à résoudre :

$$\left(\frac{\lambda}{2\mu_2\beta}\right)^2 + \frac{4\xi_{TMD}^2}{\mu_{TMD}^2\phi_1^4} = \alpha^{*4} \times \left[ \frac{1}{4\beta^2\kappa^{*2}} + \frac{\mu_{TMD}^2\phi_1^4}{64\xi_{TMD}^2\beta^4\kappa^{*4}} \right] \quad (\text{III.97})$$

$$(1+\beta)^4 \left[ \left(\frac{1}{2\beta\lambda}\right)^2 + \frac{4\xi_{TMD}^2}{\mu_{TMD}^2\phi_1^4\lambda^2} \right] = \alpha^{*4} \times \left[ \frac{1}{4\beta^2\kappa^{*2}\lambda^2} + \frac{\mu_{TMD}^2\phi_1^4}{64\xi_{TMD}^2\beta^4\kappa^{*4}\lambda^2} \right] \quad (\text{III.98})$$

Si on pose  $\zeta^* = \alpha^*/(1+\beta)$ , la résolution des équations ci-dessus amène alors finalement, pour les 2 conditions, les valeurs optimales (appelées  $\mu_I^*$  et  $\mu_{II}^*$ ) suivantes :

$$\mu_I^* = \frac{\beta\xi_{TMD}}{\phi_1^2} \frac{\sqrt{8}\kappa^*}{\alpha^{*2}\mu_2} \left[ \sqrt{(\kappa^{*2}\lambda^2 - \alpha^{*4}\mu_2^2)^2 + 4\alpha^{*4}\mu_2^4 + \kappa^{*2}\lambda^2 - \alpha^{*4}\mu_2^2} \right]^{1/2} \triangleq \frac{\beta\xi_{TMD}}{\phi_1^2} \times \rho_1 \quad (\text{III.99})$$

$$\mu_{II}^* = \frac{\beta\xi_{TMD}}{\phi_1^2} \frac{\sqrt{8}\kappa^*}{\zeta^{*2}} \left[ \sqrt{(\kappa^{*2} - \zeta^{*4})^2 + 4\zeta^{*4} + \kappa^{*2} - \zeta^{*4}} \right]^{1/2} \triangleq \frac{\beta\xi_{TMD}}{\phi_1^2} \times \rho_2 \quad (\text{III.100})$$

où on a défini au passage les paramètres  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , qui sont fonction des fréquences amorties, du rapport  $\mu_2$  entre les masses modales, et du ratio  $\lambda$  des niveaux à atteindre. Cette formule suppose donc pour rappel que  $\phi_2^2 = \lambda\phi_1^2$  et que  $\alpha = \alpha^*$ .

Les expressions des ratios de masse optimaux sont très parlantes. On tire en effet la conclusion que des fréquences éloignées ou une amplitude modale plus faible sont des facteurs qui requièrent un couplage plus élevé (au travers du ratio de masse) pour parvenir à minimiser les fonctions de transfert. C'est bien ce qui est attendu physiquement, car ces facteurs rendent plus difficile de "relier" entre eux les modes.

On observe que, ce qui est relativement attendu, l'effet de la position de l'amortisseur est quadratique. Ceci souligne l'importance du placement de ce dernier et l'économie qui peut être faite en masse s'il est possible de trouver un couple  $(\phi_1, \sqrt{\lambda}\phi_1)$  suffisamment grand en amplitude. On remarque de même que l'utilisation d'un seul amortisseur pour amortir 2 modes est rendue très compliquée si un tel couple est introuvable le long de la structure, ou si les fréquences sont trop éloignées.

**Choix de l'amortissement  $\xi_{TMD}$**

Nous allons voir que les valeurs d'amplitudes minimales obtenues sont indépendantes de l'amortissement. On pourrait, vu les expressions de  $\mu_I^*$  et  $\mu_{II}^*$ , être tenté de fournir un amortissement  $\xi_{TMD}$  minimum, voire nul. Cependant, la forme des fonctions de transfert peut grandement être influencée par ce paramètre. Si  $\xi_{TMD}$  est trop faible, le maximum de la FRF ne se situe plus en  $\hat{\omega}^*$  et les développements effectués ne sont plus applicables, ni d'ailleurs les hypothèses qu'ils ont nécessitées. Il n'y a donc pas de sens à considérer selon la méthode proposée un  $\xi_{TMD}$  très faible.

On se rappellera à cet effet l'amortisseur de *Frahm*, présenté en début de ce travail. Il ne disposait pas d'élément visqueux et permettait d'annuler l'amplification dynamique à la résonance, mais créait 2 pics de grande amplitude dans le voisinage direct de celle-ci. C'est ici un phénomène analogue qui est observé, et illustré ci-dessous pour les fonctions de transfert des amplitudes modales.

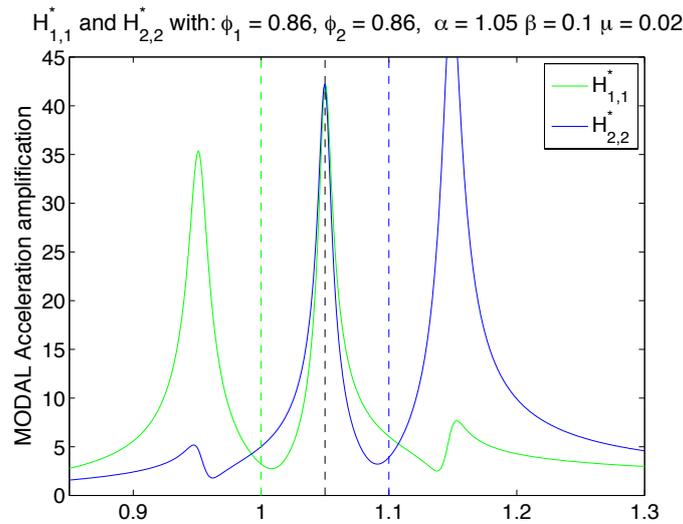


FIGURE III.27 – Fonction de transfert pour  $\xi_{TMD} = 0.01$

Quelque soit le ratio de masse fourni, il est en réalité impossible de se débarrasser de ces pics d'amplitude inacceptables, tout simplement car aucune dissipation n'est offerte au système.

D'autre part, si on augmente fortement  $\xi_{TMD}$ , la position des maxima des fonctions de transfert nodales se situe presque parfaitement aux pôles, et la solution proposée reste applicable (il est toujours possible d'atteindre le même état optimum). Mais c'est toutefois possible au prix d'un ratio de masse augmentant linéairement avec  $\xi_{TMD}$ .

On cherchera donc en particulier à se prémunir du cas où l'amortissement est trop faible, correspondant alors à un comportement de la fonction de transfert peu recommandable et à une inadéquation du modèle proposé. Le prix à payer dans le cas d'un amortissement trop élevé étant un ratio de masse qui l'est aussi, une estimation raisonnable doit être formulée pour éviter de surdimensionner les amortisseurs.

Ainsi, on repartira de la formule établie pour le cas de validation à 1ddl, où on avait pour rappel établi :  $\xi_{TMD,opt} = \sqrt{\mu_{TMD}}/2$ . L'amortissement était une fonction directe du ratio de masse de l'amortisseur. Or, si l'on raisonne physiquement, le même amortisseur doit maintenant amortir 2 modes, et donc en réalité une masse bien plus importante. Si l'on applique la règle de *den Hartog* à la somme de ces ratios de masse, on obtient alors :

$$\xi_{TMD}^* = \sqrt{\frac{\mu_{TMD}(1 + \frac{1}{\mu_2})}{2}} \tag{III.101}$$

Il est par ailleurs utile sur le plan analytique de supposer une relation entre  $\mu_{TMD}$  et  $\xi_{TMD}$ , ce qui permet de s'affranchir du choix explicite de l'amortissement et permet ainsi d'obtenir directement les valeurs  $\mu_I^*$  et  $\mu_{II}^*$  pour un positionnement donné de l'amortisseur.

Si l'on prend le problème dans l'autre sens, et que l'on regarde l'évolution selon  $\xi_{TMD}$  du maximum des fonctions de transfert des amplitudes modales pour un  $\mu_{TMD}$  donné, on peut obtenir les courbes ci-dessous. Celles-ci sont données pour des ratios de masse de 2 et 10%. Les traits pointillés donnent la position de l'estimation faite ci-dessus (III.101). Le minimum des courbes représente la situation où le  $\mu_{TMD}$  choisi est effectivement le ratio optimal du problème. Ainsi, pour une valeur de  $\mu_{TMD}$  choisie et supposée être le ratio optimal, on regarde l'amortissement requis pour qu'elle le soit réellement.

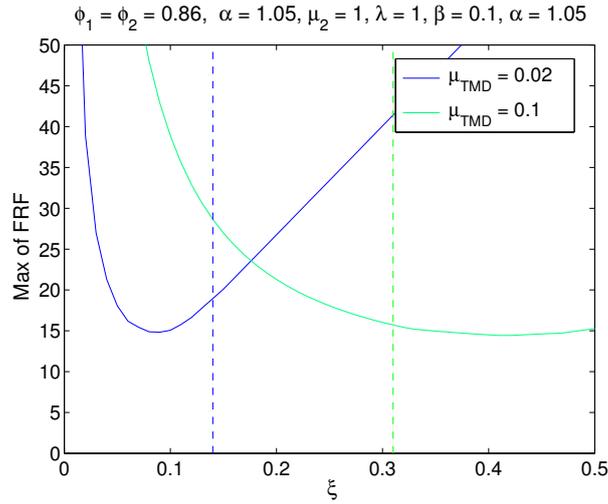


FIGURE III.28 – Evolution du maximum des fonctions de transfert selon  $\xi_{TMD}$

On observe donc que la suggestion donnée ici est assez satisfaisante.

### Borne inférieure et applicabilité

Les paramètres "optimaux" du problème selon la stratégie proposée ont été déterminés. Ce qui est maintenant intéressant est de calculer les niveaux qu'il est possible d'atteindre avec cette combinaison de valeurs.

On injecte pour commencer les valeurs de  $\mu_I^*$  (III.99) et  $\mu_{II}^*$  (III.100) dans les expressions des normes des fonctions de transfert modales  $|H_1^*(1,1)|$  et  $|H_1^*(2,2)|$ , données aux Equations (III.95) et (III.96). Par facilité, on utilise les expressions des membres de droites (expressions en  $\hat{\omega}^*$ ). On peut obtenir les niveaux d'amplification modale suivants, notés  $\theta_1^*$  et  $\theta_2^*$  :

$$\theta_1^* = \alpha^{*2} \frac{\sqrt{16\kappa^{*2} + \rho_1^2}}{8\beta\kappa^*} \quad (III.102)$$

$$\theta_2^* = \frac{1}{\lambda} \left[ \alpha^{*2} \frac{\sqrt{16\kappa^{*2} + \rho_2^2}}{8\beta\kappa^*} \right] \quad (III.103)$$

Il est intéressant de constater que ces valeurs optimales sont indépendantes des paramètres de l'amortisseur que sont son ratio de masse (ce qui est logique, vu la démarche), son taux d'amortissement, et même sa position ! Ainsi, pour une structure donnée et des objectifs d'amortissement donnés, il existe une valeur optimale (minimale) d'amplification dynamique sous laquelle il n'est pas possible de descendre, et ce quel que soit l'amortisseur proposé. Cette

valeur est logiquement inversement proportionnelle à la proximité des modes. Par conséquent, pour une configuration établie à étudier, le concepteur fait face à une borne minimale due au couplage sur l'amortissement qu'il peut espérer obtenir, s'il utilise un seul amortisseur pour amortir 2 modes.

Nous n'avons dans cette approche optimale jusqu'à présent pas considéré la combinaison nodale des fonctions de transfert modales. Cela altère simplement la qualité des paramètres optimaux suggérés. Il est maintenant nécessaire de réintroduire ce concept pour fournir les bornes réelles d'applicabilité au concepteur. On va donc recalculer les niveaux atteints par les fonctions de transfert nodales aux valeurs  $\mu_I^*$  et  $\mu_{II}^*$ , et conservant les hypothèses sur les paramètres optimaux faites précédemment. On injecte donc ces valeurs dans les formes *ad-hoc* des fonctions de transfert, similaires à (III.97) et (III.98), mais annexées des contributions de  $H_1^*(1,2)$ .

Cela offre donc 2 expressions pour chaque cas, selon le pôle où l'on regarde. On prend la plus élevée des 2, de façon sécuritaire. Des développements analytiques simples permettent d'obtenir, tous calculs faits, les niveaux corrigés appelés  $\theta_1^{**}$  et  $\theta_2^{**}$ .

$$\theta_1^{**} = \max \begin{cases} \sqrt{\theta_1^{*2} + \alpha^{*2} \left[ \frac{\rho_1^2}{64\beta^2\kappa^{*4}} \frac{\Phi_2}{\lambda} (\varphi_2 \pm 2\sqrt{\lambda}) \right]} & (\hat{\omega} = \hat{\omega}^*) \\ \sqrt{\theta_1^{*2} + \frac{\lambda}{4\beta^2\mu_2^2} \Phi_2 (\varphi_2 \pm 2\sqrt{\lambda})} & (\hat{\omega} = 1) \end{cases}$$

$$\theta_2^{**} = \max \begin{cases} \sqrt{\theta_2^{*2} + \alpha^{*2} \left[ \frac{\rho_2^2}{64\beta^2\kappa^{*4}} \frac{\Phi_1}{\lambda} (\varphi_1 \pm 2\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \right]} & (\hat{\omega} = \hat{\omega}^*) \\ \sqrt{\theta_2^{*2} + (1 + \beta)^2 \left[ \frac{1}{4\beta^2} \frac{\Phi_1}{\lambda} (\varphi_1 \pm 2\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \right]} & (\hat{\omega} = 1 + \beta) \end{cases} \quad (III.104)$$

où le signe à choisir pour le terme en  $\sqrt{\lambda}$  est un "-" si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont de même signe, et un "+" autrement. On retombe logiquement sur  $\theta_1^*$  et  $\theta_2^*$  si  $\varphi_2$  et  $\varphi_1$  sont nuls, respectivement. On remarque aussi que le signe des expressions  $\varphi_2(\varphi_2 \pm 2\sqrt{\lambda})$  et  $\varphi_1(\varphi_1 \pm 2\frac{1}{\sqrt{\lambda}})$  détermine si la combinaison nodale a un impact bénéfique ou non sur la réponse.

Si les calculs effectués avaient été faits sans la moindre hypothèse simplificatrice, il suffirait, pour déterminer l'applicabilité de la méthode d'amortissement, de comparer un niveau cible d'accélération à la borne correspondante. L'autre vérification donnerait en effet automatiquement une conclusion similaire, vu le réglage des bornes sur base des valeurs cibles (*cf.* facteur  $\lambda$ ). A cause des simplifications, ce n'est plus le cas et on recommandera, pour être tout à fait sécuritaire, de vérifier les 2 critères d'applicabilité :

$$\begin{cases} \theta_1 > \theta_1^{**} \\ \theta_2 > \theta_2^{**} \end{cases} \Rightarrow \text{Méthode applicable} \quad (III.105)$$

Afin d'illustrer cette démarche, on l'applique sur l'exemple qui a été traité précédemment.

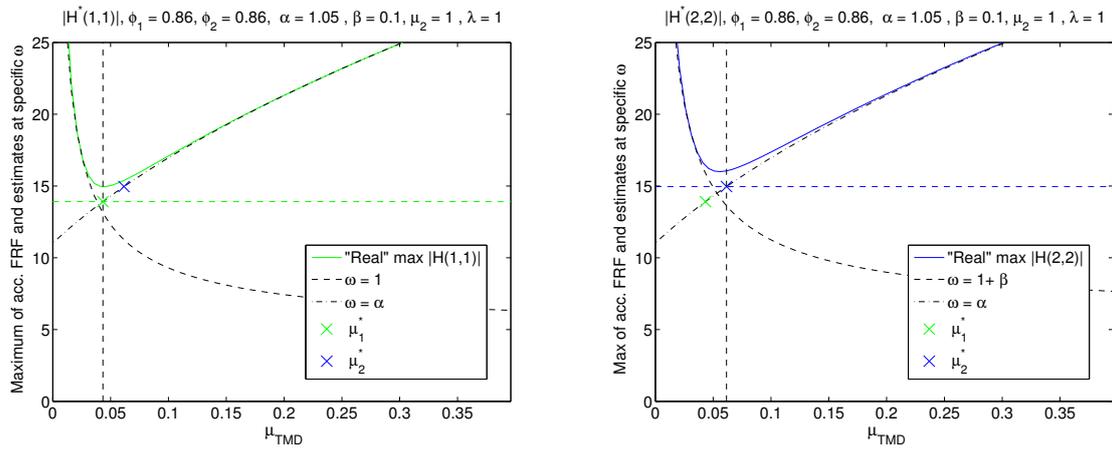


FIGURE III.29 – Evolution du maximum des fonctions de transfert selon  $\mu_{TMD}$ , et estimations des paramètres optimaux

On voit qu’aussi bien les  $\mu_{TMD}$  optimaux que les amplitudes minimales des FRF nodales correspondantes sont bien approximés.

On remarque de même que la valeur de  $\mu_{TMD}$  optimale pour chacune des 2 vérifications n’est pas identique. Pour définir la situation optimale, on choisira de façon sécuritaire le maximum des 2 :  $\mu^* = \max(\mu_I^*, \mu_{II}^*)$ . Ainsi, le ratio des 2 qui ne sera pas pris à la valeur optimale se situera dans la zone où le système admet un maximum en  $\hat{\omega}^*$ , dont on a pu observer qu’elle était moins sensible aux variations de  $\mu_{TMD}$  (pente plus faible). Le décalage par rapport au minimum de la fonction de transfert sera donc aussi petit que possible.

On pourrait être tenté de croire qu’il est possible d’atteindre un niveau supérieur d’amortissement dans un mode donné (un  $\theta^*$  plus faible), si l’on dispose d’un peu de marge dans l’autre et que l’on se permet pour lui d’être un peu moins efficace. Cependant, le réglage a été effectué précisément sur base de l’écart entre les accélérations cibles, et il est donc logiquement impossible d’avoir de la marge dans un mode et non dans l’autre par rapport à ces valeurs optimales. Ainsi, la solution proposée constitue un réel minimum, pour une valeur  $\lambda$  donnée. Ces considérations, ainsi que l’applicabilité de la méthode à un amortisseur, sont schématisées ci-dessous.

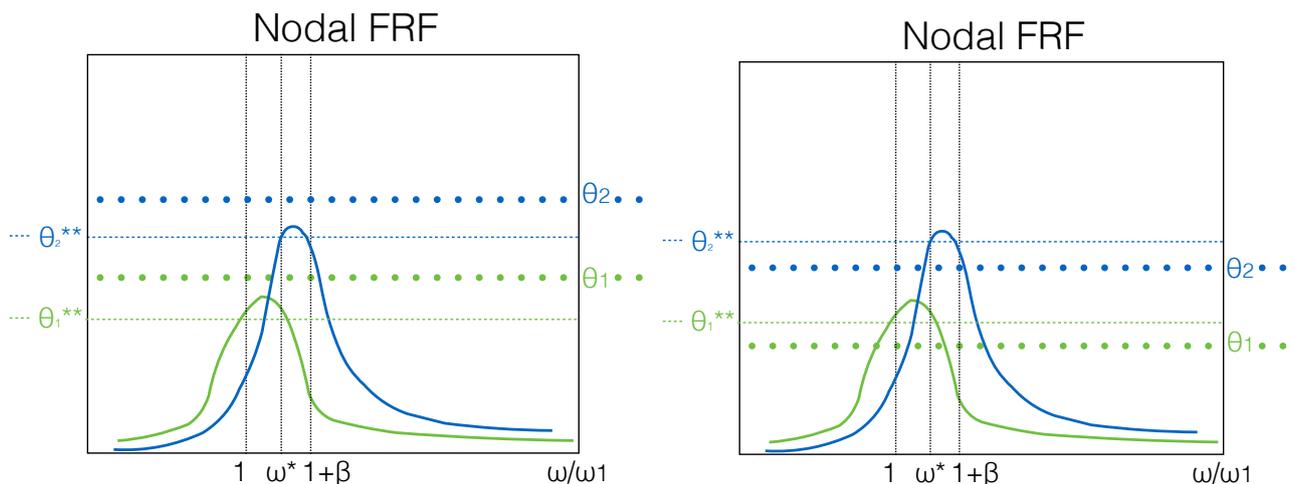


FIGURE III.30 – Schéma des FRF nodales optimales et de leur comparaison avec les niveaux cibles. Méthode applicable (gauche) ou non (droite)

La seule alternative possible à observer est celle où on dispose de marge dans les 2 modes par rapport aux limites, comme schématisé sur la figure de gauche ci-dessus. L’objet de la Section 4.4.4.2 suivante est d’explorer la manière dont cette marge peut être exploitée.

Avant cela, un dernier point qui mérite d'être souligné est, comme précédemment remarqué, le fait qu'il existe dans les FRF étudiées une borne en la fréquence  $1 + \beta/2$ , valant  $1/\beta$ . Dans les expressions des bornes présentées ci-dessus se cache également un facteur  $1/\beta$ , qui pourrait être mis en évidence. Ce dernier serait alors multiplié par un nombre proche de mais supérieur à 1. En réalité, en observant bien le comportement des fonctions de transfert, on se rend compte que la situation optimale visée correspond à une amplitude aux pôles légèrement supérieure à ce  $1/\beta$ . Cela se comprend bien en sachant que la fréquence  $1 + \beta/2$  est souvent assez proche de  $\hat{\omega}^*$ , abscisse où la fonction de transfert ne fait qu'augmenter avec  $\mu_{TMD}$ .

Une vérification excessivement rapide, à faire en première approche, peut donc être de vérifier que les niveaux cibles d'accélération sont supérieurs à  $1/\beta$ , sans quoi il ne sera jamais possible d'utiliser la solution à un seul amortisseur.

**Récapitulatif des paramètres optimaux**

Après ces longues discussions, il est bon de présenter dans un tableau récapitulatif les formules qui permettent d'obtenir, selon la stratégie imaginée, les paramètres optimaux pour l'amortissement de 2 modes avec un seul amortisseur. Les notations définies précédemment sont utilisées.

Paramètre	Symbole	Réglage optimal
Réglage fréquentiel	$\alpha^*$	$1 + \frac{\beta\mu_2}{\lambda + \mu_2}$
Positionnement	$\phi_1 \& \phi_2$	$\phi_2^2 = \lambda\phi_1^2$
Ratio de masse FRF 1	$\mu_I^*$	$\frac{\beta \xi_{TMD}}{\phi_1^2} \rho_1$
Ratio de masse FRF 2	$\mu_{II}^*$	$\frac{\beta \xi_{TMD}}{\phi_1^2} \rho_2$
Ratio de masse global	$\mu_{TMD}^*$	$\max(\mu_I^*, \mu_{II}^*)$
Taux d'amortissement	$\xi_{TMD}^*$	$\sqrt{\frac{\mu_{TMD}(1 + \frac{1}{\mu_2})}{2}}$
Niveau optimal FRF 1	$\theta_1^{**}$	$\max \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\theta_1^{*2} + \alpha^{*2} \left[ \frac{\rho_1^2}{64\beta^2\kappa^{*4}} \frac{\phi_2}{\lambda} (\phi_2 \pm 2\sqrt{\lambda}) \right]} \\ \sqrt{\theta_1^{*2} + \frac{\lambda}{4\beta^2\mu_2^2} \phi_2 (\phi_2 \pm 2\sqrt{\lambda})} \end{array} \right.$
Niveau optimal FRF 2	$\theta_2^{**}$	$\max \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\theta_2^{*2} + \alpha^{*2} \left[ \frac{\rho_2^2}{64\beta^2\kappa^{*4}} \frac{\phi_1}{\lambda} (\phi_1 \pm 2\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \right]} \\ \sqrt{\theta_2^{*2} + (1 + \beta)^2 \left[ \frac{1}{4\beta^2} \frac{\phi_1}{\lambda} (\phi_1 \pm 2\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \right]} \end{array} \right.$

TABLE III.6 – Résumé des paramètres optimaux

De plus, il peut être utile d'illustrer les fonctions de transfert réellement obtenues pour les paramètres calculés de cette façon, dans le cas de l'exemple étudié tout au long de la démarche.

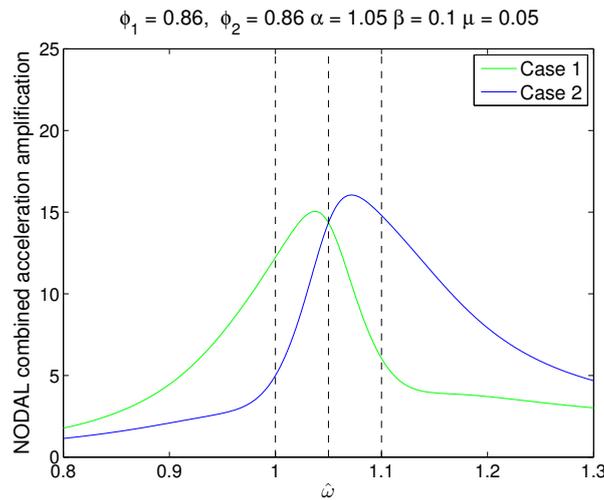


FIGURE III.31 – Norme des fonctions de transfert d'intérêt, paramètres optimaux

On voit que, à l'instar de la *Figure III.25*, les amplitudes aux différents pôles des 2 fonctions sont proches. En particulier, c'est le cas pour la seconde fonction dont on a pris le ratio de masse optimal exact. Le facteur  $\lambda$  étant dans ce cas pris égal à l'unité, on observe aussi, pour les maxima des 2 cas, des valeurs proches également.

Même si plusieurs hypothèses ont été formulées sur un modèle qui est déjà lui même une approximation des équations réelles, l'approche proposée a permis d'amener des résultats analytiques parlants et permettant de proposer un critère analytique de décision pour le concepteur. Nous avons donc répondu au premier besoin de ce dernier. Son besoin suivant est maintenant de savoir ce qui se passe si les hypothèses formulées pour atteindre cet état ne peuvent être remplies.

#### 4.4.4.2 Cas pratiques de dimensionnement

##### Méthode

*In fine*, le but de la méthode est d'offrir la flexibilité la plus large au concepteur. Ainsi, on aimerait proposer une solution qui ne soit pas unique en terme de positionnement de l'amortisseur, comme elle l'était jusqu'à présent. En effet, il n'est pas garanti qu'un couple optimal  $(\phi_1, \phi_2 = \sqrt{\lambda}\phi_1)$  sera disponible pour les modes considérés. Quand bien même il le serait, il peut avoir lieu pour des amplitudes modales très faibles et donc de peu d'intérêt. Finalement, il se peut que pour des raisons architecturales, structurelles ou pratiques, il ne soit pas possible de placer le dispositif à cet endroit. De plus, il est fort probable qu'il y ait une certaine latitude entre les niveaux cibles et les valeurs optimales annoncées. Dans ce cas, on a donc du "luxe" de ne pas se situer parfaitement en l'état idéal, généralement au prix d'un ratio de masse plus élevé pour l'amortisseur.

Un autre aspect est que l'état optimal a été déterminé sur base de plusieurs hypothèses simplificatrices. L'idée est ici d'offrir un outil robuste parfaitement exact, dans la limite des hypothèses générales effectuées. Ces dernières sont les piliers de la démarche et sont impossible à lever. Elles sont au nombre de 2 :

- Utilisation de la matrice de transfert approximée au premier ordre
- Hypothèse sur la position des maxima des FRF en  $1, 1 + \beta$  et  $\hat{\omega}^*$ .

Si l'on part du principe que ces 2 hypothèses sont valides, le modèle sera alors parfaitement précis en termes d'"approche couplée", dont nous rappelons ici les caractéristiques :

- Prise en compte du couplage dans les FRF modales
- Combinaison nodale des FRF modales

- Considération de l'amplification dynamique des accélérations (pas des déplacements), et donc de ce fait aussi des fréquences "amorties".

Typiquement, l'intérêt pour le concepteur est de disposer d'une certaine liberté pour placer son amortisseur. L'approche développée maintenant est donc de garder les mêmes paramètres ( $\alpha_{opt}, \xi_{TMD}^*$ , tentative d'obtenir  $\mu_{TMD}$  optimal), mais de relaxer la contrainte sur les niveaux relatifs obtenus. On ne veut donc plus nécessairement un écart d'un facteur  $\lambda$  entre les niveaux des 2 fonctions cibles. La condition  $\phi_2^2 = \lambda \phi_1^2$  tombe, et on ne postule alors plus de relation entre ces 2 paramètres, qu'on laisse tous 2 entièrement libres de varier.

On notera alors au passage que les paramètres  $\alpha^*$  et  $\kappa^*$  utilisés plus tôt sous cette hypothèse reprennent leur forme tout à fait générale  $\alpha_{opt}$  (III.90) et  $\kappa$  (III.91).

Il est maintenant temps de considérer les niveaux réels cibles ( $\theta_1$  et  $\theta_2$ ) pour les accélérations dans les 2 cas de charge. Selon nos hypothèses, les accélérations maximales se situent soit en 1 ou  $\hat{\omega}^*$  (vérification 1), soit en  $1 + \beta$  ou  $\hat{\omega}^*$  (vérification 2). Ainsi, les 4 critères qui délimitent le domaine d'application de l'approche à un seul amortisseur sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^2 |H_1^*(1,1) + \phi_2 \times H_1^*(1,2)|_{\hat{\omega}=1} \leq \theta_1 \\ \hat{\omega}^{*2} [|H_1^*(1,1) + \phi_2 \times H_1^*(1,2)|_{\hat{\omega}=\hat{\omega}^*}] \leq \theta_1 \\ (1 + \beta)^2 [|H_1^*(2,2) + \phi_1 \times H_1^*(1,2)|_{\hat{\omega}=1+\beta}] \leq \theta_2 \\ \hat{\omega}^{*2} [|H_1^*(2,2) + \phi_1 \times H_1^*(1,2)|_{\hat{\omega}=\hat{\omega}^*}] \leq \theta_2 \end{array} \right. \quad (III.106)$$

et correspondent à l'atteinte des niveaux cibles aux différents pôles.

Il faudra donc que ces 4 inégalités soient vérifiées pour que la solution soit envisageable. L'atteinte de ces 4 limites est schématisée par les figures ci-dessous.

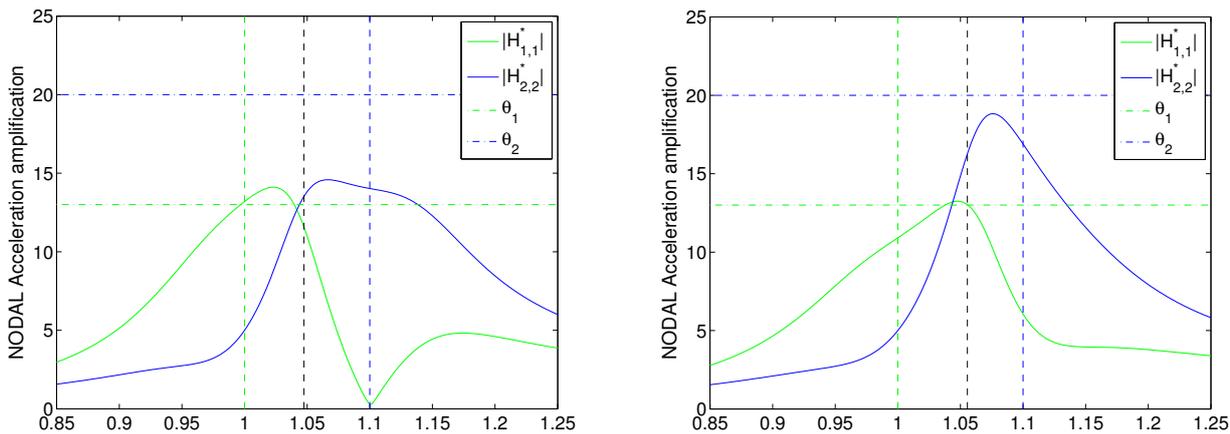


FIGURE III.32 – Cas limites des FRF pour la vérification 1. Critères en  $\hat{\omega} = 1$  (gauche) et  $\hat{\omega} = \hat{\omega}^*$  (droite)

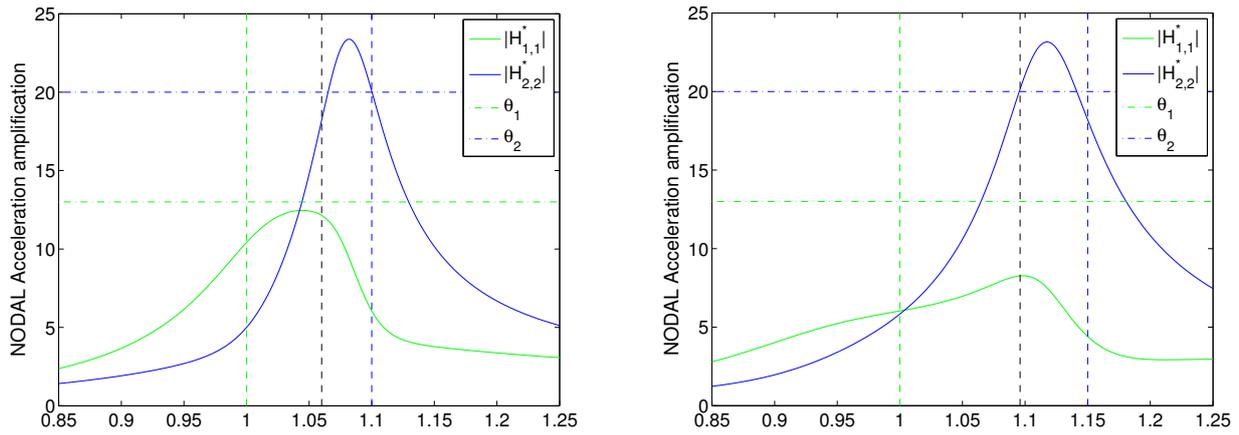


FIGURE III.33 – Cas limites des FRF pour la vérification 2. Critères en  $\hat{\omega} = 1 + \beta$  (gauche) et  $\hat{\omega} = \hat{\omega}^*$  (droite)

Les 4 conditions (III.106) ci-dessus amènent en réalité 4 relations entre  $\mu_{TMD}$ ,  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Il n'est donc pas pratique de devoir supposer  $\mu_{TMD}$ , déduire la gamme de possibilités pour le positionnement, puis recommencer pour essayer de minimiser  $\mu_{TMD}$ . Comme effectué précédemment, on va tenter de se placer au ratio de masse  $\mu_{TMD}$  optimal. Cette stratégie permettra ainsi de satisfaire les critères pour un maximum de configurations possibles. Elle permettra aussi de "fermer" le système et de proposer de la sorte une gamme de sélection unique pour  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , le rapport entre ces derniers et  $\mu_{TMD}$  étant connu et fixé.

Cela est illustré à la figure ci-dessous. Pour chaque placement de l'amortisseur, c'est-à-dire chaque combinaison de  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , on aura une courbe différente pour le maximum des FRF nodales en fonction de  $\mu_{TMD}$ . Si l'on parvient à se placer au mieux (au minimum) sur cette courbe (croix rouges), le plus grand nombre possible de ces courbes validera le critère d'accélération visé, ce qui amènera une liberté maximale pour le positionnement de l'amortisseur.

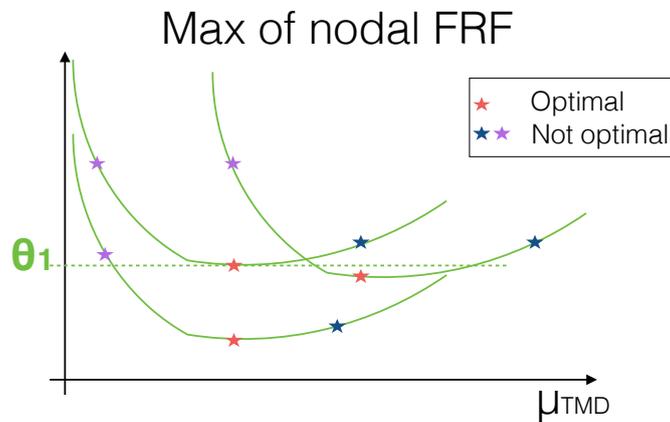


FIGURE III.34 – Schéma de la stratégie visée (croix rouges)

De la même façon que précédemment, on va donc déterminer  $\mu_{I,bis}^*$  et  $\mu_{II,bis}^*$  permettant de satisfaire :

$$1^2 |H_1^*(1, 1)|_{\hat{\omega}=1} = \hat{\omega}^{*2} [|H_1^*(1, 1)|_{\hat{\omega}=\hat{\omega}^*}] \tag{III.107}$$

$$(1 + \beta)^2 [|H_1^*(2, 2)|_{\hat{\omega}=1+\beta}] = \hat{\omega}^{*2} [|H_1^*(2, 2)|_{\hat{\omega}=\hat{\omega}^*}] \tag{III.108}$$

sans toutefois faire d'hypothèse sur la relation entre  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Après calculs, on obtient :

$$\mu_{I,bis}^* = \beta \xi_{TMD} \frac{\sqrt{8\kappa}}{\alpha_{opt}^2 \mu_2} \left[ \sqrt{(\kappa^2 \phi_2^4 - \alpha_{opt}^4 \mu_2^2)^2 + 4\alpha_{opt}^4 \mu_2^4} + \kappa^2 \phi_2^4 - \alpha_{opt}^4 \mu_2^2 \right]^{1/2} \triangleq \beta \xi_{TMD} \times \rho_{1,bis} \quad (\text{III.109})$$

$$\mu_{II,bis}^* = \beta \xi_{TMD} \frac{\sqrt{8\kappa}}{\zeta^2} \left[ \sqrt{(\kappa^2 \phi_1^4 - \zeta^4)^2 + 4\zeta^4} + \kappa^2 \phi_1^4 - \zeta^4 \right]^{1/2} \triangleq \beta \xi_{TMD} \times \rho_{2,bis} \quad (\text{III.110})$$

où  $\zeta = \frac{\alpha_{opt}}{(1+\beta)}$  et où on a défini les valeurs  $\rho_{bis,1}$  et  $\rho_{bis,2}$ . On choisit de prendre un  $\mu_{TMD}$  "moyen" entre les 2 conditions, qui vaut donc  $\mu_{bis}^* = \beta \xi_{TMD} \frac{\rho_{bis,1} + \rho_{bis,2}}{2} \triangleq \beta \xi_{TMD} \rho_{mean}$ . Injectant ces valeurs dans les 4 conditions (III.106), il vient :

$$1^2 \sqrt{\left[ \frac{1}{2\mu_2\beta} \left( \frac{\phi_2}{\phi_1} \right) \left[ \frac{\phi_2}{\phi_1} - \phi_2 \right] - \frac{2\kappa}{\xi_{TMD} \rho_{mean}} \right]^2 + \frac{4}{\beta^2 \rho_{mean}^2 \phi_1^4}} \leq \theta_1 \quad (\text{III.111})$$

$$\alpha_{opt}^2 \left[ \frac{\sqrt{16\kappa^2 \phi_2^2 + \rho_{mean}^2 [\phi_2 \phi_1 - \phi_2]^2}}{8\beta \kappa^2 \phi_1^2 |\phi_2|} \right] \leq \theta_1 \quad (\text{III.112})$$

$$(1+\beta)^2 \sqrt{\left[ \frac{1}{2\beta} \left( \frac{\phi_1}{\phi_2} \right) \left[ \phi_1 - \frac{\phi_1}{\phi_2} \right] + \frac{2\kappa}{\xi_{TMD} \rho_{mean} \mu_2} \right]^2 + \frac{4}{\beta^2 \rho_{mean}^2 \phi_2^4}} \leq \theta_2 \quad (\text{III.113})$$

$$\alpha_{opt}^2 \left[ \frac{\sqrt{16\kappa^2 \phi_1^2 + \rho_{mean}^2 [\phi_1 \phi_2 - \phi_1]^2}}{8\beta \kappa^2 \phi_2^2 |\phi_1|} \right] \leq \theta_2 \quad (\text{III.114})$$

$$(\text{III.115})$$

Dans le cas où  $\xi_{TMD}$  est choisi à la valeur préconisée  $\xi_{TMD}^*$  (III.101), on obtient finalement les 4 conditions :

$$\begin{aligned} & 1^2 \sqrt{\left[ \frac{1}{2\mu_2\beta} \left( \frac{\phi_2}{\phi_1} \right) \left[ \frac{\phi_2}{\phi_1} - \phi_2 \right] - \frac{4\kappa\mu_2}{\beta\rho_{mean}^2(1+\mu_2)} \right]^2 + \frac{4}{\beta^2 \rho_{mean}^2 \phi_1^4}} \leq \theta_1 \\ & \alpha^2 \left[ \frac{\sqrt{16\kappa^2 \phi_2^2 + \rho_{mean}^2 [\phi_2 \phi_1 - \phi_2]^2}}{8\beta \kappa^2 \phi_1^2 |\phi_2|} \right] \leq \theta_1 \\ & (1+\beta)^2 \sqrt{\left[ \frac{1}{2\beta} \left( \frac{\phi_1}{\phi_2} \right) \left[ \phi_1 - \frac{\phi_1}{\phi_2} \right] + \frac{4\kappa}{\beta\rho_{mean}^2(1+\mu_2)} \right]^2 + \frac{4}{\beta^2 \rho_{mean}^2 \phi_2^4}} \leq \theta_2 \\ & \alpha^2 \left[ \frac{\sqrt{16\kappa^2 \phi_1^2 + \rho_{mean}^2 [\phi_1 \phi_2 - \phi_1]^2}}{8\beta \kappa^2 \phi_2^2 |\phi_1|} \right] \leq \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{III.116})$$

Insistons à nouveau sur le fait que ces équations sont associées au choix  $\mu_{TMD} = \mu_{bis}^*$ . Celles-ci peuvent être tracée via un *contour plot*, délimitant les bornes les plus restrictives. On obtient donc finalement une zone de positions (couples  $(\phi_1, \phi_2)$ ) licites pour l'amortisseur, qu'il n'y a plus qu'à comparer avec les positions offertes par les 2 modes que l'on tente d'amortir. Une application pratique et détaillée de ces conditions sera présentée à la *Section IV*. Cependant, on peut déjà illustrer ces 4 conditions à l'aide des graphiques qu'il est possible d'obtenir pour l'exemple étudié

précédemment.

Les graphiques ci-dessous présentent la différence (%) entre les niveaux cibles et les niveaux effectivement atteints, pour différents positionnements (couples  $(\phi_1, \phi_2)$ ). Cette comparaison est effectuée pour chacun des 4 critères. Les niveaux cibles sont pris arbitrairement à  $\theta_1 = 20, \theta_2 = 20$ . Les autres paramètres sont sélectionnés comme indiqué précédemment. La droite noire est la solution  $\phi_2^2 = \lambda\phi_1^2$ .

Notons que les figures sont ici affichées pour des valeurs de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  positives, mais que les conditions sont également valables pour des valeurs négatives de ces paramètres. On recommandera donc de tracer ceux relatifs aux amplitudes modales correspondants aux zones d'intérêt de placement.

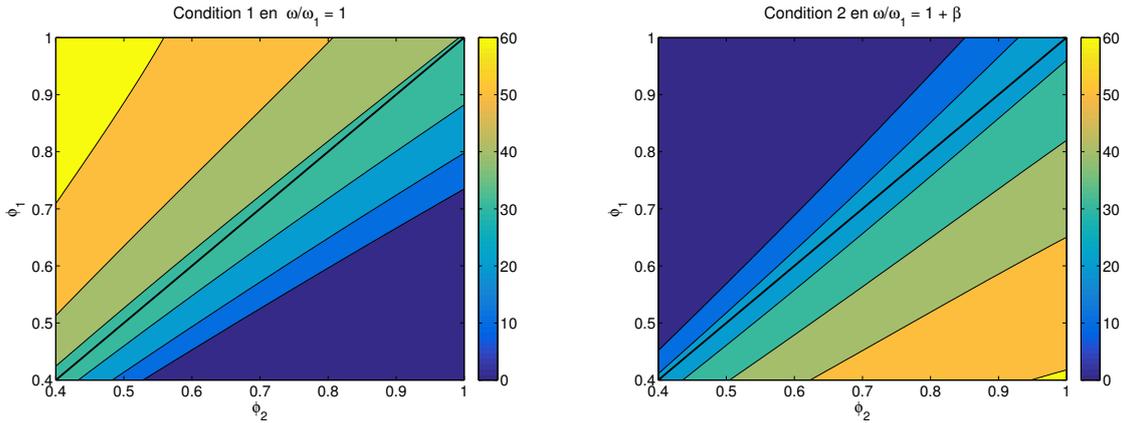


FIGURE III.35 – Conditions en  $\hat{\omega} = 1$  et  $1 + \beta$

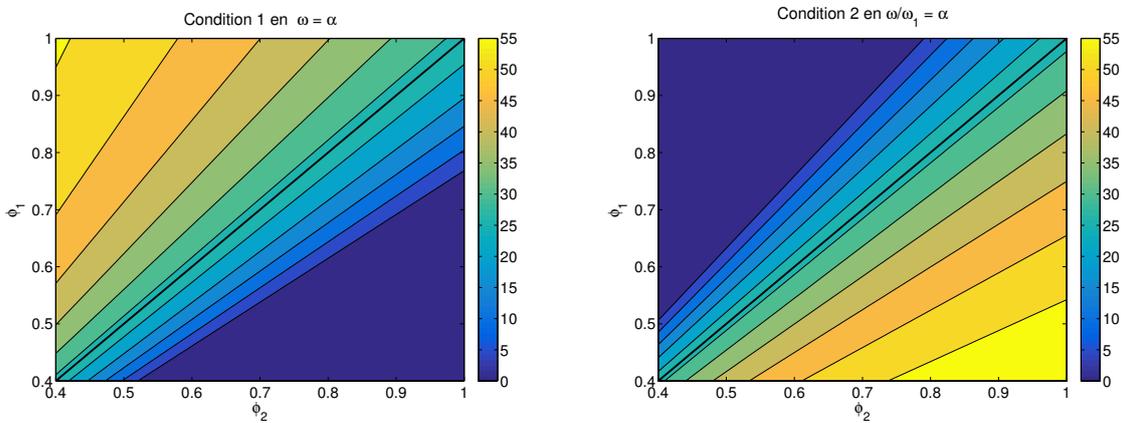


FIGURE III.36 – Conditions en  $\hat{\omega} = \hat{\omega}^* = \alpha_{opt}$

On voit que pour une fonction de transfert nodale donnée, les 2 conditions aux pôles vont "dans le même sens". Globalement, la première FRF est mieux amortie lorsque  $\phi_1$  est grand, alors que la seconde l'est lorsque  $\phi_2$  est grand. C'est tout à fait logique car rappelons-nous que ces fonctions correspondent aux amplifications maximales des modes 1 et 2, respectivement.

On peut regrouper les schémas relatifs à chacune des 2 FRF étudiées, pour obtenir les limites autorisées pour ces 2 conditions. On juxtapose alors les 2 zones ainsi formées pour trouver la zone globale et la plus restrictive d'applicabilité de la méthode. Ceci est illustré ci-dessous.

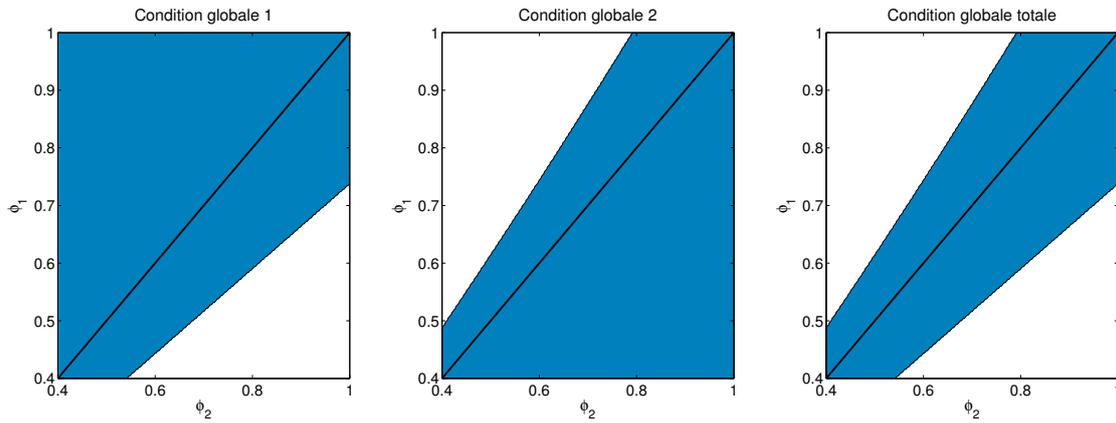


FIGURE III.37 – Conditions globales pour la solution à un amortisseur -  $\theta_1 = \theta_2 = 20$

Il suffit maintenant d'afficher les 2 modes d'intérêt dans le plan  $(\phi_1, \phi_2)$  pour voir les solutions de positionnement qui s'offrent au problème (couples d'amplitudes modales inclus dans la zone acceptable).

Une illustration parlante de la méthode peut être proposée si l'on choisit des niveaux proches de  $\theta_1^{**}$  et  $\theta_2^{**}$ . En effet, dans une configuration idéale, cette situation correspond au cas où aucune marge n'est disponible pour les accélérations, car on se situe précisément sur les limites. Aussi, si on favorise une fonction de transfert, l'autre excède la limite, et *vice versa*. Si les calculs de  $\theta_1^{**}$  et  $\theta_2^{**}$  avaient été effectués sans la moindre hypothèse simplificatrice, (et qu'on étudiait les fonctions de transfert modales) le domaine d'applicabilité serait la droite  $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \phi_2$ . Dans l'exemple étudié, on peut calculer  $\theta_1^{**} = 13,9$  et  $\theta_2^{**} = 14,9$ . On a choisi  $\theta_1 = \theta_2 = 15$  pour illustrer cette situation.

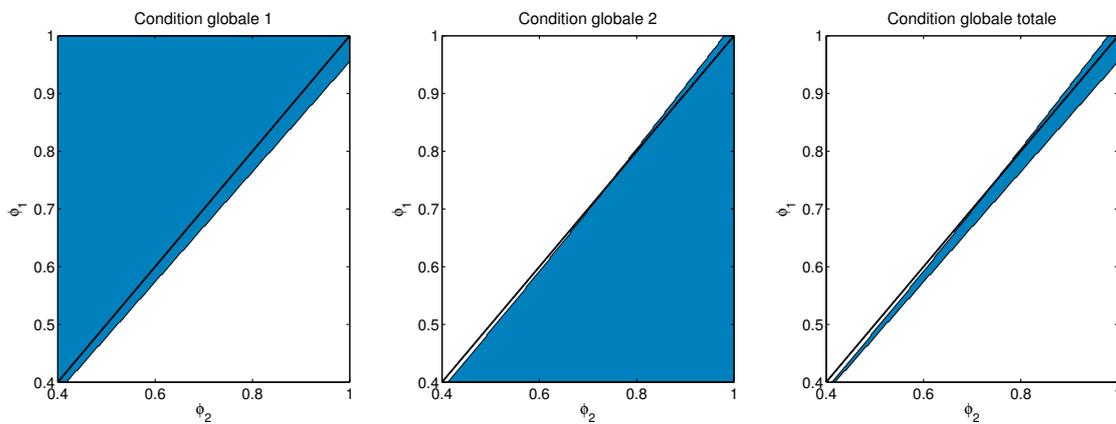


FIGURE III.38 – Conditions globales pour la solution à un amortisseur -  $\theta_1 = \theta_2 = 15$

Ceci fait donc remarquer que la marge dont on dispose par rapport aux limites dues au couplage se traduit par en une "ouverture" de l'éventail des positions acceptables.

Une point important est que les graphes d'applicabilité ci-dessus ne sont l'image que de la latitude qu'il existe entre les valeurs d'accélération cibles et limites. Ils n'ont cependant de sens qu'en regard des  $\mu_{TMD}$  correspondants (qui peuvent également être tracé selon un *contour plot* via les *Equations* (III.109) et (III.110)). Il peut entièrement être possible d'avoir énormément de flexibilité offerte pour la solution à 1 amortisseur, mais de requérir des  $\mu_{TMD}$  démesurés. C'est notamment le cas si les amplitudes modales sont faibles ou la distance entre les fréquences trop élevée.

Le graphe ci-dessous représente le ratio de masse  $\mu_{bis}^*$  à fournir selon les positions.

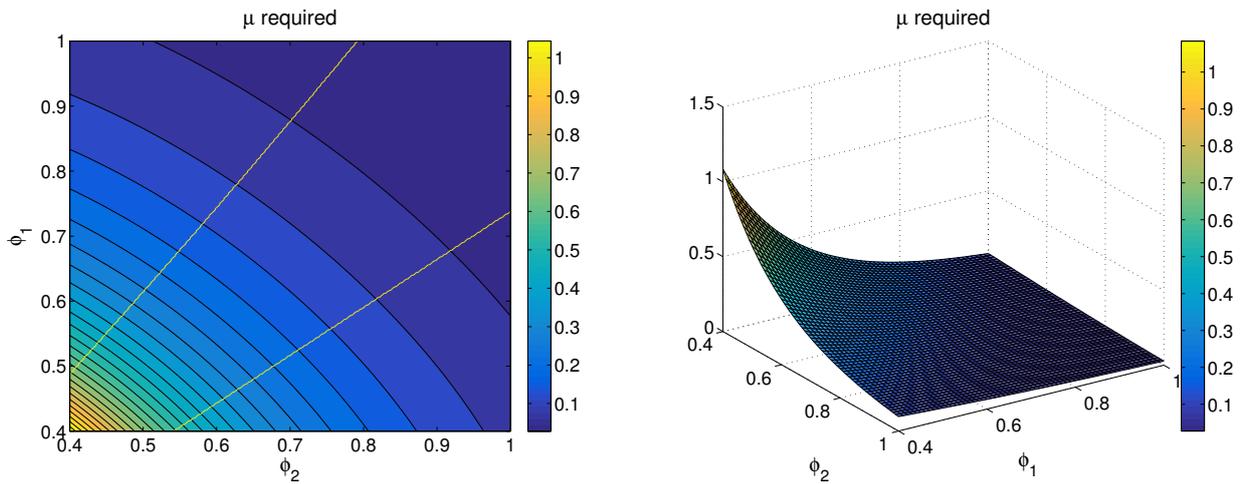


FIGURE III.39 – Ratio de masse à fournir en fonction du positionnement

On voit que le ratio de masse est minimisé pour des grandes valeurs de  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , ce qui se comprend car celles-ci favorisent le couplage, et il faut alors moins de masse pour agir sur les 2 modes. Par exemple, le ratio de masse nécessaire dans ce cas est de l'ordre de 10% pour  $\phi_1 = \phi_2 = 0.7$ , et de l'ordre de 2.5% pour  $\phi_1 = \phi_2 = 1$ .

En réalité, à l'instar de  $\mu_1^*$  et  $\mu_{II}^*$ , les expressions (III.109) et (III.110) de  $\mu_{I,bis}^*$  et  $\mu_{II,bis}^*$  cachent une variabilité inverse aux paramètres de position. Si plusieurs positions sont envisageables, on a donc intérêt à choisir celle qui correspond aux amplitudes modales les plus importantes.

### Récapitulatif des paramètres

Pour conclure, et afin de résumer la démarche, un tableau récapitulatif reprend les valeurs préconisées des différents paramètres pour cette méthode générale de dimensionnement. On utilise les notations définies plus tôt.

Paramètre	Symbole	Réglage optimal
Positionnement	$\phi_1$ & $\phi_2$	Au choix, garantissant 4 conditions
Réglage fréquentiel	$\alpha_{opt}$	$1 + \frac{\beta \mu_2 \phi_1^2}{\phi_2^2 + \mu_2 \phi_1^2}$
Ratio de masse FRF 1	$\mu_{I,bis}^*$	$\beta \xi_{TMD} \rho_{1,bis}$
Ratio de masse FRF 2	$\mu_{II,bis}^*$	$\beta \xi_{TMD} \rho_{1,bis}$
Ratio de masse global	$\mu_{bis}^*$	$\text{mean}(\mu_{I,bis}^*, \mu_{II,bis}^*)$
Taux d'amortissement	$\xi_{TMD}^*$	$\sqrt{\frac{\mu_{TMD}(1 + \frac{1}{\mu_2})}{2}}$

TABLE III.7 – Résumé des paramètres pour le dimensionnement à 1 amortisseur

#### 4.4.4.3 Apports d'un inerteur

La démarche proposée a la caractéristique de requérir des ratios de masse relativement élevés pour les amortisseurs. Aussi, elle peut trouver une application particulièrement avantageuse si elle est utilisée en association avec des amortisseurs à inertie, dont on a vu que la masse apparente pouvait être supérieure à celle des TMD habituels.

Cette méthode est donc préconisée pour les modes transversaux de vibrations, car c'est la direction préférentielle de positionnement des dispositifs contenant un *inerteur*. De plus, il a été expliqué que les vibrations transversales

peuvent être sujettes au phénomène de *lock-in* (synchronisation de la foule en phase avec le mouvement) si les accélérations ressenties dépassent une certaine limite. A cause de cela, les exigences de confort sont assez strictes dans cette direction.

Par ailleurs, il a été observé que, pour des valeurs de  $\beta$  supérieures à 30%, la masse à mobiliser avec un amortisseur pour uniquement parvenir à agir sur les 2 modes devenait assez élevée (de l'ordre de  $\mu_{TMD} = 25 - 30\%$ ), et ce même dans les configurations optimales de placement de l'amortisseur. En effet, le réglage en fréquence s'effectuant "au centre" des 2 fréquences, il faut une masse assez haute pour simplement réussir à atteindre les fréquences à amortir, qui sont alors trop éloignées. Le concept d'utilisation du couplage modal perd donc son essence et sa pertinence, car l'utilisation d'une approche découplée permet dans ce cas d'atteindre les mêmes objectifs pour une masse utilisée bien plus faible.

En ce qui concerne les vibrations verticales, il est tout à fait possible d'utiliser la méthode avec des TMD, comme il sera par exemple illustré plus loin avec une application pratique. La tendance est cependant de préconiser un amortissement non-conventionnel avec l'utilisation de TMD de masses plus élevées, ce qui n'est pas toujours possible. Une alternative intéressante peut aussi être offerte par l'utilisation d'une configuration de type "TMD modifié" telle que celle qui a été présentée au début de ce travail (*Section 2.2*).

Quoi qu'il en soit, pour fixer les idées, retenons que la méthode admet des solutions acceptables dans une gamme de l'ordre de  $\beta = 5 - 15\%$  lorsqu'elle est appliquée avec des TMD. En réalité, cette gamme s'étire ou se resserre en fonction de la masse modale des modes visés et de la masse maximale acceptable pour les TMD.

Il est important de remarquer qu'en-dessous de 5%, le couplage modal devient très important. Il se fait donc indispensable de limiter celui-ci en agissant sur sa source, qui est l'amplitude des modes là où l'amortisseur est placé. La possibilité d'utiliser le couplage modal devient donc peu adéquate, car son "activation" entraîne directement des niveaux d'amplification dynamique trop élevés. On préconisera dans ce cas une solution à 2 amortisseurs, en veillant à les positionner où l'amplitude du mode visé est grande, et celle de l'autre faible.

A titre purement indicatif et pour donner un premier ordre de grandeur au concepteur, les recommandations ci-dessous sont ainsi fournies.

Type d'amortisseur	TID	TMD
Gamme de $\beta$ d'intérêt (%)	5-30	5-15

TABLE III.8 – Gamme de  $\beta$  d'intérêt pour l'application de la méthode

#### 4.5 Résumé par la proposition d'une démarche générale de dimensionnement

Afin de résumer les approches présentées dans ce travail, un schéma récapitulatif est proposé ci-dessous. Celui-ci montre de façon très conceptuelle le cadre global de décision dans lequel se trouve l'ingénieur désireux de prévoir un dispositif d'amortissement pour amortir 2 modes à risque subissant des accélérations supérieures à la limite de confort.

Ce schéma vient compléter celui qui avait été présenté en *Introduction*, à la lumière de la méthode maintenant établie et connue.

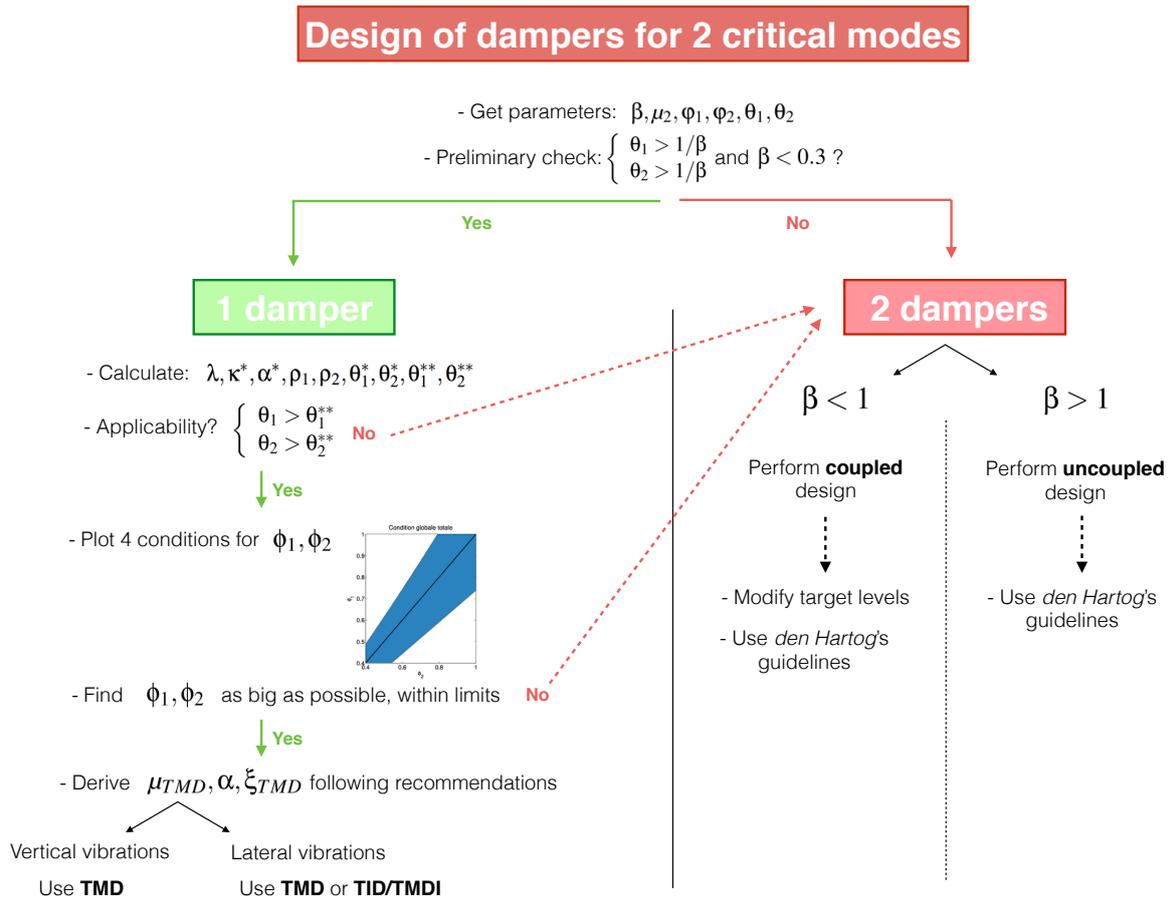


FIGURE III.40 – Schéma récapitulatif de la procédure de dimensionnement au confort

Pour clôturer, on peut ajouter que le fait que seuls 2 modes soient considérés n'est pas si restrictif. Tout d'abord, parce qu'il est rare que plus de 2 modes soient suffisamment proches en fréquence pour que l'influence de chacun sur un mode visé soit non négligeable. Ensuite, il peut être envisagé de grouper les différents modes d'une structure 2 par 2 : il suffit alors d'appliquer plusieurs fois la méthode proposée.

# Chapitre IV

## Etude d'une application

**Avertissement** : Les données de base employées dans cette section ont été fournies par le bureau d'étude GREISCH et ne sont donc pas la propriété ni la production de l'auteur. Celles-ci sont utilisées avec l'aimable autorisation dudit bureau.

Dans cette section, une application de la méthode de dimensionnement au confort via l'utilisation d'un seul amortisseur pour 2 modes est présentée.

### 1 Présentation du cas d'étude

#### 1.1 Projet

Le projet qui est étudié est la nouvelle passerelle cyclo-piétonne "*L'Enjambée*" de Namur (Belgique). Celle-ci doit surplomber la Meuse et permettre de relier Namur à Jambes. Les travaux battent leur plein à l'heure d'écrire ces lignes, et l'inauguration est prévue fin de l'été 2018. Le bureau GREISCH assure la mission complète, et a réalisé diverses études préliminaires et analyses multi-critères avant que la configuration finale ne soit déterminée.

La passerelle consiste en une structure "à béquilles", constituée d'un caisson métallique de 2m de largeur et de hauteur variant entre 0.4 et 1 mètre. Un platelage en bois est prévu. Sa longueur totale est de 184 mètres, et la zone surplombant la Meuse est de près de 100m. Ce tronçon principal pèse de l'ordre de 250 tonnes. La largeur en travée centrale est de près de 6m, et de 4m au droit des rampes d'accès [8]. Une représentation d'architecte est donnée ci-dessous.



FIGURE IV.1 – Vues d'architecte de la passerelle de Namur. Issu de [8].

La construction s'effectue en plusieurs phases, auxquelles correspondent 2 schémas statiques différents. Il y a donc 2 configurations à envisager pour le dimensionnement des amortisseurs. La première - *provisoire* - est celle où une pile temporaire est placée de façon à encastrier l'une des 2 rampes, dont seule une partie a été exécutée. L'autre rampe, plus longue, comporte déjà ses 3 supports finaux. La seconde configuration - *définitive* - constitue l'état final

de la passerelle, dans lequel la rampe inachevée a été complétée et la pile provisoire retirée. Ces situations sont schématisées ci-dessous.



Figure 1 – Situation définitive



Figure 2 – Situation provisoire

FIGURE IV.2 – Situations provisoire et définitive. Issu de [9]

La passerelle est considérée de Classe II ("*Urban footbridge linking up populated areas, subjected to heavy traffic and that may occasionally be loaded throughout its bearing area*" [15]) pour les modes verticaux. Afin d'éviter le phénomène de *lock-in*, elle est de Classe I pour les modes horizontaux.

Le niveau de confort retenu est le "niveau moyen", correspondant à une limite des accélérations verticales de  $1m/s^2$  et des accélérations transversales de  $0.1m/s^2$ .

### 1.2 Modes étudiés et paramètres

Cette passerelle comporte de nombreux modes de vibration, dont plusieurs ont une fréquence située dans la gamme à risque en termes d'évaluation du confort sous les sollicitations piétonnes. Par ailleurs, certains de ces modes ont des fréquences assez proches et des formes relativement similaires. Ils admettent en outre des accélérations excessives par rapport aux limites, sous les charges prévues par le *Sétra*. Pour cette raison, elle constitue un sujet d'application direct pour la méthode proposée dans ce travail.

Ainsi, un exemple de 2 modes satisfaisant les conditions précitées a été sélectionné. Il s'agit des 6 et 7<sup>èmes</sup> modes de vibration de la passerelle à vide, en situation provisoire. Ces modes sont des modes globaux de la passerelle, de type dominant vertical. Ils sont illustrés ci-dessous. La pile provisoire est à droite sur les représentations 3D, à gauche sur celles en élévation.

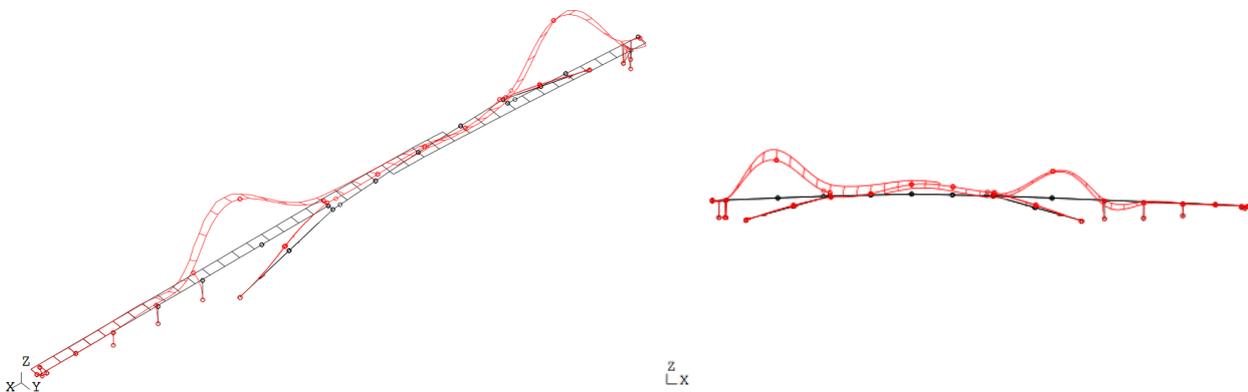


FIGURE IV.3 – Mode 6. Issu de [9]

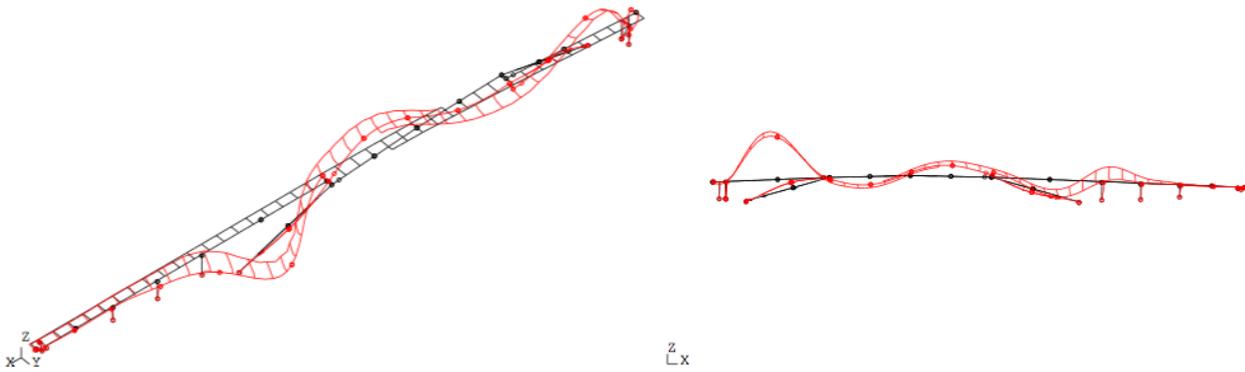


FIGURE IV.4 – Mode 7. Issu de [9]

Le mode 6 voit ses 2 rampes vibrer en phase, avec peu d'amplitude en travée centrale (1 demi-onde). Le mode 7 admet une vibration plus marquée pour la rampe "provisoire" que pour l'autre, et présente deux demi-ondes dans la travée centrale. On remarque directement que les formes de vibration de ces 2 modes sont pratiquement similaires pour la plus courte des rampes. En particulier, ce cas atypique présente les amplitudes maximales des 2 modes étudiés en une même position.

L'amortissement structural supposé est de 0.4%.

Dans le tableau ci-dessous, nous reprenons les paramètres pour ces 2 modes de vibrations, issus du modèle de GREISCH .

Paramètres	Unités	Mode 6	Mode 7
Fréquence	[Hz]	1.926	2.097
Masse modale	[kg]	37034	51879
Raideur modale	[N/m]	5424708	9005160
Amortissement structural	[%]	0.4	0.4
Ampl. modale où l'autre mode est max. ( $\phi_i$ )	[-]	1	1
Acc. limite ( $a_{crit.}$ )	[m/s <sup>2</sup> ]	1	1

TABLE IV.1 – Paramètres généraux des 2 modes étudiés

On déduit directement les valeurs  $\beta = 0.09$  et  $\mu_2 = 1.4$ .

### 1.3 Calcul des charges modales

Afin de déterminer les niveaux cibles d'accélération, il est nécessaire de connaître les charges modales  $P^*$  (cf. Section 4.2). Ces dernières correspondent à la projection des charges dynamiques préconisées par le *Sétra* dans les 2 modes étudiés. La charge étant de type oscillatoire, on prend la charge modale maximale, qui a lieu lorsque l'amplitude de la sollicitation est maximale.

On sait que, pour un mode bidimensionnel et une structure rectiligne :

$$P_i^* = \int_0^L \phi_i p_i dx \tag{IV.1}$$

où la force  $p_i$  ([N/m]) est orientée selon le sens du mode, comme schématisé ci-dessous.

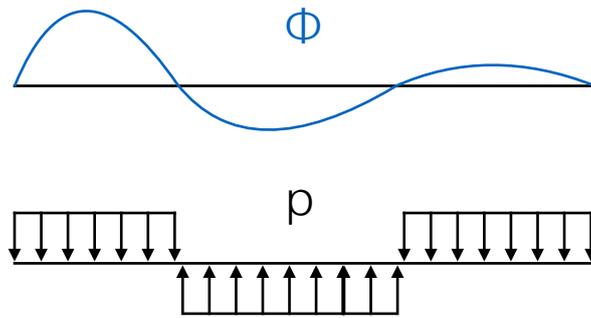


FIGURE IV.5 – Façon d’appliquer les charges pour les vérifications au confort

La force  $p_i$  dépend du type de vibration, de la classe de la passerelle et de la zone dans laquelle la fréquence considérée se situe. Elle est donnée par unité de surface. Par sécurité et dans l’optique de montrer les bonnes performances pouvant être atteintes par la solution proposée, on considérera ici un chargement relatif à une *Classe I* (foule très dense) plutôt que la *Classe II* attribuée à la passerelle. Le chargement est de type vertical. Les fréquences considérées tombent dans la première harmonique du pas.

Frequency	0	1	1.7	2.1	2.6	5
Range 1						
Range 2						
Range 3						
Range 4						

Table 2.3: Frequency ranges (Hz) of the vertical and longitudinal vibrations

FIGURE IV.6 – Gamme de fréquence retenue pour les 2 modes. Issu de [15]

		Load cases to select for acceleration checks		
Traffic	Class	Natural frequency range		
		1	2	3
Sparse	III	Case1	Nil	Nil
Dense	II		Case 1	Case 3
Very dense	I	Case 2	Case 2	Case 3

Case No. 1: Sparse and dense crowd  
Case No. 2: Very dense crowd

Case No. 3: Crowd complement (2nd harmonic)

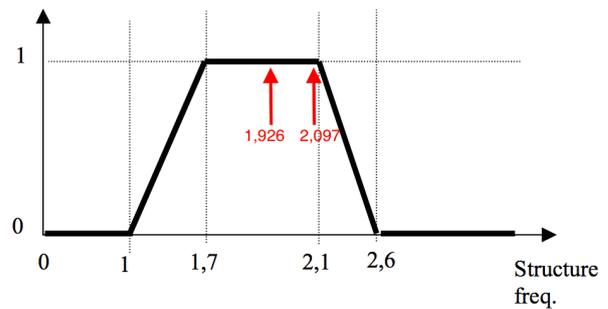


FIGURE IV.7 – Cas de charge à appliquer et facteur minorateur  $\psi$  pour les charges verticales. Issu de [15]

Ainsi, l’amplitude des charges dynamiques à appliquer, définie sur base du concept de nombre de piétons équivalent, est :

$$p = d \times (280N) \times 1.85 \times \left(\frac{1}{n}\right)^{0.5} \times \psi \quad [N/m^2] \quad (IV.2)$$

où  $n = d \times S$  est le nombre de piétons sur la passerelle,  $S$  étant la surface de celle-ci et  $d$  la densité de piétons ;  $d = 1/m^2$  en *Classe I*. Le facteur minorateur vaut  $\psi = 1$ , comme illustré à la *Figure IV.7* ci-dessus.

Le cas de chargement envisagé est celui où les rampes et la travée centrale sont chargées, offrant ainsi une surface  $S$  de  $588m^2$ . Ce cas est considéré comme le plus défavorable, car le chargement est appliqué selon la forme modale et sera donc d'autant plus conséquent que la surface chargée est élevée. On obtient donc  $p = 21.36N/m^2$ .

Le problème étant étudié en 2 dimensions, on suppose une largeur constante pour la passerelle. Moyennant cette hypothèse, on peut déterminer les charges modales par intégration le long de l'ouvrage. Connaissant les forces et masses modales, on peut ensuite en déduire les niveaux cibles des fonctions de transfert. Ceux-ci sont donnés ci-dessous.

Paramètre	Mode 6	Mode 7
$P^*$	2560 N	2390 N
$\theta$ (découplé)	14.5	21.7
$\theta$ (couplé)	14.5	15.5
$\lambda$	0.94	

TABLE IV.2 – Charges modales des modes 6 et 7 et niveaux cibles des fonctions de transfert

Pour rappel, les niveaux cibles diffèrent pour le mode 7 à cause de la convention utilisée pour l'adimensionnalisation du système couplé. Ils seront comparés en conséquence et représentent une même et unique réalité physique.

## 2 Implémentation des différentes méthodes de dimensionnement

Les objectifs pour les fonctions de transfert ayant été définis, on va maintenant déterminer comment les atteindre.

### 2.1 Nécessité d'un dispositif d'amortissement

Tout d'abord, il faut vérifier qu'il est nécessaire d'employer des amortisseurs additionnels pour remplir les critères de confort. Pour ce faire, on peut utiliser l'approche déjà évoquée et calculer les accélérations dans la situation découplée, lorsqu'aucun amortisseur n'a été ajouté. On a :

$$\begin{cases} a_{6,undamped} = (2\pi f_6)^2 \frac{P_6^*}{K_6^*} \frac{1}{2\xi_s} = 8.6m/s^2 \\ a_{7,undamped} = (2\pi f_7)^2 \frac{P_7^*}{K_7^*} \frac{1}{2\xi_s} = 5.8m/s^2 \end{cases} \quad (IV.3)$$

Ces valeurs dépassent de loin la limite autorisée de  $1m/s^2$ . Des amortisseurs sont donc nécessaires.

### 2.2 Première option : 2 amortisseurs

#### 2.2.1 Approche habituelle découplée

La première option est de prévoir 2 amortisseurs, chacun réglé selon *den Hartog* sur un mode précis. Il s'agit donc de la stratégie découplée habituelle. Cette dernière utilise la comparaison des fonctions de transfert des déplacements modaux à la valeur cible. Son réglage n'est donc pas calibré sur les accélérations et elle ne prend pour rappel pas non plus en compte le couplage modal, ni la combinaison modale menant aux valeurs nodales.

Suivant la démarche expliquée à la *Section 4.3*, on va proposer une première solution complètement découplée, puis une seconde corrigée pour estimer l'effet du couplage modal.

Le positionnement des amortisseurs imaginé est schématisé ci-dessous. Il n'est pas commode de placer 2 amortisseurs en une même position, ce qui justifie l'espace laissé entre les 2. On a montré que l'efficacité d'un TMD est proportionnelle au carré de l'amplitude modale du mode ciblé. On choisit donc de décaler le TMD du mode 1, dont l'amplitude est supérieure à celle du mode 2 dans cette zone et qui admet aussi une masse modale plus faible. Cela

permet que l'augmentation de la masse requise soit la plus faible possible.

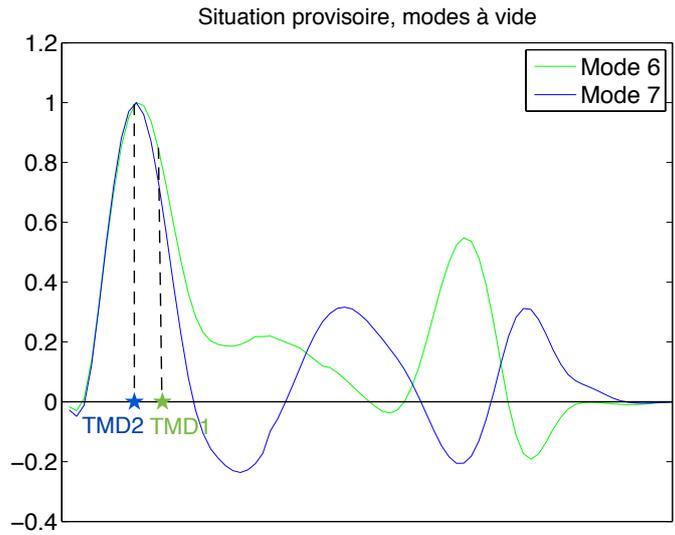


FIGURE IV.8 – Positionnement des amortisseurs

On peut donc supposer les amplitudes modales ci-dessous pour les 2 amortisseurs.

Amplitude modale	TMD1	TMD2
$\phi_6$	0.85	1
$\phi_7$	0.7	1

TABLE IV.3 – Amplitudes des modes 6 et 7 aux endroits des amortisseurs

Le fait d'avoir décalé le 1<sup>er</sup> amortisseur entraîne donc une perte de  $(1 - 0.85)^2 \approx 30\%$  de son efficacité pour une masse donnée. Comme on va le voir ci-dessous, c'est par contre presque un facteur 2 ( $\approx 1/0.85^4$ ) qui va devoir être appliqué sur la masse à lui conférer pour atteindre un niveau donné. Cela souligne donc l'importance du placement des amortisseurs.

Selon que l'amplitude modale pour le mode visé est respectivement unitaire ou non, on utilise les formules de *den Hartog*, ou celles approchées permettant de prendre en compte cet effet. On se sert par conséquent des expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{TMD,i} = \frac{2}{\theta_i^2 - 1} \\ \text{ou} \\ \mu_{TMD,i} = \frac{2}{\theta_i^2 \phi_i^4} \end{array} \right. \quad (IV.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{1 + \mu_{TMD}} \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \end{array} \right. \quad (IV.5)$$

$$\begin{cases} \xi_{TMD} = \sqrt{\frac{3\mu_{TMD}}{8(1 + \mu_{TMD})}} \\ \text{ou} \\ \xi_{TMD} = \sqrt{\frac{\mu_{TMD}}{2}} \end{cases} \quad (IV.6)$$

Cela mène à la solution présentée dans le tableau ci-dessous. Les paramètres sont donnés en valeur adimensionnelle, puis transposés en valeurs physiques.

Paramètre	TMD1	TMD2
$\mu_{TMD}$	0.0182	0.0043
$\alpha$	1	0.996
$\xi_{TMD}$	0.095	0.040
$m$ [kg]	675	221
$k$ [N/m]	98854	38005
$c$ [kg/s]	1560	231

TABLE IV.4 – Paramètres des amortisseurs - cas découplé

On peut donc par exemple placer un premier TMD de 700kg, et l'autre de 250kg, pour une masse totale de 950kg.

### 2.2.2 Approche découplée modifiée

On corrige maintenant l'approche découplée pour tenir compte de l'influence du couplage modal sur un mode donné admettant un mode voisin en fréquence. Pour rappel, cette correction donne simplement une image de l'intensité du phénomène de couplage, et ne tient pas compte de l'effet bénéfique qu'a un des 2 amortisseurs sur le mode sur lequel il n'est pas réglé. Elle est donc purement indicative dans ce cas, qui compte 2 amortisseurs et a de plus la particularité de comporter 2 modes d'amplitudes très proches là où les amortisseurs sont placés.

On utilise la formule approchée :

$$\mu_{TMD,i} = \frac{2}{\theta_i^2 \phi_i^4 - \frac{\phi_j^4}{4\mu_{2,i}^2 \beta_i^2}}, \quad i \neq j \quad (IV.7)$$

On applique ensuite les règles de *den Hartog* modifiées données plus haut. On obtient les paramètres ci-dessous.

Paramètre	TMD1	TMD2
$\mu_{TMD}$	0.0189	0.005
$\alpha$	1	1
$\xi_{TMD}$	0.097	0.050
$m$ [kg]	699	261
$k$ [N/m]	102377	45147
$c$ [kg/s]	1644	343

TABLE IV.5 – Paramètres des amortisseurs - cas découplé modifié

On remarque que le couplage a un effet plutôt faible pour le premier amortisseur, mais assez marqué pour le second. Il majore pour celui-ci les masses à fournir de l'ordre de 20% pour atteindre les mêmes objectifs d'amor-

tissement. Les caractéristiques de raideurs et de viscosité sont aussi augmentées. On préconisera ici par exemple l'utilisation d'une masse de 700kg pour le TMD1 et de 300kg pour le TMD2, pour un total de 1000kg.

A nouveau, soulignons le fait que ces valeurs sont peu représentatives pour ce cas d'étude. Cependant, elles témoignent du fait qu'un couplage assez important entre les 2 modes existe. La solution envisagée ci-dessous va permettre d'en tirer profit.

### 2.3 Seconde option : 1 seul amortisseur

La méthode à un seul amortisseur est maintenant examinée, selon la procédure résumée à la *Figure* récapitulative III.40.

#### 2.3.1 Vérification préliminaire

Tout d'abord, la vérification préliminaire est effectuée. Si celle-ci n'est pas concluante, il est inutile d'envisager la moindre démarche selon cette approche. Tout d'abord, on s'intéresse à  $\beta$ , qui est bien inférieur à 0.3 . On a de plus :

$$\begin{cases} \theta_1 = 14.5 > \frac{1}{\beta} = 11.1 \\ \theta_2 = 15.5 > 11.1 \end{cases} \quad (IV.8)$$

On conclut que la méthode comporte bien un intérêt et semble applicable au premier abord.

#### 2.3.2 Paramètres de calcul et applicabilité

On calcule maintenant les différents paramètres adimensionnels utiles pour la résolution du problème. On utilise pour ce faire les formules établies à la *Section* 4.4.4.2. Les résultats sont repris ci-dessous.

Paramètre	$\kappa^*$	$\alpha^*$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\theta_1^*$	$\theta_2^*$	$\theta_1^{**}$	$\theta_1^{**}$
Valeur	0.60	1.054	1.80	2.16	12.88	14.83	12.33	13.59

TABLE IV.6 – Paramètres de calcul pour la solution à 1 amortisseur

Ces paramètres permettent d'étudier l'applicabilité de la méthode de façon plus approfondie. Cette vérification est d'autant plus pertinente qu'on a remarqué que  $\theta_1$  était relativement proche de la valeur  $1/\beta$ .

On a bien que

$$\begin{cases} \theta_1 > \theta_1^{**} \\ \theta_2 > \theta_2^{**} \end{cases} \quad (IV.9)$$

ce qui signifie que la méthode ne sera pas limitée par le couplage et est donc applicable. En effet, les niveaux visés sont supérieurs aux bornes inférieures d'amplification dynamique due à la proximité des modes. Le problème posé admet donc au moins une solution.

#### 2.3.3 Solution proposée

Il faut maintenant délimiter les zones où il est possible de placer l'amortisseur. La marge entre les niveaux visés et les limites dues au couplage se traduit par une certaine flexibilité sur le positionnement admissible. Il faut alors voir si les modes possèdent des couples d'amplitudes modales adaptés à la gamme autorisée. Une façon très facile de le faire est d'afficher la trace de ces modes et les conditions dans le plan  $(\phi_1, \phi_2)$ . Une simple vérification visuelle permet alors directement d'émettre un jugement. Si il s'avère que des positions sont communes aux exigences et aux modes

en présence, on préconise d'en choisir une qui soit caractérisée par des amplitudes modales maximales. Le ratio de masse de l'amortisseur est finalement déduit sur base de la relation établie plus tôt avec les amplitudes modales.

Les 4 conditions (cf. Equations (III.116)) qui donnent les limites des critères sur les 2 cas de charges sont affichées ci-dessous. On a pris le soin d'ajouter sur les graphiques la trace des modes 6 et 7 étudiés (en rouge).

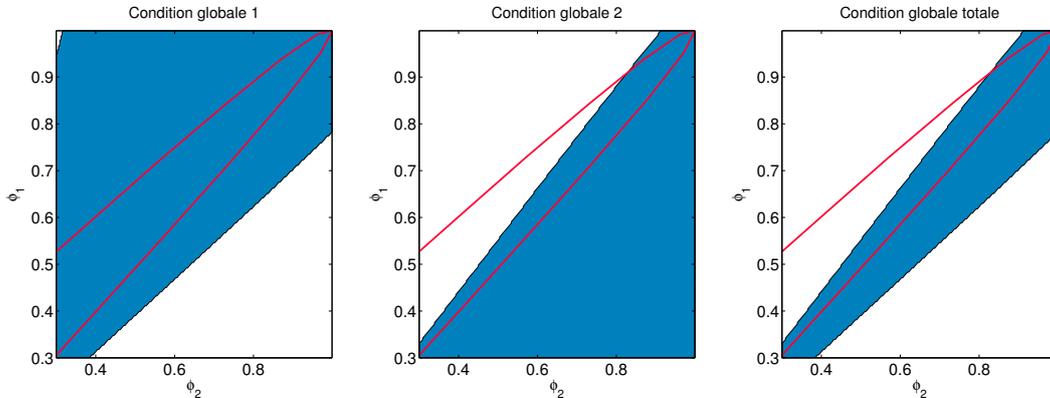


FIGURE IV.9 – Conditions d'applicabilité de la méthode pour les cas de charges 1 et 2

On voit que les modes offrent une gamme assez large de positions licites. Néanmoins, si celle-ci apparaît relativement vaste, elle correspond par endroit à des ratios de masse bien trop importants que pour être envisageables. Pour cette raison, nous restreignons la zone affichée pour les ratios de masse de sorte à ne pas dépasser un ratio de masse de l'ordre de 10%.

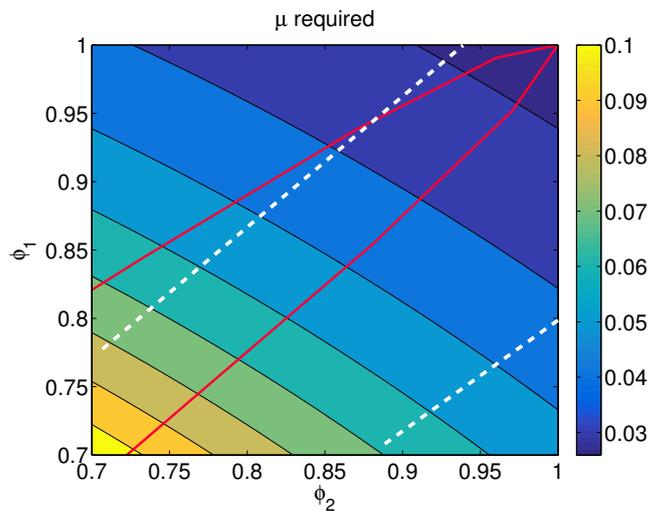


FIGURE IV.10 – Ratio (%) de masse requis selon le placement de l'amortisseur

On transpose les couples de points licites en une zone d'intérêt sur la passerelle. Celle-ci est schématisée ci-dessous. Les masses correspondantes à conférer au TMD sont aussi données.

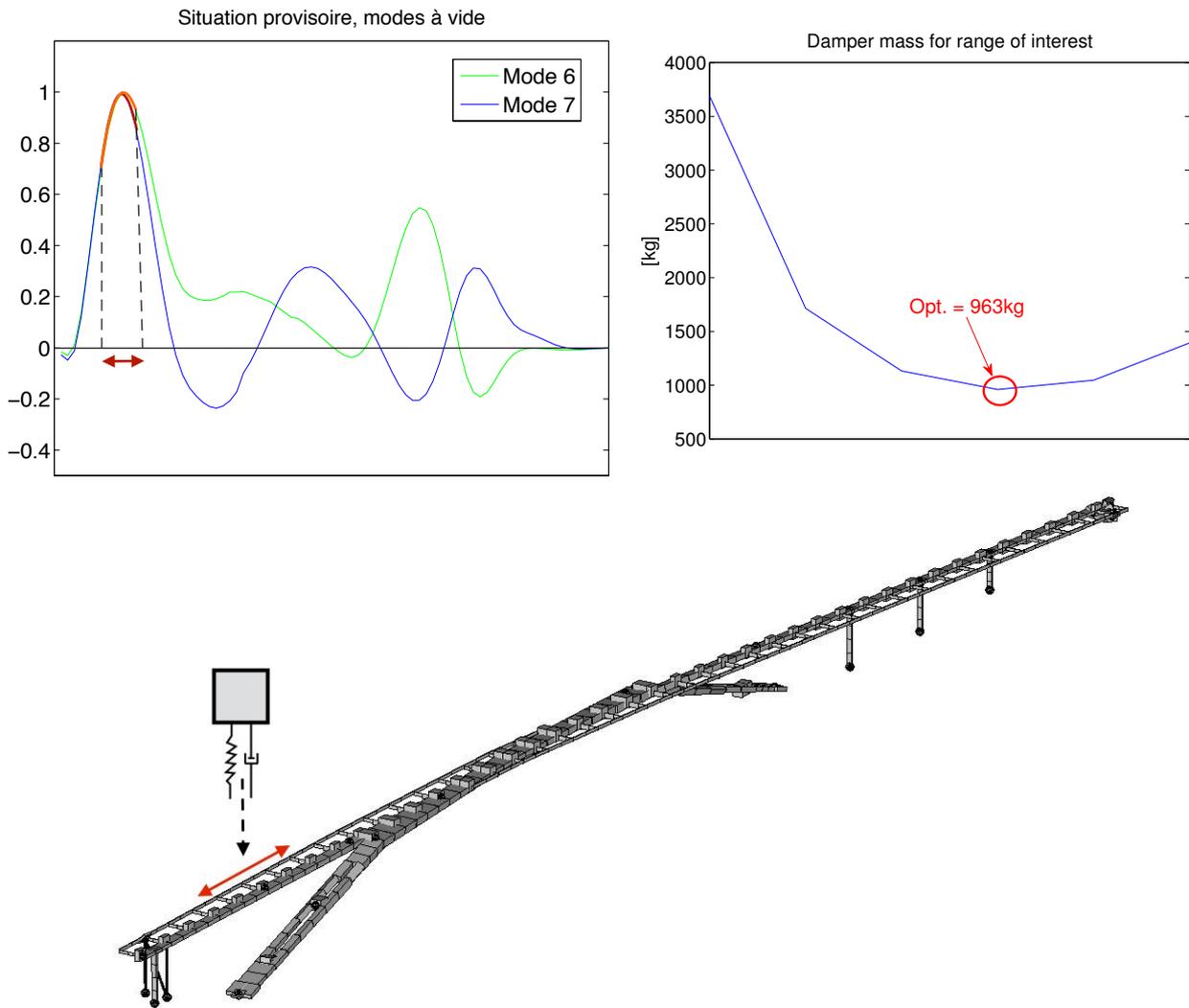


FIGURE IV.11 – Zone proposée pour le placement de l’amortisseur, et masses correspondantes requises

Comme expliqué, on cherche à minimiser le ratio de masse à fournir. On choisit donc le couple  $(\phi_1, \phi_2) = (1, 1)$  comme solution optimale à cet effet. Les paramètres de l’amortisseur sont alors déduits des formules de la Table III.6, puis transposés dans leur équivalent dimensionnel.

Paramètres de l’amortisseur

$\mu_{TMD}$	0.026
$\alpha$	1.053
$\xi_{TMD}$	0.149
$m$ [kg]	963
$k$ [N/m]	156408
$c$ [kg/s]	1188

TABLE IV.7 – Paramètres de l’amortisseur - cas couplé

La masse nécessaire est de 963kg, et un amortisseur d’une tonne pourrait donc convenir. Par opposition à l’approche découplée, l’utilisation d’une masse supérieure n’est pas forcément bénéfique, car elle augmente le phénomène de couplage. En toute rigueur, on veillera donc à retenir une solution technique aussi proche que possible de la solution calculée.

**2.3.4 Validation**

Dans cette section, les résultats qui viennent d'être obtenus sont validés. Tout d'abord, on vérifie que les fonctions de transfert nodales approchées admettent bien des maxima en deçà des limites prévues. Ensuite, on les compare aux fonctions de transfert exactes du système à 2 modes étudiés. Cela permet ainsi de valider que l'approche développée dans ce travail est bel et bien cohérente avec la dynamique réelle du système.

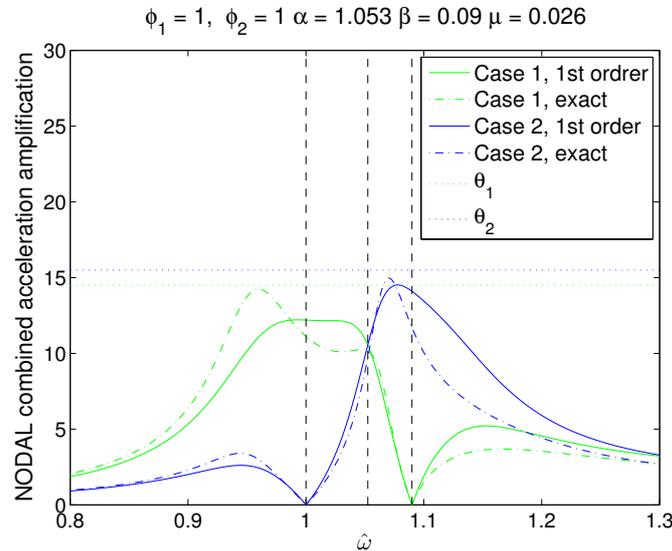


FIGURE IV.12 – Amplification dynamique des accélérations nodales pour les 2 cas de charge. Solutions exactes et approchées.

On observe premièrement que les fonctions de transfert au premier ordre n'excèdent pas les limites autorisées. La solution proposée est donc acceptable, au premier ordre d'approximation.

Ensuite, on remarque que la correspondance entre les fonctions de transfert au premier ordre et exactes est relativement bonne. Elle n'est certes pas parfaite, mais il faut garder en tête que l'approximation est bien du premier ordre et offre pour celui-ci une précision déjà très appréciable. Ce qui importe le plus est que par rapport à un mode sans amortissement, l'amplification dynamique a été réduite d'un facteur 10 ( $1/2\xi_s = 125$ ). L'objectif recherché est donc rempli.

D'ailleurs, lorsqu'on compare aux nombreuses simplifications utilisées par une approche découplée, il y a fort à parier que dans des configurations propices au couplage, l'erreur due à une approche de ce type soit bien plus élevée que celle résultant de cette approximation au premier ordre.

Finalement, on a négligé l'amortissement structurel, et on ne prend donc pas en compte un effet bénéfique, ce qui est sécuritaire.

Ces considérations valident d'une part la correspondance entre les expressions approchées et exactes de l'amplification dynamique, et d'autre part, l'adéquation de la méthode à 1 amortisseur proposée pour atteindre les objectifs de confort.

**3 Conclusions de l'application**

Dans ce cas d'étude, la stratégie d'amortissement à 1 TMD s'est avérée applicable avec succès. Grâce à son réglage judicieux, elle a permis d'atteindre les objectifs d'amortissement avec un seul appareil. La masse totale requise est dans cet exemple pratiquement identique. Néanmoins, cette solution entraîne une économie en termes d'investisse-

ment, de main d'œuvre et de maintenance. Elle restreint de plus l'emprise du système d'amortissement sur l'ouvrage. Finalement, elle augmente la fiabilité de la solution en incluant et utilisant le couplage modal, plutôt qu'en devant le subir sans contrôler son effet une fois le dispositif d'amortissement installé. Cet aspect est peut-être son plus grand avantage.

L'exemple traité ici concerne des vibrations verticales. Cependant, dans le cas de vibrations transversales, la même démarche peut être suivie et associée à l'utilisation d'amortisseurs à inertie, grâce auxquels elle peut augmenter sa gamme d'applicabilité, tout en réduisant drastiquement l'ajout de masse physique à la passerelle.

Pour conclure, rappelons que la mise en place d'amortisseurs devrait de façon idéale être couplée avec une campagne de mesures *in situ*, permettant d'ajuster si nécessaire le dimensionnement effectué. La plus grande inconnue dans une structure de passerelle est l'amortissement structurel. Celui-ci, typiquement très faible, a ici été négligé. Cela augmente donc la sécurité des solutions proposées.

# Chapitre V

## Conclusion

Les phénomènes de vibrations dans les structures élancées que sont les passerelles piétonnes modernes sont une problématique récurrente. Face à des accélérations excessives, la solution est généralement d'avoir recours à des dispositifs d'amortissement mécaniques, tels que les amortisseurs à masse accordée (TMD). Néanmoins, l'efficacité de ces derniers est limitée par leur masse, qui ne peut pour des raisons structurelles pas dépasser certaines limites. De plus, leur dimensionnement ne prend pas en compte le phénomène de couplage modal, particulièrement important quand la structure possède de nombreuses fréquences propres dans la gamme de sollicitation des piétons.

Par conséquent, une nouvelle solution d'amortissement a été présentée : les amortisseurs à inertie. Ceux-ci se sont montrés convaincants pour la réduction des phénomènes d'amplification dynamique dans les passerelles, grâce à leur effet d'amplification de masse et leur robustesse.

Ensuite, le couplage modal d'un système comportant un amortisseur a été étudié de façon analytique, au moyen d'une méthode par perturbations. Celle-ci a permis de proposer une expression analytique simplifiée et tout à fait générale de sa matrice de transfert.

Cet outil a alors été utilisé pour développer la compréhension de l'effet d'amortisseurs en situation découplée et couplée. Après cela, il a servi à l'élaboration d'une stratégie alternative d'amortissement d'un système à 2 modes à l'aide d'un seul amortisseur.

Il s'est avéré que le phénomène de couplage modal peut avoir une influence significative sur l'efficacité d'amortisseurs dimensionnés selon une approche découplée. Son effet s'est révélé particulièrement prononcé, et ce quelles que soient les caractéristiques des amortisseurs utilisés, si les fréquences propres des modes sont proches et leurs amplitudes modales importantes là où les amortisseurs sont placés.

Ensuite, il a été observé que, moyennant un réglage judicieux, il était possible d'utiliser le couplage modal pour amortir 2 modes simultanément avec un seul et même amortisseur. Un critère d'applicabilité pour cette méthode a été établi, et une stratégie générale de dimensionnement a été proposée. Celle-ci a montré la nécessité de disposer de ratios de masses assez élevés pour les amortisseurs. Dans le cas de vibrations transversales, on a montré que cet effet pouvait avantageusement être obtenu par l'utilisation d'amortisseurs à inertie. Cependant, un exemple d'application a aussi mis en évidence la viabilité de la méthode pour des vibrations verticales, de manière compétitive aux stratégies habituelles à 2 amortisseurs.

De façon plus générale, ce travail a permis d'attirer l'attention sur l'importance du couplage modal dans l'évaluation des critères de confort de passerelles. Il a aussi proposé un regard nouveau sur les stratégies qui peuvent être utilisées pour le dimensionnement d'amortisseurs, se détachant alors des approches habituelles qui souffrent de la simplicité de leurs fondements mathématiques.

Seule une solution à 2 modes et un amortisseur a été étudiée. Elle pourrait aussi être généralisée à des cas à plusieurs amortisseurs grâce à une approche similaire. Cela permettrait par exemple de raffiner la correction à appliquer sur l'approche découplée pour inclure l'effet du couplage modal, qui manque encore de généralité.

En outre, une application prometteuse de l'expression établie au premier ordre pourrait être l'étude des vibrations de haubans de ponts, qui est un problème largement répandu et étudié. Si les enjeux et les contraintes sont différents, les concepts sont en effet identiques. L'utilisation des amortisseurs à inertie pour ces fins est d'ailleurs un sujet en plein développement. On imagine aisément étendre l'analyse à des sollicitations différentes de celles de type harmoniques (vibrations aléatoires dues au vent ou au détachement de tourbillons, vibrations provenant de l'interaction tablier/haubans, *etc*).

Cette généralisation pourrait aussi permettre d'étudier les problèmes de sismique, ou de dimensionnement au vent de bâtiments de grande hauteur.

Ces applications sont très différentes, mais admettent toutes un point commun : le besoin de fondements théoriques pour développer leur compréhension fondamentale. Comme cela a été montré pour des passerelles, cette compréhension permet d'étoffer les méthodes simples qui constituent la boîte à outil de l'ingénieur. Mais surtout, elle rend possible l'imagination et la création de solutions novatrices et ingénieuses.

## Annexe A

# Etablissement des fonctions de transfert de systèmes simples

### 1 Amortisseur de *Frahm*

La structure primaire possède une masse  $m$  et une raideur  $k$ . Son déplacement est repéré par  $u_1$ . L'amortisseur a quant à lui une masse  $m_2$  et une raideur  $k_2$ , associés à un déplacement absolu  $u_2$ . La fonction de transfert caractérise l'amplification dynamique sous chargement harmonique, d'où la forme de la charge appliquée sur la structure.

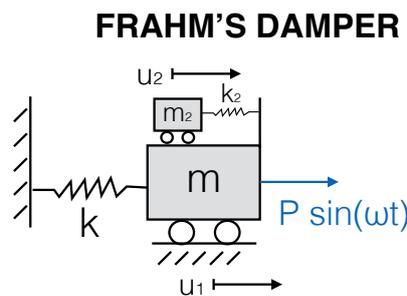


FIGURE A.1 – Amortisseur de *Frahm*

On écrit l'équilibre dynamique pour chacune des 2 masses.

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + ku_1 + k_2(u_1 - u_2) = P\sin(\omega t) \\ m_2\ddot{u}_2 + k_2(u_2 - u_1) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

En formalisme matriciel, on obtient l'équation ci-dessous.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

On peut supposer une solution de type harmonique, de forme

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (\text{A.3})$$

Cela représente donc le produit d'une amplitude complexe (en toute généralité) par un signal oscillatoire. Injecter cette expression dans le système ci-avant, simplifier par  $e^{i\omega t}$  et regrouper les différentes matrices amène :

$$\begin{bmatrix} k + k_2 - \omega^2 m & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

On définit les grandeurs suivantes :

- $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  la pulsation propre de la structure ;
- $\omega_a = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$  la pulsation propre de l'amortisseur ;
- $\mu = \frac{m_2}{m}$  le rapport de masse entre l'amortisseur et la structure ;
- $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$  la fréquence excitatrice adimensionnée ;
- $\alpha = \frac{\omega_a}{\omega_n}$ .

Par définition, et utilisant les notations précitées, la fonction de transfert du degré de liberté correspondant à la masse de la structure primaire vaut donc en module :

$$|H_{11}(\Omega)| = \frac{1}{k} \frac{1 - \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2}{(1 + \mu\alpha^2 - \Omega^2)(1 - \left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)^2) - \mu\alpha^2} \quad (\text{A.5})$$

## 2 Tuned Mass Damper (TMD)

On ajoute une composante visqueuse de viscosité  $c$  à l'amortisseur de *Frahm*.

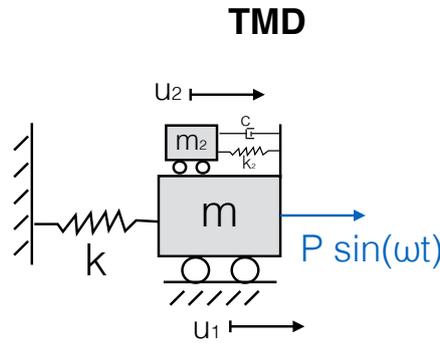


FIGURE A.2 – Amortisseur à masse accordée (TMD)

De la même façon que pour l'amortisseur de *Frahm*, l'équilibre dynamique des 2 masses en présence permet d'écrire le système suivant :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Le passage en formalisme fréquentiel est alors :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k + k_2 + i\omega c - \omega^2 m & -i\omega c - k_2 \\ -i\omega c - k_2 & k_2 + i\omega c - \omega^2 m_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{H^{-1}}}} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Il est facile d'inverser la matrice ci-dessus afin d'obtenir  $\underline{H}$ , puis d'en extraire la composante d'intérêt. On se rappelle ensuite que la norme d'un nombre complexe de type  $\frac{a+ib}{c+id}$  est donnée par  $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$ . On obtient alors aisément, après quelques opérations algébriques :

$$|H_{11}(\Omega)|^2 = \frac{1}{k^2} * \frac{(\alpha^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\alpha\Omega)^2}{((1 - \Omega^2)(\alpha^2 - \Omega^2) - \alpha^2\Omega^2\mu)^2 + (2\xi\alpha\Omega)^2(1 - \Omega^2 - \Omega^2\mu)^2} \quad (\text{A.8})$$

### 3 Tuned Inerter Damper (TID)

La masse du TMD est remplacée par un *inertor* d'inertance  $b$ .

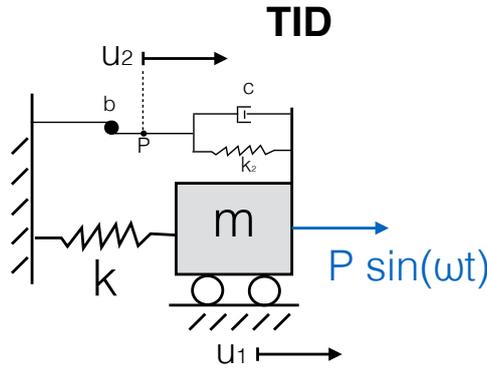


FIGURE A.3 – Amortisseur à inertie accordée (TID)

On peut écrire l'équation du mouvement pour la masse ainsi que pour un point P situé entre l'*inertor* et le système piston/ressort. Il y a donc 2 degrés de liberté.

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + ku_1 + k_2(u_1 - u_2) + c(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) = P\sin(\omega t) \\ b\ddot{u}_2 + k_2(u_2 - u_1) + c(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

On remarque que ce système est identique au système (A.6), à la seule différence que le  $m$  a été remplacé par un  $b$ . Ainsi, l'expression (A.8) de la fonction de transfert reste entièrement valable, à condition de remplacer la variable  $\mu$  par  $\beta = b/m$ , et d'utiliser :

- $\omega_a = \sqrt{\frac{k_2}{b}}$ ;
- $\xi = \frac{c}{2\sqrt{k_2b}}$ .

#### 4 Tuned Mass Damper Inerter (TMDI)

Il est aussi possible de coupler TID et TMD, afin de former un TMDI.

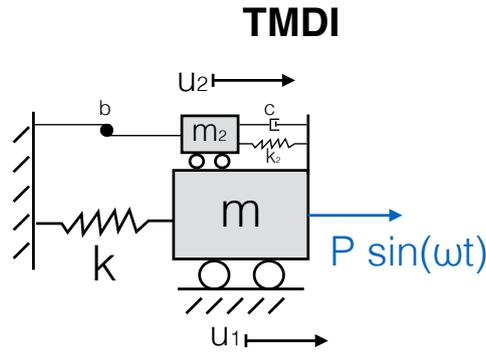


FIGURE A.4 – Amortisseur à masse et inertie accordées (TMDI)

Les équations d'équilibre des 2 masses sont :

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + ku_1 + k_2(u_1 - u_2) + c(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) = P\sin(\omega t) \\ (m_2 + b)\ddot{u}_2 + k_2(u_2 - u_1) + c(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

A nouveau, on reconnaît le système d'équation d'un TMD où cette fois, la masse  $m_2$  a été remplacée par  $m_2 + b$ . Il est licite d'utiliser la forme (A.8) établie précédemment, à condition de remplacer  $\mu$  par  $\mu + \beta$  et de définir :

$$\begin{aligned} - \omega_a &= \sqrt{\frac{k_2}{m_2 + b}}; \\ - \xi &= \sqrt{\frac{c}{2(m_2 + b)\omega_a}}. \end{aligned}$$

#### 5 Modified Tuned Mass Damper (TMD modifié)

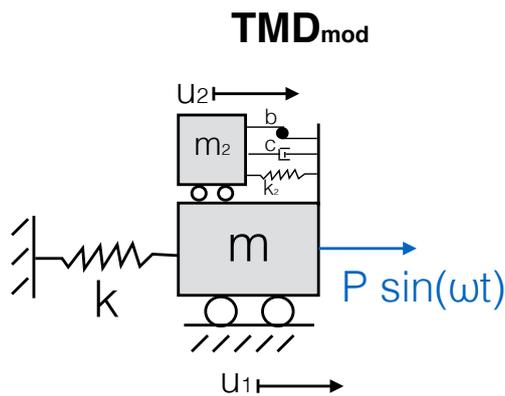


FIGURE A.5 – Amortisseur à masse et inertie accordées, modifié (TMD<sub>mod</sub>)

Par des raisonnements similaires à ceux exposés précédemment, on obtient le système complexe suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k + k_2 + i\omega c - \omega^2(m + b) & b\omega^2 - i\omega c - k_2 \\ b\omega^2 - i\omega c - k_2 & k_2 + i\omega c - \omega^2(m_2 + b) \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{H^{-1}}}} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

La composante d'intérêt de la matrice de transfert s'écrit par suite :

$$H_{11}(\omega) = \frac{k_2 - \omega^2(m_2 + b) + i * \omega c}{(k - \omega^2(m + b))(k_2 - \omega^2(m_2 + b)) - k_2 \omega^2(m_2 + b) - (b\omega^2)^2 + 2b\omega^2 k_2 + i * \omega c(k - \omega^2(m + m_2))} \quad (\text{A.13})$$

De la même façon que ce qui a été fait précédemment, on redéfinit les paramètres adimensionnels sur base d'une "équivalence" de masse amenée par l'amortisseur :

$$\begin{aligned} - \mu &= \frac{(m_2 + b)}{m} ; \\ - \omega_a &= \sqrt{\frac{k_2}{(m_2 + b)}} ; \\ - \xi &= \frac{c}{2\sqrt{k_2(m_2 + b)}}. \end{aligned}$$

Il s'en suit :

$$|H_{11}(\Omega)|^2 = \frac{1}{k^2} \frac{(\alpha^2 \mu - \mu \Omega^2)^2 + \mu^2 (2\xi \alpha \Omega)^2}{((1 - \Omega^2(1 + \beta))(\alpha^2 \mu - \mu \Omega^2) - \alpha^2 \Omega^2 \mu^2 - (\beta \Omega^2)^2 + 2\alpha^2 \Omega^2 \beta \mu)^2 + \mu^2 (2\xi \alpha \Omega)^2 (1 - \Omega^2 - \Omega^2(\mu - \beta))^2} \quad (\text{A.14})$$

## Annexe B

# Formule de l'inertance d'un *inerteur* de type "crémaillère"

On considère par simplicité le cas où on trouve 1 seule roue dans l'inerteur, de pignon  $p_1$  et de rayon  $r_1$ . Le volant d'inertie (*flywheel*) admet un pignon  $p_f$ , un rayon  $r_f$  et une masse  $m_f$ . Son inertie de rotation est donc

$$I_f = \frac{m_f r_f^2}{2} = m_f G_f^2$$

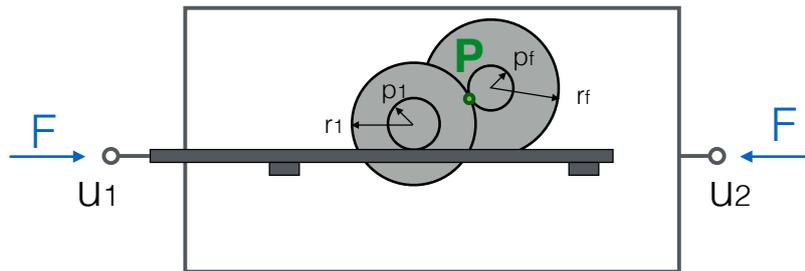


FIGURE B.1 – Schéma d'un *inerteur* à 1 roue

Au point  $P$ , l'égalité des vitesses linéaires donne  $r_1 \omega_1 = p_f \omega_f$ . Si l'on dérive cette égalité par rapport au temps, on déduit donc que :

$$\alpha_f p_f = \alpha_1 r_1 \Leftrightarrow \alpha_f = \alpha_1 \frac{r_1}{p_f} = \frac{\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2}{p_1} \frac{r_1}{p_f}, \quad (\text{B.1})$$

par définition de l'accélération angulaire  $\alpha$ , et de sa relation avec l'accélération tangentielle du pignon de la roue. De plus, par action/réaction au point  $P$ , sachant que le couple  $\tau_1$  généré par la force axiale  $F$  vaut  $\tau_1 = F p_1$ , on a :

$$\frac{\tau_f}{p_f} = \frac{\tau_1}{r_1} \Leftrightarrow \tau_f = F p_1 \frac{p_f}{r_1} \quad (\text{B.2})$$

L'application de la seconde loi de Newton aux rotations est  $\tau = I\alpha$ , ce qui donne ici

$$\tau_f = I_f \alpha_f \Leftrightarrow F p_1 \frac{p_f}{r_1} = I_f \frac{\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2}{p_1} \frac{r_1}{p_f}, \quad (\text{B.3})$$

qu'on réécrit finalement

$$F = \frac{I_f}{p_f^2} \left( \frac{r_1}{p_1} \right)^2 (\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2) = m_f \underbrace{\left( \frac{G_f}{p_f} \right)^2 \left( \frac{r_1}{p_1} \right)^2}_{=b} (\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2) \quad (\text{B.4})$$

L'expression de  $b$  peut aisément être généralisée à un système à plusieurs ( $N$ ) roues selon :

$$b = m_f \left( \frac{G_f}{p_f} \right)^2 \prod_{i=1}^N \left( \frac{r_i}{p_i} \right)^2 \quad (\text{B.5})$$

# Bibliographie

- [1] M. Abé and T. Igusa. Tuned mass dampers for structures with closely spaced natural frequencies. *Earthquake eng. struct. dyn.*, (24) :247–261, 1995.
- [2] JP. Den Hartog. *Mechanical Vibrations*. 1956.
- [3] V. Denoël. Multiple timescale spectral analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, (39) :69–86, 2015.
- [4] V. Denoël and H. Degée. Asymptotic expansion of slightly coupled modal dynamic transfer functions. *Journal of Sound and Vibration*, (328) :1–8, 2009.
- [5] P. Duflo, G.M. Viganò, and V. Denoël. Method for preliminary design of a system of viscous dampers applied to a tall building. In IAWE, editor, *Proceedings of the 7th European-African Conference on Wind Engineering*, 2017.
- [6] A. Giaralis and L. Marian. The tuned mass-damper-inerter for harmonic vibrations suppression, attached mass reduction, and energy harvesting. *Smart structures and systems*, 2017.
- [7] A. Giaralis and F. Petrini. Wind-induced vibration mitigation in tall buildings using the tuned mass-damper-inerter. *Journal of Structural Engineering*, 143(9), September 2017.
- [8] Bureau Greisch. Passerelle sur la Meuse à Namur – “L’Enjambée”. [https://www.greisch.com/projet/passerelle\\_meuse\\_namur/](https://www.greisch.com/projet/passerelle_meuse_namur/). Accessed : 2018-08-02.
- [9] Bureau Greisch. Note de calcul interne, Vérification dynamique de la passerelle de Namur - Exécution, 2017.
- [10] A. Klembczyk, C. Winters, Peng Cheng, and Chen Yongqi. A study on the damping technologies available for tall buildings : Comfort and safety. Not edited draft version : 02-29-2016.
- [11] I.F. Lazar, S.A. Neild, and D.J. Wagg. Design and performance analysis of inerter-based vibration control systems. In *Dynamics of Civil Structures*, volume 4, 2014.
- [12] I.F. Lazar, S.A. Neild, and D.J. Wagg. Vibration suppression of cables using tuned inerter dampers. *Engineering Structures*, 122 :62–71, 2016.
- [13] L. Marian. *The tuned mass damper inerter for passive vibration control and energy harvesting in dynamically excited structural systems*. PhD thesis, City, University of London, 2016.
- [14] C. Papageorgiou and M.C. Smith. Laboratory experimental testing of inerters. In *Proceedings of the IEEE conference on decision and control*, volume 44, pages 3351–56, 2005.
- [15] Sétra and AFGC. *Footbridges - Assessment of vibrational behaviour of footbridges under pedestrian loading - Practical Guidelines*, 2006.
- [16] Y. Shen et al. Modeling and optimization of vehicle suspension employing a nonlinear fluid inerter. In *Shock and Vibration*. Hindawi Publishing Corporation, 2016.
- [17] M. C. Smith. Synthesis of mechanical networks : The inerter. *IEEE Trans. Automat. Control*, 47(10) :1648–1662, 2002.
- [18] Y. Sugimura, W. Goto, H. Tanizawa, K. Saito, and T. Nimomiya. Response control effect of steel building structure using tuned viscous mass damper. In *Proceedings of the 15th World Conference on Earthquake Engineering*, Lisbon, Portugal, 2012.
- [19] F-C. Wang, M-F. Hong, and C-W Chen. Building suspensions with inerters. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 224, 2009.
- [20] G. B. Warburton. Optimum absorber parameters for minimizing vibration response. *Earthquake eng. struct. dyn.*, 9 :251–262, 1981.

## BIBLIOGRAPHIE

- [21] G.B. Warburton. Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10(3) :381–401, 1982.
- [22] Ruifu Zhang. Powerpoint presentation - Seismic control of buildings using apparent mass dampers with rotational amplifying mechanisms. <http://risedr.tongji.edu.cn/ubc/PPT/5.7/plenary%206/2%20Ruifu%20ZHANG.pdf>. Accessed : 2018-08-02.