

## Identification de systèmes dynamiques non linéaires à l'aide de modèles de Volterra

**Auteur :** Buttino, Julien

**Promoteur(s) :** Denoel, Vincent

**Faculté :** Faculté des Sciences appliquées

**Diplôme :** Master en ingénieur civil des constructions, à finalité spécialisée en "civil engineering"

**Année académique :** 2017-2018

**URI/URL :** <http://hdl.handle.net/2268.2/4672>

---

### Avertissement à l'attention des usagers :

*Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.*

*Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.*

---



UNIVERSITÉ DE LIÈGE - FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

# Identification de systèmes dynamiques non linéaires à l'aide de modèles de Volterra

Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade de master en Ingénieur Civil des Constructions par **BUTTINO Julien**

COMPOSITION DU JURY :

Vincent DENOËL (promoteur)

Francesco FOTI (promoteur)

Vincent DE VILLE DE GOYET (membre extérieur)

Olivier BRÛLS (membre extérieur)

Année académique 2017-2018



## Remerciements

Ce travail de fin d'études n'aurait pas été possible sans l'intervention d'un grand nombre de personnes. Je souhaite ici les en remercier.

En premier lieu, j'aimerais remercier très chaleureusement mes promoteurs de ce travail Vincent Denöel et Francesco Foti pour leurs nombreux conseils, leur disponibilité et leur soutien durant ce travail.

J'aimerais également remercier Vincent De Ville et Olivier Bröls, membres extérieurs de mon jury, pour leur intérêt concernant mon travail ainsi que leurs précieux conseils.

Je désire remercier Yves Duchene pour sa participation à ma présentation intermédiaire et ses suggestions concernant mon travail.

Je souhaite également remercier ma famille qui m'a soutenu pendant cette période. En particulier, j'aimerais remercier ma soeur pour sa précieuse aide à la relecture et à la correction de mon mémoire.

Enfin, je remercie les étudiants de deuxième master avec qui j'ai pu discuter longuement de mon travail. Ils ont également contribué à l'environnement idéal dans lequel j'ai travaillé.

## Résumé

De nos jours, de nombreuses structures du génie civil ont un comportement non linéaire. L'analyse de telles structures est complexe et requiert la plupart du temps des simulations numériques. Ces simulations réalisées à l'aide, par exemple, d'un logiciel éléments finis sont relativement consommatrice en temps de calcul.

Ainsi, de nombreuses méthodes alternatives ont vu le jour dans la communauté scientifique. Parmi ces méthodes, les modèles basés sur la série de Volterra présentent un vif intérêt dans l'identification et l'analyse de systèmes non linéaires.

Dans ce contexte, l'objet de ce travail est de développer et d'exploiter ce modèle de Volterra. Ce dernier consiste à construire une approximation de la réponse d'un système soumis à une excitation déterministe ou stochastique. De manière schématique ce système prend une entrée  $x(t)$  et fournit la sortie  $y(t)$  (Figure 1).

L'objectif est donc d'identifier les noyaux de Volterra  $H_1, H_2, H_3$ , etc. afin d'établir la réponse du problème. Une méthode d'identification de ces noyaux pour des systèmes à un ou plusieurs degrés de liberté est proposée dans ce travail. Cette méthode est une méthode paramétrique. C'est-à-dire que les noyaux de Volterra seront obtenus en fonction des paramètres du système étudié.

Ce travail présentera le développement de cette méthode à travers divers exemples et la qualité de cette méthode en sera discutée.

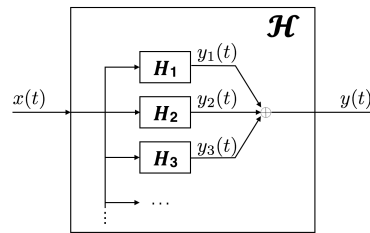


FIGURE 1 – Représentation du système de Volterra

## Abstract

Nowadays, many structures have a non-linear behavior. The analysis of such structures is complex and most of the time requires numerical simulations. These simulations carried out by, for example, a finite element software are relatively time-consuming.

Thus, many alternative methods have emerged in the scientific community. Among these methods, models based on Volterra series have a keen interest in the identification and analysis of non-linear systems.

In this context, the purpose of this work is to develop and exploit this Volterra model. The latter consists in constructing an approximation of the response of a system subjected to deterministic or stochastic excitation. Schematically this system takes an input  $x(t)$  and provides the output  $y(t)$  (Figure 1).

The goal is to identify Volterra kernels  $H_1, H_2, H_3$ , etc. in order to establish the answer of the problem. A method of identifying these kernels for systems with one or more degrees of freedom is proposed in this work. This method is a parametric method. That is to say that Volterra kernels will be obtained according to the parameters of the studied system.

This work will present the development of this method through various examples and the quality of this method will be discussed.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
1.1	Mise en contexte . . . . .	6
1.2	État de l'art . . . . .	7
1.3	Plan du travail . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Développement d'une méthodologie</b>	<b>9</b>
2.1	Un degré de liberté . . . . .	9
2.1.1	Série de Volterra . . . . .	9
2.1.2	Identification des HFRF . . . . .	13
2.1.2.1	"Harmonic probing" . . . . .	13
2.1.2.2	Méthode paramétrique . . . . .	14
2.1.2.3	Discussion de la méthode paramétrique . . . . .	24
2.1.2.4	Convergence de la série . . . . .	30
2.1.2.5	Utilisation de la méthode paramétrique . . . . .	34
2.2	Plusieurs degrés de liberté . . . . .	35
2.2.1	Série de Volterra . . . . .	35
2.2.2	Identification des HFRF . . . . .	38
2.2.2.1	"Harmonic Probing" . . . . .	38
2.2.2.2	Méthode paramétrique . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Application</b>	<b>56</b>
3.1	Pont suspendu sur le Détroit d'Akashi . . . . .	56
3.1.1	Identification des paramètres . . . . .	56
3.1.2	Calcul de la réponse du câble soumis à une excitation aléatoire . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>64</b>
<b>A</b>	<b>Développement des équations</b>	<b>66</b>
A.1	Développement de la série de Volterra (2.1) jusqu'au troisième ordre . . . . .	66
A.2	Développement de la série de Volterra (2.5) jusqu'au troisième ordre . . . . .	66
A.3	Développement de la série de Volterra (2.59) jusqu'au troisième ordre . . . . .	66
A.4	Développement de la série de Volterra (2.61) jusqu'au troisième ordre . . . . .	67
<b>B</b>	<b>Développement mathématique pour trouver les expressions des HFRF - Système à 1 DDL</b>	<b>69</b>
B.1	Première équation associée (2.22) . . . . .	69
B.2	Deuxième équation associée (2.23) . . . . .	69
B.3	Troisième équation associée (2.24) . . . . .	71
<b>C</b>	<b>Développement mathématique pour trouver les expressions des HFRF - Système à 2 DDL</b>	<b>74</b>
C.1	Première équation associée (2.78) . . . . .	74
C.2	Deuxième équation associée (2.79) . . . . .	74
C.3	Troisième équation associée (2.80) . . . . .	77

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Mise en contexte

La technologie de nos jours permet de réaliser des structures du génie civil de plus en plus complexes. L'utilisation des matériaux est poussée à l'extrême de manière à optimiser au mieux ces derniers. Cette pratique s'accompagne évidemment d'une difficulté majeure. En effet, l'analyse de telles structures en devient bien plus compliquée.

De nombreuses structures ont un comportement non-linéaire. Cette non-linéarité provient, par exemple, de l'élancement de la structure, du comportement non-linéaire des matériaux, de l'évolution de la tension d'un câble, ...

Souvent, l'analyse non-linéaire rebute les concepteurs de par sa complexité. Cependant, la non-linéarité modifie parfois significativement, voire catastrophiquement, le comportement d'une structure. Or, lorsque des vies sont en jeu, il est primordial d'évaluer correctement le comportement de cette structure.

La volonté de développer l'analyse dynamique non-linéaire dans les structures du génie civil prend donc tout son intérêt dans ce cas-ci. Se limiter à une simple analyse linéaire pourrait conduire à des résultats erronés.

Étant donné qu'un problème non-linéaire est complexe, la solution analytique d'une étude dynamique est parfois difficile à trouver et n'existe parfois même pas. Il est donc nécessaire de recourir à des solutions numériques. Des logiciels éléments finis permettent de calculer les vibrations d'une structure au comportement non-linéaire. Les principaux désavantages de ces logiciels sont : un contrôle limité de la réponse et un temps de calcul conséquent et inefficace. En effet, ces logiciels agissent comme une boîte noire dans laquelle l'excitation constitue une entrée et la réponse du système en est la sortie.

Concernant le temps de calcul, on sait que lors de simulations numériques, une première partie de la réponse dynamique est transitoire. Cette première partie n'a pas d'intérêt pour le concepteur et constitue un surplus de calculs, car seule la partie stabilisée nous intéresse *a priori*. Afin de nous donner un ordre de grandeur de cette partie transitoire, considérons le cas d'un pont suspendu. Si on considère un amortissement d'environ 0.5% et une fréquence propre de 0.05 Hz, cette partie transitoire s'étend à environ 30 minutes.

Dès lors, de nombreux chercheurs ont tenté de trouver une solution alternative à ces simulations. L'idée est de trouver une approximation analytique de la réponse. Certes, la solution exacte ne peut être trouvée, mais une approximation suffisamment précise peut être construite.

La section suivante présente les différentes méthodes développées à ce jour.

## 1.2 État de l'art

De nombreuses méthodes d'approximation existent. Parmi ces méthodes, on retrouve, par exemple, les méthodes "*Harmonic Balance*" et la série de Volterra.

Une des applications de la méthode "*Harmonic Balance*" consiste à remplacer un système non-linéaire en un système linéaire équivalent. Pour ce faire, la méthode dit que la réponse du système non linéaire soumis à une excitation sinusoïdale est une sinusoïde à la même fréquence [1]. Par exemple, considérons l'équation du mouvement suivante :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + k_3y^3 = x(t) \quad (1.1)$$

Sous une entrée  $x(t) = X \sin(\omega t - \phi)$ , la réponse du système peut s'écrire grâce à l'hypothèse émise :

$$y(t) = Y \sin(\omega t) \quad (1.2)$$

Si on injecte cette réponse dans l'équation du mouvement (1.1), on trouve

$$-m\omega^2 Y \sin(\omega t) + c\omega Y \cos(\omega t) + kY \sin(\omega t) + k_3 Y^3 \sin^3(\omega t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad (1.3)$$

Après un peu de trigonométrie, il est possible d'égaliser les coefficients de  $\sin(\omega t)$  et  $\cos(\omega t)$ . Ceci permet finalement de trouver la fonction de transfert suivante :

$$\Lambda(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k + \frac{3}{4}k_3Y^2} \quad (1.4)$$

Cette fonction de transfert peut finalement être vue comme la fonction de transfert du système linéaire suivant :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k_{eq}y = X \sin(\omega t - \phi) \quad (1.5)$$

Où la raideur équivalent est  $k_{eq} = k + \frac{3}{4}k_3Y^2$ .

Dans cette méthode, la non linéarité est donc prise en compte en corrigeant les paramètres linéaires.

La deuxième méthode abordée est l'approximation de la méthode grâce à la série de Volterra. Cette théorie découverte par Vito Volterra dans les années 1880 a été développée mathématiquement par Schetzen [2] et Rugh [3] environ un siècle plus tard.

Contrairement à la première méthode, cette théorie propose d'écrire la solution du système comme une somme infinie de termes. Une définition rigoureuse de cette série est présentée plus loin dans ce travail.

Cette méthode a, dans un premier temps, fait ses preuves dans le domaine biologique et électrique. Dès lors, un intérêt pour cette méthode a vu le jour et des questions à propos de son utilisation dans le domaine du génie civil ont émergées.

De nombreux chercheurs se sont donc attelés à la tâche et des développements utilisant cette méthode sont apparus. L'utilisation de cette méthode dans le génie civil est relativement peu développée. Certes des développements pour des systèmes à un degré de liberté sont de plus en plus maîtrisés, mais il n'en est pas de même pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Cette théorie montre cependant des résultats encourageants et mérite une attention particulière. L'objet de ce travail est donc d'examiner et de développer cette série de Volterra.



## 1.3 Plan du travail

L'objectif de ce travail est de développer une méthode de construction d'un modèle de Volterra pour ensuite l'appliquer à un cas réel.

Le Chapitre 2 sera consacré au développement de cette méthode. Ce chapitre est divisé en deux parties. La première explique la méthodologie à adopter pour des systèmes à un degré de liberté tandis que la deuxième partie se concentre sur des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

La série de Volterra étant encore relativement méconnue, une explication de cette théorie est donc nécessaire. Les deux parties du Chapitre 2 commencent donc par rappeler les bases de cette série. Ensuite, deux méthodes d'identification sont proposées. La première dite "*Harmonic Probing*" sera expliquée brièvement et permettra de point de comparaison pour la deuxième méthode (méthode paramétrique) qui sera, elle, développée en détail.

Le Chapitre 3 propose une application du modèle de Volterra. La première partie de ce chapitre concerne l'identification des paramètres du problème à l'aide de la méthode paramétrique. Connaissant ces paramètres, la deuxième partie de ce chapitre propose la construction de la réponse du système soumis à une entrée aléatoire.

Enfin, le Chapitre 4 conclut ce travail. Les résultats importants obtenus lors de ce dernier y sont résumés.

## Chapitre 2

# Développement d'une méthodologie

L'objet du présent chapitre concerne le développement d'une méthode analytique basée sur un système de Volterra. Cette méthode est dans un premier temps expliquée pour un système à un degré de liberté avant d'être étendue pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

À la fin de ce chapitre, le lecteur aura une idée de comment construire un système de Volterra de manière à l'utiliser sur une application pratique.

Les explications de la construction du système de Volterra seront toujours accompagnées d'un exemple afin d'illustrer les différents concepts utilisés. Ces exemples seront pour la plupart issus de la littérature. Ainsi, les différents résultats obtenus pourront être comparés aisément au matériel disponible sur ce système de Volterra.

### 2.1 Un degré de liberté

Avant de nous plonger dans l'explication de la méthode a proprement dit, il est nécessaire d'expliquer le système de Volterra. La section suivante présente une définition de ce dernier.

#### 2.1.1 Série de Volterra

La série de Volterra permet d'approximer la réponse d'un système non linéaire. Cette série peut être perçue comme un système qui reçoit une entrée  $x(t)$  et fournit la sortie  $y(t)$  (cf. Figure 2.1).

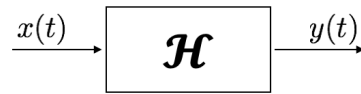


FIGURE 2.1 – Représentation du système de Volterra

Mathématiquement, cette série se définit comme une somme infinie d'intégrales de convolution multidimensionnelle d'ordre croissant [2] :

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}[x(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots + y_n(t) + \dots \quad (2.1)$$

Avec,

$$y_n(t) = \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{k=1}^n x(t - \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (2.2)$$

Où  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  représente les *noyaux de Volterra*. Ces noyaux peuvent être interprétés de la manière suivante :  $h_1(\tau_1)$  représente la réponse linéaire d'un système soumis à une impulsion au temps  $\tau_1$ . De même,

$h_2(\tau_1, \tau_2)$  est la réponse du système soumis, cette fois-ci, à deux impulsions à deux instants différents  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , et ainsi de suite pour les termes d'ordre supérieur. Dès lors, le terme  $y_1(t)$  de la série de Volterra représente la convolution standard d'un problème linéaire. En effet, si on tronque la série de Volterra au premier ordre, on trouve :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 \quad (2.3)$$

Ce qui est bien la définition de l'intégrale de convolution du cas linéaire. Par ailleurs, les termes d'ordre supérieur de la série de Volterra ( $y_2(t), y_3(t), \dots$ ) représentent les convolutions multiples (double, triple, etc.). Ainsi, la série de Volterra peut être vue comme une extension de l'intégrale de convolution du cas linéaire vers le cas non linéaire. Un développement de la série (2.1) jusqu'au troisième ordre est présenté à l'Annexe A.

Ces noyaux de Volterra possèdent la propriété de symétrie [3]. Par exemple,

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = h_2(\tau_2, \tau_1)$$

Il en est de même pour les noyaux d'ordre supérieur.

Un des avantages de cette série est la simplicité avec laquelle le cas linéaire est généralisé au cas non linéaire et sa forme multi-linéaire lui permettant de faire intervenir des concepts bien connus tels que les intégrales de convolution ou encore les fonctions de réponses fréquentielles. En effet, il est possible de passer dans le domaine fréquentiel aisément. Par l'intermédiaire de la transformée multidimensionnelle de Fourier, on trouve

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{-i(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_n \tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (2.4)$$

Où les fonctions  $H_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$  sont définies comme les fonctions de réponses fréquentielles d'ordre supérieur ("*Higher order Frequency Response Functions (HFRF)*", en anglais).

La série de Volterra dans le domaine fréquentiel s'exprime alors comme :

$$Y(\omega) = Y_1(\omega) + Y_2(\omega) + Y_3(\omega) + \dots + Y_n(\omega) + \dots \quad (2.5)$$

Avec,

$$Y_n(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega - \omega_1 - \dots - \omega_{n-1}) \times \\ X(\omega_1) \dots X(\omega_{n-1}) X(\omega - \omega_1 - \dots - \omega_{n-1}) d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \quad (2.6)$$

Où  $X(\omega)$  est l'expression de l'entrée dans le domaine fréquentiel. Un développement de cette série jusqu'au troisième ordre est repris à l'Annexe A. De même que pour le domaine temporel, si on tronque la série au premier ordre, on retrouve l'expression bien connue du cas linéaire :

$$Y(\omega) = H_1(\omega) X(\omega) \quad (2.7)$$

Afin que le lecteur s'approprie au mieux ces définitions, il est utile de montrer un exemple concret de l'utilisation de cette série. Imaginons que l'on veuille étudier la réponse d'un système sous une entrée harmonique du type :

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

Le démarche du modèle de Volterra peut s'illustrer schématiquement à l'aide de la figure suivante :

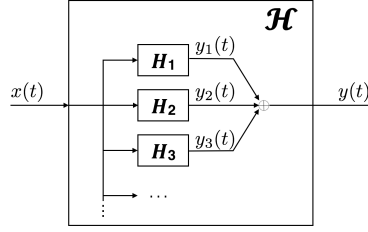


FIGURE 2.2 – Représentation du système de Volterra

Connaissant les propriétés du système, les HFRFs sont alors connus. Des exemples des fonctions  $H_1(\omega_1)$  et  $H_2(\omega_1, \omega_2)$  sont représentées aux Figures 2.3 et 2.4.

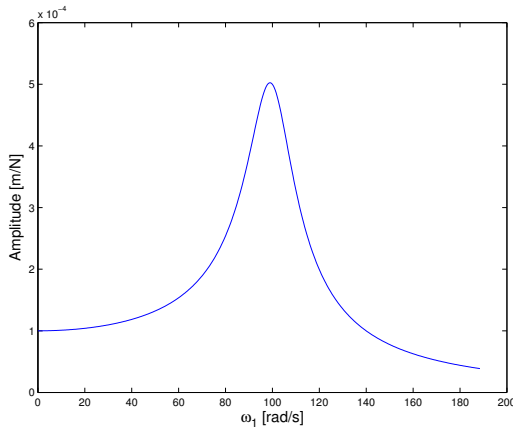


FIGURE 2.3 –  $H_1(\omega_1)$

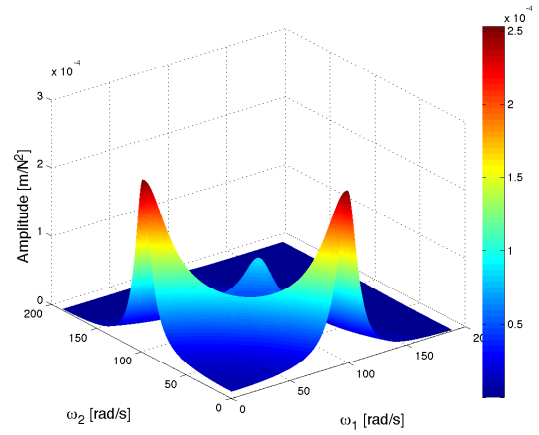


FIGURE 2.4 –  $H_2(\omega_1, \omega_2)$

Note : on remarque la dimension des différentes HFRF grâce à ces figures. La fonction  $H_1(\omega_1)$  est de dimension 1, la fonction  $H_2(\omega_1, \omega_2)$  est quant à elle de dimension 2, et ainsi de suite pour les termes d'ordre supérieur.

Sous cette entrée et connaissant les HFRF, il est possible d'exprimer successivement les différentes composantes de la réponse ( $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ , ...) qu'il suffit ensuite de combiner pour obtenir la réponse totale  $y(t)$ . Cette réponse obtenue est montrée à la Figure 2.5. Cette réponse a été comparée à la réponse obtenue par simulation. On voit qu'après la période transitoire de la simulation, les deux réponses se rejoignent. Ceci met en évidence l'avantage de connaître la réponse analytiquement, en effet, aucune période transitoire n'est présente dans ce cas. Ainsi, la réponse voulue est obtenue plus rapidement grâce à la série de Volterra.

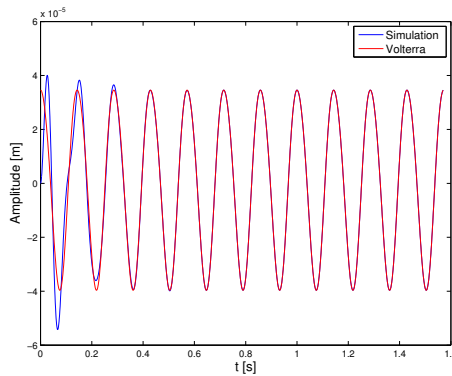


FIGURE 2.5 – Exemple de réponse du système

La connaissance des noyaux de Volterra, qui contiennent toute l'information sur le comportement du système, permet donc de prédire la réponse de ce système pour n'importe quelle entrée, aussi bien déterministe que stochastique. De plus, ces noyaux sont directement liés aux paramètres du système. Ainsi, il est aisé de voir comment les paramètres du système influencent la réponse, ce qui peut être intéressant pour le concepteur. L'analyse non linéaire du système est dans ce cas facilitée et permet de quantifier la non-linéarité du système. C'est d'ailleurs une des applications de cette série de Volterra. Les systèmes faiblement non linéaires peuvent être correctement représentés par une série tronquée. Le terme faiblement non linéaire signifie que la réponse est bien approximée par les deux ou trois premiers termes de la série. Dans le cas extrême d'un système linéaire, la série de Volterra pourrait être utilisée pour contrôler cette linéarité. Ces termes d'ordre supérieurs ( $>1$ ) devraient donc être nuls.

Au vu de sa forme, la série de Volterra peut être comparée à la série de Taylor. De même que cette dernière, la série de Volterra permet une représentation polynomiale d'un système non linéaire. Pour rappel, la série de Taylor s'exprime mathématiquement comme :

$$y(t_0) = K_1x(t_0) + K_2x(t_0)^2 + K_3x(t_0)^3 + \dots + K_nx(t_0)^n + \dots \quad (2.8)$$

La série de Volterra diffère de celle de Taylor en permettant une certaine mémoire au système. En effet, la série de Taylor propose une approximation de la solution à un certain temps  $t_0$  en fonction de l'entrée uniquement à ce temps. En revanche, la série de Volterra est, comme on l'a vu, une approximation qui dépend de l'entrée à des temps antérieurs au temps considéré, du fait des intégrales de convolution. En effet, ces intégrales de convolution mesurent l'influence relative d'une entrée précédente sur la réponse courante. C'est pourquoi la série de Volterra peut être décrite comme une série de Taylor avec de la mémoire.

Le fait que la série de Volterra puisse s'apparenter à la série de Taylor entraîne les faiblesses de cette dernière. En effet, on va retrouver des restrictions sur la convergence de la série. Cette contrainte se traduit généralement par une limitation sur l'amplitude de l'excitation. Ainsi, la série de Volterra a une application limitée et ne permet pas de reproduire un système non linéaire soumis à n'importe quel niveau d'excitation.

Cette limitation n'est pas la seule. En effet, lorsqu'on définit une série de Volterra, on doit s'assurer que le système est causal, temps invariant et possède une mémoire limitée. Un système causal est tel qu'il ne dépend pas du futur. La réponse du système ne doit donc dépendre que de l'excitation à l'instant présent et passé. Ensuite, un système temps invariant est tel que l'opérateur ne change pas avec le temps. En d'autres termes, un décalage temporel dans l'excitation amène un décalage temporel dans la réponse. Enfin, la mémoire limitée d'un système signifie qu'à partir d'un certain moment  $t + \Delta t$ , l'influence de l'excitation à un certain temps  $t$  doit diminuer. Ce qui peut se traduire mathématiquement par :

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \tau_1, \dots, \tau_n \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

Ces limitations ne constitueront cependant pas un problème pour les cas que nous allons traiter. En effet, on sait qu'un système physique est causal, que l'amortissement présent dans le système amène une mémoire limitée et les problèmes étudiés auront des propriétés qui ne changent pas au cours du temps. Ces exigences sont donc présentées de manière à être complet dans la définition de la série de Volterra, mais peuvent être oubliées dans la majorité des cas, et particulièrement pour les problèmes du génie civil. La seule préoccupation concernant la série de Volterra sera la convergence de la série.

Comme précisé précédemment, une fois les noyaux de Volterra connus, la réponse d'un système sous n'importe quelle entrée peut être déduite (pourvu que la série converge). Ces noyaux de Volterra sont a priori inconnus lorsqu'on étudie un système. Afin de construire un système de Volterra, il faut donc identifier ces noyaux. Cette identification est l'objet de la section suivante.

## 2.1.2 Identification des HFRF

Dans cette section, nous nous attardons à l'identification des noyaux de Volterra. Il existe une multitude de méthodes afin de trouver ces noyaux. Deux de ces méthodes sont présentées ici. La première, dite "Harmonic Probing", est présentée brièvement et servira de comparaison pour la deuxième méthode, appelée méthode paramétrique, qui sera, elle, développée plus en détail.

### 2.1.2.1 "Harmonic probing"

Cette première méthode d'identification a été développée en 1971 par *Bedrosian et Rice* [4].

Cette méthode consiste à exciter le système avec une somme d'harmonique (du type  $x(t) = e^{i\omega_1 t} + \dots + e^{i\omega_n t}$ ) et d'identifier au fur et à mesure les noyaux de Volterra. Cette démarche est donc assez similaire à ce qu'il pourrait se faire en laboratoire. En effet, il est possible de contrôler l'excitation et d'obtenir la réponse sous cette excitation. Grâce à ces résultats, les noyaux de Volterra peuvent être identifiés. Outre le laboratoire, ces noyaux de Volterra peuvent être identifiés à l'aide de simulations.

Pratiquement, la méthode se déroule comme suit :

1. Considérons une excitation harmonique composée d'une seule harmonique :

$$x(t) = e^{i\omega_1 t} \quad (2.10)$$

Sous cette excitation, il est possible d'écrire la réponse analytique du système à l'aide de la série de Volterra. Si on remplace cette excitation dans l'équation (2.1), on trouve

$$y(t) = H_1(\omega_1) e^{i\omega_1 t} + H_2(\omega_1, \omega_1) e^{i2\omega_1 t} + H_3(\omega_1, \omega_1, \omega_1) e^{i3\omega_1 t} + \dots \quad (2.11)$$

Dans cette expression, on voit que la fonction  $H_1(\omega_1)$  est entièrement définie. En balayant la fréquence  $\omega_1$  et en identifiant l'amplitude de la réponse du système à la fréquence d'excitation  $\omega_1$  à l'aide de simulations, il est alors possible d'identifier le noyau  $H_1(\omega_1)$ . En effet, seule la fonction  $H_1(\omega_1)$  multiplie la composante de la réponse à la fréquence d'excitation.

En revanche, les noyaux de Volterra d'ordre supérieur sont définis uniquement sur une diagonale de l'espace des fréquences. Une excitation composée d'une seule harmonique permet donc d'identifier uniquement le premier noyau de Volterra de manière complète.

De manière à obtenir l'information hors de la diagonale pour les autres noyaux de Volterra, il est nécessaire d'exciter le système avec plusieurs harmoniques. C'est d'ailleurs l'étape suivante de cette méthode.

2. Considérons à présent une excitation composée de deux harmoniques différentes ( $\omega_1 \neq \omega_2$ )

$$x(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t} \quad (2.12)$$

De même que lors de la première étape, on remplace cette excitation dans la série de Volterra. On trouve

$$\begin{aligned} y(t) = & H_1(\omega_1) e^{i\omega_1 t} + H_1(\omega_2) e^{i\omega_2 t} \\ & + H_2(\omega_1, \omega_1) e^{i2\omega_1 t} + 2H_2(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} + H_2(\omega_2, \omega_2) e^{i2\omega_2 t} \\ & + H_3(\omega_1, \omega_1, \omega_1) e^{i3\omega_1 t} + H_3(\omega_2, \omega_2, \omega_2) e^{i3\omega_2 t} \\ & + 3H_3(\omega_1, \omega_1, \omega_2) e^{i(2\omega_1 + \omega_2)t} + 3H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_2) e^{i(\omega_1 + 2\omega_2)t} + \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dans cette expression, on voit apparaître le noyau de Volterra qui nous intéresse à savoir  $H_2(\omega_1, \omega_2)$ , qui maintenant est défini dans tout l'espace, et non plus sur une diagonale uniquement. Il est intéressant

d'observer que ce noyau multiplie la composante de la réponse à la somme des fréquences d'excitation ( $\omega_1 + \omega_2$ ). De plus, un coefficient 2 apparaît devant ce terme. Dès lors, pour identifier ce noyau, on utilise des simulations, on isole la réponse à la somme des fréquences d'excitation et on en prend la moitié.

3. La suite de la procédure est simplement de prendre de plus en plus d'harmoniques dans l'excitation. On remarque aisément que sous une excitation

$$x(t) = e^{i\omega_1 t} + \dots + e^{i\omega_n t} \quad (2.14)$$

On pourra identifier le  $n^{\text{ième}}$  noyau de Volterra. Ce noyau multipliera la composante de la réponse à la somme des fréquences d'excitations soit ( $\omega_1 + \dots + \omega_n$ ) et le coefficient devant ce terme sera la factorielle de  $n$ . En effet, pour que le lecteur s'en convainque, la réponse sous une somme de trois harmoniques est

$$\begin{aligned} y(t) = & H_1(\omega_1) e^{i\omega_1 t} + H_1(\omega_2) e^{i\omega_2 t} + H_1(\omega_3) e^{i\omega_3 t} \\ & + H_2(\omega_1, \omega_1) e^{i2\omega_1 t} + H_2(\omega_2, \omega_2) e^{i2\omega_2 t} + H_2(\omega_3, \omega_3) e^{i2\omega_3 t} \\ & + 2H_2(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} + 2H_2(\omega_1, \omega_3) e^{i(\omega_1 + \omega_3)t} + 2H_2(\omega_2, \omega_3) e^{i(\omega_2 + \omega_3)t} \\ & + H_3(\omega_1, \omega_1, \omega_1) e^{i3\omega_1 t} + H_3(\omega_2, \omega_2, \omega_2) e^{i3\omega_2 t} + H_3(\omega_3, \omega_3, \omega_3) e^{i3\omega_3 t} \\ & + 3H_3(\omega_1, \omega_1, \omega_2) e^{i(2\omega_1 + \omega_2)t} + 3H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_2) e^{i(\omega_1 + 2\omega_2)t} \\ & + 3H_3(\omega_1, \omega_1, \omega_3) e^{i(2\omega_1 + \omega_3)t} + 3H_3(\omega_1, \omega_3, \omega_3) e^{i(\omega_1 + 2\omega_3)t} \\ & + 3H_3(\omega_2, \omega_2, \omega_3) e^{i(2\omega_2 + \omega_3)t} + 3H_3(\omega_2, \omega_3, \omega_3) e^{i(\omega_2 + 2\omega_3)t} \\ & + 6H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) e^{i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t} \\ & + \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Le noyau de Volterra  $H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  multiplie bien la réponse à la somme des fréquences d'excitations soit ( $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ ) et le coefficient devant ce terme est  $3! = 6$ .

C'est ainsi que les noyaux de Volterra peuvent être identifiés grâce à la méthode "*Harmonic Probing*".

### 2.1.2.2 Méthode paramétrique

Cette méthode paramétrique a été imaginée par G.M. Lee en 1997 [5]. Le mot paramétrique vient du fait que l'identification complète des HFRF passera par l'intermédiaire de l'identification des paramètres du système.

Cette méthode peut se décrire sous les différentes étapes suivantes :

1. Supposer une forme paramétrée de l'équation du mouvement régissant le problème
2. Lier les HFRF aux paramètres du système
3. Identifier les HFRF (sur une diagonale) à l'aide de simulations
4. Identifier les paramètres du système
5. Construire les HFRF dans l'espace complet

Afin de rendre cette méthode plus compréhensible, les différentes étapes sont illustrées à l'aide d'un exemple.

### Étape 1 : Supposer une forme paramétrée de l'équation du mouvement régissant le problème

La première étape consiste à choisir l'équation du mouvement régissant le problème. On fait donc une hypothèse sur la forme de la non-linéarité. Plusieurs questions peuvent se poser. S'agit-il d'une non-linéarité provenant de la raideur et/ou de l'amortissement ? Cette non-linéarité a-t-elle une forme polynomiale ? etc.

Dans l'exemple considéré ici, l'équation du mouvement à la forme suivante :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + k_2y^2 + k_3y^3 = x(t) \quad (2.16)$$

La forme de la non-linéarité est polynomiale avec un terme quadratique et cubique. De plus, cette non-linéarité s'applique uniquement à la réponse  $y(t)$  du système, on n'observe par exemple pas de terme non linéaire pour la dérivée de la réponse.

Cette première étape indique déjà une première différence comparée à la première méthode "Harmonic Probing". En effet, ici on fait une hypothèse sur l'équation régissant le système, ce qui n'était pas le cas précédemment.

Afin de simplifier la suite, l'équation du mouvement (2.16) peut être écrite comme :

$$\mathcal{D}[y] + k_2y^2 + k_3y^3 = x(t) \quad (2.17)$$

Où  $\mathcal{D}$  représente l'opérateur linéaire.

### Étape 2 : Lier les HFRF aux paramètres du système

La deuxième étape consiste à trouver des expressions analytiques pour les HFRF en fonctions des paramètres du système. C'est-à-dire, des fonctions du type

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = f(m, c, k, k_2, k_3)$$

Pour ce faire, la méthode des équations linéaires associées va être employée. Cette méthode consiste à écrire l'équation du mouvement non linéaire du système (2.17) en une série de sous-systèmes agissant en parallèle. Chaque sous-système va permettre d'établir une relation analytique pour les HFRF.

Dans un premier temps, grâce à la série de Volterra, on peut écrire

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}[x(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \quad (2.18)$$

Afin de trouver les équations linéaires associées, on va remplacer l'excitation  $x(t)$  par une excitation  $\gamma x(t)$ . La réponse du système s'écrit alors

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n y_n \quad (2.19)$$

Enfin, si on injecte cette expression dans l'équation du mouvement (2.17), on trouve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \mathcal{D}[y_n] + k_2 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n y_n \right]^2 + k_3 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n y_n \right]^3 = \gamma x(t) \quad (2.20)$$

Si on développe les différents termes entre crochets, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \mathcal{D}[y_n] + k_2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \gamma^{n_1+n_2} y_{n_1} y_{n_2} + k_3 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_3=1}^{\infty} \gamma^{n_1+n_2+n_3} y_{n_1} y_{n_2} y_{n_3} = \gamma x(t) \quad (2.21)$$



Les équations linéaires associées peuvent être obtenue en identifiant les coefficients devant les puissances de  $\gamma$ . Le résultat de cette identification jusqu'au troisième ordre donne le système d'équations suivant :

$$\mathcal{D}[y_1] = x(t) \quad (2.22)$$

$$\mathcal{D}[y_2] = -k_2 y_1^2 \quad (2.23)$$

$$\mathcal{D}[y_3] = -2k_2 y_1 y_2 - k_3 y_1^3 \quad (2.24)$$

À partir de ces équations, il est possible de trouver les équations analytiques des HFRF en utilisant les définitions de Schetzen [2]. Par souci de clarté et pour ne pas perdre le lecteur, seuls les résultats finaux sont présentés. Le développement mathématique pour trouver ces expressions est donné à l'Annexe B.

Les expressions analytiques reliant les noyaux de Volterra aux paramètres du système jusqu'au troisième ordre sont :

$$H_1(\omega_1) = [-m\omega_1^2 + ic\omega_1 + k]^{-1} \quad (2.25)$$

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = -k_2 H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)H_1(\omega_1 + \omega_2) \quad (2.26)$$

$$H_3^{sym}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \left[ \frac{2}{3}k_2^2 [H_1(\omega_1 + \omega_2) + H_1(\omega_1 + \omega_3) + H_1(\omega_2 + \omega_3)] - k_3 \right] \times \\ H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)H_1(\omega_3)H_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \quad (2.27)$$

Logiquement, le noyau  $H_1(\omega_1)$  ne dépend que des paramètres linéaires du système. On voit également que le noyau  $H_2(\omega_1, \omega_2)$  dépend linéairement du paramètre non linéaire  $k_2$ . S'il n'y a pas de non-linéarité quadratique dans le système, ce noyau disparaît. Enfin, le troisième noyau a été symétrisé, ce qui illustre l'applicabilité de la propriété de symétrie des noyaux de Volterra.

Dans ce travail, ces expressions ont été trouvées à l'aide des définitions proposées par Schetzen et grâce aux équations linéaires associées. À titre de comparaison, ces mêmes expressions peuvent être trouvées dans la littérature à l'aide d'autres méthodes [6], [7], [8] et [9].

Un exemple a été utilisé afin de valider ces expressions. On sort ici quelques instants de notre objectif pour identifier les paramètres du système en supposant que ceux-ci sont connus.

Pour valider ces expressions, on va simuler la réponse du système (2.16) à l'aide du solveur *ode45* de MATLAB et comparer ces simulations aux résultats obtenus analytiquement grâce au système de Volterra. Il est possible d'exprimer la réponse du système (2.16) soumis à une excitation cosinusoidale du type

$$x(t) = A \cos(\omega t) = \frac{A}{2} e^{i\omega t} + \frac{A}{2} e^{-i\omega t} \quad (2.28)$$

La réponse sous cette excitation peut s'exprimer, en utilisant la propriété de symétrie, comme :

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_n(t) + \dots \quad (2.29)$$

Avec

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) \left( \frac{A}{2} e^{i\omega(t-\tau_1)} + \frac{A}{2} e^{-i\omega(t-\tau_1)} \right) d\tau_1 \\
&= H_1(\omega) \frac{A}{2} e^{i\omega t} + H_1(-\omega) \frac{A}{2} e^{-i\omega t}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
&= H_2(\omega, \omega) \left( \frac{A}{2} \right)^2 e^{i2\omega t} + 2H_2(\omega, -\omega) \left( \frac{A}{2} \right)^2 + H_2(-\omega, -\omega) \left( \frac{A}{2} \right)^2 e^{-i2\omega t}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^n C_k^n H_{n,k} \left( \frac{A}{2} \right)^n e^{-i(n-2k)\omega t} \quad \text{Où} \quad H_{n,k} = H(\omega, \omega, \dots, \underbrace{-\omega, -\omega, \dots}_k, \underbrace{\omega, \omega, \dots}_n) \tag{2.32}$$

En utilisant la propriété de symétrie des noyaux de Volterra, la réponse s'écrit alors

$$\begin{aligned}
y(t) &= H_1(\omega) \left( \frac{A}{2} \right) e^{i\omega t} + H_1(-\omega) \left( \frac{A}{2} \right) e^{-i\omega t} \\
&\quad + H_2(\omega, \omega) \left( \frac{A}{2} \right)^2 e^{i2\omega t} + H_2(-\omega, -\omega) \left( \frac{A}{2} \right)^2 e^{-i2\omega t} \\
&\quad + 2H_2(\omega, -\omega) \left( \frac{A}{2} \right)^2 \\
&\quad + H_3(\omega, \omega, \omega) \left( \frac{A}{2} \right)^3 e^{i3\omega t} + H_3(-\omega, -\omega, -\omega) \left( \frac{A}{2} \right)^3 e^{-i3\omega t} \\
&\quad + 3H_3(\omega, \omega, -\omega) \left( \frac{A}{2} \right)^3 e^{i\omega t} + 3H_3(\omega, -\omega, -\omega) \left( \frac{A}{2} \right)^3 e^{-i\omega t} + \dots
\end{aligned} \tag{2.33}$$

De plus, sachant qu'un nombre complexe peut s'écrire sous la forme :

$$z = |z| e^{i\angle z} \tag{2.34}$$

On peut donc réécrire l'expression suivante à l'aide de cette définition ainsi que de la définition du *cosinus* :

$$z e^{i\omega t} + z^* e^{-i\omega t} = |z| e^{i(\omega t + \angle z)} + |z| e^{-i(\omega t + \angle z)} = 2|z| \cos(\omega t + \angle z) \tag{2.35}$$

En faisant intervenir la propriété de symétrie des conjugués, il est alors possible de réécrire l'équation (2.33) :

$$\begin{aligned}
y(t) &= 2|H_1(\omega)| \left( \frac{A}{2} \right) \cos(\omega t + \angle H_1(\omega)) \\
&\quad + 2|H_2(\omega, \omega)| \left( \frac{A}{2} \right)^2 \cos(2\omega t + \angle H_2(\omega, \omega)) \\
&\quad + 2H_2(\omega, -\omega) \left( \frac{A}{2} \right)^2 \\
&\quad + 2|H_3(\omega, \omega, \omega)| \left( \frac{A}{2} \right)^3 \cos(3\omega t + \angle H_3(\omega, \omega, \omega)) \\
&\quad + 6|H_3(\omega, \omega, -\omega)| \left( \frac{A}{2} \right)^3 \cos(\omega t + \angle H_3(\omega, \omega, -\omega)) + \dots
\end{aligned} \tag{2.36}$$

C'est cette dernière expression que nous utilisons afin de valider les expressions  $H_n$  trouvées précédemment.

Les paramètres sont, pour rappel, a priori connus afin de procéder à notre validation. Les paramètres considérés sont repris dans la table ci-dessous.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
m [kg]	1.0	$T_{max}$ [s]	3.14
c [Ns/m]	20.0	A [N]	0.3 & 0.9
k [N/m]	$1.0 \times 10^4$	f [Hz]	5 à 25
$k_2$ [N/m <sup>2</sup> ]	$1.0 \times 10^7$		
$k_3$ [N/m <sup>3</sup> ]	$5.0 \times 10^9$		

TABLE 2.1 – Paramètres utilisés lors de la validation

Les réponses dans le domaine fréquentiel ont été obtenues par application de l'algorithme *Fast Fourier Transform* (FFT) pour des amplitudes d'excitations de 0.3 N et 0.9 N. La fréquence d'excitation a été échantillonnée de 5 Hz à 25 Hz par pas de 0.2 Hz. Les résultats obtenus sont les suivants :

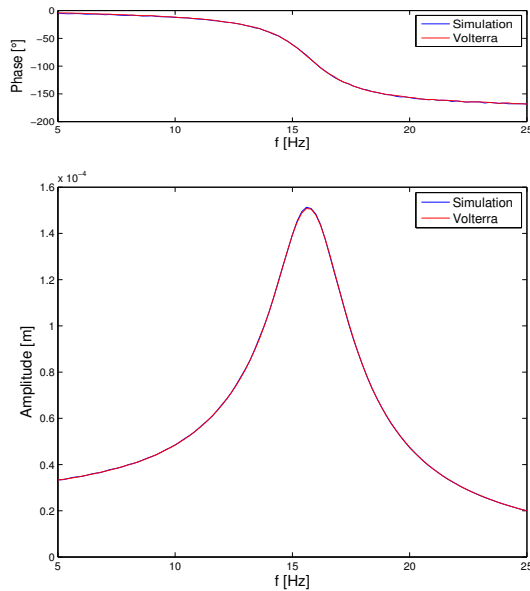


FIGURE 2.6 – Phase et amplitude de la réponse pour A=0.3 N

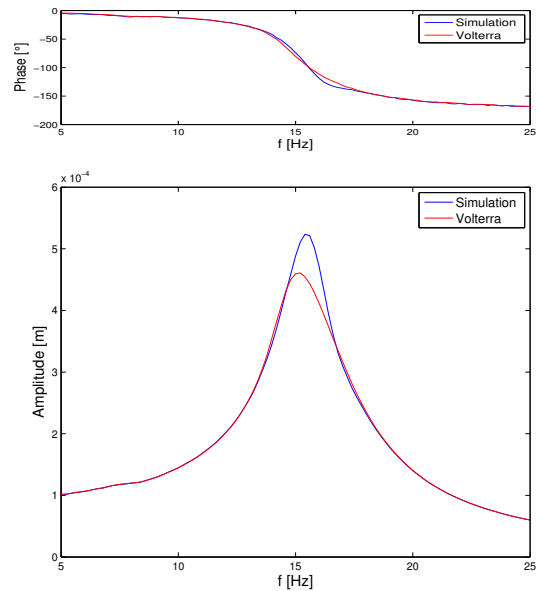


FIGURE 2.7 – Phase et amplitude de la réponse pour A=0.9 N

L'analyse de ces résultats nous montre que l'approximation de Volterra est très précise et donc que les expressions des HFRF sont correctes. Cependant, une différence notable autour de la fréquence de résonance s'observe dans le cas où l'amplitude de l'excitation vaut 0.9 N. Cette différence vient du fait que la série de Volterra ne converge pas dans cette gamme de fréquences. En effet, comme expliqué précédemment, la série de Volterra possède quelques limitations et notamment sur le niveau maximum d'excitation.

Afin d'expliquer la divergence de la série de Volterra par rapport à la réponse obtenue par simulation, il est utile de regarder quand cette série converge. Pour ce faire, on définit un critère simple de convergence tel que les termes de la série de Volterra (2.36) soient de plus en plus petits. C'est-à-dire :

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} < 1 \quad (2.37)$$

Où  $y_n$  représente le  $n^{\text{ième}}$  terme de la série de Volterra, i.e. le terme devant  $\left(\frac{A}{2}\right)^n$ .

Ainsi, pour les deux cas considérés, il est possible de regarder pour chaque fréquence si l'amplitude de l'excitation considérée satisfait ou non ce critère. Seulement les trois premiers termes de la série de Volterra ont été considérés. Ainsi, deux critères ont pu être déduits :

$$A < 2 \times \frac{|H_1(\omega)| \cos(\omega t + \angle H_1(\omega))}{|H_2(\omega, \omega)| \cos(2\omega t + \angle H_2(\omega, \omega)) + H_2(\omega, -\omega)} \quad (2.38)$$

$$A < 2 \times \frac{|H_2(\omega, \omega)| \cos(2\omega t + \angle H_2(\omega, \omega)) + H_2(\omega, -\omega)}{|H_3(\omega, \omega, \omega)| \cos(3\omega t + \angle H_3(\omega, \omega, \omega)) + 3|H_3(\omega, \omega, -\omega)| \cos(\omega t + \angle H_3(\omega, \omega, -\omega))} \quad (2.39)$$

Les membres de droites de ces critères sont représentés graphiquement ci-dessous. Lorsque l'amplitude  $A$  (ligne horizontale rouge ou noire) est sous le critère quelque soit la fréquence  $\omega$ , le critère est vérifié.

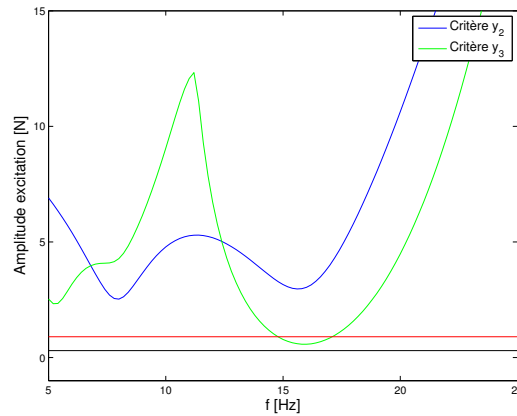


FIGURE 2.8 – Critère sur l'amplitude de l'excitation

Ce résultat confirme ce qu'on a pu apercevoir précédemment. En effet, on voit que pour une amplitude d'excitation de  $0.3 N$ , la série converge pour toutes les fréquences. En effet, l'amplitude d'excitation de  $0.3N$  (barre noire horizontale) est en dessous des deux critères de convergence. En revanche, pour une fréquence d'excitation de  $0.9 N$ , la série ne converge pas pour des fréquences autour de la fréquence d'excitation. En effet, le critère sur le troisième terme de la série de Volterra est violé, i.e. pour une excitation de  $0.9 N$  à une fréquence entre  $15$  et  $17 Hz$ , le troisième terme de la série de Volterra est plus grand que le deuxième terme, d'où la divergence par rapport aux résultats obtenus par simulation.

Il est également intéressant de discuter de la forme des critères obtenus. Commençons par le critère sur le deuxième terme de Volterra (courbe bleue). On observe un minimum à la fréquence d'excitation (environ  $15 Hz$ ). En effet, dans l'expression du critère (2.38), lorsque  $\omega$  est à la fréquence d'excitation, le rapport entre le numérateur et le dénominateur est de l'ordre de  $\frac{1}{H_1(\omega)}$ . Ceci est dû au fait de l'expression de  $H_2(\omega, \omega)$ , où on y retrouve  $H_1(\omega)^2$ . Toujours pour ce critère, on remarque également un minimum à la moitié de la fréquence d'excitation (environ  $7.5 Hz$ ). En effet, le rapport entre le numérateur et le dénominateur du critère est de l'ordre de  $\frac{1}{H_1(\frac{\omega}{2})}$ . Ceci est toujours dû à l'expression de  $H_2(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2})$ . En effet, dans cette expression, on retrouve le terme  $H_1(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2})$  qui est donc égal à  $H_1(\omega)$ . On sait que la fonction atteint un pic à ce moment, dès lors, étant au dénominateur, le critère atteint un minimum.

La même réflexion peut être portée pour le critère sur le troisième terme de la série de Volterra (2.39). On retrouvera des minima à la fréquence d'excitation, à la moitié et au tiers de la fréquence d'excitation.

### Étape 3 : Identifier les HFRF à l'aide de simulations

Reprenons à présent notre méthode d'identification des HFRF, c'est-à-dire où nous pouvons interroger un

système dynamique a priori inconnu de façon à construire un modèle de Volterra qui le représentera. À ce stade, les HFRF sont toujours inconnus, on a pour le moment uniquement trouvé des relations entre les HFRF et les paramètres du système.

Le but de cette étape va justement être de trouver les HFRF mais uniquement à un endroit bien précis de l'espace. Cette étape constitue une autre différence par rapport à la méthode "Harmonic Probing" où les HFRF étaient connus directement dans tout l'espace. Ici, les HFRF vont dans un premier temps être identifiés dans une *partie* de l'espace. Par exemple, avec la méthode "Harmonic Probing", on aurait obtenu la fonction  $H_2(\omega_1, \omega_2)$  dans tout l'espace  $(\omega_1, \omega_2)$  comme illustré à la Figure 2.9. La méthode paramétrique permet à cette étape d'identifier  $H_2$  à un endroit précis de l'espace, par exemple  $H_2(\omega_1, \omega_1)$  (cf. Figure 2.10).

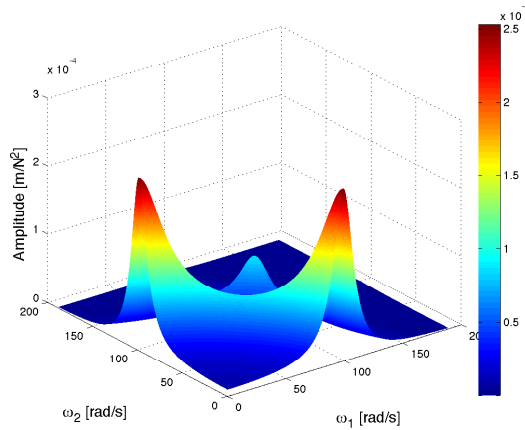


FIGURE 2.9 –  $H_2(\omega_1, \omega_2)$

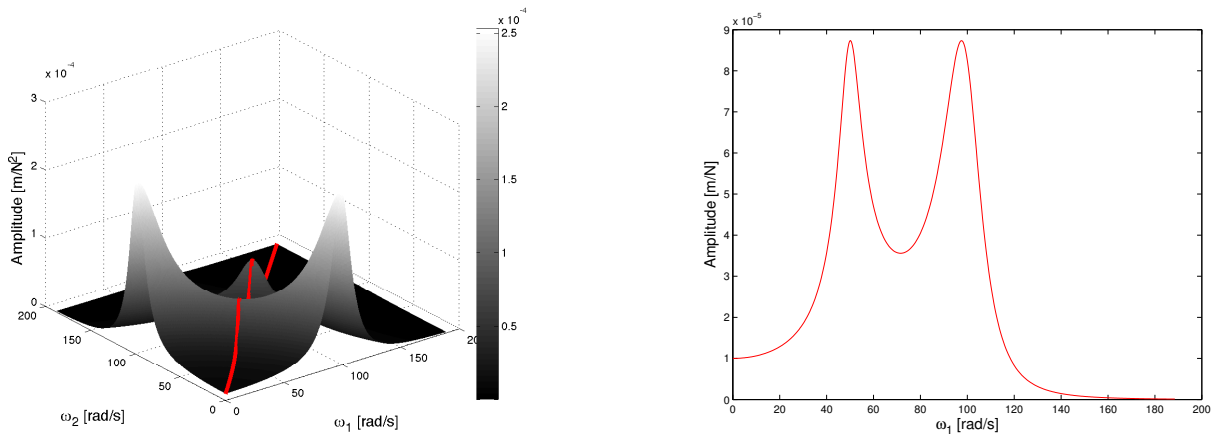


FIGURE 2.10 –  $H_2(\omega_1, \omega_1)$

Il convient à présent d'établir une méthode afin d'identifier ces HFRF à un endroit de l'espace. Le but ici est de minimiser les HFRF à identifier et de trouver le plus directement les informations dont on a besoin.

Si on analyse les relations analytiques liant les paramètres du système aux HFRF ((2.25)-(2.27)), on s'aperçoit qu'avec  $H_1(\omega_1)$  et  $H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , on peut obtenir tous les paramètres du système. La fonction  $H_1(\omega_1)$  permettra d'obtenir les paramètres linéaires  $m$ ,  $c$  et  $k$ , tandis que  $H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  permettra d'identifier les paramètres  $k_2$  et  $k_3$ .

Le but est donc d'identifier  $H_1$  et  $H_3$ . Pour ce faire, Lee propose d'écrire la solution du système à la

fréquence d'excitation soumis à une excitation harmonique du type  $x(t) = A \cos(\omega t)$  [5], soit

$$Y(\omega) = AH_1(\omega) + \frac{3}{4}A^3H_3(\omega, \omega, -\omega) + \frac{5}{8}A^5H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega) + \dots + \frac{C_{(n-1)}^n}{2^{n-1}}A^nH_{n, \frac{(n-1)}{2}} + \dots \quad (2.40)$$

Avec,  $H_{n, \frac{(n-1)}{2}} = H(\omega, \omega, \dots, \underbrace{-\omega, -\omega, \dots}_{\frac{(n-1)}{2}})$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n$

Les fonctions  $H_1(\omega)$ ,  $H_3(\omega, \omega, -\omega)$ ,  $H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega)$ , etc. sont a priori inconnues. On remarque également que cette expression dépend de l'amplitude d'excitation  $A$ . Afin de trouver les HFRE, l'idée est d'obtenir plusieurs réponses  $Y(\omega)$  pour différentes valeurs d'amplitude d'excitation  $A$  et de construire un système afin de trouver les HFRE. G.M. Lee propose de tronquer la réponse jusque  $H_5$  et d'utiliser trois réponses différentes (donc trois amplitudes différentes). On peut donc former le système suivant :

$$\begin{bmatrix} Y_{A_1}(\omega) \\ Y_{A_2}(\omega) \\ Y_{A_3}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \frac{3}{4}A_1^3 & \frac{5}{8}A_1^5 \\ A_2 & \frac{3}{4}A_2^3 & \frac{5}{8}A_2^5 \\ A_3 & \frac{3}{4}A_3^3 & \frac{5}{8}A_3^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(\omega) \\ H_3(\omega, \omega, -\omega) \\ H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Où  $Y_i(\omega)$  est la réponse du système à la fréquence d'excitation  $\omega$  et  $i = A_1, A_2, A_3$  est l'amplitude de l'excitation.

Disposant de trois réponses obtenues par exemple à l'aide d'un logiciel éléments finis si on est en train de questionner un système complexe, il est possible de trouver les fonctions  $H_1(\omega)$ ,  $H_3(\omega, \omega, -\omega)$  et  $H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega)$ .

Afin de valider cette méthode, l'exemple présenté à l'étape 2 a été repris. C'est-à-dire, qu'un système a été construit avec les paramètres de la Table 2.1.2.2 et la méthode d'identification a été testée pour voir si elle donnait les mêmes paramètres que ceux choisis.

Ainsi, avant de résoudre le système (2.41), il a fallu simuler trois réponses pour trois amplitudes différentes. Dans cet exemple, des amplitudes de 0.3, 0.6 et 0.9  $N$  ont été choisies. Ces trois réponses sont représentées à la figure ci-dessous.

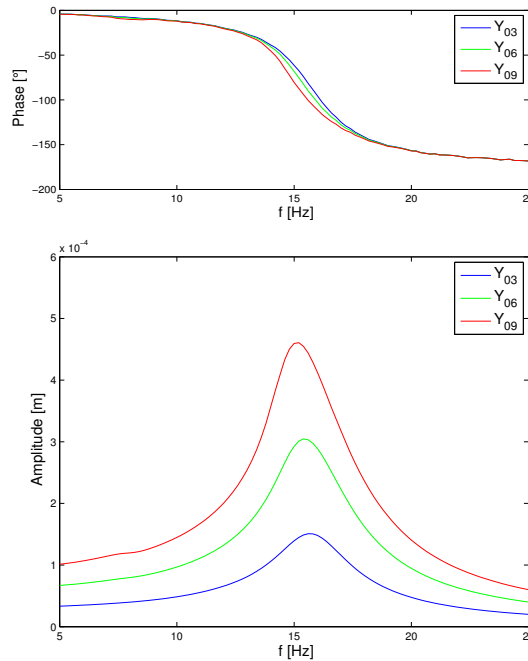


FIGURE 2.11 – Réponses  $Y_{A1}$ ,  $Y_{A2}$  et  $Y_{A3}$  utilisées pour résoudre le système

Une fois ces réponses connues, le système (2.41) peut être résolu, ce qui donne les résultats ci-dessous

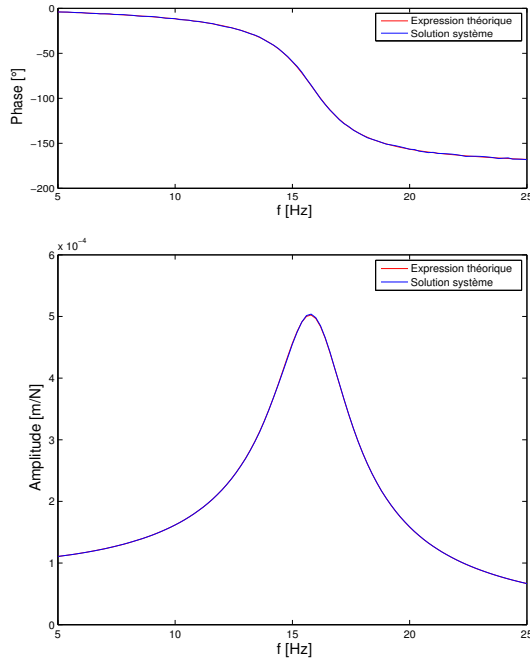


FIGURE 2.12 – Phase et amplitude de  $H_1(\omega)$

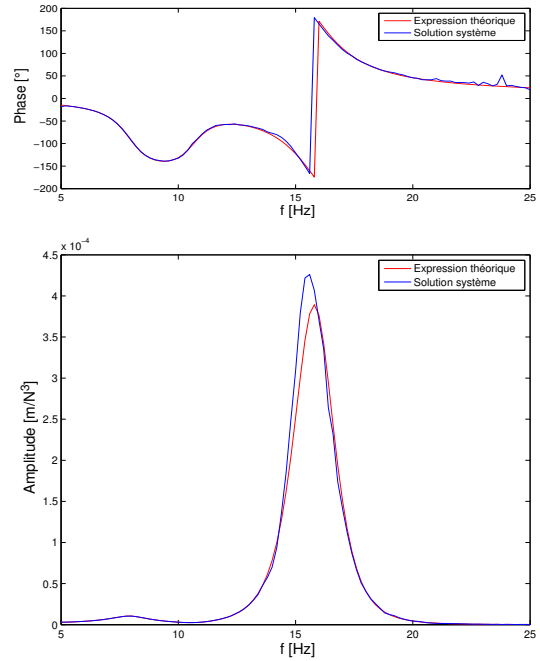


FIGURE 2.13 – Phase et amplitude de  $H_3(\omega, \omega, -\omega)$

La courbe bleue représente les HFRF obtenus grâce aux équations analytiques ((2.25)-(2.27)) et avec les paramètres choisis. Tandis que la courbe rouge représente les HFRF obtenus en résolvant le système (2.41).

Le bon accord montre que les HFRF peuvent être identifiés précisément. Ces HFRF peuvent donc être utilisés pour identifier les paramètres du système. Ce sera l'objet de l'étape suivante.

#### Étape 4 : Identifier les paramètres du système

Maintenant que les HFRF ont été obtenus, on peut identifier les paramètres du système à l'aide des équations analytiques obtenues à l'étape 2.

Commençons par l'identification des paramètres linéaires. L'expression de  $H_1(\omega)$  est, comme nous l'avons déjà démontré :

$$H_1(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k} \quad (2.42)$$

Les paramètres linéaires  $m$ ,  $c$  et  $k$  peuvent donc être trouvés en résolvant le système surdéterminé suivant :

$$\begin{bmatrix} -\omega_1^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_2^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Re[H_1(\omega_1)^{-1}] \\ Im[H_1(\omega_1)^{-1}] \\ Re[H_1(\omega_2)^{-1}] \\ Im[H_1(\omega_2)^{-1}] \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Intéressons-nous à présent aux paramètres non linéaires  $k_2$  et  $k_3$ . On a vu que la connaissance de  $H_3(\omega, \omega, -\omega)$  permettait d'identifier ces paramètres. Si on utilise l'équation (2.27), on trouve :

$$H_3(\omega, \omega, -\omega) = H_1(\omega)^3 H_1(-\omega) \left[ \frac{2}{3} k_2^2 H_1(2\omega) + \frac{4k_2^2}{3k_1} - k_3 \right] \quad (2.44)$$

Dans cette expression, la fonction  $H_1(2\omega)$  est inconnue. Cependant, la résolution du système (2.43) a permis de trouver les paramètres linéaires. Dès lors, en se servant de ces paramètres fraîchement identifiés, il est possible de trouver  $H_1(2\omega)$  grâce à la relation analytique (2.25). On a,

$$H_1(2\omega) = \frac{1}{-m(2\omega)^2 + ic(2\omega) + k} \quad (2.45)$$

On peut procéder de la même manière pour trouver  $H_1(-\omega)$ . Tous les HFRF de l'équation (2.44) sont alors connus et seuls les paramètres  $k_2$  et  $k_3$  restent à trouver. De même que pour l'identification des paramètres linéaires, il est possible de former un système à résoudre à partir de l'équation (2.44), soit

$$\begin{bmatrix} \text{Re}[H_1(2\omega_1)] & 1 \\ \text{Im}[H_1(2\omega_1)] & 0 \\ \text{Re}[H_1(2\omega_2)] & 1 \\ \text{Im}[H_1(2\omega_2)] & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}k_2^2 \\ \frac{4k_2^2}{3k} - k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}\left[\frac{H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)}{H_1(\omega_1)^3 H_1(-\omega_1)}\right] \\ \text{Im}\left[\frac{H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)}{H_1(\omega_1)^3 H_1(-\omega_1)}\right] \\ \text{Re}\left[\frac{H_3(\omega_2, \omega_2, -\omega_2)}{H_1(\omega_2)^3 H_1(-\omega_2)}\right] \\ \text{Im}\left[\frac{H_3(\omega_2, \omega_2, -\omega_2)}{H_1(\omega_2)^3 H_1(-\omega_2)}\right] \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

En résolvant ces systèmes, les paramètres du système sont dès lors connus. Les résultats obtenus pour notre exemple, i.e. en utilisant les HFRF des Figures 2.12 et 2.13, sont repris dans la table ci-dessous.

Paramètre	Valeur exacte	Valeur estimée ( $A_1=0.3, A_2=0.6, A_3=0.9$ )	Erreur relative [%]
m	1.0	1.000	0.04
c	20.0	20.015	0.08
k	$1.0 \times 10^4$	$1.000 \times 10^4$	0.005
$k_2$	$1.0 \times 10^7$	$1.000 \times 10^7$	0.04
$k_3$	$5.0 \times 10^9$	$4.771 \times 10^9$	4.6

TABLE 2.2 – Résultats identification

Les paramètres du système sont donc correctement identifiés. En effet, ces valeurs estimées sont très proches des valeurs utilisées lors des simulations. La méthode semble donc efficace.

De plus, il est intéressant de noter qu'une simulation avec une amplitude d'excitation de  $0.9 N$  a été utilisée. Or l'étape 2, nous avons montré que la série de Volterra ne convergeait pas autour de la fréquence de résonance pour cette valeur d'amplitude d'excitation. Malgré cette divergence, les paramètres du système ont été correctement identifiés. La méthode montre donc qu'elle fonctionne même lorsque la série de Volterra ne converge pas. Il s'agit d'un résultat important qui démontre l'avantage d'utiliser cette méthode pour l'identification des paramètres du système. En effet, cette méthode d'identification est dans une moindre mesure indépendante de la convergence ou non de la série de Volterra.

### Étape 5 : Construire les HFRF dans l'espace complet

La dernière étape consiste à construire complètement les HFRF, i.e. dans tout l'espace et non plus sur une diagonale uniquement. Grâce aux paramètres obtenus à l'étape précédente, il est possible de se servir des équations analytiques ((2.25)-(2.27)) afin d'identifier les HFRF. Commençons simplement par représenter les HFRF obtenus à l'aide des paramètres identifiés. Les fonctions  $H_1(\omega)$  et  $H_3(\omega, \omega, -\omega)$  sont représentées ci-dessous.



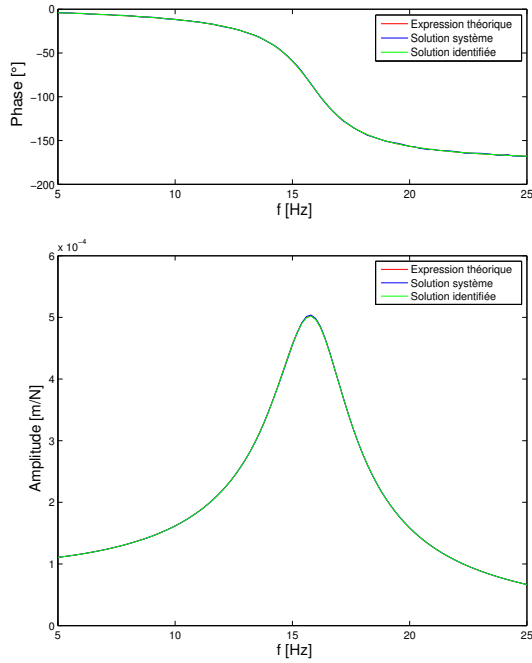


FIGURE 2.14 – Phase et amplitude de  $H_1(\omega)$

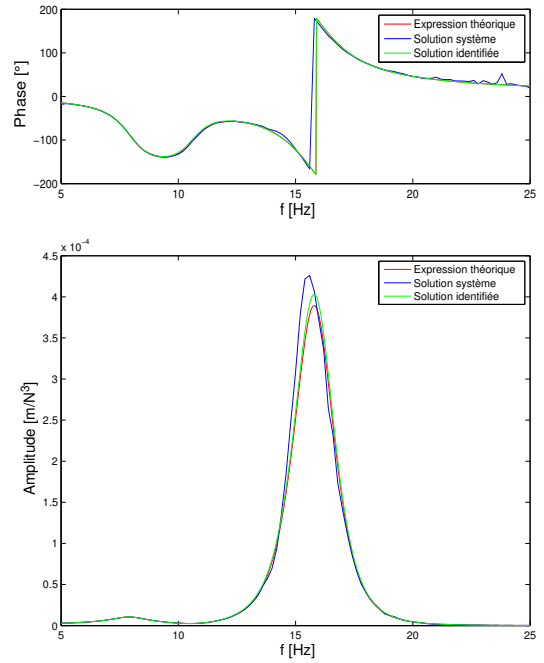


FIGURE 2.15 – Phase et amplitude de  $H_3(\omega, \omega, -\omega)$

On voit que la courbe verte, celle qui est tracée à l'aide des paramètres identifiés, est très proche de la courbe rouge qui est la courbe théorique. C'est le résultat que l'on cherche.

Il est également possible de tracer ces courbes dans tout l'espace. On peut par exemple trouver la fonction  $H_2(\omega_1, \omega_2)$  à l'aide des paramètres identifiés. On trouve,

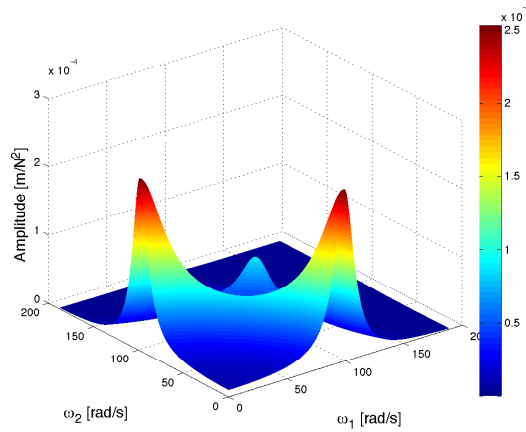


FIGURE 2.16 –  $H_2(\omega_1, \omega_2)$

Les HFRF étant connus dans tout l'espace, la série de Volterra peut à présent être utilisée pour étudier la réponse d'un système soumis à n'importe quelle excitation.

### 2.1.2.3 Discussion de la méthode paramétrique

Il serait intéressant d'examiner le système (2.41) proposé par G.M. Lee et de le modifier afin de voir l'influence de la forme du système à résoudre sur les résultats. Il serait par exemple intéressant de limiter au maximum les réponses du système dont on a besoin pour résoudre le système. En effet, on sait que les simulations prennent du temps pour obtenir les résultats escomptés. C'est d'ailleurs le but de ce travail, remplacer les

simulations par une solution analytique. Donc au plus on limite les simulations, au mieux le temps de calcul se réduira. De plus, sachant que, dans l'exemple choisi, seuls  $H_1$  et  $H_3$  sont nécessaires pour identifier tous les paramètres du système, on va réduire le système (2.41) à simplement deux équations. Ainsi, seulement deux simulations sont nécessaires pour pouvoir résoudre le système. Ce premier système réduit constitue le premier test que nous allons effectuer et a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} Y_{A_1}(\omega) \\ Y_{A_2}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \frac{3}{4}A_1^3 \\ A_2 & \frac{3}{4}A_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(\omega) \\ H_3(\omega, \omega, -\omega) \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Il est également intéressant d'examiner l'ajout de termes dans l'équation (2.40) et donc l'influence d'un système avec plus d'équations. Par exemple pour un deuxième test, on pourrait augmenter le nombre d'équations à 5, et donc résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} Y_{A_1}(\omega) \\ Y_{A_2}(\omega) \\ Y_{A_3}(\omega) \\ Y_{A_4}(\omega) \\ Y_{A_5}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \frac{3}{4}A_1^3 & \frac{5}{8}A_1^5 & \frac{35}{64}A_1^7 & \frac{63}{128}A_1^9 \\ A_2 & \frac{3}{4}A_2^3 & \frac{5}{8}A_2^5 & \frac{35}{64}A_2^7 & \frac{63}{128}A_2^9 \\ A_3 & \frac{3}{4}A_3^3 & \frac{5}{8}A_3^5 & \frac{35}{64}A_3^7 & \frac{63}{128}A_3^9 \\ A_4 & \frac{3}{4}A_4^3 & \frac{5}{8}A_4^5 & \frac{35}{64}A_4^7 & \frac{63}{128}A_4^9 \\ A_5 & \frac{3}{4}A_5^3 & \frac{5}{8}A_5^5 & \frac{35}{64}A_5^7 & \frac{63}{128}A_5^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(\omega) \\ H_3(\omega, \omega, -\omega) \\ H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega) \\ H_7(\omega, \omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega, -\omega) \\ H_9(\omega, \omega, \omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega, -\omega, -\omega) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Enfin, un dernier test consiste à examiner l'influence de tronquer la série jusqu'au deuxième terme, mais cette fois-ci en considérant un système surdéterminé. Il s'agit donc d'un cas intermédiaire entre le premier test effectué, à savoir tronquer la série au maximum, et le deuxième test qui consiste à utiliser plus de trois simulations. Ce test est intéressant, car il permet d'effacer un défaut du système (2.48) qui concerne le conditionnement de la matrice contenant les amplitudes d'excitation. En effet, dans le système (2.48), on voit apparaître des termes où l'amplitude d'excitation possède un exposant 9. Si l'amplitude d'excitation est petite, ces éléments seront proches de zéro, ce qui pourrait poser un problème lors de la résolution du système. Ainsi, ce dernier test permet de pallier ce défaut, tout en gardant un nombre de simulations important. La forme du système pour le test numéro 3 est la suivante :

$$\begin{bmatrix} Y_{A_1}(\omega) \\ Y_{A_2}(\omega) \\ Y_{A_3}(\omega) \\ Y_{A_4}(\omega) \\ Y_{A_5}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \frac{3}{4}A_1^3 \\ A_2 & \frac{3}{4}A_2^3 \\ A_3 & \frac{3}{4}A_3^3 \\ A_4 & \frac{3}{4}A_4^3 \\ A_5 & \frac{3}{4}A_5^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(\omega) \\ H_3(\omega, \omega, -\omega) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Un résumé de ces différents tests est repris dans la table ci-dessous :

	Équations	Inconnues	Amplitudes d'excitation $[N]$
Test 1	2	2 : ( $H_1, H_3$ )	0.3, 0.9
Test 2	5	5 : ( $H_1, H_3, H_5, H_7, H_9$ )	0.1, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2
Test 3	5	2 : ( $H_1, H_3$ )	0.1, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2

TABLE 2.3 – Différents tests effectués

Si on procède aux différentes étapes de la méthode paramétrique, on identifie les paramètres du système pour les trois tests différents, on obtient :

Paramètre	Valeur exacte	Test 1 Valeur estimée	Test 2 Valeur estimée	Test 3 Valeur estimée
m	1.0	1.000	1.000	1.000
c	20.0	19.987	20.021	19.853
k	$1.0 \times 10^4$	$9.999 \times 10^3$	$1.000 \times 10^4$	$9.984 \times 10^3$
$k_2$	$1.0 \times 10^7$	$1.004 \times 10^7$	$1.015 \times 10^7$	$1.006 \times 10^7$
$k_3$	$5.0 \times 10^9$	$5.099 \times 10^9$	$4.700 \times 10^9$	$5.400 \times 10^9$

TABLE 2.4 – Résultats identification

Peu de différences entre les résultats existent. Un système ne possédant que deux équations semble fonctionner. Le but étant de limiter au maximum le nombre de simulations, il est donc préférable de tronquer au maximum le système.

Cependant, il faut tout de même noter qu'un système avec deux équations sera beaucoup plus dépendant des réponses  $Y(\omega)$  que l'on choisit contrairement à un système avec plus d'équations. En effet, le choix des réponses  $Y(\omega)$  utilisées pour identifier les HFRF conditionne très fortement les résultats. Justement, étudions l'influence que ces réponses ont sur l'identification des paramètres.

Afin de comprendre le problème, le système choisi pour identifier les HFRF sera le système composé de deux équations (2.47). Dans ce système, seules deux simulations sont nécessaires pour le résoudre. Il est dès lors possible d'effectuer une étude paramétrique et d'examiner comment les réponses  $Y(\omega)$  influencent l'identification.

Cette étude paramétrique est conduite de cette manière : on fixe l'amplitude d'excitation  $A_1$  et on fait varier l'amplitude d'excitation  $A_2$ . Pour chaque valeur de  $A_2$ , il est possible de tracer l'erreur relative des paramètres  $m$ ,  $c$ ,  $k$ ,  $k_2$  et  $k_3$  qui ont été identifiés par rapport aux valeurs réelles de ces paramètres. On peut ensuite recommencer pour une autre valeur d'amplitude  $A_1$ . Les résultats obtenus pour des amplitudes d'excitation  $A_1$  égales à 0.03, 0.3 et 0.9 N sont présentés aux figures ci-dessous.

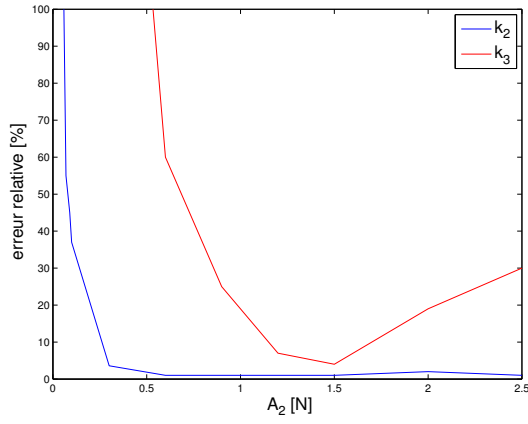


FIGURE 2.17 –  $A_1 = 0.03$

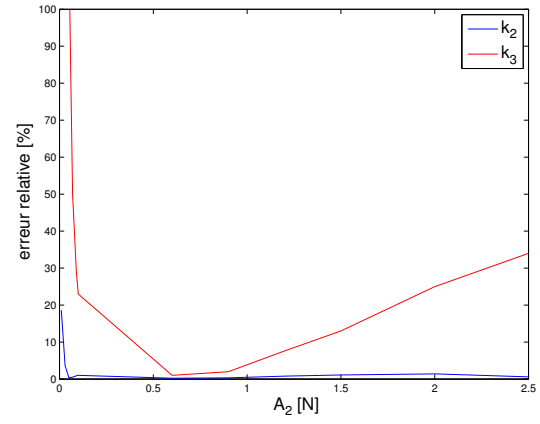


FIGURE 2.18 –  $A_1 = 0.3$

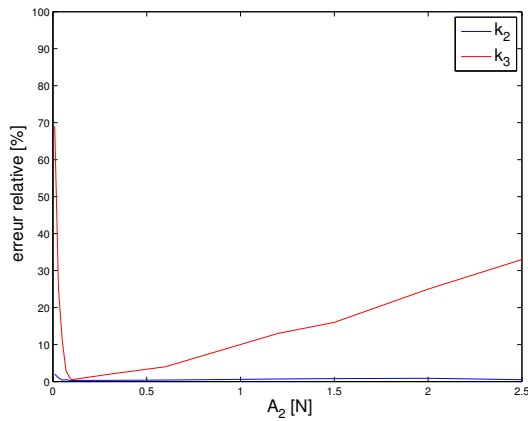


FIGURE 2.19 –  $A_1 = 0.9$

Seules les erreurs pour les paramètres non linéaires  $k_2$  et  $k_3$  sont présentés. En effet, les erreurs pour les paramètres linéaires étaient tout le temps inférieures à 1%, peu importe les amplitudes choisies.

La première remarque que l'on peut faire est que la méthode paramétrique ne marche pas lorsque les deux amplitudes  $A_1$  et  $A_2$  sont faibles. En effet, dans ces conditions, la non-linéarité n'est pas assez activée pour pouvoir l'identifier. Il serait alors utile de pouvoir quantifier cette non-linéarité afin de choisir les amplitudes en fonction de cette valeur. Pour rappel, une des applications de la série de Volterra permet de tester la non-linéarité d'un système. En effet, plus un système est faiblement non linéaire, plus les termes d'ordre supérieur à 1 seront petits. Dès lors, afin de quantifier la non-linéarité du système, une méthode consiste à calculer le rapport  $y_1$  sur  $y_2$  de la série de Volterra (2.1). Ce rapport  $\frac{y_1}{y_2}$ , pour une valeur d'amplitude d'excitation, peut être représenté en fonction de  $\omega$ . Les résultats suivants illustrent les rapports  $\frac{y_1}{y_2}$  pour des amplitudes d'excitation de 0.03, 0.3 et 0.9 N.

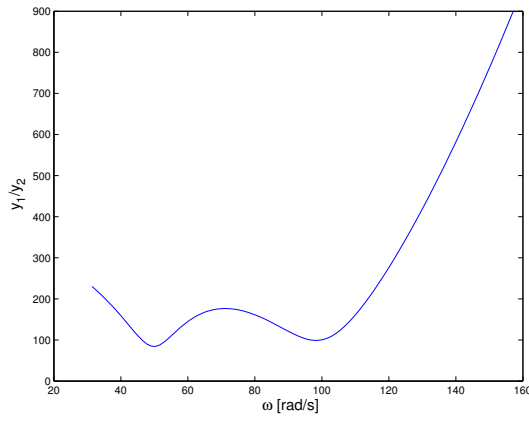


FIGURE 2.20 –  $A_1 = 0.03$

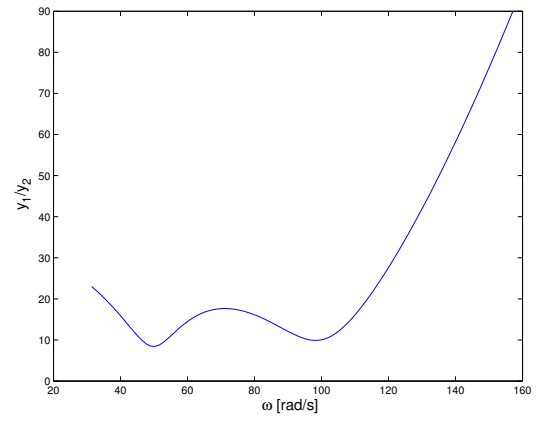


FIGURE 2.21 –  $A_1 = 0.3$

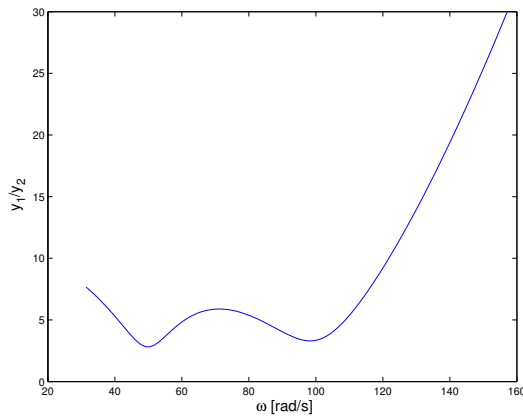


FIGURE 2.22 –  $A_1 = 0.9$

On s'aperçoit que pour une amplitude d'excitation  $A_1 = 0.03 \text{ N}$ , le rapport est supérieur à 100. La non-linéarité ne joue donc pas un grand rôle dans ce cas. Ça confirme donc que pour une amplitude trop faible, le comportement du système se rapproche d'un comportement linéaire. D'ailleurs, lorsqu'on réalise l'identification avec des amplitudes  $A_1$  et  $A_2$  de 0.03 et 0.05 respectivement, on trouve le résultat suivant pour la fonction  $H_3(\omega, \omega, -\omega)$  :

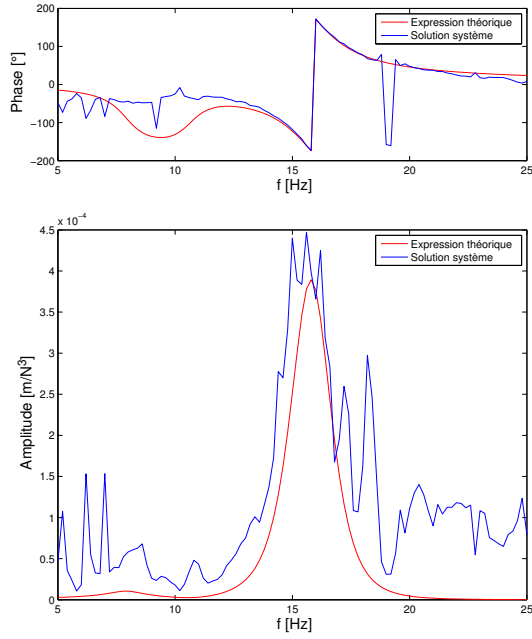


FIGURE 2.23 –  $H_3(\omega, \omega, -\omega)$  pour  $A_1 = 0.03$  et  $A_2 = 0.05$

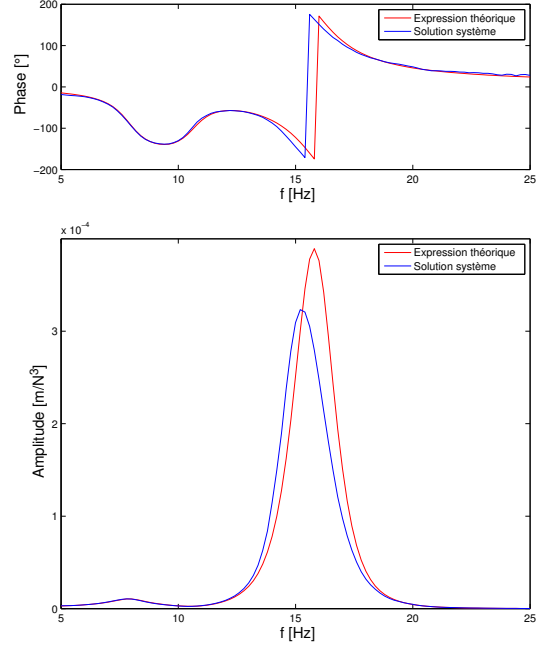


FIGURE 2.24 –  $H_3(\omega, \omega, -\omega)$  pour  $A_1 = 0.3$  et  $A_2 = 0.9$

Les résultats obtenus ne correspondent pas du tout avec la solution analytique. Beaucoup de bruit numérique apparaît dans la solution. En revanche, lorsqu'on réalise l'identification avec des amplitudes de 0.3 et 0.9  $N$ , on obtient les résultats présents à la Figure 2.24. Ces résultats dans ce dernier cas sont bien meilleurs. Les courbes sont plus lisses. Si on prête suffisamment attention au graphique, on peut remarquer un peu de bruit aux extrémités. En effet, à cet endroit, le rapport  $\frac{y_1}{y_2}$  redevient grand. En conclusion, on veillera à choisir des amplitudes d'excitation conduisant globalement à un rapport  $\frac{y_1}{y_2}$  autour de 10. Dans ce cas, la méthode d'identification marche correctement et la non-linéarité est captée facilement.

À la Figure 2.24, on observe cependant une différence entre le  $H_3$  identifié et la solution analytique. Ceci vient du fait que la série diverge à cet endroit. Pour rappel, la série de Volterra ne convergeait pas autour de la fréquence propre lorsque l'amplitude d'excitation valait 0.9  $N$ . Cependant, l'identification n'a a priori pas posé de problème malgré cette divergence. Il faut toutefois noter qu'une trop grande divergence entraîne une mauvaise identification des paramètres. En effet, si on observe la Figure 2.19, on voit que lorsque les deux amplitudes d'excitation sont élevées, l'erreur relative augmente. Certes la non-linéarité sera bien activée, mais la série divergera fortement. Ce phénomène conduit dès lors à une identification erronée.

Lors du choix des réponses  $Y(\omega)$  (et donc des amplitudes) il faut dès lors faire un compromis entre des amplitudes d'excitation élevées afin de capter la non-linéarité, mais pas trop élevées non plus au risque que la série de Volterra ne diverge trop.

Cependant, il est toujours mieux de prendre des amplitudes trop élevées que pas assez. En effet, si les amplitudes sont trop faibles, il est certain que la non-linéarité ne sera pas captée correctement. Lorsque l'amplitude est plus élevée, certes la série va diverger, mais il est toujours possible d'ignorer l'information autour de la fréquence d'excitation lors de la résolution de notre système d'identification. Ce dernier cas sera illustré lors de la première application au Chapitre 3.

Afin de quantifier cette convergence de la série et de décider s'il faut ignorer l'information autour de la fréquence d'excitation, une étude plus approfondie est présentée à la section suivante.

#### 2.1.2.4 Convergence de la série

Un passage concernant la convergence de la série de Volterra a déjà été écrit dans ce travail. Cependant, les critères établis étaient spécifiques à l'exemple étudié. Ici, on approfondit ces critères pour d'autres paramètres.

Avant de discuter de cette convergence, il est nécessaire d'établir quelques mots de vocabulaire. Par abus de langage, le terme convergence est ici employé afin de décrire que les premiers termes de la série de Volterra diminuent les uns par rapport aux autres. Au sens strict du terme, la convergence s'applique à la série infinie et non à une série tronquée. Or, ce qui nous intéresse dans ce travail, c'est d'obtenir la réponse du système avec uniquement les premiers termes de la série de Volterra. En d'autres mots, imaginons que la série de Volterra ne converge pas au sens strict du terme, mais que les trois premiers termes de la série diminuent les uns par rapport aux autres, notre approximation est tout de même valable. On veut donc que les premiers termes de notre série soient plus ou moins corrects et que les termes d'ordre supérieurs ne soient que de faibles ajustements. Cette propriété est appelée asymptoticité. C'est bien cette propriété que l'on cherche à avoir. Dans la suite de ce travail, le terme convergence sera confondu avec cette propriété.

Les critères de convergence seront sur le principe les mêmes que ceux déjà établis. C'est-à-dire, on va examiner les termes de la série de Volterra et regarder s'ils sont bien plus petits les uns par rapport aux autres. On aura alors deux critères, la série convergera si

$$\frac{y_1}{y_2} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{y_2}{y_3} > 1 \quad \text{soit} \quad y_1 > y_2 > y_3$$

Il est correct de se limiter uniquement aux premiers termes de la série. En effet, si les premiers termes ne convergent pas, la suite de la série n'aidera pas et il est impossible de retrouver une convergence malgré l'ajout de termes d'ordre supérieur. De plus, les problèmes considérés dans ce travail sont faiblement non linéaires. Ainsi, les termes d'ordres supérieurs tendent a priori vers 0.

Les critères que nous allons trouver seront valables lorsque l'entrée du système est une simple harmonique, car pour notre identification, c'est la réponse sous un tel chargement qui nous intéresse. Cependant un raisonnement similaire peut être réalisé pour n'importe quelle entrée.

Avant de proposer les critères de convergence, il serait utile au préalable d'exprimer les paramètres sous forme adimensionnelle. En effet, cette démarche permettrait d'unifier et de réduire les critères de convergence.

L'idée est de mettre le système (2.16), soumis à une charge harmonique  $x(t) = A \cos(\omega t)$ , sous forme adimensionnelle. Si on définit un temps et un déplacement caractéristiques suivants :

$$\tau = \omega_n t \quad \eta = \frac{k}{A} y$$

Où  $\omega_n$  est la fréquence propre du système. Il est alors possible d'écrire ce système comme

$$\eta''(\tau) + 2\xi\eta'(\tau) + \eta(\tau) + \alpha_2\eta^2(\tau) + \alpha_3\eta^3(\tau) = \cos(r\tau) \quad (2.50)$$

Avec,

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \xi = \frac{c}{2\omega_n m} \quad \alpha_2 = \frac{A k_2}{k} \quad \alpha_3 = \left(\frac{A}{k}\right)^2 \frac{k_3}{k}$$

A présent, on peut étudier la convergence de la série en fonction des paramètres  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  et  $\xi$ . Pour ce faire, on écrit d'abord la réponse de Volterra sous forme adimensionnelle également. On a,

$$y(\tau) = y_1(\tau) + y_2(\tau) + y_3(\tau) + \dots \quad (2.51)$$

Où,

$$y_1(\tau) = |H_1(r)| \cos(r \tau + \angle H_1(r)) \quad (2.52)$$

$$y_2(\tau) = \frac{1}{2} |H_2(r, r)| \cos(2r \tau + \angle H_2(r, r)) + \frac{1}{2} H_2(r, -r) \quad (2.53)$$

$$y_3(\tau) = \frac{1}{4} |H_3(r, r, r)| \cos(3r \tau + \angle H_3(r, r, r)) + \frac{3}{4} |H_3(r, r, -r)| \cos(r \tau + \angle H_3(r, r, -r)) \quad (2.54)$$

Avec les noyaux adimensionnels suivants :

$$H_1(r) = [-r^2 + i2\xi r + 1]^{-1} \quad (2.55)$$

$$H_2(r_1, r_2) = -\alpha_2 H_1(r_1) H_1(r_2) H_1(r_1 + r_2) \quad (2.56)$$

$$H_3^{sym}(r_1, r_2, r_3) = \left[ \frac{2}{3} \alpha_2^2 [H_1(r_1 + r_2) + H_1(r_1 + r_3) + H_1(r_2 + r_3)] - \alpha_3 \right] \times H_1(r_1) H_1(r_2) H_1(r_3) H_1(r_1 + r_2 + r_3) \quad (2.57)$$

Maintenant qu'il est possible de calculer les réponses  $y_1(\tau)$ ,  $y_2(\tau)$  et  $y_3(\tau)$ , on va pouvoir examiner la convergence de la série. En effet, pour une valeur de l'amortissement  $\xi$  donnée, il est possible de calculer les rapports  $\frac{y_1}{y_2}$  et  $\frac{y_2}{y_3}$  pour différentes valeurs de  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ .

Pour commencer, on va prendre la même valeur d'amortissement que l'exemple traité jusqu'à maintenant, soit  $\xi = 0.1$ . Les rapports  $\frac{y_1}{y_2}$  et  $\frac{y_2}{y_3}$  sont représentés ci-dessous.

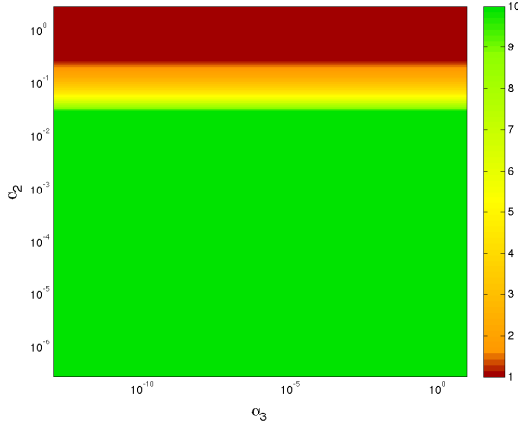


FIGURE 2.25 – Rapport  $\frac{y_1}{y_2}$  pour  $\xi = 0.1$

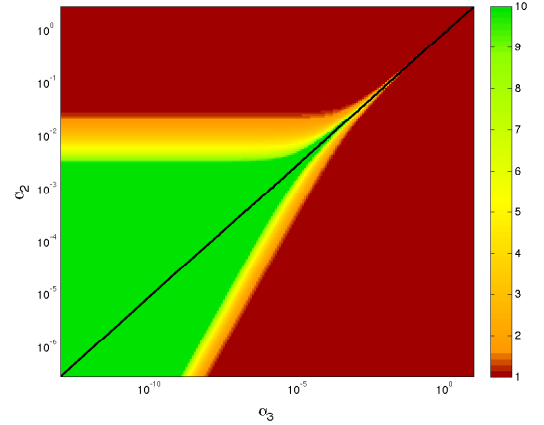


FIGURE 2.26 – Rapport  $\frac{y_2}{y_3}$  pour  $\xi = 0.1$

Ces graphiques donnent une bonne indication de la convergence de la série. En effet, si la valeur est inférieure à 1, la série diverge. Sur la Figure 2.25, on voit que ce rapport diminue au fur et à mesure que  $\alpha_2$  augmente. Ceci est très logique, car  $\alpha_2$  se trouve au dénominateur et plus on augmente sa valeur, plus la non-linéarité augmente et la série diverge.

La Figure 2.26 montre également que plus on augmente  $\alpha_2$  ou  $\alpha_3$ , plus la convergence de la série devient difficile. On note cependant une zone (représentée par la ligne noire) où le rapport  $\frac{y_2}{y_3}$  augmente. À cet endroit, la valeur de  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  se compensent, ce qui permet de diminuer la réponse  $y_3$ . En effet, si on observe le noyau  $H_3$ , on voit que  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  possèdent un signe opposé. Il existe donc une combinaison particulière où  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  se combinent et permettent d'augmenter le rapport, et donc permet une meilleure convergence de la série. La relation entre ces deux paramètres à pu être calculée, on a

$$\log(\alpha_2) = 0.5 \log(\alpha_3) - 0.023 \quad (2.58)$$



Par exemple, regardons cet effet lorsque nous fixons  $\alpha_2$  à  $10^{-1}$  et lorsqu'on fait varier  $\alpha_3$ , on trouve

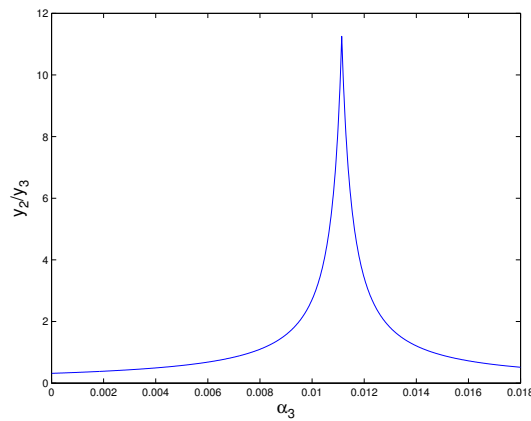


FIGURE 2.27 – Rapport  $\frac{y_2}{y_3}$  pour  $\xi = 0.1$  et  $\alpha_2$  à  $10^{-1}$

On voit sur cette figure que le rapport est inférieur à 1 presque partout, car  $\alpha_2$  est relativement élevé. Mais, on observe bien le pic attendu pour la valeur de  $\alpha_3 = 0.011$  calculée grâce à la relation (2.58). Ainsi, malgré que  $\alpha_2$  soit élevé, et que la série ne semble pas convergée, pour une valeur précise de  $\alpha_3$ , on retrouve une augmentation du critère et donc à cet endroit la convergence de la série redevient possible.

A présent, on peut se questionner sur le moment où  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  seront tellement élevés, que même lorsqu'on prend la combinaison entre ces deux paramètres ça ne suffise plus pour que la série converge. En d'autres termes, il s'agit ici d'étudier les valeurs du rapport  $\frac{y_2}{y_3}$  sur la diagonale noire de la Figure 2.26. Ces valeurs pour différentes valeurs d'amortissement  $\xi$  sont représentées à la figure ci-dessous.

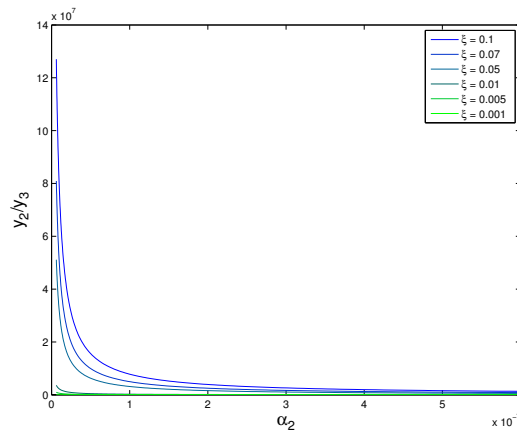


FIGURE 2.28 – Rapport  $\frac{y_2}{y_3}$  sur la diagonale

On s'aperçoit que les valeurs du rapport évoluent en  $\frac{1}{\alpha_2}$ . Il existe une grande différence entre les résultats pour des taux d'amortissements différents. En effet, pour un amortissement  $\xi = 0.01$ , la série aura beaucoup plus de mal pour converger que lorsque l'amortissement  $\xi$  vaut 0.1. En effet, dans ce premier cas, les amplitudes peuvent être plus petites pour arriver aux mêmes résultats que dans le cas d'un système avec plus d'amortissement. Dès lors, la série divergera plus rapidement dans le cas d'un système avec un faible amortissement.

De manière à n'avoir qu'un seul critère de convergence pour une valeur de  $\xi$  donnée, il est utile de rassembler les critères des Figures 2.25 et 2.26 ensemble. Il suffit en réalité de prendre le minimum des deux. De cette

manière, on obtient le critère de convergence présent à la Figure 3.12 pour un amortissement de 0.1.

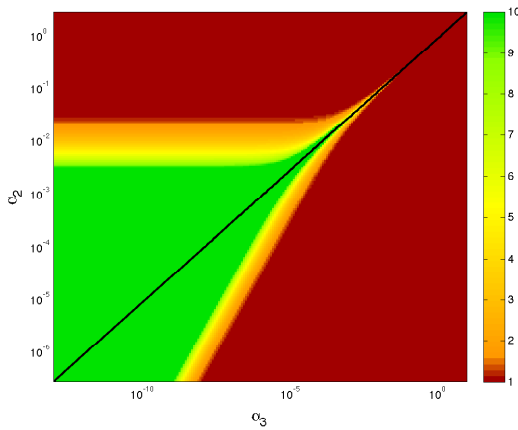


FIGURE 2.29 – Critère de convergence pour  $\xi = 0.1$

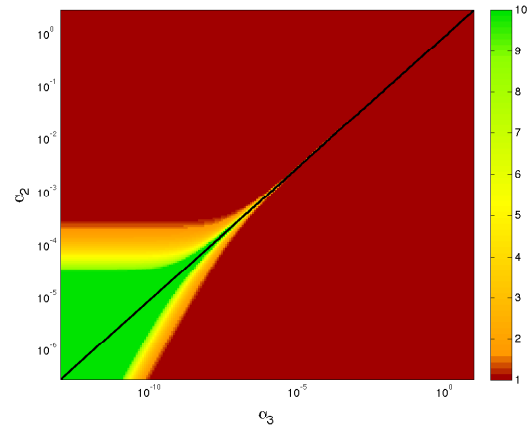


FIGURE 2.30 – Critère de convergence pour  $\xi = 0.01$

On note peu de différence entre ce graphique et le critère sur le rapport  $\frac{y_2}{y_3}$ . C'est tout simplement, car ce critère était plus restrictif dans ce cas. En réalité, il est relativement difficile de le voir sur la figure, mais le critère  $\frac{y_1}{y_2}$  va agir sur la diagonale noire là où la valeur de  $\alpha_2$  est élevée. En effet, si on compare les valeurs du critère  $\frac{y_2}{y_3}$  et celle du nouveau critère, on voit que pour des  $\alpha_2$  élevés, on ne peut plus bénéficier de la combinaison entre  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ , car le rapport  $\frac{y_1}{y_2}$  est alors plus contraignant. De manière à illustrer ces propos, on réalise un zoom dans le critère de convergence donné par le rapport  $\frac{y_2}{y_3}$  et le nouveau critère qui considère le minimum des deux rapports, on trouve

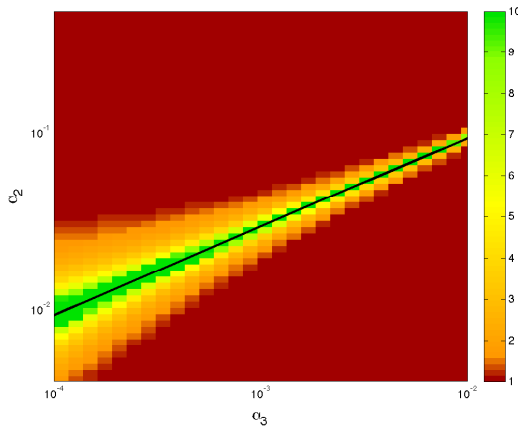


FIGURE 2.31 – Zoom du critère de convergence donné par le rapport  $\frac{y_2}{y_3}$

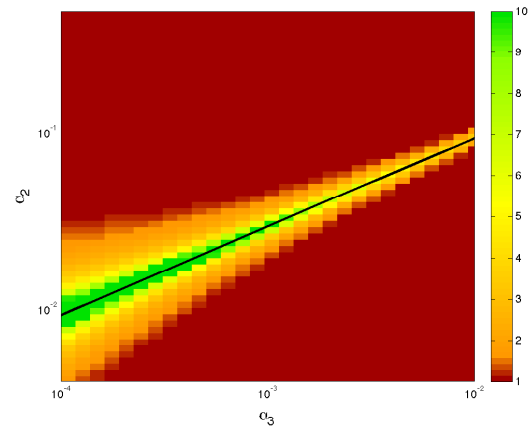


FIGURE 2.32 – Zoom du critère de convergence donné par le minimum des rapports  $\frac{y_2}{y_3}$  et  $\frac{y_1}{y_2}$

On voit sur la Figure 2.32 que le critère est plus restrictif comparé au simple critère  $\frac{y_2}{y_3}$ .

La Figure 2.30 montre le même critère de convergence, mais cette fois-ci pour un  $\xi = 0.01$ . On voit immédiatement que la convergence sera beaucoup plus difficile dans le cas d'un système avec un faible amortissement. L'application du câble du pont suspendu sur le détroit d'Akashi présentera un système avec un faible amortissement et la démarche à adopter pour de tels systèmes.

### 2.1.2.5 Utilisation de la méthode paramétrique

Afin de conclure le développement pour un système à un degré de liberté, des indications quant à l'utilisation de la méthode paramétrique sont données.

Les différents critères donnés ci-avant dans ce travail se basaient sur la connaissance des paramètres du système. Or, la méthode paramétrique sera utilisée justement pour trouver les paramètres qui sont inconnus. Dès lors, afin de choisir quelles réponses  $Y(\omega)$  (et surtout quelles amplitudes d'excitation) utiliser pour l'identification des paramètres, un nouveau critère doit être trouvé et ce critère ne doit pas dépendre des paramètres du système.

On a montré l'importance d'utiliser des amplitudes d'excitation qui sollicitaient suffisamment le système afin d'activer sa non-linéarité. Dans ce cas, la méthode paramétrique portait ses fruits. La première étape pour l'utilisation de la méthode paramétrique va être de repérer pour quelles amplitudes d'excitation la non-linéarité influence les résultats. Pour ce faire, on peut tracer l'écart-type de la réponse  $Y(\omega)$  en fonction de l'amplitude d'excitation. Les résultats pour l'exemple traité jusqu'à présent (Table 2.1.2.2) sont représentés à la figure ci-dessous.

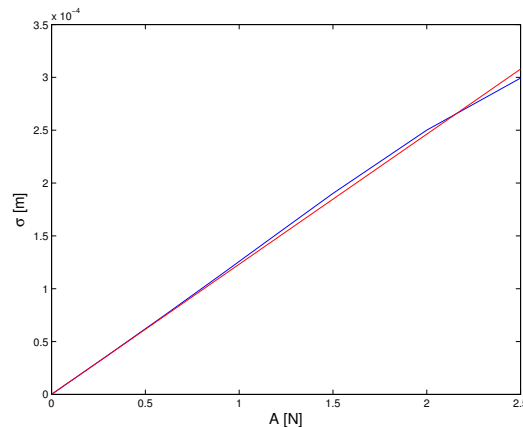


FIGURE 2.33 – Écart-type de la réponse  $Y(\omega)$  en fonction de l'amplitude d'excitation  $A$

La ligne rouge représente le cas d'un système linéaire. On voit que l'écart-type commence à diverger de cette ligne rouge lorsque l'amplitude d'excitation atteint  $0.6\text{ N}$ . Dès lors, les amplitudes d'excitation utilisées lors de l'identification des paramètres devront être choisies autour de cette valeur. Pour rappel, des valeurs de  $0.3$ ,  $0.6$  et  $0.9\text{ N}$  avaient été choisies et la méthode paramétrique montrait de très bons résultats.

Une fois les amplitudes d'excitation choisies, la méthode paramétrique peut être utilisée. Une fois les paramètres obtenus, il est possible de reconstruire la réponse  $Y(\omega)$  grâce à ces paramètres et d'ensuite la comparer à la réponse  $Y(\omega)$  obtenue par simulation. Il faut cependant garder à l'esprit que la série peut diverger et donc il faut en tenir compte lors de la comparaison des deux solutions.

Afin de résumer, ces différentes étapes sont reprises ci-dessous :

1. Simuler les réponses d'un système soumis à différentes valeurs d'excitation à l'aide, par exemple, d'un logiciel éléments finis.
2. Examiner l'écart-type des réponses obtenues par simulation en fonction des amplitudes d'excitation et repérer pour quelles amplitudes la non-linéarité devient notable.
3. Utiliser la méthode paramétrique afin d'identifier les paramètres du système à l'aide des simulations pour des valeurs d'amplitude d'excitation proche de celles trouvées à l'étape 2.
4. Reconstruire les réponses du système grâce au système de Volterra et des paramètres fraîchement identifiés.

5. Comparer ces réponses aux réponses obtenues grâce aux simulations en gardant à l'esprit deux points :
  - Si l'amplitude est trop faible, le système aura un comportement linéaire et il ne sera pas possible de vérifier que les paramètres non linéaires sont corrects
  - La série de Volterra peut diverger, donc il est normal dans ce cas de retrouver une différence entre la réponse obtenue par Volterra et celle obtenue par simulation.

Cette démarche conclut le développement du système de Volterra pour un système à un degré de liberté. La suite de ce travail présente la série de Volterra pour un système à plusieurs degrés de liberté.

## 2.2 Plusieurs degrés de liberté

Dans cette section, la théorie de Volterra pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté est développée. La présence de plusieurs degrés de liberté compliquera assez les notations. Cette nomenclature sera donc expliquée en détail afin que le lecteur comprenne en un coup d'oeil ce qu'il est en train de lire.

Comme pour le système à un degré de liberté, la série de Volterra est d'abord définie. Ensuite, les méthodes "*Harmonic Probing*" et paramétrique pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté seront présentées.

### 2.2.1 Série de Volterra

La nomenclature et le développement de la série de Volterra, adoptés dans cette section, ont été inspirés par l'article [7]. Commençons d'ailleurs par donner quelques définitions afin de clarifier les notations.

Étant donné que le système possède plusieurs degrés de liberté, une réponse à chaque degré de liberté sera obtenue. Afin de distinguer ces réponses, un indice est ajouté, indiquant quel degré de liberté on observe. La réponse au degré de liberté  $j$  s'écrit alors :

$$y_j(t)$$

Comme déjà illustrée, la série possède une infinité de termes. Chaque terme de la série doit être dénoté. Ainsi, la notation choisie ici est un exposant entre parenthèses afin d'indiquer le numéro du terme de la série. Le  $n^{\text{ième}}$  terme de la série de Volterra pour la réponse au degré de liberté  $j$  s'écrit

$$y_j^{(n)}(t)$$

Ainsi, la réponse du degré de liberté  $j$  développé à l'aide d'une série de Volterra s'écrit

$$y_j(t) = y_j^{(1)}(t) + y_j^{(2)}(t) + y_j^{(3)}(t) + \dots + y_j^{(n)}(t) + \dots \quad (2.59)$$

Cette relation est similaire à l'expression (2.1) pour un système à un degré de liberté. Attention toutefois, pour le système à un degré de liberté, le  $n^{\text{ième}}$  terme était écrit à l'aide d'un indice et non d'un exposant comme pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Avant d'exprimer le terme  $y_j^{(n)}(t)$  de la série de Volterra, il reste à définir la nomenclature pour les noyaux de Volterra. En plus des deux notations précédentes, des indices sont ajoutés aux noyaux afin d'indiquer d'où proviennent les entrées. Afin de simplifier légèrement les développements, on ne considère ici que deux degrés de liberté. Par exemple, le noyau de Volterra du 4<sup>ième</sup> ordre mesuré au degré de liberté  $j$  et possédant trois entrées au degré de liberté 1 et une entrée au degré de liberté 2, s'écrit

$$h_{j:1112}^{(4)}$$

Maintenant que toute la nomenclature est définie, le terme  $y_j^{(n)}(t)$  peut être exprimé. Cette définition est valable une nouvelle fois pour deux entrées uniquement. On a,

$$\begin{aligned}
y_j^{(n)}(t) = & \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} y_{j:11\dots 11}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) x_1(t - \tau_1) \dots x_1(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\
& + \dots + \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} y_{j:11\dots 22}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) \dots x_2(t - \tau_{n-1}) x_2(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\
& + \dots + \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} y_{j:22\dots 22}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) x_2(t - \tau_1) \dots x_2(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Un développement jusqu'au troisième terme de cette série de Volterra pour un système à deux degrés de liberté est présenté à l'Annexe A.

Évidemment, cette série peut s'écrire dans le domaine fréquentiel. Le formalisme dans ce domaine est le suivant :

$$Y_j(\omega) = Y_j^{(1)}(\omega) + Y_j^{(2)}(\omega) + Y_j^{(3)}(\omega) + \dots + Y_j^{(n)}(\omega) + \dots \tag{2.61}$$

Où le terme  $Y_j^{(n)}(\omega)$  pour deux entrées peut s'écrire

$$\begin{aligned}
Y_j^{(n)}(\omega) = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} H_{j:11\dots 11}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega - \omega_1 - \dots - \omega_{n-1}) \\
& \times X_1(\omega_1) \dots X_1(\omega_{n-1}) X_1(\omega - \omega_1 - \dots - \omega_{n-1}) d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \\
& + \dots + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} H_{j:11\dots 22}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega - \omega_1 - \dots - \omega_{n-1}) \\
& \times X_1(\omega_1) X_1(\omega_2) \dots X_2(\omega_{n-1}) X_2(\omega - \omega_1 - \dots - \omega_{n-1}) d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \\
& + \dots + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} H_{j:22\dots 22}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega - \omega_1 - \dots - \omega_{n-1}) \\
& \times X_2(\omega_1) \dots X_2(\omega_{n-1}) X_2(\omega - \omega_1 - \dots - \omega_{n-1}) d\omega_1 \dots d\omega_{n-1}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Un développement de cette équation jusqu'au troisième ordre peut se trouver à l'Annexe A.

Intéressons-nous à présent à la propriété de symétrie des noyaux de Volterra. En effet, cette propriété semble cette fois-ci moins évidente, car des entrées proviennent de degrés de liberté différents. On ne retrouvera donc pas une symétrie totale pour les noyaux de Volterra lorsqu'on interchange les décalages temporels  $\tau_i$ . Malgré cela, il est possible de retrouver une symétrie, mais sur des sous-groupes de permutations de ces  $\tau_i$ . En effet, comme le démontre Worden dans son article [7], si on considère par exemple la réponse  $y_{j:112}^{(3)}$  du système, on a

$$y_{j:112}^{(3)} = \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{j:112}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) x_2(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \tag{2.63}$$

Dans cette expression, on s'aperçoit que cette réponse  $y_{j:112}^{(3)}$  est symétrique par rapport à une permutation de  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . En effet, sachant que le produit est commutatif, on retrouverait bien la même expression. En revanche, une permutation avec  $\tau_3$  n'est pas possible, car on permuerait les décalages temporels pour des entrées venant de deux degrés de liberté différents. Par exemple, si on permute  $\tau_1$  et  $\tau_3$ , on aurait

$$y_{j:112}^{(3)} = \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{j:112}^{(3)}(\tau_3, \tau_2, \tau_1) x_1(t - \tau_3) x_1(t - \tau_2) x_2(t - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \tag{2.64}$$

Et dans ce cas, on ne retrouve pas la même expression, car  $\tau_1$  agit sur l'entrée  $x_2$  au lieu de  $x_1$ . De ce fait, le noyau

$$h_{j: \underbrace{1\dots 1}_{n_1} \dots \underbrace{2\dots 2}_{n_2}}^{(n_1+n_2)}(\tau_1, \dots, \tau_{n_1}, \tau_{n_1+1}, \dots, \tau_{n_1+n_2}) \tag{2.65}$$

est symétrique pour les sous-groupes d'indices correspondants aux entrées  $x_1$  et  $x_2$  séparément. Par exemple, le noyau

$$h_{j:11122}^{(5)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)$$

est symétrique si on permute  $\tau_1, \tau_2$  et  $\tau_3$  entre eux et si on permute  $\tau_4$  avec  $\tau_5$ .

Connaissant cette propriété de symétrie, il est possible de simplifier légèrement les termes de la série de Volterra (2.59). Considérons dans un premier temps le deuxième terme de la série. Son expression a été développée à l'Annexe A.3 et moyennant un réarrangement des termes, Worden propose d'écrire la réponse comme [7] :

$$\begin{aligned} y_j^{(2)} = & \iint_{-\infty}^{\infty} h_{j:11}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \iint_{-\infty}^{\infty} [h_{j:12}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) + h_{j:21}^{(2)}(\tau_2, \tau_1)] x_1(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \iint_{-\infty}^{\infty} h_{j:22}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x_2(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (2.66)$$

La propriété de symétrie indique que le noyau  $h_{j:12}^{(2)}(\tau_1, \tau_2)$  est différent du noyau  $h_{j:21}^{(2)}(\tau_1, \tau_2)$ . Mais ici, le noyau présent dans le crochet de l'équation ci-dessus est  $h_{j:21}^{(2)}(\tau_2, \tau_1)$ . C'est-à-dire que le décalage  $\tau_2$  est associé à l'entrée  $x_2$  et le décalage  $\tau_1$  est associé à l'entrée  $x_1$ . Il en est de même pour le noyau  $h_{j:12}^{(2)}(\tau_1, \tau_2)$ . Dès lors, ces deux noyaux sont égaux :

$$h_{j:12}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) = h_{j:21}^{(2)}(\tau_2, \tau_1)$$

Et le deuxième terme de la série de Volterra s'écrit :

$$\begin{aligned} y_j^{(2)} = & \iint_{-\infty}^{\infty} h_{j:11}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + 2 \iint_{-\infty}^{\infty} h_{j:12}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x_1(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \iint_{-\infty}^{\infty} h_{j:22}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x_2(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (2.67)$$

Le même raisonnement pour le troisième terme de la série de Volterra peut être mené. On aurait,

$$h_{j:112}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = h_{j:121}^{(3)}(\tau_1, \tau_3, \tau_2) = h_{j:211}^{(3)}(\tau_3, \tau_1, \tau_2)$$

et

$$h_{j:122}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = h_{j:212}^{(3)}(\tau_2, \tau_1, \tau_3) = h_{j:221}^{(3)}(\tau_2, \tau_3, \tau_1)$$

On trouve alors l'expression simplifiée suivante :

$$\begin{aligned} y_j^{(3)} = & \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{j:111}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) x_1(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ & + 3 \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{j:112}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) x_2(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ & + 3 \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{j:122}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) x_2(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ & + \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{j:222}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_2(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) x_2(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Cette discussion sur la symétrie sera mise en évidence lorsque les noyaux de Volterra seront calculés à la section 2.2.2.2.

Maintenant que la série de Volterra a été définie, nous allons à présent discuter de l'identification des noyaux. Comme pour le système à un degré de liberté, la méthode "Harmonic Probing" est d'abord discutée, ensuite la méthode paramétrique est présentée.

## 2.2.2 Identification des HFRF

### 2.2.2.1 "Harmonic Probing"

Cette méthode pour un système à un degré de liberté proposée par *Bedrosian et Rice* [4] a été étendue pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté par *Worden et al.* [7]. Une vue d'ensemble de cette méthode est présentée dans cette section. Le passage d'un système à un degré de liberté vers un système plus complexe comportant plusieurs degrés de liberté pourra donc être montré.

L'idée est la même que précédemment. La méthode consiste à exciter le système avec une somme d'harmonique dans le but d'identifier successivement les HFRF. La difficulté d'un système à plusieurs degrés de liberté repose sur les entrées multiples et le nombre de HFRF à identifier. Le nombre de simulations, utiles afin d'identifier les HFRF, augmente donc significativement comparé au cas d'un système à un degré de liberté.

La trame de la méthode reste la même, c'est-à-dire que les HFRF vont être identifiés successivement à partir du plus petit ordre. Les premiers HFRF à identifier sont donc les fonctions  $H_{1:1}^{(1)}(\omega)$ ,  $H_{1:2}^{(1)}(\omega)$ ,  $H_{2:1}^{(1)}(\omega)$  et  $H_{2:2}^{(1)}(\omega)$ . Comme pour le cas d'un système à un degré de liberté, ces fonctions peuvent être trouvées en excitant le système avec une simple harmonique. Considérons dans un premier temps l'entrée suivante :

$$x_1(t) = e^{i\omega t} \quad x_2(t) = 0$$

Sous cette entrée, on peut écrire la réponse du système à l'aide de la série de Volterra (2.59), on a pour le degré de liberté  $j$

$$y_j(t) = H_{j:1}^{(1)}(\omega) e^{i\omega t} + H_{j:11}^{(2)}(\omega, \omega) e^{i2\omega t} + H_{j:111}^{(3)}(\omega, \omega, \omega) e^{i3\omega t} + \dots \quad (2.69)$$

Il est donc possible d'identifier les noyaux  $H_{1:1}^{(1)}(\omega)$  et  $H_{2:1}^{(1)}(\omega)$ . De même, si on excite le système au deuxième degré de liberté avec une simple harmonique du type

$$x_1(t) = 0 \quad x_2(t) = e^{i\omega t}$$

On peut écrire la réponse du système grâce à la série de Volterra. On a,

$$y_j(t) = H_{j:2}^{(1)}(\omega) e^{i\omega t} + H_{j:22}^{(2)}(\omega, \omega) e^{i2\omega t} + H_{j:222}^{(3)}(\omega, \omega, \omega) e^{i3\omega t} + \dots \quad (2.70)$$

Dans cette réponse, on voit apparaître les noyaux  $H_{1:2}^{(1)}(\omega)$  et  $H_{2:2}^{(1)}(\omega)$ . Tous les noyaux du premier ordre sont, dès lors, connus. On peut passer à l'identification des noyaux du deuxième ordre.

À présent, une somme de deux harmoniques va être utilisée dans le but d'identifier les HFRF du deuxième ordre. Commençons par exciter uniquement le premier degré de liberté. L'excitation considérée est donc

$$x_1(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t} \quad x_2(t) = 0$$

De même que précédemment, on peut donc écrire la réponse du système à l'aide de la série de Volterra. On trouve,

$$\begin{aligned}
y_j(t) = & H_{j:1}^{(1)}(\omega_1) e^{i\omega_1 t} + H_{j:1}^{(1)}(\omega_2) e^{i\omega_2 t} \\
& + H_{j:11}^{(2)}(\omega_1, \omega_1) e^{i2\omega_1 t} + 2H_{j:11}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} + H_{j:11}^{(2)}(\omega_2, \omega_2) e^{i2\omega_2 t} \\
& + H_{j:111}^{(3)}(\omega_1, \omega_1, \omega_1) e^{i3\omega_1 t} + H_{j:111}^{(3)}(\omega_2, \omega_2, \omega_2) e^{i3\omega_2 t} \\
& + 3H_{j:111}^{(3)}(\omega_1, \omega_1, \omega_2) e^{i(2\omega_1 + \omega_2)t} + 3H_{j:111}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_2) e^{i(\omega_1 + 2\omega_2)t} + \dots
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Les fonctions  $H_{1:11}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$  et  $H_{2:11}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$  peuvent être identifiées. De plus, on voit que ces fonctions, comme dans le cas du système à un degré de liberté, multiplient la réponse à la somme des fréquences  $(\omega_1 + \omega_2)$  et qu'un facteur 2 se trouve devant.

De même, les noyaux  $H_{1:22}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$  et  $H_{2:22}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$  peuvent être obtenus en excitant le système au deuxième degré de liberté.

Il reste donc à trouver les noyaux représentant le couplage à savoir  $H_{j:12}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$ . Pour les trouver, il est maintenant nécessaire d'exciter les deux degrés de liberté en même temps. L'excitation est la suivante :

$$x_1(t) = e^{i\omega_1 t} \quad x_2(t) = e^{i\omega_2 t}$$

La réponse sous cette entrée s'écrit comme

$$\begin{aligned}
y_j(t) = & H_{j:1}^{(1)}(\omega_1) e^{i\omega_1 t} + H_{j:2}^{(1)}(\omega_2) e^{i\omega_2 t} \\
& + H_{j:11}^{(2)}(\omega_1, \omega_1) e^{i2\omega_1 t} + 2H_{j:12}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} + H_{j:22}^{(2)}(\omega_2, \omega_2) e^{i2\omega_2 t} \\
& + H_{j:111}^{(3)}(\omega_1, \omega_1, \omega_1) e^{i3\omega_1 t} + H_{j:222}^{(3)}(\omega_2, \omega_2, \omega_2) e^{i3\omega_2 t} \\
& + 3H_{j:112}^{(3)}(\omega_1, \omega_1, \omega_2) e^{i(2\omega_1 + \omega_2)t} + 3H_{j:122}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_2) e^{i(\omega_1 + 2\omega_2)t} + \dots
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Une fois de plus, on voit que les noyaux qui nous intéressent, à savoir  $H_{j:12}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$ , multiplient la réponse à la somme des fréquences d'excitation.

Les noyaux du deuxième ordre étant connus, il est possible de trouver les noyaux du troisième ordre en utilisant une somme de trois harmoniques. La démarche est identique à ce qui vient d'être réalisé pour les noyaux d'ordre 2. On note par exemple que pour trouver le noyau  $H_{1:112}^{(3)}$ , il faut exciter le système avec des entrées  $x_1(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t}$  et  $x_2(t) = e^{i\omega_3 t}$ .

### 2.2.2.2 Méthode paramétrique

Le but de cette section est d'étendre la méthode proposée par Lee pour un système à un degré de liberté vers un système à plusieurs degrés de liberté.

Afin de garder les choses simples, on considère ici un système à deux degrés de liberté.

Les différentes étapes de la méthode restent les mêmes que précédemment. Pour rappel, ces étapes sont :

1. Supposer une forme paramétrée de l'équation du mouvement régissant le problème
2. Lier les HFRF aux paramètres du système
3. Identifier les HFRF (sur une diagonale) à l'aide de simulations
4. Identifier les paramètres du système
5. Construire les HFRF dans l'espace complet

On va donc examiner ces étapes une par une et voir comment on peut les adapter pour un système à deux degrés de liberté. De même que précédemment, l'explication de ces étapes est accompagnée d'un exemple.



### Étape 1 : Supposer une forme paramétrée de l'équation du mouvement régissant le problème

La première étape consiste à faire une hypothèse sur l'équation du mouvement. Étant donné qu'on examine des systèmes à deux degrés de liberté, on retrouvera des matrices dans notre équation. Un choix par rapport à la non-linéarité à considérer dans notre système doit être fait.

Dans l'exemple que nous allons traiter tout au long de cette explication de la méthode paramétrique, l'équation du mouvement considéré est la suivante :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{1,11} & k_{1,12} & k_{1,22} \\ k_{2,11} & k_{2,12} & k_{2,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 y_1 \\ y_1 y_2 \\ y_2 y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{1,111} & k_{1,112} & k_{1,122} & k_{1,222} \\ k_{2,111} & k_{2,112} & k_{2,122} & k_{2,222} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 y_1 y_1 \\ y_1 y_1 y_2 \\ y_1 y_2 y_2 \\ y_2 y_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

La notation adoptée pour les paramètres non linéaires est la suivante : le paramètre  $k_{i,jl}$  est le paramètre non linéaire d'ordre 2, observé au degré de liberté  $i$  et agissant sur la réponse  $y_j y_l$ . La même notation est adaptée pour le paramètre non linéaire d'ordre 3.

La non-linéarité est donc polynomiale, avec un terme quadratique et cubique, et est la plus générale possible. Connaissant l'équation du mouvement, il est possible d'obtenir les équations analytiques des HFRF.

### Étape 2 : Lier les HFRF aux paramètres du système

Cette étape consiste à lier les noyaux de Volterra aux paramètres du système. On cherche donc une relation analytique entre les noyaux de Volterra et les paramètres de l'équation (2.73).

Dans un premier temps, on peut réécrire l'équation (2.73), sous forme indicielle. Pour le degré de liberté  $j$ , on a

$$m_j \ddot{y}_j + c_j \dot{y}_j + k_j y_j + \sum_{\eta_1=1}^2 \sum_{\eta_2=\eta_1}^2 k_{j,\eta_1 \eta_2} y_{\eta_1} y_{\eta_2} + \sum_{\eta_1=1}^2 \sum_{\eta_2=\eta_1}^2 \sum_{\eta_3=\eta_2}^2 k_{j,\eta_1 \eta_2 \eta_3} y_{\eta_1} y_{\eta_2} y_{\eta_3} = x_j \quad (2.74)$$

La théorie des équations linéaires associées va être utilisée. Afin d'identifier ces équations, on va remplacer l'entrée  $x_j$  par  $\gamma x_j$ . Si on injecte cette entrée dans la série de Volterra, on trouve

$$y_j = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n y_j^{(n)}(t) \quad (2.75)$$

Si on injecte cette expression dans l'équation du mouvement mise sous forme indicielle (2.74), on trouve

$$\begin{aligned} & m_j \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \ddot{y}_j^{(n)} + c_j \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \dot{y}_j^{(n)} + k_j \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n y_j^{(n)} \\ & + \sum_{\eta_1=1}^2 \sum_{\eta_2=\eta_1}^2 k_{j,\eta_1 \eta_2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \gamma^{n_1+n_2} y_{\eta_1}^{(n_1)} y_{\eta_2}^{(n_2)} \\ & + \sum_{\eta_1=1}^2 \sum_{\eta_2=\eta_1}^2 \sum_{\eta_3=\eta_2}^2 k_{j,\eta_1 \eta_2 \eta_3} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_3=1}^{\infty} \gamma^{n_1+n_2+n_3} y_{\eta_1}^{(n_1)} y_{\eta_2}^{(n_2)} y_{\eta_3}^{(n_3)} = \gamma x_j \end{aligned} \quad (2.76)$$

Si on rassemble la partie linéaire sous un seul opérateur, on obtient l'équation simplifiée suivante

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \mathcal{D}_j \left[ y_j^{(n)} \right] \\
& + \sum_{\eta_1=1}^2 \sum_{\eta_2=\eta_1}^2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} k_{j,\eta_1\eta_2} \gamma^{n_1+n_2} y_{\eta_1}^{(n_1)} y_{\eta_2}^{(n_2)} \\
& + \sum_{\eta_1=1}^2 \sum_{\eta_2=\eta_1}^2 \sum_{\eta_3=\eta_2}^2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_3=1}^{\infty} k_{j,\eta_1\eta_2\eta_3} \gamma^{n_1+n_2+n_3} y_{\eta_1}^{(n_1)} y_{\eta_2}^{(n_2)} y_{\eta_3}^{(n_3)} = \gamma x_j
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Afin d'extraire les équations associées, on identifie les termes devant les puissances de  $\gamma$ . En procédant de cette manière, les trois premières équations associées sont

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \left[ y_1^{(1)} \right] = x_1 \\ \mathcal{D}_2 \left[ y_2^{(1)} \right] = x_2 \end{cases} \tag{2.78}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \left[ y_1^{(2)} \right] = -k_{1,11} y_1^{(1)} y_1^{(1)} - k_{1,12} y_1^{(1)} y_2^{(1)} - k_{1,22} y_2^{(1)} y_2^{(1)} \\ \mathcal{D}_2 \left[ y_2^{(2)} \right] = -k_{2,11} y_1^{(1)} y_1^{(1)} - k_{2,12} y_1^{(1)} y_2^{(1)} - k_{2,22} y_2^{(1)} y_2^{(1)} \end{cases} \tag{2.79}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \left[ y_1^{(3)} \right] = -2k_{1,11} y_1^{(1)} y_1^{(2)} - k_{1,12} y_1^{(1)} y_2^{(2)} - k_{1,12} y_1^{(2)} y_2^{(1)} - 2k_{1,22} y_2^{(1)} y_2^{(2)} \\ \quad - k_{1,111} y_1^{(1)} y_1^{(1)} y_1^{(1)} - k_{1,112} y_1^{(1)} y_1^{(1)} y_2^{(1)} - k_{1,122} y_1^{(1)} y_2^{(1)} y_2^{(1)} - k_{1,222} y_2^{(1)} y_2^{(1)} y_2^{(1)} \\ \mathcal{D}_2 \left[ y_2^{(3)} \right] = -2k_{2,11} y_1^{(1)} y_1^{(2)} - k_{2,12} y_1^{(1)} y_2^{(2)} - k_{2,12} y_1^{(2)} y_2^{(1)} - 2k_{2,22} y_2^{(1)} y_2^{(2)} \\ \quad - k_{2,111} y_1^{(1)} y_1^{(1)} y_1^{(1)} - k_{2,112} y_1^{(1)} y_1^{(1)} y_2^{(1)} - k_{2,122} y_1^{(1)} y_2^{(1)} y_2^{(1)} - k_{2,222} y_2^{(1)} y_2^{(1)} y_2^{(1)} \end{cases} \tag{2.80}$$

À partir de ces équations, il est possible de trouver les équations analytiques des HFRF en utilisant les définitions de Schetzen [2]. Les développements pour arriver à ces expressions sont repris à l'Annexe C. Ces expressions analytiques sont présentées ci-dessous.

Pour le noyau de Volterra au premier ordre, on a

$$H^{(1)}(\omega) = \begin{pmatrix} [m_1 \omega^2 + ic_1 \omega + k_1]^{-1} & 0 \\ 0 & [m_2 \omega^2 + ic_2 \omega + k_2]^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.81}$$

Pour le noyau de Volterra au deuxième ordre, on trouve les expressions suivantes :

$$H_1^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \begin{pmatrix} -k_{1,11} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) & -\frac{1}{2} k_{1,12} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) \\ -\frac{1}{2} k_{1,12} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) & -k_{1,22} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) \end{pmatrix} \tag{2.82}$$

$$H_2^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \begin{pmatrix} -k_{2,11} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) & -\frac{1}{2} k_{2,12} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) \\ -\frac{1}{2} k_{2,12} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) & -k_{2,22} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) \end{pmatrix} \tag{2.83}$$

Il est intéressant d'observer sur ces noyaux que la symétrie n'est plus totale, comme mentionné précédemment. En effet, le noyau  $H_{1:12}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$  n'est pas égal au noyau  $H_{1:12}^{(2)}(\omega_2, \omega_1)$ . En effet, si  $H_{1:1}^{(1)}(\omega)$  est différent de  $H_{2:2}^{(1)}(\omega)$ , les expressions sont bien différentes.

Enfin, les noyaux de Volterra au troisième ordre peuvent s'écrire comme

$$H_1^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{1:111}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) & H_{1:112}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ H_{1:121}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) & H_{1:122}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} H_{1:211}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) & H_{1:212}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ H_{1:221}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) & H_{1:222}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

Et,

$$H_2^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{2:111}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) & H_{2:112}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ H_{2:121}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) & H_{2:122}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} H_{2:211}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) & H_{2:212}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ H_{2:221}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) & H_{2:222}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

Avec, pour  $j = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} H_{j:111}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{1}{3} H_{j:j}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) H_{1:1}^{(1)}(\omega_3) \times \\ &\quad \left[ 2k_{j,11}k_{1,11} \left( H_{1:1}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \right. \\ &\quad \left. + k_{j,12}k_{2,11} \left( H_{2:2}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \right. \\ &\quad \left. - 3k_{j,111} \right] \end{aligned} \quad (2.86)$$

Pour les expressions de  $H_{j:\eta_1\eta_2\eta_3}^{(3)}$  lorsque  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (1, 1, 2)$ ,  $(1, 2, 1)$  ou  $(2, 1, 1)$  qui sont respectivement associés aux valeurs suivantes pour  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 2)$  et  $(3, 1, 2)$ , on a

$$\begin{aligned} H_{j:\eta_1\eta_2\eta_3}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{1}{3} H_{j:j}^{(1)}(\omega_{\beta_1} + \omega_{\beta_2} + \omega_{\beta_3}) H_{1:1}^{(1)}(\omega_{\beta_1}) H_{1:1}^{(1)}(\omega_{\beta_2}) H_{2:2}^{(1)}(\omega_{\beta_3}) \times \\ &\quad \left[ k_{j,11}k_{1,12} \left( H_{1:1}^{(1)}(\omega_{\beta_2} + \omega_{\beta_3}) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_{\beta_1} + \omega_{\beta_3}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} k_{j,12}k_{2,12} \left( H_{2:2}^{(1)}(\omega_{\beta_2} + \omega_{\beta_3}) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_{\beta_1} + \omega_{\beta_3}) \right) \right. \\ &\quad \left. + k_{j,12}k_{1,11} H_{1:1}^{(1)}(\omega_{\beta_1} + \omega_{\beta_2}) \right. \\ &\quad \left. + 2k_{j,22}k_{2,11} H_{2:2}^{(1)}(\omega_{\beta_1} + \omega_{\beta_2}) \right. \\ &\quad \left. - k_{j,112} \right] \end{aligned} \quad (2.87)$$

Pour les expressions de  $H_{j:\eta_1\eta_2\eta_3}^{(3)}$  lorsque  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (1, 2, 2)$ ,  $(2, 1, 2)$  ou  $(2, 2, 1)$  qui sont respectivement associés aux valeurs suivantes pour  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1, 2, 3)$ ,  $(2, 1, 3)$  et  $(2, 3, 1)$ , on a

$$\begin{aligned} H_{j:\eta_1\eta_2\eta_3}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{1}{3} H_{j:j}^{(1)}(\omega_{\beta_1} + \omega_{\beta_2} + \omega_{\beta_3}) H_{1:1}^{(1)}(\omega_{\beta_1}) H_{2:2}^{(1)}(\omega_{\beta_2}) H_{2:2}^{(1)}(\omega_{\beta_3}) \times \\ &\quad \left[ 2k_{j,11}k_{1,22} H_{1:1}^{(1)}(\omega_{\beta_2} + \omega_{\beta_3}) \right. \\ &\quad \left. + k_{j,12}k_{2,22} H_{2:2}^{(1)}(\omega_{\beta_2} + \omega_{\beta_3}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} k_{j,12}k_{1,12} \left( H_{1:1}^{(1)}(\omega_{\beta_1} + \omega_{\beta_3}) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_{\beta_1} + \omega_{\beta_2}) \right) \right. \\ &\quad \left. + k_{j,22}k_{2,12} \left( H_{2:2}^{(1)}(\omega_{\beta_1} + \omega_{\beta_3}) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_{\beta_1} + \omega_{\beta_2}) \right) \right. \\ &\quad \left. - k_{j,122} \right] \end{aligned} \quad (2.88)$$

Enfin, les expressions des noyaux  $H_{j:222}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  sont

$$\begin{aligned} H_{j:222}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \frac{1}{3} H_{j:j}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) H_{2:2}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_3) \times \\ & \left[ k_{j,12} k_{1,22} \left( H_{1:1}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \right. \\ & + 2k_{j,22} k_{2,22} \left( H_{2:2}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \\ & \left. - 3k_{j,222} \right] \end{aligned} \quad (2.89)$$

Maintenant que ces expressions ont été trouvées, on va utiliser un exemple afin de les valider. Une nouvelle fois, le but ici est de voir si ces expressions donnent bien la réponse du système. Dès lors, on va se créer un système dont on connaît tous les paramètres et on va simplement former le système de Volterra. Le but sera alors de comparer cette solution de Volterra à des simulations.

Dans un premier temps, exprimons la réponse du système de Volterra sous les entrées suivantes :

$$x_1(t) = A \cos(\omega_1 t) = \frac{A}{2} e^{i\omega_1 t} + \frac{A}{2} e^{-i\omega_1 t} \quad (2.90)$$

$$x_2(t) = B \cos(\omega_2 t) = \frac{B}{2} e^{i\omega_2 t} + \frac{B}{2} e^{-i\omega_2 t} \quad (2.91)$$

Si on injecte ces expressions dans la définition de la série de Volterra pour un système à deux degrés de liberté, on trouve

$$y_j(t) = y_j^{(1)}(t) + y_j^{(2)}(t) + y_j^{(3)}(t) + \dots \quad (2.92)$$

Avec,

$$y_j^{(1)}(t) = \frac{A}{2} H_{j:1}^{(1)}(\omega_1) e^{i\omega_1 t} + \frac{B}{2} H_{j:2}^{(1)}(\omega_2) e^{i\omega_2 t} + \text{conjugués complexes} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} y_j^{(2)}(t) = & \left( \frac{A}{2} \right)^2 H_{j:11}^{(2)}(\omega_1, \omega_1) e^{i2\omega_1 t} + \left( \frac{B}{2} \right)^2 H_{j:22}^{(2)}(\omega_2, \omega_2) e^{i2\omega_2 t} \\ & + 2 \left( \frac{A}{2} \right)^2 H_{j:11}^{(2)}(\omega_1, -\omega_1) + 2 \left( \frac{B}{2} \right)^2 H_{j:22}^{(2)}(\omega_2, -\omega_2) \\ & + \left( \frac{AB}{2} \right) H_{j:12}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} + \left( \frac{AB}{2} \right) H_{j:12}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2) e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \\ & + \text{conjugués complexes} \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} y_j^{(3)}(t) = & \left( \frac{A}{2} \right)^3 H_{j:111}^{(3)}(\omega_1, \omega_1, \omega_1) e^{i3\omega_1 t} + \left( \frac{B}{2} \right)^3 H_{j:222}^{(3)}(\omega_2, \omega_2, \omega_2) e^{i3\omega_2 t} \\ & + 3 \left( \frac{A}{2} \right)^3 H_{j:111}^{(3)}(\omega_1, \omega_1, -\omega_1) e^{i\omega_1 t} + 3 \left( \frac{B}{2} \right)^3 H_{j:222}^{(3)}(\omega_2, \omega_2, -\omega_2) e^{i\omega_2 t} \\ & + \left( \frac{3AB^2}{4} \right) H_{j:122}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, -\omega_2) e^{i\omega_1 t} + \left( \frac{3A^2B}{4} \right) H_{j:112}^{(3)}(\omega_1, -\omega_1, \omega_2) e^{i\omega_2 t} \\ & + \left( \frac{3A^2B}{8} \right) H_{j:112}^{(3)}(\omega_1, \omega_1, \omega_2) e^{i(2\omega_1 + \omega_2)t} + \left( \frac{3A^2B}{8} \right) H_{j:112}^{(3)}(\omega_1, \omega_1, -\omega_2) e^{i(2\omega_1 - \omega_2)t} \\ & + \left( \frac{3AB^2}{8} \right) H_{j:122}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_2) e^{i(2\omega_2 + \omega_1)t} + \left( \frac{3AB^2}{8} \right) H_{j:122}^{(3)}(-\omega_1, \omega_2, \omega_2) e^{i(2\omega_2 - \omega_1)t} \\ & + \text{conjugués complexes} \end{aligned} \quad (2.95)$$

C'est cette expression que nous allons utiliser afin de calculer la réponse du système à chaque degré de liberté. Les paramètres utilisés dans cet exemple sont repris dans le tableau ci-dessous.

Paramètre		Valeur	Paramètre		Valeur
$m_1$	[kg]	1.0	$m_2$	[kg]	2.0
$c_1$	[Ns/m]	20.0	$c_2$	[Ns/m]	30.0
$k_1$	[N/m]	$1.0 \times 10^4$	$k_2$	[N/m]	$3.0 \times 10^4$
$k_{1,11}$	[N/m <sup>2</sup> ]	$1.0 \times 10^7$	$k_{2,11}$	[N/m <sup>2</sup> ]	$9.0 \times 10^6$
$k_{1,12}$	[N/m <sup>2</sup> ]	$2.0 \times 10^7$	$k_{2,12}$	[N/m <sup>2</sup> ]	$1.0 \times 10^7$
$k_{1,22}$	[N/m <sup>2</sup> ]	$3.0 \times 10^7$	$k_{2,22}$	[N/m <sup>2</sup> ]	$2.0 \times 10^7$
$k_{1,111}$	[N/m <sup>3</sup> ]	$5.0 \times 10^9$	$k_{2,111}$	[N/m <sup>3</sup> ]	$1.0 \times 10^9$
$k_{1,112}$	[N/m <sup>3</sup> ]	$6.0 \times 10^9$	$k_{2,112}$	[N/m <sup>3</sup> ]	$2.0 \times 10^9$
$k_{1,122}$	[N/m <sup>3</sup> ]	$7.0 \times 10^9$	$k_{2,122}$	[N/m <sup>3</sup> ]	$3.0 \times 10^9$
$k_{1,222}$	[N/m <sup>3</sup> ]	$8.0 \times 10^9$	$k_{2,222}$	[N/m <sup>3</sup> ]	$4.0 \times 10^9$

TABLE 2.5 – Paramètres utilisés lors de la validation

Les réponses ont été obtenues pour une amplitude d'excitation  $A = 0.1 \text{ N}$  et  $B = 0.15 \text{ N}$ . Les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ont été prises égales dans cet exemple. La fréquence d'excitation a été échantillonnée de 5 à 35 Hz par pas de 0.2 Hz. Les résultats obtenus pour le degré de liberté 1 et 2 sont repris aux Figures 2.34 et 2.35.

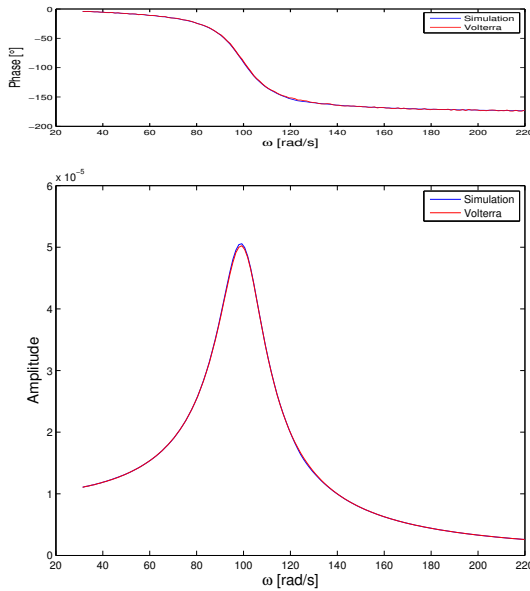


FIGURE 2.34 – Phase et amplitude de la réponse au ddl 1

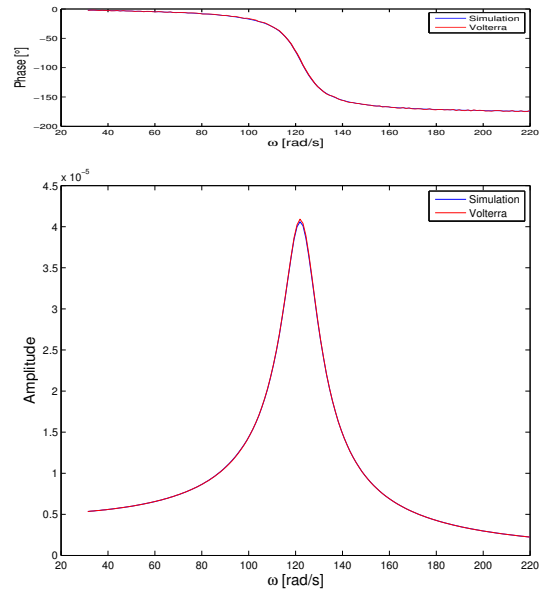


FIGURE 2.35 – Phase et amplitude de la réponse au ddl 2

L'adéquation entre les deux courbes montre la précision de la série de Volterra. Les expressions analytiques trouvées pour les noyaux de Volterra sont donc correctes. Ces expressions analytiques pourront être utilisées afin d'identifier les paramètres du système lorsque les HFRF seront connus à un endroit de l'espace. Cette identification des HFRF est justement l'objet de l'étape suivante.

### Étape 3 : Identifier les HFRF à l'aide de simulations

Le but de cette étape est d'identifier les HFRF à un endroit de l'espace afin d'ensuite pouvoir identifier les paramètres du système. En gardant en tête l'idée qu'il faudra par la suite identifier les paramètres du système, il faut établir une démarche et surtout choisir quels HFRF identifier.

Les paramètres qui seront sans doute les plus faciles à identifier sont les paramètres linéaires. Pour pouvoir les identifier, il faudra connaître les noyaux de Volterra au premier ordre. C'est donc de cette idée que nous allons partir.

La manière la plus simple afin d'identifier les noyaux  $H_1$  est de résoudre un système similaire à celui réalisé pour un système à un degré de liberté. Cependant, la réponse d'un système à plusieurs degrés de liberté semble a priori plus complexe, comme en témoigne l'équation (2.92). Mais, cette équation peut être simplifiée si on égale une des deux excitations à 0. En effet, considérons l'excitation suivante :

$$x_1(t) = A \cos(\omega t) = \frac{A}{2} e^{i\omega t} + \frac{A}{2} e^{-i\omega t} \quad x_2(t) = 0 \quad (2.96)$$

La réponse au premier degré de liberté dans le domaine fréquentiel à la fréquence d'excitation s'écrit simplement :

$$Y_1(\omega) = AH_{1:1}^{(1)}(\omega) + \frac{3}{4}A^3H_{1:111}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) + \frac{5}{8}A^5H_{1:11111}^{(5)}(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega) + \dots \quad (2.97)$$

Où on voit apparaître la fonction  $H_{1:1}^{(1)}(\omega)$  dans cette équation. Dans le but d'obtenir la fonction  $H_{2:2}^{(1)}(\omega)$ , on écrit cette fois-ci la réponse au deuxième degré de liberté du système à la fréquence d'excitation sous l'excitation suivante :

$$x_1(t) = 0 \quad x_2(t) = A \cos(\omega t) = \frac{A}{2} e^{i\omega t} + \frac{A}{2} e^{-i\omega t} \quad (2.98)$$

Soit,

$$Y_2(\omega) = AH_{2:2}^{(1)}(\omega) + \frac{3}{4}A^3H_{2:222}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) + \frac{5}{8}A^5H_{2:22222}^{(5)}(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega) + \dots \quad (2.99)$$

On voit que ces expressions dépendent de l'amplitude d'excitation. Ainsi, il est possible de former deux systèmes à résoudre en considérant plusieurs simulations avec des amplitudes différentes, comme dans le cas d'un système à un degré de liberté. Les systèmes à résoudre, pour  $j = 1$  et 2, sont :

$$\begin{bmatrix} Y_{j,A_1}(\omega) \\ Y_{j,A_2}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \frac{3}{4}A_1^3 \\ A_2 & \frac{3}{4}A_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{j:j}^{(1)}(\omega) \\ H_{j:jjj}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

La résolution donnera les fonctions  $H_{1:1}^{(1)}(\omega)$  et  $H_{2:2}^{(1)}(\omega)$  utiles pour identifier les paramètres linéaires de l'équation (2.73).

La résolution de ce système donnera également les fonctions  $H_{1:111}^{(3)}(\omega)$  et  $H_{2:222}^{(3)}(\omega)$ . Ces noyaux seront utiles pour identifier les paramètres non linéaires. Justement, regardons de plus près quels paramètres ces noyaux pourront identifier. Grâce aux expressions analytiques (2.86) et (2.89), on s'aperçoit que le noyau  $H_{1:111}^{(3)}(\omega)$  dépend des paramètres  $k_{1,11}$ ,  $k_{1,12}$ ,  $k_{2,11}$  et  $k_{1,111}$ . Tandis que le noyau  $H_{2:222}^{(3)}(\omega)$  dépend des paramètres  $k_{1,22}$ ,  $k_{2,12}$ ,  $k_{2,22}$  et  $k_{2,222}$ . Cependant, comme nous le verrons dans la suite, la construction du système à résoudre pour trouver ces paramètres ne fournit que six équations pour huit inconnues (système d'équations (2.122) et (2.123)). Il faut donc identifier des noyaux supplémentaires afin d'obtenir les 2 équations manquantes.

Afin de limiter au maximum les simulations, on va se servir des résultats déjà obtenus précédemment. En effet, la réponse au deuxième degré de liberté lorsque le système est excité au premier degré de liberté, et vice-versa, n'a pas encore été exploitée. De ce fait, il est possible d'exprimer la réponse au deuxième degré de liberté au double de la fréquence d'excitation lorsque le système est uniquement excité au premier degré de liberté, on a

$$Y_2(2\omega) = \frac{1}{2}A^2H_{2:11}^{(2)}(\omega, \omega) + \frac{1}{2}A^4H_{2:1111}^{(4)}(\omega, \omega, \omega, -\omega) + \dots + \frac{C_{\frac{(n-2)}{2}}^n}{2^{n-1}}A^nH_{n, \frac{(n-2)}{2}} + \dots \quad (2.101)$$

$$\text{Avec, } H_{n, \frac{(n-2)}{2}} = H(\underbrace{\omega, \omega, \dots, \omega, \omega, \dots}_{\substack{(n-2) \\ 2}})$$

De même, si on écrit la réponse au premier degré de liberté au double de la fréquence d'excitation lorsque le système possède une entrée au degré de liberté 2 uniquement, on trouve

$$Y_1(2\omega) = \frac{1}{2}A^2 H_{1:22}^{(2)}(\omega, \omega) + \frac{1}{2}A^4 H_{1:2222}^{(4)}(\omega, \omega, \omega, -\omega) + \dots \quad (2.102)$$

Ainsi, il est possible de former un système à résoudre étant donné que ces expressions dépendent de l'amplitude d'excitation. Les systèmes à résoudre sont :

$$\begin{bmatrix} Y_{j,A_1}(\omega) \\ Y_{j,A_2}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}A_1 & \frac{1}{2}A_1^3 \\ \frac{1}{2}A_2 & \frac{1}{2}A_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{j:ll}^{(2)}(\omega, \omega) \\ H_{j:llll}^{(4)}(\omega, \omega, \omega, -\omega) \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

Pour  $j = 1$  et  $2$  et  $l = 1$  et  $2$ , avec  $j \neq l$ .

La résolution de ces systèmes permettra d'identifier les noyaux  $H_{1:22}^{(2)}(\omega, \omega)$  et  $H_{2:11}^{(2)}(\omega, \omega)$ . Grâce aux expressions analytiques de ces noyaux, on s'aperçoit qu'ils dépendent respectivement des paramètres  $k_{1,22}$  et  $k_{2,11}$ . Cette identification permettra d'ajouter deux équations à notre problème. Ainsi, les paramètres exposés précédemment pourront être identifiés.

Un résumé du nombre de simulations et des réponses du système à sauvegarder est repris dans le tableau ci-dessous.

Nombre de simulations	Type d'excitation	Réponses à sauvegarder
2 ( $A_1 \neq A_2$ )	$x_1 = A \cos(\omega t)$ $x_2 = 0$	$Y_1(\omega)$ $Y_2(2\omega)$
2 ( $A_1 \neq A_2$ )	$x_1 = 0$ $x_2 = A \cos(\omega t)$	$Y_1(2\omega)$ $Y_2(\omega)$

TABLE 2.6 – Résumé du nombre de simulations et des réponses à sauvegarder - Partie 1

La résolution des systèmes (2.100) et (2.103) grâce aux simulations pour des valeurs d'amplitudes d'excitations  $A_1$  et  $A_2$  de respectivement  $0.3N$  et  $0.9N$  ont conduit aux HFRF suivants

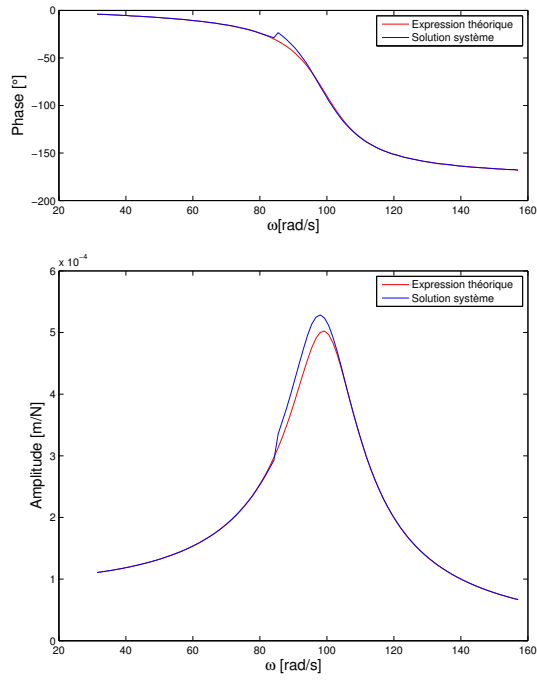


FIGURE 2.36 –  $H_{1,1}^{(1)}(\omega)$

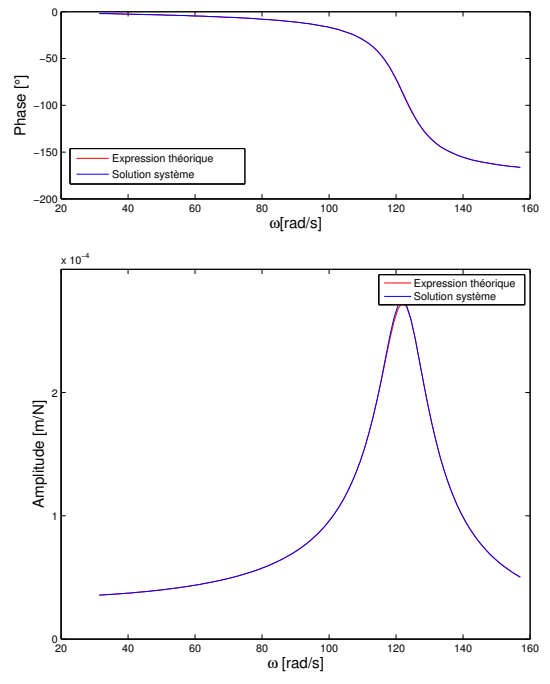


FIGURE 2.37 –  $H_{2,2}^{(1)}(\omega)$

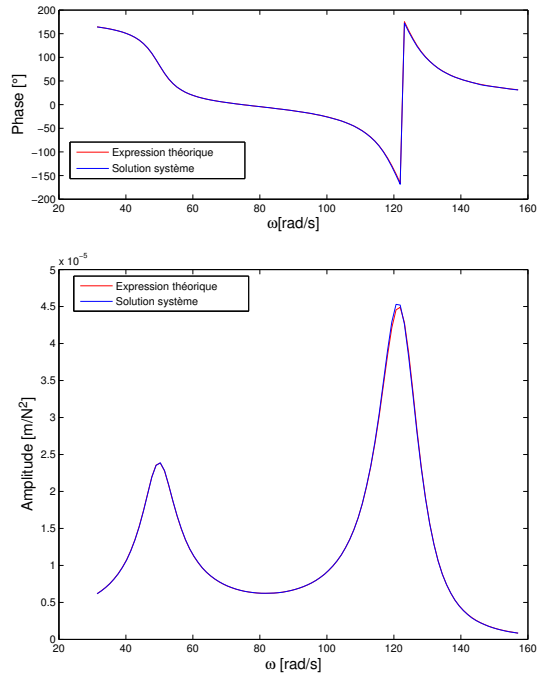


FIGURE 2.38 –  $H_{1,22}^{(2)}(\omega, \omega)$

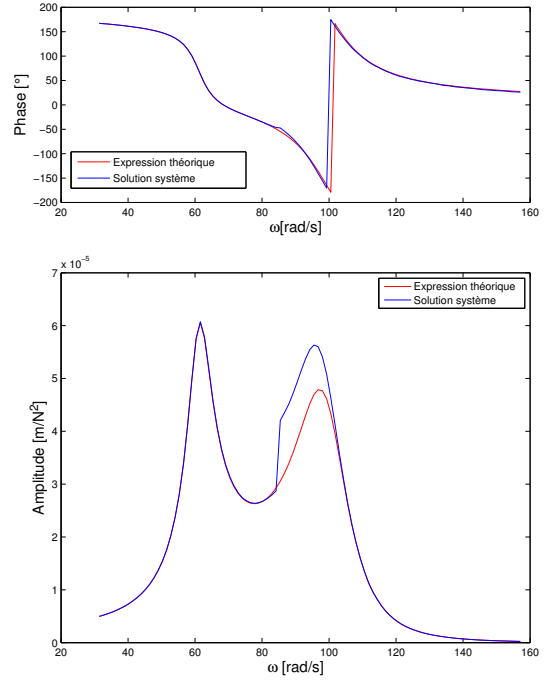


FIGURE 2.39 –  $H_{2,11}^{(2)}(\omega, \omega)$



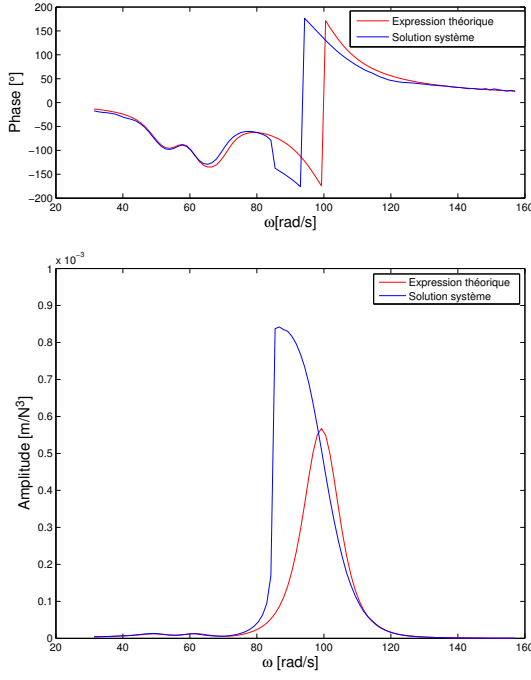


FIGURE 2.40 –  $H_{1,111}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$

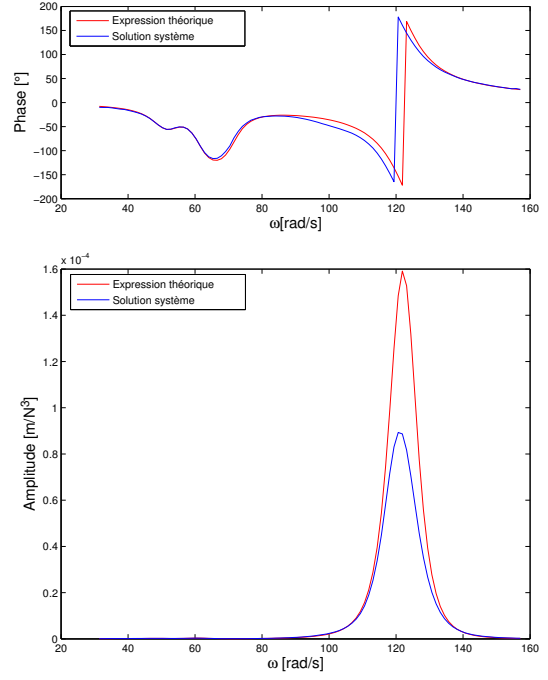


FIGURE 2.41 –  $H_{2,222}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$

Comme dans le cas du système à un seul degré de liberté, on aperçoit que les noyaux au troisième ordre sont plus difficiles à identifier. En effet, sur les Figures 2.40 et 2.41, les noyaux identifiés s'éloignent de l'expression analytique autour de la fréquence propre. Cependant, on verra dans la section suivante que cet écart a un impact relativement faible.

Ces HFRF identifiés permettront d'obtenir tous les paramètres de la non-linéarité quadratique et les paramètres  $k_{1,111}$  et  $k_{2,222}$ . Il reste donc encore à trouver les HFRF qui permettront d'identifier les paramètres  $k_{1,112}$ ,  $k_{1,122}$ ,  $k_{1,222}$ ,  $k_{2,111}$ ,  $k_{2,112}$  et  $k_{2,122}$  de l'équation (2.73). Grâce aux expressions analytiques, ces paramètres peuvent être trouvées grâce aux HFRF suivantes :  $H_{1,112}^{(3)}$ ,  $H_{1,122}^{(3)}$ ,  $H_{1,222}^{(3)}$ ,  $H_{2,111}^{(3)}$ ,  $H_{2,112}^{(3)}$  et  $H_{2,122}^{(3)}$ .

Commençons par identifier les fonctions  $H_{1,222}^{(3)}$  et  $H_{2,111}^{(3)}$ . On voit que pour les trouver, il suffit d'exciter l'un ou l'autre degré de liberté et de regarder la réponse du système à l'autre degré de liberté. Une nouvelle fois, afin de limiter les simulations, on peut se servir des simulations précédentes. En effet, si on regarde la réponse du système au degré de liberté 2 à la fréquence d'excitation lorsque le système est excité uniquement au degré de liberté 1, on trouve l'expression simplifiée suivante grâce à l'équation (2.92) :

$$Y_2(\omega) = \frac{3}{4}A^3 H_{2,111}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) + \dots \quad (2.104)$$

L'identification du noyau est donc directe. Il suffit d'isoler le noyau, qui s'exprime alors simplement comme :

$$H_{2,111}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) = \frac{4}{3A^3} Y_2(\omega) \quad (2.105)$$

La démarche est la même pour trouver le noyau  $H_{1,222}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$  où cette fois-ci on exploite la réponse du système au premier degré de liberté à la fréquence d'excitation lorsque le système est excité uniquement au second degré de liberté.

Les deux noyaux identifiés à l'aide d'une amplitude d'excitation  $A = 0.3 \text{ N}$  sont représentés ci-dessous.

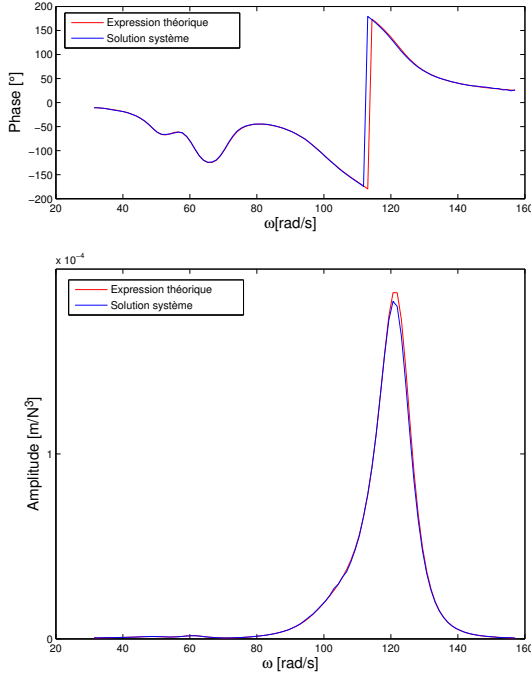


FIGURE 2.42 –  $H_{1,222}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$

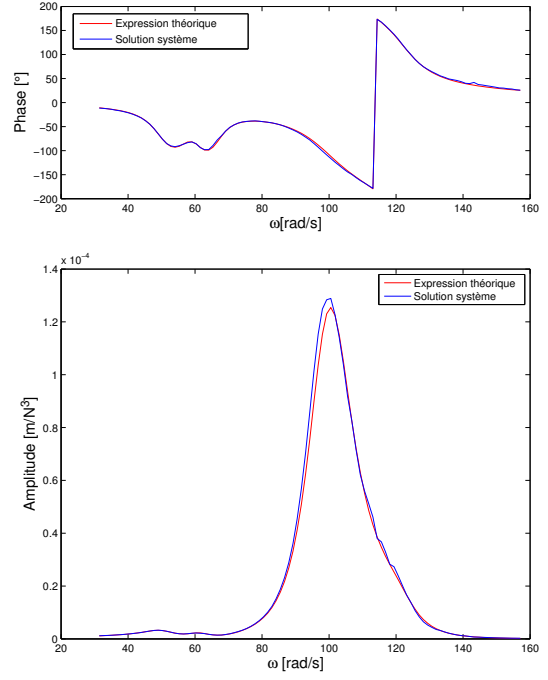


FIGURE 2.43 –  $H_{2,111}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$

Afin d'identifier les HFRF restants, il est cette fois nécessaire d'utiliser des simulations lorsque les excitations sont non nulles. De ce fait, la réponse du premier degré de liberté à la fréquence d'excitation sous des entrées du type

$$x_1(t) = A \cos(\omega t) \quad x_2(t) = B \cos(\omega t) \quad (2.106)$$

Peut s'écrire,

$$\begin{aligned} Y_1(\omega) = & A H_{1:1}^{(1)}(\omega) + \frac{3}{4} A^3 H_{1:111}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) + \frac{3}{4} B^3 H_{1:222}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) \\ & + \frac{3}{2} A^2 B H_{1:112}^{(3)}(\omega, -\omega, \omega) + \frac{3}{2} A B^2 H_{1:122}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) \\ & + \frac{3}{4} A^2 B H_{1:112}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) + \frac{3}{4} A B^2 H_{1:122}^{(3)}(-\omega, \omega, \omega) \end{aligned} \quad (2.107)$$

Dans cette réponse, les noyaux  $H_{1:1}^{(1)}(\omega)$ ,  $H_{1:111}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$  et  $H_{1:222}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$  sont connus. Dès lors, il est possible de former un système de manière à trouver les noyaux  $H_{1:112}^{(3)}(\omega, -\omega, \omega)$ ,  $H_{1:112}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$ ,  $H_{1:122}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$  et  $H_{1:122}^{(3)}(-\omega, \omega, \omega)$ . Ce système est le suivant :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} Y_{1,A_1 B_1}(\omega) - A_1 H_{1:1}^{(1)}(\omega) - \frac{3}{4} A_1^3 H_{1:111}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) - \frac{3}{4} B_1^3 H_{1:222}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) \\ Y_{1,A_2 B_2}(\omega) - A_2 H_{1:1}^{(1)}(\omega) - \frac{3}{4} A_2^3 H_{1:111}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) - \frac{3}{4} B_2^3 H_{1:222}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) \\ Y_{1,A_3 B_3}(\omega) - A_3 H_{1:1}^{(1)}(\omega) - \frac{3}{4} A_3^3 H_{1:111}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) - \frac{3}{4} B_3^3 H_{1:222}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) \\ Y_{1,A_4 B_4}(\omega) - A_4 H_{1:1}^{(1)}(\omega) - \frac{3}{4} A_4^3 H_{1:111}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) - \frac{3}{4} B_4^3 H_{1:222}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} A_1^2 B_1 & \frac{3}{4} A_1^2 B_1 & \frac{3}{2} A_1 B_1^2 & \frac{3}{4} A_1 B_1^2 \\ \frac{3}{2} A_2^2 B_2 & \frac{3}{4} A_2^2 B_2 & \frac{3}{2} A_2 B_2^2 & \frac{3}{4} A_2 B_2^2 \\ \frac{3}{2} A_3^2 B_3 & \frac{3}{4} A_3^2 B_3 & \frac{3}{2} A_3 B_3^2 & \frac{3}{4} A_3 B_3^2 \\ \frac{3}{2} A_4^2 B_4 & \frac{3}{4} A_4^2 B_4 & \frac{3}{2} A_4 B_4^2 & \frac{3}{4} A_4 B_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{1:112}^{(3)}(\omega, -\omega, \omega) \\ H_{1:112}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) \\ H_{1:122}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) \\ H_{1:122}^{(3)}(-\omega, \omega, \omega) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.108)$$

Cependant, on observe rapidement que ce système est impossible à résoudre. En effet, la matrice des amplitudes dans ce système est singulière (les colonnes ne sont pas indépendantes l'une de l'autre). Ceci à pour conséquence qu'il est impossible d'identifier ces noyaux en utilisant les deux excitations à la fréquence  $\omega$ .

Une deuxième idée est d'utiliser les entrées suivantes

$$x_1(t) = A \cos(\omega t) \quad x_2(t) = B \cos(2\omega t) \quad (2.109)$$

La réponse au premier degré de liberté au double de la fréquence d'excitation s'écrit alors comme

$$Y_1(2\omega) = \frac{1}{2}A^2 H_{1:11}^{(2)}(\omega, \omega) + \frac{3}{2}A^2 B H_{1:112}^{(3)}(\omega, -\omega, 2\omega) + \frac{3}{4}B^3 H_{1:222}^{(3)}(2\omega, 2\omega, -2\omega) \quad (2.110)$$

La seule inconnue de cette équation est le noyau  $H_{1:112}^{(3)}$  qui peut donc être facilement isolé. De manière à choisir les amplitudes d'excitation  $A$  et  $B$ , le but est de mettre en évidence ce noyau pour l'identifier plus facilement. Ainsi, on veillera à prendre une amplitude  $B$  plus petite que l'amplitude  $A$ .

En effet, examinons dans un premier temps le cas où  $A = 0.1 \text{ N}$  serait plus petit que  $B = 0.6 \text{ N}$ . À la Figure 2.44 on représente le membre de droite de l'équation (2.110) (courbe bleue) et on trace ce même membre de droite, mais en égalant le noyau  $H_{1:112}^{(3)}$  à zéro (courbe rouge). On observe que ces deux courbes sont confondues et donc que le noyau  $H_{1:112}^{(3)}$  n'a pas d'influence sur la réponse. Il est donc a priori impossible de l'identifier. En effet, si on isole ce noyau, on obtient le résultat à la Figure 2.45.

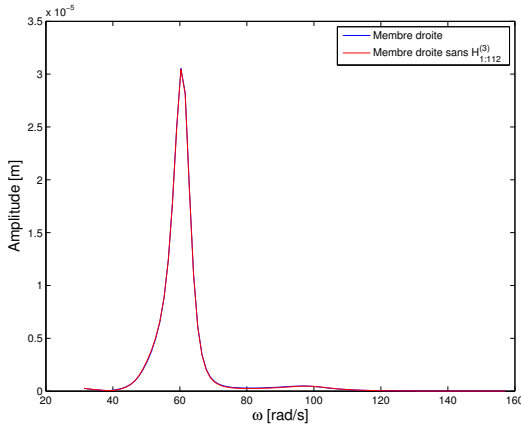


FIGURE 2.44 – Membre de droite de l'équation (2.110)

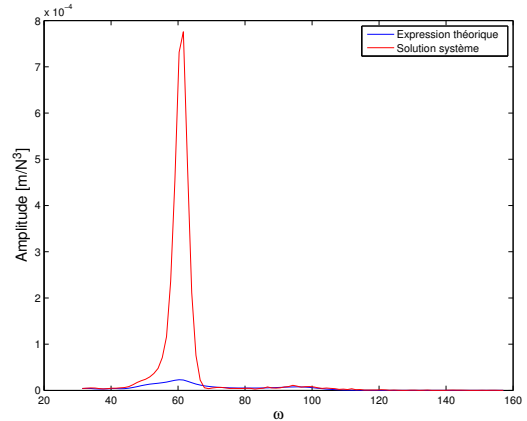


FIGURE 2.45 –  $H_{1:112}^{(3)}(\omega, -\omega, 2\omega)$

Le noyau recherché n'est évidemment pas identifié correctement. Un facteur 50 entre l'expression théorique et la solution de l'équation (2.110) apparaît. On voit donc toute l'importance de prendre une valeur d'amplitude  $B$  plus petite que l'amplitude  $A$ . Dans le cas contraire, le noyau recherché n'a aucune influence sur la solution.

Ainsi, regardons le cas lorsque l'amplitude  $A$  et  $B$  valent respectivement  $0.5 \text{ N}$  et  $0.1 \text{ N}$ . Commençons d'abord par tracer à la Figure 2.46 le membre de droite de l'équation (2.110) et ajoutons sur ce graphique la réponse  $Y_1(2\omega)$  (courbe verte). Cette fois-ci, on voit que le noyau  $H_{1:112}^{(3)}$  a une influence, car les courbes bleue et rouge ne sont plus confondues. Il est donc a priori plus facile d'identifier ce noyau. Cependant, si on regarde la réponse  $Y_1(2\omega)$  (courbe verte), on voit qu'elle n'est pas tout à fait égale au membre de droite de l'équation (2.110) (courbe bleue). Dès lors, cette différence va venir polluer l'identification du noyau. Le noyau identifié est représenté à la Figure 2.47. L'identification semble meilleure, mais lors de l'identification du paramètre  $k_{1,112}$ , on verra que ce noyau conduit à un résultat erroné.

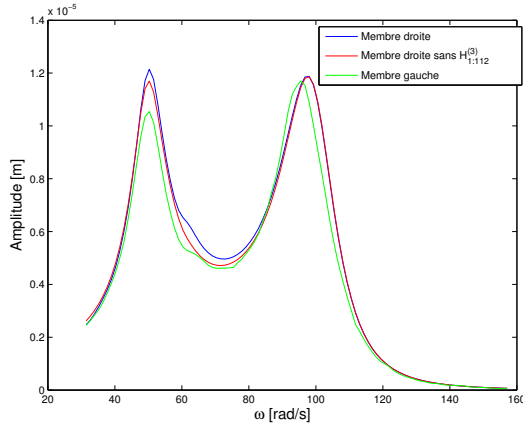


FIGURE 2.46 – Membre de droite de l'équation (2.110)

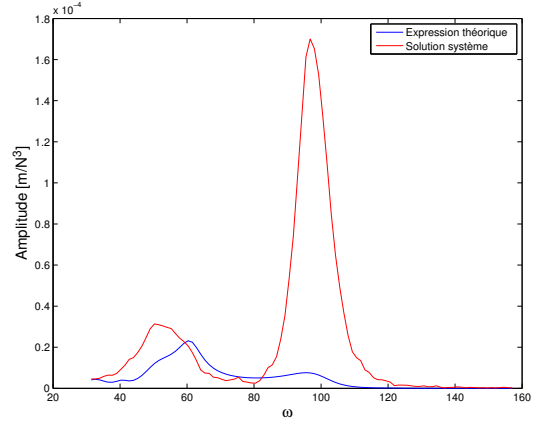


FIGURE 2.47 –  $H_{1,112}^{(3)}(\omega, -\omega, 2\omega)$

Une troisième méthode est donc envisagée afin de trouver un meilleur résultat pour le noyau  $H_{1,112}^{(3)}$ . On utilise cette fois-ci les sollicitations suivantes :

$$x_1(t) = A \cos(\omega t) \quad x_2(t) = B \sin(2\omega t) \quad (2.111)$$

En injectant ces sollicitations dans la définition de la série de Volterra (2.59), on trouve l'expression de la réponse au premier degré de liberté à la fréquence  $2\omega$ . On a,

$$Y_1(2\omega) = \frac{1}{2}A^2 H_{1,11}^{(2)}(\omega, \omega) + \frac{3}{2i}A^2B H_{1,112}^{(3)}(\omega, -\omega, 2\omega) + \frac{3}{4i}B^3 H_{1,222}^{(3)}(2\omega, 2\omega, -2\omega) \quad (2.112)$$

Où une nouvelle fois la seule inconnue est le noyau  $H_{1,112}^{(3)}(\omega, -\omega, -2\omega)$ . Pour des amplitudes d'excitation  $A$  et  $B$  de respectivement  $0.5 \text{ N}$  et  $0.2 \text{ N}$ , on trouve le résultat suivant

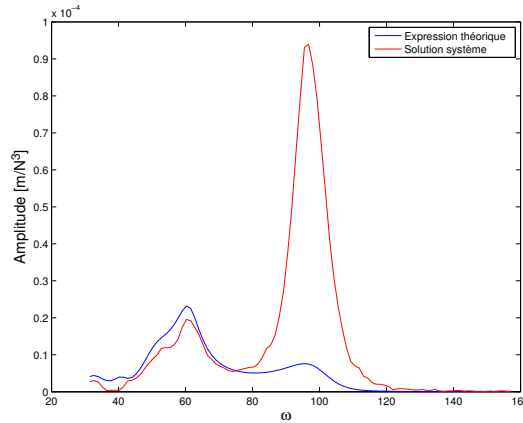


FIGURE 2.48 –  $H_{1,112}^{(3)}(\omega, -\omega, -2\omega)$

Cette méthode ne semble pas améliorer les résultats. Une démarche similaire peut être menée pour trouver les noyaux  $H_{2,112}^{(3)}$ ,  $H_{1,122}^{(3)}$  et  $H_{2,222}^{(3)}$ . Tout comme le noyau que nous venons de traiter, ces derniers sont également difficiles à identifier.

Passons à présent à l'identification des paramètres et examinons l'impact de cette identification des HFRF.

#### Étape 4 : Identifier les paramètres du système

Grâce aux relations analytiques liant les paramètres du système aux noyaux de Volterra (2.81)-(2.89), il est possible d'identifier les paramètres du système grâce aux HFRF fraîchement trouvés.

Commençons par les paramètres linéaires  $m_j$ ,  $c_j$  et  $k_j$ . Comme dans le cas d'un système à un degré de liberté il suffit de résoudre le système surdéterminé suivant :

$$\begin{bmatrix} -\omega_1^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_2^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_j \\ k_j \\ c_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}[H_{j,j}^{(1)}(\omega_1)^{-1}] \\ \text{Im}[H_{j,j}^{(1)}(\omega_1)^{-1}] \\ \text{Re}[H_{j,j}^{(1)}(\omega_2)^{-1}] \\ \text{Im}[H_{j,j}^{(1)}(\omega_2)^{-1}] \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

Ensuite, grâce aux noyaux  $H_{1:22}^{(2)}(\omega, \omega)$  et  $H_{2:11}^{(2)}(\omega, \omega)$ , les paramètres  $k_{1,22}$  et  $k_{2,11}$  peuvent être identifiés. En effet, ces noyaux s'écrivent grâce aux expressions analytiques (2.82) et (2.83) comme

$$H_{1:22}^{(2)}(\omega, \omega) = -k_{1,22} H_{1:1}^{(1)}(2\omega) \left( H_{2:2}^{(1)}(\omega) \right)^2 \quad (2.114)$$

$$H_{2:11}^{(2)}(\omega, \omega) = -k_{2,11} H_{2:2}^{(1)}(2\omega) \left( H_{1:1}^{(1)}(\omega) \right)^2 \quad (2.115)$$

Dans ces expressions, il faut calculer les noyaux  $H_{1:1}^{(1)}(2\omega)$  et  $H_{2:2}^{(1)}(2\omega)$  qui sont pour le moment inconnus. Cependant, les paramètres linéaires viennent d'être calculés. Dès lors, ces noyaux peuvent se calculer grâce à leurs expressions analytiques, soit

$$H_{1:1}^{(1)}(2\omega) = \frac{1}{-m_1(2\omega)^2 + ic_1(2\omega) + k_1} \quad (2.116)$$

$$H_{2:2}^{(1)}(2\omega) = \frac{1}{-m_2(2\omega)^2 + ic_2(2\omega) + k_2} \quad (2.117)$$

Tous les HFRF étant connu dans les équations (2.114) et (2.115), on peut donc résoudre les systèmes suivants afin de calculer les paramètres  $k_{1,22}$  et  $k_{2,11}$  :

$$\begin{bmatrix} \text{Re}[H_{1:1}^{(1)}(2\omega_1)] \\ \text{Im}[H_{1:1}^{(1)}(2\omega_1)] \\ \text{Re}[H_{1:1}^{(1)}(2\omega_2)] \\ \text{Im}[H_{1:1}^{(1)}(2\omega_2)] \\ \vdots \end{bmatrix} [-k_{1,22}] = \begin{bmatrix} \text{Re} \left[ \frac{H_{1:22}^{(2)}(\omega_1, \omega_1)}{H_{2:2}^{(1)}(\omega_1)^2} \right] \\ \text{Im} \left[ \frac{H_{1:22}^{(2)}(\omega_1, \omega_1)}{H_{2:2}^{(1)}(\omega_1)^2} \right] \\ \text{Re} \left[ \frac{H_{1:22}^{(2)}(\omega_2, \omega_2)}{H_{2:2}^{(1)}(\omega_2)^2} \right] \\ \text{Im} \left[ \frac{H_{1:22}^{(2)}(\omega_2, \omega_2)}{H_{2:2}^{(1)}(\omega_2)^2} \right] \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

$$\begin{bmatrix} \text{Re}[H_{2:2}^{(1)}(2\omega_1)] \\ \text{Im}[H_{2:2}^{(1)}(2\omega_1)] \\ \text{Re}[H_{2:2}^{(1)}(2\omega_2)] \\ \text{Im}[H_{2:2}^{(1)}(2\omega_2)] \\ \vdots \end{bmatrix} [-k_{2,11}] = \begin{bmatrix} \text{Re} \left[ \frac{H_{2:11}^{(2)}(\omega_1, \omega_1)}{H_{1:1}^{(1)}(\omega_1)^2} \right] \\ \text{Im} \left[ \frac{H_{2:11}^{(2)}(\omega_1, \omega_1)}{H_{1:1}^{(1)}(\omega_1)^2} \right] \\ \text{Re} \left[ \frac{H_{2:11}^{(2)}(\omega_2, \omega_2)}{H_{1:1}^{(1)}(\omega_2)^2} \right] \\ \text{Im} \left[ \frac{H_{2:11}^{(2)}(\omega_2, \omega_2)}{H_{1:1}^{(1)}(\omega_2)^2} \right] \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

À présent, les noyaux  $H_{1:111}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$  et  $H_{2:222}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$  peuvent être utilisés afin de trouver les paramètres restants. Une nouvelle fois, on commence par écrire ces noyaux grâce aux expressions analytiques calculées précédemment, on trouve

$$H_{1:111}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) = \left(H_{1:1}^{(1)}(\omega)\right)^3 H_{1:1}^{(1)}(-\omega) \times \left[ \frac{2}{3} k_{1,11}^2 \left(H_{1:1}^{(1)}(2\omega) + 2k_1^{-1}\right) + \frac{1}{3} k_{1,12} k_{2,11} \left(H_{2:2}^{(1)}(2\omega) + 2k_2^{-1}\right) - k_{1,111} \right] \quad (2.120)$$

$$H_{2:222}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega) = \left(H_{2:2}^{(1)}(\omega)\right)^3 H_{2:2}^{(1)}(-\omega) \times \left[ \frac{1}{3} k_{2,12} k_{1,22} \left(H_{1:1}^{(1)}(2\omega) + 2k_1^{-1}\right) + \frac{2}{3} k_{2,22}^2 \left(H_{2:2}^{(1)}(2\omega) + 2k_2^{-1}\right) - k_{2,222} \right] \quad (2.121)$$

Dans ces expressions, les noyaux  $H_{1:1}^{(1)}(-\omega)$  et  $H_{2:2}^{(1)}(-\omega)$  peuvent être trouvés grâce aux paramètres linéaires identifiés précédemment. Une fois fait, il est possible de résoudre les systèmes suivants afin de trouver les paramètres  $k_{1,11}$ ,  $k_{1,12}$ ,  $k_{1,111}$ ,  $k_{2,12}$ ,  $k_{2,22}$  et  $k_{2,222}$ . On a,

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re}[H_{1:1}^{(1)}(2\omega_1)] & \operatorname{Re}[H_{2:2}^{(1)}(2\omega_1)] & 1 \\ \operatorname{Im}[H_{1:1}^{(1)}(2\omega_1)] & \operatorname{Im}[H_{2:2}^{(1)}(2\omega_1)] & 0 \\ \operatorname{Re}[H_{1:1}^{(1)}(2\omega_2)] & \operatorname{Re}[H_{2:2}^{(1)}(2\omega_2)] & 1 \\ \operatorname{Im}[H_{1:1}^{(1)}(2\omega_2)] & \operatorname{Im}[H_{2:2}^{(1)}(2\omega_2)] & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} k_{1,11}^2 \\ \frac{1}{3} k_{1,12} k_{2,11} \\ \frac{4}{3} \frac{k_{1,11}^2}{k_1} + \frac{2}{3} \frac{k_{1,12} k_{2,11}}{k_2} - k_{1,111} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \left[ \frac{H_{1:111}^{(3)}(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)}{H_{1:1}^{(1)}(\omega_1)^3 H_{1:1}^{(1)}(-\omega_1)} \right] \\ \operatorname{Im} \left[ \frac{H_{1:111}^{(3)}(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)}{H_{1:1}^{(1)}(\omega_1)^3 H_{1:1}^{(1)}(-\omega_1)} \right] \\ \operatorname{Re} \left[ \frac{H_{1:111}^{(3)}(\omega_2, \omega_2, -\omega_2)}{H_{1:1}^{(1)}(\omega_2)^3 H_{1:1}^{(1)}(-\omega_2)} \right] \\ \operatorname{Im} \left[ \frac{H_{1:111}^{(3)}(\omega_2, \omega_2, -\omega_2)}{H_{1:1}^{(1)}(\omega_2)^3 H_{1:1}^{(1)}(-\omega_2)} \right] \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re}[H_{1:1}^{(1)}(2\omega_1)] & \operatorname{Re}[H_{2:2}^{(1)}(2\omega_1)] & 1 \\ \operatorname{Im}[H_{1:1}^{(1)}(2\omega_1)] & \operatorname{Im}[H_{2:2}^{(1)}(2\omega_1)] & 0 \\ \operatorname{Re}[H_{1:1}^{(1)}(2\omega_2)] & \operatorname{Re}[H_{2:2}^{(1)}(2\omega_2)] & 1 \\ \operatorname{Im}[H_{1:1}^{(1)}(2\omega_2)] & \operatorname{Im}[H_{2:2}^{(1)}(2\omega_2)] & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} k_{2,12} k_{1,22} \\ \frac{2}{3} k_{2,22}^2 \\ \frac{2}{3} \frac{k_{2,12} k_{1,22}}{k_1} + \frac{4}{3} \frac{k_{2,22}^2}{k_2} - k_{2,222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \left[ \frac{H_{2:222}^{(3)}(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)}{H_{2:2}^{(1)}(\omega_1)^3 H_{2:2}^{(1)}(-\omega_1)} \right] \\ \operatorname{Im} \left[ \frac{H_{2:222}^{(3)}(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)}{H_{2:2}^{(1)}(\omega_1)^3 H_{2:2}^{(1)}(-\omega_1)} \right] \\ \operatorname{Re} \left[ \frac{H_{2:222}^{(3)}(\omega_2, \omega_2, -\omega_2)}{H_{2:2}^{(1)}(\omega_2)^3 H_{2:2}^{(1)}(-\omega_2)} \right] \\ \operatorname{Im} \left[ \frac{H_{2:222}^{(3)}(\omega_2, \omega_2, -\omega_2)}{H_{2:2}^{(1)}(\omega_2)^3 H_{2:2}^{(1)}(-\omega_2)} \right] \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

Il reste à présent à calculer les paramètres  $k_{1,112}$ ,  $k_{1,122}$ ,  $k_{1,222}$ ,  $k_{2,111}$ ,  $k_{2,112}$  et  $k_{2,122}$ . Pour ce faire, une manière simple consiste à isoler ces coefficients des expressions analytiques (2.86)-(2.89). On trouve les expressions suivantes :

Pour le coefficient  $k_{1,222}$ , on a

$$k_{1,222} = -\frac{H_{1,222}(\omega, \omega, -\omega)}{H_{1:1}^{(1)}(\omega) \left(H_{2:2}^{(1)}(\omega)\right)^2 H_{2:2}^{(1)}(-\omega)} + \frac{1}{3} k_{1,12} k_{1,22} \left(H_{1:1}^{(1)}(2\omega) + 2k_1^{-1}\right) + \frac{2}{3} k_{1,22} k_{2,22} \left(H_{2:2}^{(1)}(2\omega) + 2k_2^{-1}\right) \quad (2.124)$$

Similairement pour le coefficient  $k_{2,111}$ , on a

$$k_{2,111} = -\frac{H_{2,111}(\omega, \omega, -\omega)}{H_{2,2}^{(1)}(\omega) \left(H_{1,1}^{(1)}(\omega)\right)^2 H_{1,1}^{(1)}(-\omega)} + \frac{2}{3}k_{2,11}k_{1,11} \left(H_{1,1}^{(1)}(2\omega) + 2k_1^{-1}\right) + \frac{1}{3}k_{2,12}k_{2,11} \left(H_{2,2}^{(1)}(2\omega) + 2k_2^{-1}\right) \quad (2.125)$$

Pour les coefficients  $k_{1,112}$  et  $k_{2,112}$  on utilise les noyaux  $H_{j,112}^{(3)}$ , soit

$$k_{j,112} = -\frac{3H_{j,112}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)}{H_{j,j}^{(1)}(\omega) \left(H_{1,1}^{(1)}(\omega)\right)^2 H_{2,2}^{(1)}(-\omega)} + 2\frac{k_{j,11}k_{1,12}}{k_1} + \frac{k_{j,12}k_{2,12}}{k_2} + k_{j,12}k_{1,11}H_{1,1}^{(1)}(2\omega) + 2k_{j,22}k_{2,11}H_{2,2}^{(1)}(2\omega) \quad (2.126)$$

Enfin, les paramètres  $k_{1,122}$  et  $k_{2,122}$  sont trouvés grâce à l'expression suivante

$$k_{j,122} = -\frac{3H_{j,122}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)}{H_{j,j}^{(1)}(\omega) \left(H_{1,1}^{(1)}(\omega)\right)^2 H_{2,2}^{(1)}(\omega)H_{2,2}^{(1)}(-\omega)} + 2\frac{k_{j,11}k_{1,22}}{k_1} + \frac{k_{j,12}k_{2,22}}{k_2} + \frac{1}{2}k_{j,12}k_{1,12} \left(H_{1,1}^{(1)}(2\omega) + k_1^{-1}\right) + k_{j,22}k_{2,12} \left(H_{2,2}^{(1)}(2\omega) + k_2^{-1}\right) \quad (2.127)$$

La table ci-dessous reprend les résultats de cette identification des paramètres à l'aide des noyaux de Volterra obtenus à l'étape précédente.

Paramètre	Valeur exacte	Valeur estimée	Erreur relative [%]
$m_1$ [kg]	1.0	1.0	0.005
$m_2$ [kg]	2.0	2.0	0.006
$c_1$ [Ns/m]	20.0	19.685	1.57
$c_2$ [Ns/m]	30.0	29.944	0.19
$k_1$ [N/m]	$1.0 \times 10^4$	$1.0 \times 10^4$	0.002
$k_2$ [N/m]	$3.0 \times 10^4$	$3.0 \times 10^4$	0.01
$k_{1,11}$ [N/m <sup>2</sup> ]	$1.0 \times 10^7$	$1.06 \times 10^7$	5.5
$k_{2,11}$ [N/m <sup>2</sup> ]	$9.0 \times 10^6$	$9.01 \times 10^6$	0.16
$k_{1,12}$ [N/m <sup>2</sup> ]	$2.0 \times 10^7$	$1.93 \times 10^7$	3.7
$k_{2,12}$ [N/m <sup>2</sup> ]	$1.0 \times 10^7$	$1.08 \times 10^7$	7.9
$k_{1,22}$ [N/m <sup>2</sup> ]	$3.0 \times 10^7$	$2.97 \times 10^7$	0.91
$k_{2,22}$ [N/m <sup>2</sup> ]	$2.0 \times 10^7$	$2.02 \times 10^7$	1.1
$k_{1,111}$ [N/m <sup>3</sup> ]	$5.0 \times 10^9$	$6.56 \times 10^9$	31
$k_{2,111}$ [N/m <sup>3</sup> ]	$1.0 \times 10^9$	$1.62 \times 10^9$	62
$k_{1,112}$ [N/m <sup>3</sup> ]	$6.0 \times 10^9$	$\approx 10^{11}$	> 100
$k_{2,112}$ [N/m <sup>3</sup> ]	$2.0 \times 10^9$	$\approx 10^{11}$	> 100
$k_{1,122}$ [N/m <sup>3</sup> ]	$7.0 \times 10^9$	$\approx 10^{11}$	> 100
$k_{2,122}$ [N/m <sup>3</sup> ]	$3.0 \times 10^9$	$\approx 10^{11}$	> 100
$k_{1,222}$ [N/m <sup>3</sup> ]	$8.0 \times 10^9$	$6.4 \times 10^9$	20
$k_{2,222}$ [N/m <sup>3</sup> ]	$4.0 \times 10^9$	$5.2 \times 10^9$	30

Les erreurs sur les paramètres linéaires et les termes provenant de la non-linéarité quadratique sont faibles. En revanche, les erreurs sur la non-linéarité cubique sont plus grandes et particulièrement pour les paramètres  $k_{1,112}$ ,  $k_{2,112}$ ,  $k_{1,122}$  et  $k_{2,122}$  comme attendu.

Cependant, ces erreurs d'identification ne doivent pas remettre en cause l'utilité du modèle de Volterra. En effet, ces erreurs auront un impact relativement limité lors de la construction des noyaux dans tout l'espace.

Justement, la dernière étape consiste à construire ces noyaux avec les paramètres identifiés.

### Étape 5 : Construire les HFRF dans l'espace complet

Connaissant tous les paramètres du problème, il est alors possible de construire les noyaux de Volterra dans tout l'espace.

Les paramètres linéaires et les paramètres provenant de la non-linéarité quadratique étant bien identifiés, il n'y a pas un grand intérêt à montrer la construction des noyaux au premier et deuxième ordre. C'est pourquoi je me concentre principalement sur la construction des noyaux au troisième ordre.

Par souci de lisibilité, ces noyaux au troisième ordre seront illustrés à un endroit de l'espace en particulier. Cet endroit particulier sera choisi où les noyaux possèdent une valeur maximale.

Commençons simplement par regarder le noyau  $H_{2,111}^{(3)}$ . Ce noyau fait intervenir le paramètre  $k_{2,111}$  qui a été identifié avec 62% d'erreur. Vérifions donc l'impact de cette erreur sur ce noyau. La Figure 2.49 présente le noyau  $H_{2,111}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$  construit grâce aux paramètres identifiés et est comparé au noyau construit avec les paramètres réels.

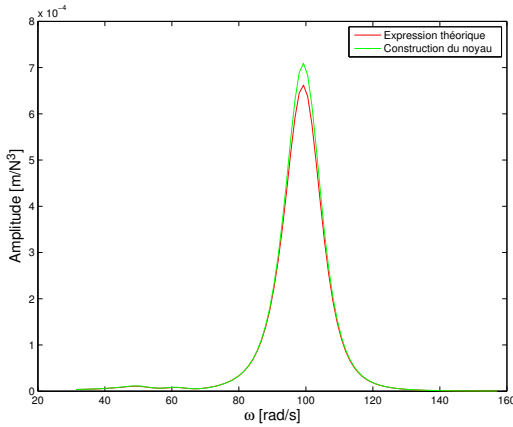


FIGURE 2.49 –  $H_{2,111}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$

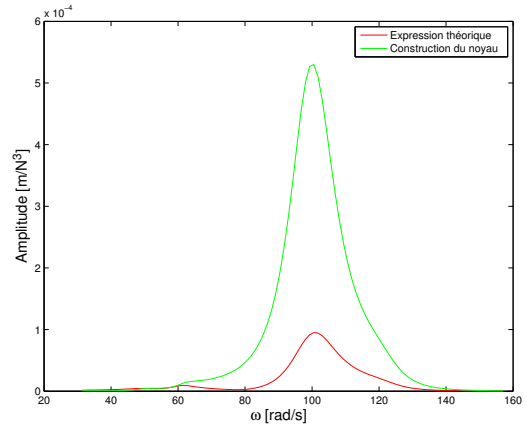


FIGURE 2.50 –  $H_{1,112}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$

On observe une faible différence entre les deux expressions. Malgré l'erreur commise sur le paramètre  $k_{2,111}$ , le noyau est bien construit.

Intéressons-nous à présent au noyau  $H_{1,112}^{(3)}$ . Lors de l'identification des paramètres, une erreur relativement conséquente était faite sur le paramètre  $k_{1,112}$ . On va donc examiner l'impact de cette erreur lors de la reconstruction du noyau. La Figure 2.50 représente le noyau  $H_{1,112}^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$  construit avec les paramètres identifiés et est comparé à son expression analytique calculée avec les vrais paramètres du système.

On voit sur cette figure que le noyau reconstruit est 5 fois plus grand au niveau de la fréquence propre. Cette erreur peut sembler conséquente, mais elle n'aura a priori pas d'impact important lors du calcul de la réponse. En effet, les problèmes étudiés sont faiblement non linéaires et ces noyaux d'ordre 3 sont donc relativement faibles. De plus, l'ordre de grandeur obtenu pour ce noyau reste assez similaire avec son expression théorique. Dès lors, malgré cette différence, l'approximation de la solution du système n'en sera que peu affectée.



## Chapitre 3

# Application

### 3.1 Pont suspendu sur le Détroit d'Akashi

L'application que nous traitons est l'étude du câble principal entre les deux pylônes du pont suspendu sur le détroit d'Akashi.

Cet exemple nous permettra de montrer que la méthode d'identification à un degré de liberté fonctionne pour d'autres paramètres que ceux trouvés dans la littérature. De plus, le système d'un câble suspendu est beaucoup moins amorti comparé à l'exemple traité dans la section 2.1.2.2 (0.5% comparé à 10% d'amortissement). Notre méthode d'identification sur de tels cas pourra donc être testée.

Ensuite, lorsque l'identification des paramètres aura été menée, la réponse du système soumis à une excitation aléatoire sera proposée.

#### 3.1.1 Identification des paramètres

Similairement aux exemples traités précédemment, nous allons ici calculer les paramètres du système. Ensuite, nous allons utiliser notre méthode d'identification afin d'estimer ces paramètres et voir s'ils sont proches des valeurs calculées. Il s'agit plutôt d'une application servant comme validation à notre méthode. En effet, en pratique, les paramètres d'un tel système seraient inconnus. On utiliserait par exemple un logiciel éléments finis afin d'obtenir la réponse du système. Cependant, le but ici est de simplement voir si la méthode paramétrique fonctionne pour des systèmes avec un faible amortissement. Pour ce faire, on peut simplement se créer un système et regarder si notre identification retombe bien sur les paramètres choisis.

Afin de construire le système à étudier, Elsa de Sá Caetano propose une équation comparable à l'équation (2.16) [10]. Cette équation est utilisée afin de nous donner un ordre de grandeur pour les différents paramètres du système à considérer. L'équation calcule l'amplitude modale d'un câble soumis à une excitation paramétrique, par l'intermédiaire d'un déplacement longitudinal du pylône. En effet, sous une excitation  $x(t) = x_B \cos(\omega t)$ , où  $x_B$  représente le déplacement du pylône, la vibration verticale du câble peut se calculer dans le premier mode comme

$$w(x, t) = \alpha_1(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (3.1)$$

Où le coefficient  $\alpha_1(t)$  est l'amplitude modale et se calcule en résolvant l'équation suivante :

$$\ddot{\alpha}_1(t) + 2\xi_1\omega_1\dot{\alpha}_1(t) + \omega_1^2 \left(1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2} + \frac{x_B}{X_0} \cos(\omega t)\right) \alpha_1(t) + 2 \frac{\omega_1^2}{\pi\sqrt{X_0}l} \lambda \left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right) \alpha_1^2(t) + \frac{\pi^2}{4} \frac{\omega_1^2}{X_0l} \alpha_1^3(t) = \frac{\omega_1^2 l}{2\pi\sqrt{X_0}l} \lambda x_B \cos(\omega t) \quad (3.2)$$

Les différents paramètres de l'équation (3.2) peuvent être calculés en fonction des données du câble. Ces données dans le cas du pont suspendu sur le détroit d'Akashi sont reprises dans le tableau ci-dessous.

Données	Valeur
M [kg/m]	12000
L [m]	2100
l [m]	1991
d [m]	200
E [MPa]	190000
$\phi$ [m]	1.122

TABLE 3.1 – Données du pont d'Akashi

Comme déjà mentionné, l'équation (3.2) peut s'apparenter à l'équation générale (2.16). Dans ce cas, les paramètres  $m, c, k, k_2$  et  $k_3$  seraient :

$$m = 1 \quad (3.3)$$

$$c = 2\xi_1\omega_1 = 0.0026 \quad (3.4)$$

$$k = \omega_1^2 \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2} \right) = 1.884 \quad (3.5)$$

$$k_2 = 2 \frac{\omega_1^2}{\pi\sqrt{X_0}l} \lambda \left( 1 + \frac{\pi^2}{16} \right) = 0.0122 \quad (3.6)$$

$$k_3 = \frac{\pi^2}{4} \frac{\omega_1^2}{X_0 l} = 1.937 \times 10^{-5} \quad (3.7)$$

Ces valeurs ont été obtenues grâce au calcul des paramètres suivants :

$$\omega_1 = \frac{\kappa\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{M}} \quad (3.8)$$

$$X_0 = \frac{Tl}{EA_0} \quad (3.9)$$

$$\lambda^2 = \left( \frac{MgL}{T} \right)^2 \frac{L}{\frac{TL_e}{EA_0}} \quad (3.10)$$

$$\xi_1 = 0.005 \quad (3.11)$$

Avec,

$$A_0 = 0.8 \frac{\pi\phi^2}{4} \quad (3.12)$$

$$T = \sqrt{\left( \frac{Mlg}{2} \right)^2 + \left( \frac{Mgl^2}{8d} \right)^2} \quad (3.13)$$

$$H = \left( \frac{Mgl^2}{8d} \right) \quad (3.14)$$

$$L_e = L \left[ 1 + 8 \left( \frac{d}{L} \right)^2 \right] \quad (3.15)$$

$$\kappa = 2.5 \quad (3.16)$$

Où  $A_0$  est l'aire de la section du câble et  $T$  est la tension du câble soumis à son poids propre.

Maintenant que le problème a été défini, on peut passer à l'identification des paramètres du système et regarder s'ils correspondent aux paramètres calculés ci-dessus. La méthode paramétrique va être employée pour identifier ces paramètres.

Lors de la discussion concernant la convergence de la série de Volterra, il a été mis en évidence les problèmes pour des systèmes faiblement amorti. Dès lors, le choix des simulations à utiliser et la méthode d'identification demanderont plus d'attention.

Commençons simplement par regarder à partir de quel déplacement du pylône la non-linéarité intervient. Pour ce faire, on peut regarder le moment où l'écart-type de la réponse s'écarte de la solution d'un système linéaire. On trouve le résultat suivant :

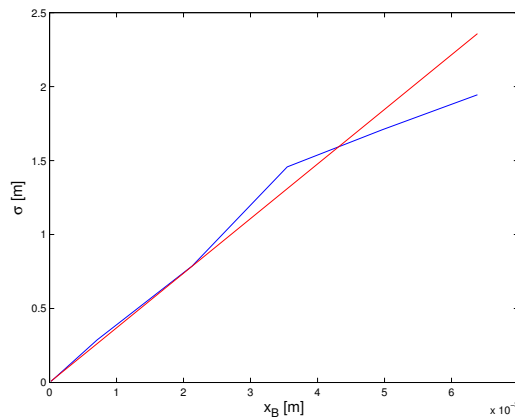


FIGURE 3.1 – Écart-type de la réponse  $Y(\omega)$  en fonction du déplacement du pylône

On voit que la solution diverge pour des déplacements de 0.1 mm. Cette solution semble peu réaliste dans la pratique, donc des simulations avec des déplacements plus importants seront utilisées.

Étant donné qu'il s'agit d'un système faiblement amorti, le pic à la fréquence de résonance sera plus étroit et plus important. Ceci à plusieurs conséquences. En effet, un pic plus important entraînera une divergence plus rapide de la série de Volterra et le fait qu'il soit étroit apportera la non-linéarité proche de la fréquence de résonance, mais disparaîtra en dehors de cette fréquence. Il faut donc faire un compromis entre d'une part une amplitude relativement faible afin que la série ne diverge pas trop, mais il faut que l'amplitude soit suffisante pour capter la non-linéarité. Et c'est bien tout le problème d'un système faiblement amorti.

Une étude paramétrique a donc été réalisée afin d'examiner comment les amplitudes des déplacements du pylône influençaient l'identification des paramètres. Cette étude est similaire à celle réalisée à la section 2.1.2.3. Les résultats de cette étude sont présentés aux Figures 3.2, 3.3 et 3.4.

Une nouvelle fois, on voit que pour des amplitudes trop faibles, l'identification ne se passe pas bien. Or, on a démontré au début de cette section que la non-linéarité intervenait lorsque le pylône possédait un déplacement supérieur à 0.1mm. Examinons de plus près l'identification des paramètres à partir de simulations avec des déplacements du pylône de 2 et 5mm. Dans ce cas, la fonction  $H_3(\omega, \omega, -\omega)$  que l'on identifie est représentée à la Figure 3.5.

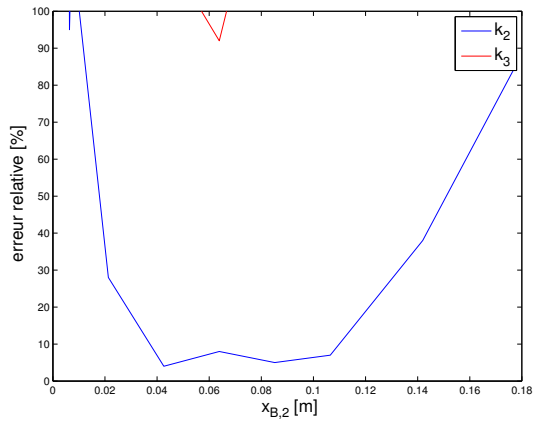


FIGURE 3.2 –  $x_{B,1} = 2\text{mm}$

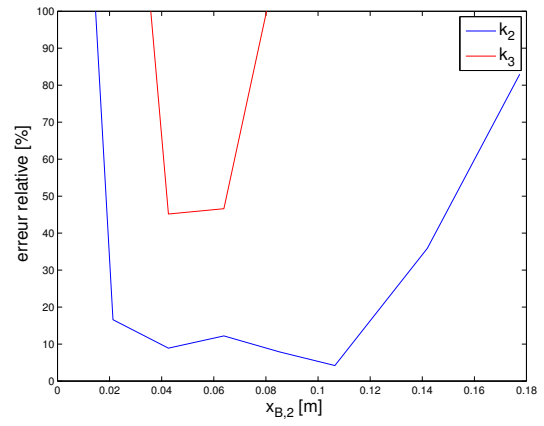


FIGURE 3.3 –  $x_{B,1} = 7\text{mm}$

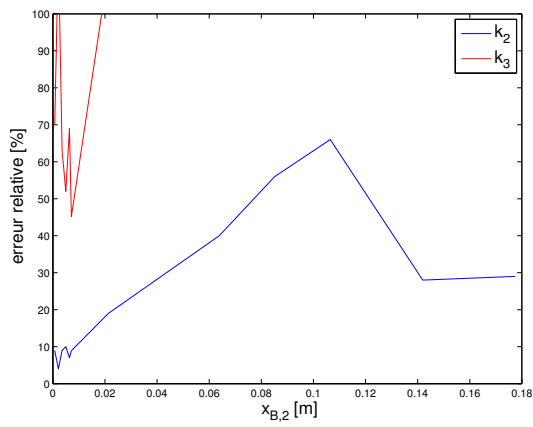


FIGURE 3.4 –  $x_{B,1} = 40\text{mm}$

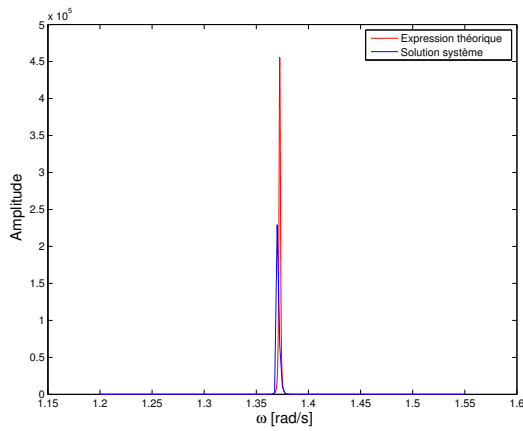
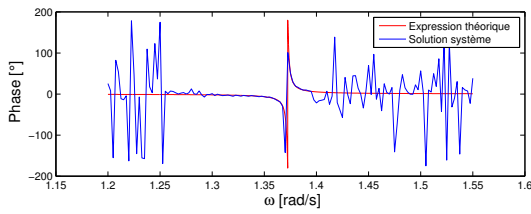


FIGURE 3.5 –  $H_3(\omega, \omega, -\omega)$  pour  $x_{B,1} = 2\text{mm}$  et  $x_{B,2} = 5\text{mm}$

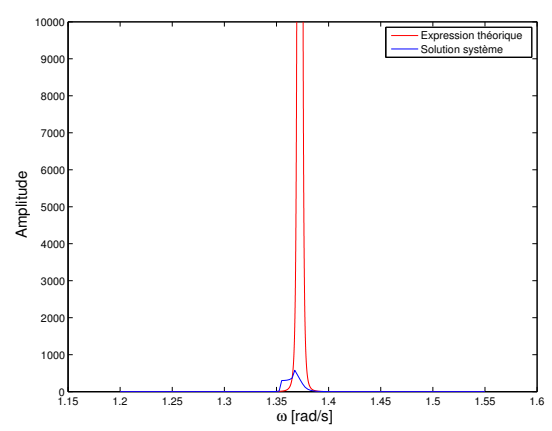
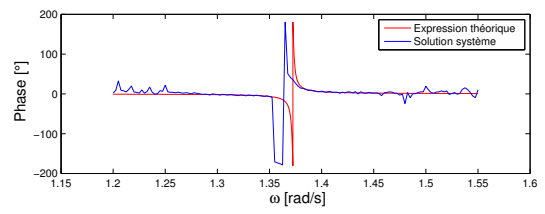


FIGURE 3.6 –  $H_3(\omega, \omega, -\omega)$  pour  $x_{B,1} = 7\text{mm}$  et  $x_{B,2} = 40\text{mm}$

Comme attendu, la réponse contient beaucoup de bruit numérique en dehors de la fréquence propre du câble. En revanche, autour de cette fréquence propre, la réponse semble bien identifiée. En effet, la non-linéarité à cet endroit est activée.

La solution dans ce cas consisterait à ne retenir que les informations autour de la fréquence propre, et de ne pas tenir compte des valeurs qui ne sont pas proches de la fréquence propre. Si on procède de la sorte, il est possible de réduire les erreurs sur les paramètres  $k_2$  et  $k_3$  à respectivement 22% et 110% contre 400% et 1000% si on gardait toutes les valeurs.

À présent, regardons lorsque les amplitudes sont plus élevées. La fonction  $H_3(\omega, \omega, -\omega)$  identifiée pour des simulations obtenues pour des déplacements du pylône de 7mm et 40mm est présentée à la Figure 3.6. A présent, les valeurs hors de la fréquence propre du câble semblent meilleures. En effet, on capte mieux la non-linéarité. En revanche, proche de la fréquence de résonance, la série de Volterra diverge trop. Dans ce cas, et contrairement au premier cas, on va garder les informations uniquement en dehors de la fréquence propre. Si on fait ça, on peut réduire les erreurs sur  $k_2$  et  $k_3$  qui étaient de 9% et 50% à 1% et 3%.

En résumé, pour un système faiblement amorti, il peut être utile d'arranger légèrement la méthode paramétrique en ne conservant que certaines valeurs des fonctions  $H$  identifiées. Deux solutions s'offrent à nous. La première est de prendre des simulations pour lesquelles la série de Volterra convergera ou divergera très peu. Dans ce cas, les valeurs autour de la fréquence d'excitation seront satisfaisantes. En revanche, en dehors de cette fréquence, la non-linéarité n'est pas bien captée. Il faut donc dans ce cas conserver uniquement les valeurs proches de la fréquence propre du câble. La deuxième option consiste à prendre des simulations pour lesquelles la non-linéarité sera présente également pour les valeurs en dehors de la fréquence propre du système. Ces simulations s'obtiennent pour des amplitudes d'excitation plus élevées et donc une plus grande divergence de la série. Dès lors, les informations à conserver dans ce cas sont uniquement les valeurs qui ne sont pas proches de la fréquence d'excitation.

Les différents tests ont montré qu'il était préférable de procéder à la deuxième méthode. En effet, dans ce cas les erreurs sur les paramètres non linéaires sont moindres.

Finalement, le résultat de l'identification en procédant de cette manière est représenté à la table ci-dessous :

Paramètre	Valeur exacte	Valeur estimée	Erreur relative [%]
m	1.0	1.004	0.4
c	0.0026	0.0026	0.3
k	1.884	1.891	0.4
$k_2$	0.0122	0.0121	0.7
$k_3$	$1.937 \times 10^{-5}$	$1.991 \times 10^{-5}$	2.8

TABLE 3.2 – Résultats de l'identification

Connaissant ces paramètres, il est ensuite possible de construire les noyaux de Volterra. Par exemple, les noyaux  $H_1(\omega_1)$  et  $H_2(\omega_1, \omega_2)$  sont représentés aux figures ci-dessous.

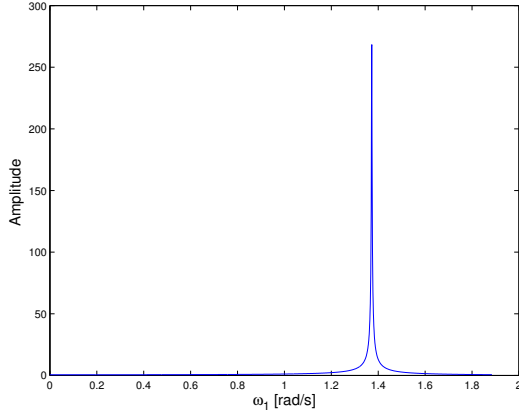


FIGURE 3.7 –  $H_1(\omega_1)$

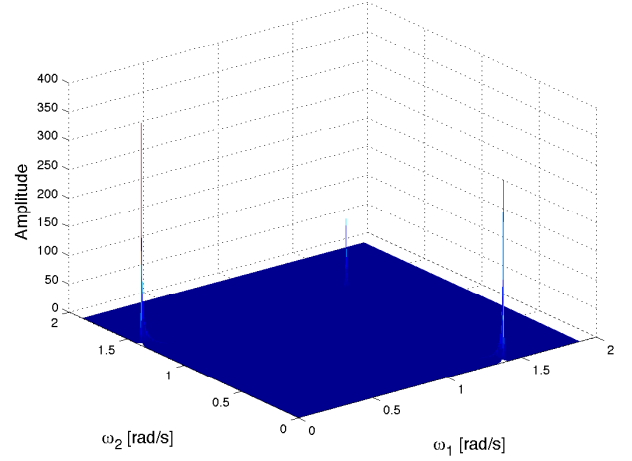


FIGURE 3.8 –  $H_2(\omega_1, \omega_2)$

Comme on pouvait s'y attendre, les pics sont bien plus étroits à cause du faible amortissement.

Dans la section suivante, nous allons exploiter ces noyaux qui viennent d'être construits afin de calculer la réponse d'un câble soumis à une excitation aléatoire.

### 3.1.2 Calcul de la réponse du câble soumis à une excitation aléatoire

Connaissant le comportement du système à travers les noyaux de Volterra, il est possible de trouver une approximation de la réponse du système soumis à n'importe quelle entrée, pourvu que la série converge.

Afin de montrer que la série de Volterra est aussi valable pour des excitations stochastiques, considérons une entrée aléatoire. Cette entrée est générée à l'aide d'un bruit blanc de moyenne nulle et d'écart-type  $\sigma_x$ . Numériquement, cette excitation peut s'obtenir à l'aide de la fonction *randn* de MATLAB :

$$x = \sigma_x \text{randn}(N,1)$$

Le but est donc de calculer la réponse sous cette excitation à l'aide de la série de Volterra. Seuls les trois premiers termes de cette série seront considérés. Pour rappel, la définition dans le domaine fréquentiel de cette série est

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= H_1(\omega)X(\omega) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(\omega_1, \omega - \omega_1)X(\omega_1)X(\omega - \omega_1)d\omega_1 \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} H_3(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2)X(\omega_1)X(\omega_2)X(\omega - \omega_1 - \omega_2)d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Les noyaux  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  ont été identifiés précédemment. Il reste simplement à calculer la transformée de Fourier de l'excitation  $X(\omega)$ . Les intégrales de convolution peuvent, par exemple, être calculées à l'aide de la fonction *trapz* de MATLAB.

La Figure 3.9 compare la solution obtenue grâce à des simulations et la solution de Volterra pour différentes valeurs de  $\sigma_x$ .

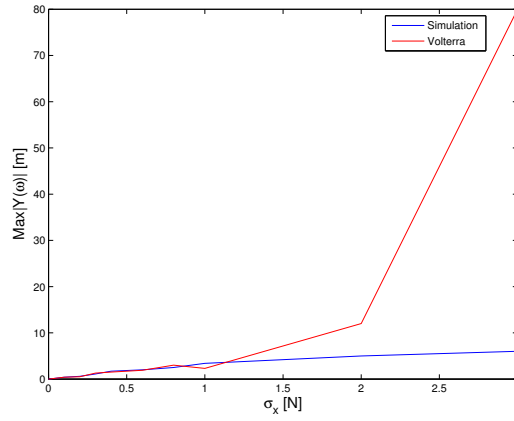


FIGURE 3.9 – Maximum de la réponse  $Y(\omega)$  en fonction de  $\sigma_x$

Pour des valeurs très petites de  $\sigma_x$ , le système possède un comportement linéaire. Dès lors, la série de Volterra permet d'approximer très précisément ce cas. Ensuite, la non linéarité s'active et pour des valeurs de  $\sigma_x > 0.2$  les termes d'ordre supérieur de la série ont un impact sur la solution. Enfin, on observe que la série de Volterra diverge et ne permet plus de représenter correctement la solution pour des valeurs de  $\sigma_x > 0.8$ .

Par exemple, les réponses obtenues pour des valeurs de  $\sigma_x$  égales à 0.2 et 2 sont présentées ci-dessous.

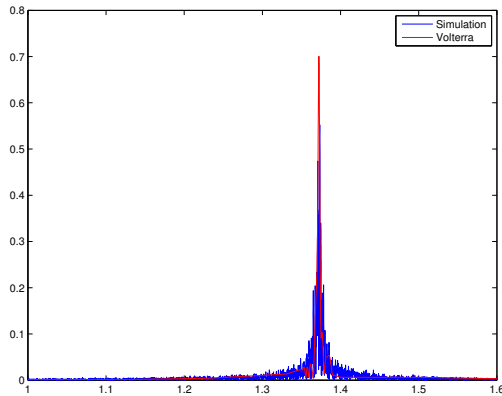


FIGURE 3.10 – Réponse du système pour  $\sigma_x = 0.2$

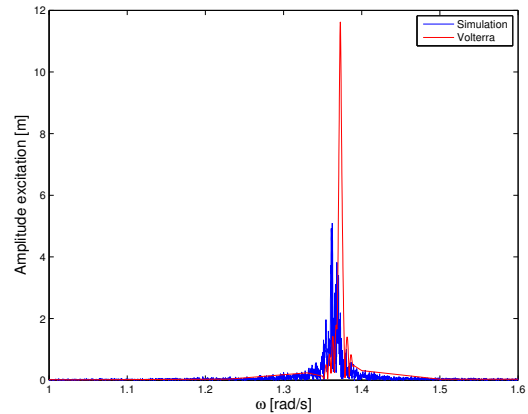


FIGURE 3.11 – Réponse du système pour  $\sigma_x = 2$

On voit que dans le cas où  $\sigma_x = 2$ , la réponse de Volterra n'approxime pas bien la réponse. En effet, si on regarde séparément les termes  $Y_1$ ,  $Y_2$  et  $Y_3$  de la série de Volterra, on a dans ce cas

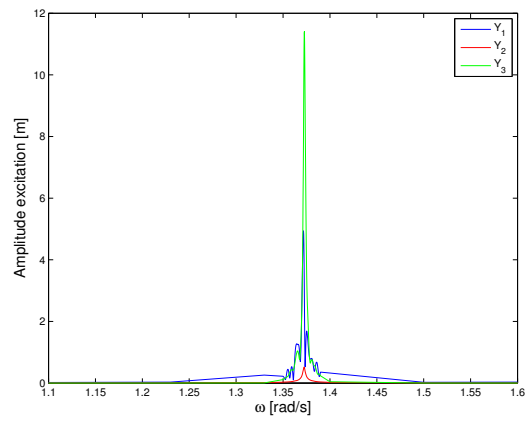


FIGURE 3.12 – Décomposition de la réponse de Volterra

On voit clairement sur cette figure que le 3<sup>ième</sup> terme de la série est grand par rapport aux deux autres termes. Ce qui conduit à la divergence de la série.



## Chapitre 4

# Conclusion

L'objectif de ce travail était l'identification de systèmes dynamiques non linéaires à l'aide de modèles de Volterra. Dans cette optique, une méthodologie pour des systèmes à un ou plusieurs degrés de liberté a été proposée.

Ma contribution quant à cette méthodologie a été dans un premier temps d'expliquer de manière la plus complète possible la série de Volterra. Ensuite, la méthode paramétrique a été développée.

Dans cette méthode, les expressions analytiques des noyaux de Volterra ont été obtenues à l'aide de la définition donnée par Schetzen et de la méthode des équations linéaires associées. Cette démarche est plutôt rare dans la littérature et apporte donc une méthode alternative pour trouver ces expressions.

Ensuite, la méthode d'identification des noyaux de Volterra proposée par Lee a été expliquée et puis modifiée de manière à utiliser plus ou moins de simulations. Les résultats ont montré que pour des amplitudes d'excitation bien choisies, c'est-à-dire tel que la non-linéarité est suffisamment activée et que la série de Volterra ne diverge pas démesurément, un minimum de deux simulations peuvent être utilisés afin d'obtenir des résultats précis. Dans ce cas, cette étude a également montré que le système est plus fragile dans le sens où les résultats dépendront fortement du choix de ces amplitudes d'excitations. Une manière de diminuer cette dépendance est de prendre un plus grand nombre de simulations afin d'identifier les paramètres du système.

La convergence de la série de Volterra a également été étudiée. La mise sous forme adimensionnelle du système a permis d'établir des critères génériques. Il a été mis en évidence les difficultés rencontrées pour des systèmes faiblement amortis. Ce genre de systèmes conduisent à une divergence de la série plus rapide.

La difficulté d'un système faiblement amorti, outre le fait que la série diverge plus rapidement, réside également dans l'activation de la non-linéarité. En effet, en dehors de la fréquence propre du système, la non-linéarité n'est pas suffisamment activée. Il en résulte une identification des paramètres non linéaires plus ardue.

Cependant, il a été montré qu'en modifiant la méthode d'identification, par exemple en négligeant l'information autour de la fréquence propre, les paramètres pouvaient être obtenus de manière précise.

Une fois les paramètres du système obtenus, il est possible de reconstruire les noyaux de Volterra dans tout l'espace. Connaissant ces noyaux, la réponse du système sous n'importe quelle excitation peut être trouvée.

L'application proposée dans ce travail permettait justement de mettre en évidence l'identification d'un système non linéaire faiblement amorti et la construction de la réponse sous une excitation aléatoire. La zone d'applicabilité de la série de Volterra, dans ce cas, a été calculée.

Enfin, la méthode paramétrique à plusieurs degrés de liberté a été entièrement établie. Cette méthode pour de tels systèmes ne se retrouve pas dans la littérature. Ainsi, cette partie constitue un réel apport dans le domaine d'identification de systèmes non linéaires à plusieurs degrés de liberté.

Les paramètres à identifier pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté sont conséquents. Dès lors, la méthode demande plus de ressources par rapport au cas d'un système à un degré de liberté. Les calculs sont également plus longs, mais ne constituent pas une difficulté mathématique supplémentaire.

Afin de conclure, ce travail initie un domaine de recherche concernant la méthode d'identification paramétrique. Les perspectives d'avenir de cette méthode sont multiples. Dans un premier temps, on pourrait généraliser le développement d'un système à deux degrés de liberté vers un système à  $M$  degrés de liberté. Les notations étant relativement lourdes dans ce cas, le produit de Kronecker peut être utilisé afin d'en simplifier l'écriture. Ensuite, la méthode paramétrique peut être testée avec des simulations provenant d'un logiciel éléments finis. Par exemple, on étudiera la réponse d'un pont soumis à une excitation stochastique. Enfin, la méthode paramétrique pour des types de non-linéarité différents de ceux considérés dans ce travail pourra être développée. Cette méthode d'identification a prouvé tout au long de ce travail son efficacité et mérite une attention particulière. L'objectif serait de remplacer, si possible, les simulations numériques consommatrices en temps de calcul. Ce temps qui est si précieux dans le monde professionnel.

## Annexe A

# Développement des équations

### A.1 Développement de la série de Volterra (2.1) jusqu'au troisième ordre

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 \\ & + \iint_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \iiint_{-\infty}^{+\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ & + \dots \end{aligned} \tag{A.1}$$

### A.2 Développement de la série de Volterra (2.5) jusqu'au troisième ordre

$$\begin{aligned} Y(\omega) = & H_1(\omega) X(\omega) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(\omega_1, \omega - \omega_1) X(\omega_1) X(\omega - \omega_1) d\omega_1 \\ & + \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} H_3(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) X(\omega_1) X(\omega_2) X(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\ & + \dots \end{aligned} \tag{A.2}$$

### A.3 Développement de la série de Volterra (2.59) jusqu'au troisième ordre

$$y_j(t) = y_j^{(1)}(t) + y_j^{(2)}(t) + y_j^{(3)}(t) + \dots + y_j^{(n)}(t) + \dots \tag{A.3}$$

Avec,

$$y_j^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{j,1}^{(1)}(\tau_1) x_1(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} h_{j,2}^{(1)}(\tau_1) x_2(t - \tau_1) d\tau_1 \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
y_j^{(2)} = & \iint_{-\infty}^{\infty} h_{j:11}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
& + \iint_{-\infty}^{\infty} h_{j:12}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x_1(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
& + \iint_{-\infty}^{\infty} h_{j:21}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x_2(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
& + \iint_{-\infty}^{\infty} h_{j:22}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x_2(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
y_j^{(3)} = & \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{j:111}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) x_1(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
& + \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{j:112}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) x_2(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
& + \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{j:121}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) x_1(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
& + \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{j:211}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_2(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) x_1(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
& + \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{j:122}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) x_2(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
& + \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{j:212}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_2(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) x_2(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
& + \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{j:221}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_2(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) x_1(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
& + \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{j:222}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_2(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) x_2(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3
\end{aligned} \tag{A.6}$$

#### A.4 Développement de la série de Volterra (2.61) jusqu'au troisième ordre

$$Y_j(\omega) = Y_j^{(1)}(\omega) + Y_j^{(2)}(\omega) + Y_j^{(3)}(\omega) + \dots + Y_j^{(n)}(\omega) + \dots \tag{A.7}$$

Avec,

$$Y_j^{(1)}(\omega) = H_{j:1}^{(1)}(\omega) X_1(\omega) + H_{j:2}^{(1)}(\omega) X_2(\omega) \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
Y_j^{(2)}(\omega) = & \left( \frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} H_{j:11}^{(1)}(\omega_1, \omega - \omega_1) X_1(\omega_1) X_1(\omega - \omega_1) d\omega_1 \\
& + \left( \frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} H_{j:12}^{(1)}(\omega_1, \omega - \omega_1) X_1(\omega_1) X_2(\omega - \omega_1) d\omega_1 \\
& + \left( \frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} H_{j:21}^{(1)}(\omega_1, \omega - \omega_1) X_2(\omega_1) X_1(\omega - \omega_1) d\omega_1 \\
& + \left( \frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} H_{j:22}^{(1)}(\omega_1, \omega - \omega_1) X_2(\omega_1) X_2(\omega - \omega_1) d\omega_1
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
Y_j^{(3)}(\omega) = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} H_{j:111}^{(1)}(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) X_1(\omega_1) X_1(\omega_2) X_1(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\
& + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} H_{j:112}^{(1)}(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) X_1(\omega_1) X_1(\omega_2) X_2(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\
& + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} H_{j:121}^{(1)}(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) X_1(\omega_1) X_2(\omega_2) X_1(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\
& + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} H_{j:211}^{(1)}(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) X_2(\omega_1) X_1(\omega_2) X_1(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\
& + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} H_{j:122}^{(1)}(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) X_1(\omega_1) X_2(\omega_2) X_2(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\
& + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} H_{j:212}^{(1)}(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) X_2(\omega_1) X_1(\omega_2) X_2(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\
& + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} H_{j:221}^{(1)}(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) X_2(\omega_1) X_2(\omega_2) X_1(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\
& + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} H_{j:222}^{(1)}(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) X_2(\omega_1) X_2(\omega_2) X_2(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

## Annexe B

# Développement mathématique pour trouver les expressions des HFRF - Système à 1 DDL

### B.1 Première équation associée (2.22)

$$\mathcal{D}[y_1] = x(t) \quad (\text{B.1})$$

Graphiquement ce système peut se représenter comme ci-dessous. L'entrée du système est l'excitation  $x(t)$  et cette entrée passe par l'opérateur linéaire pour donner la réponse  $y_1(t)$ .

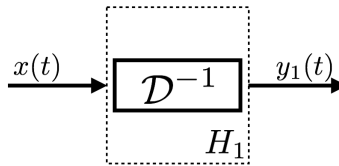


FIGURE B.1 – Fonction de réponse fréquentielle linéaire

Pour ce système linéaire, la fonction de réponse fréquentielle est facilement trouvée. On retrouve le résultat bien connu suivant :

$$H_1(\omega_1) = [-m\omega_1^2 + ic\omega_1 + k]^{-1} \quad (\text{B.2})$$

### B.2 Deuxième équation associée (2.23)

$$\mathcal{D}[y_2] + k_2 y_1^2 = 0 \quad (\text{B.3})$$

Cette deuxième équation peut une nouvelle fois se représenter graphiquement. Cette fois-ci, l'entrée est plus complexe.

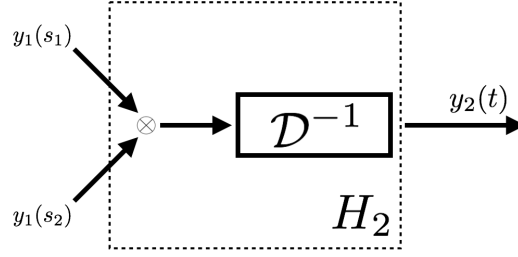


FIGURE B.2 – Fonction de transfert au deuxième ordre

Afin de trouver la HFRF, on va utiliser les définitions de Schetzen [2] et l'équation linéaire associée.

Par définition [2], on a

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (\text{B.4})$$

On a également au vu de l'équation linéaire associée (2.23),

$$y_2(t) = -k_2 \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_3) y_1^2(t - \tau_3) d\tau_3 \quad (\text{B.5})$$

Si on injecte l'équation (B.4), on trouve

$$y_2(t) = -k_2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) h_1(\tau_3) x(t - \tau_1 - \tau_3) x(t - \tau_2 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (\text{B.6})$$

Par définition [2], on a également

$$y_2(t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (\text{B.7})$$

Si on compare les équations (B.6) et (B.7) en ayant préalablement fait dans l'équation (B.6) le changement de variable suivant :

$$\tau_1 = \sigma_1 - \tau_3 \quad \tau_2 = \sigma_2 - \tau_3$$

D'où,

$$h_2(\sigma_1, \sigma_2) = -k_2 \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_3) h_1(\sigma_1 - \tau_3) h_1(\sigma_2 - \tau_3) d\tau_3 \quad (\text{B.8})$$

Par définition, la transformée de Fourier est

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h_2(\sigma_1, \sigma_2) e^{-(\omega_1 \sigma_1 + \omega_2 \sigma_2)} d\sigma_1 d\sigma_2 \quad (\text{B.9})$$

On introduit l'équation (B.8) et on trouve,

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = -k_2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_3) h_1(\sigma_1 - \tau_3) h_1(\sigma_2 - \tau_3) e^{-(\omega_1 \sigma_1 + \omega_2 \sigma_2)} d\sigma_1 d\sigma_2 d\tau_3 \quad (\text{B.10})$$

Et on réeffectue le changement de variable précédent, on trouve

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = -k_2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) h_1(\tau_3) e^{-(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 + (\omega_1 + \omega_2) \tau_3)} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (\text{B.11})$$

Soit,

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = -k_2 H_1(\omega_1) H_1(\omega_2) H_1(\omega_1 + \omega_2) \quad (\text{B.12})$$

### B.3 Troisième équation associée (2.24)

$$\mathcal{D}[y_3] + 2k_2 y_1 y_2 + k_3 y_1^3 = 0 \quad (\text{B.13})$$

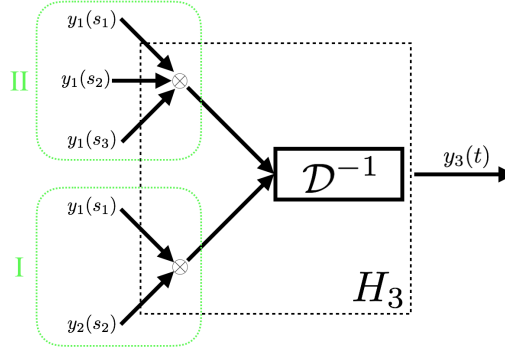


FIGURE B.3 – Fonction de transfert au troisième ordre

Grâce à l'équation linéaire associée (2.24), on peut écrire

$$y_3(t) = \underbrace{-2k_2 \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_4) y_1(t - \tau_4) y_2(t - \tau_4) d\tau_4}_{\text{I}} - \underbrace{k_3 \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_4) y_1^3(t - \tau_4) d\tau_4}_{\text{II}} \quad (\text{B.14})$$

On va se servir des définitions de  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ . Premièrement développons le premier terme de l'équation (B.14), on a

$$y_3^I(t) = -2k_2 \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_4) y_1(t - \tau_4) y_2(t - \tau_4) d\tau_4 \quad (\text{B.15})$$

En insérant les définitions de  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ , on trouve :

$$y_3^I(t) = -2k_2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_4) h_1(\tau_1) h_2(\tau_2, \tau_3) x(t - \tau_1 - \tau_4) x(t - \tau_2 - \tau_4) x(t - \tau_3 - \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \quad (\text{B.16})$$

De plus si on injecte l'équation (B.8), on trouve

$$y_3^I(t) = 2k_2^2 \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{h_1(\tau_4) h_1(\tau_5) h_1(\tau_1) h_1(\tau_2 - \tau_5) h_1(\tau_3 - \tau_5)}^5 \times \\ x(t - \tau_1 - \tau_4) x(t - \tau_2 - \tau_4) x(t - \tau_3 - \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \quad (\text{B.17})$$

Par definition, on a

$$y_3(t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (\text{B.18})$$

En comparant ces deux expressions et en effectuant le changement de variables suivant :

$$\tau_1 = \sigma_1 - \tau_4 \quad \tau_2 = \sigma_2 - \tau_4 \quad \tau_3 = \sigma_3 - \tau_4$$

D'où,

$$h_3^I(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 2k_2^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_4) h_1(\tau_5) h_1(\sigma_1 - \tau_4) h_1(\sigma_2 - \tau_4 - \tau_5) h_1(\sigma_3 - \tau_4 - \tau_5) d\tau_4 d\tau_5 \quad (\text{B.19})$$



La transformée de Fourier de  $h_3$  est par définition :

$$H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} h_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) e^{-(\omega_1 \sigma_1 + \omega_2 \sigma_2 + \omega_3 \sigma_3)} d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \quad (\text{B.20})$$

Donc, si on injecte l'expression de  $h_3$ , on trouve

$$H_3^I(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 2k_2^2 \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{h_1(\tau_4)h_1(\tau_5)h_1(\sigma_1 - \tau_4)h_1(\sigma_2 - \tau_4 - \tau_5)h_1(\sigma_3 - \tau_4 - \tau_5)}^5 \times \\ e^{-(\omega_1 \sigma_1 + \omega_2 \sigma_2 + \omega_3 \sigma_3)} d\tau_4 d\tau_5 d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \quad (\text{B.21})$$

Si on réeffectue le changement de variable précédent, on obtient

$$H_3^I(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 2k_2^2 \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{h_1(\tau_4)h_1(\tau_5)h_1(\tau_1)h_1(\tau_2 - \tau_5)h_1(\tau_3 - \tau_5)}^5 \times \\ e^{-(\omega_1(\tau_1 + \tau_4) + \omega_2(\tau_2 + \tau_4) + \omega_3(\tau_3 + \tau_4))} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \quad (\text{B.22})$$

Afin de simplifier cette expression, il est utile d'effectuer un ultime changement de variable

$$\varepsilon_1 = \tau_2 - \tau_5 \quad \varepsilon_2 = \tau_3 - \tau_5$$

Ce qui donne,

$$H_3^I(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 2k_2^2 \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{h_1(\tau_4)h_1(\tau_5)h_1(\tau_1)h_1(\varepsilon_1)h_1(\varepsilon_2)}^5 \times \\ e^{-(\omega_1(\tau_1 + \tau_4) + \omega_2(\varepsilon_1 + \tau_5 + \tau_4) + \omega_3(\varepsilon_2 + \tau_5 + \tau_4))} d\tau_1 d\tau_4 d\tau_5 d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \quad (\text{B.23})$$

Soit,

$$H_3^I(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 2k_2^2 H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)H_1(\omega_3)H_1(\omega_2 + \omega_3)H_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \quad (\text{B.24})$$

Développons à présent le deuxième terme de l'équation (B.14). Pour rappel, on a

$$y_3^{II}(t) = -k_3 \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_4) y_1^3(t - \tau_4) d\tau_4 \quad (\text{B.25})$$

Si on insère l'expression de  $y_1$ , on trouve

$$y_3^{II}(t) = -k_3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_4)h_1(\tau_1)h_1(\tau_2)h_1(\tau_3)x(t - \tau_1 - \tau_4)x(t - \tau_2 - \tau_4)x(t - \tau_3 - \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \quad (\text{B.26})$$

De même que précédemment, par définition de  $y_3$  et changement de variable, on trouve

$$h_3^{II}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = -k_3 \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_4)h_1(\sigma_1 - \tau_4)h_1(\sigma_2 - \tau_4)h_1(\sigma_3 - \tau_4) d\tau_4 \quad (\text{B.27})$$

La transformée de Fourier donne

$$H_3^{II}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -k_3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_4)h_1(\sigma_1 - \tau_4)h_1(\sigma_2 - \tau_4)h_1(\sigma_3 - \tau_4) e^{-(\omega_1 \sigma_1 + \omega_2 \sigma_2 + \omega_3 \sigma_3)} d\tau_4 d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \quad (\text{B.28})$$

Si on réeffectue le changement de variable, on trouve

$$H_3^{II}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -k_3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_4)h_1(\tau_1)h_1(\tau_2)h_1(\tau_3)e^{-(\omega_1(\tau_1-\tau_4)+\omega_2(\tau_2-\tau_4)+\omega_3(\tau_3-\tau_4))}d\tau_1d\tau_2d\tau_3d\tau_4 \quad (B.29)$$

Soit,

$$H_3^{II}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -k_3 H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)H_1(\omega_3)H_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \quad (B.30)$$

Finalement, on trouve

$$\begin{aligned} H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= H_3^I(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + H_3^{II}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ &= [2k_2^2 H_1(\omega_2 + \omega_3) - k_3] H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)H_1(\omega_3)H_1(s_1 + s_2 + s_3) \end{aligned} \quad (B.31)$$

La solution n'est pas symétrique. Il faut donc la symétriser, ce qui est possible au vu des propriétés des noyaux de Volterra. La symétrisation peut se faire de la manière suivante :

$$H_n^{sym}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\text{All permutations} \\ \text{of } \omega_1, \dots, \omega_n}} H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) \quad (B.32)$$

Soit,

$$\begin{aligned} H_3^{sym}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \left[ \frac{2}{3} k_2^2 [H_1(\omega_1 + \omega_2) + H_1(\omega_1 + \omega_3) + H_1(\omega_2 + \omega_3)] - k_3 \right] \times \\ &\quad H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)H_1(\omega_3)H_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \end{aligned} \quad (B.33)$$

## Annexe C

# Développement mathématique pour trouver les expressions des HFRF - Système à 2 DDL

### C.1 Première équation associée (2.78)

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix} = x_1 \\ \mathcal{D}_2 \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix} = x_2 \end{cases} \quad (C.1)$$

Pour ce cas linéaire, il est relativement aisé de trouver le noyau de Volterra au premier ordre. En effet, on trouve directement

$$H^{(1)} = \begin{pmatrix} [m_1 \omega^2 + ic_1 \omega + k_1]^{-1} & 0 \\ 0 & [m_2 \omega^2 + ic_2 \omega + k_2]^{-1} \end{pmatrix} \quad (C.2)$$

### C.2 Deuxième équation associée (2.79)

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \begin{bmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{bmatrix} = -k_{1,11} y_1^{(1)} y_1^{(1)} - k_{1,12} y_1^{(1)} y_2^{(1)} - k_{1,22} y_2^{(1)} y_2^{(1)} \\ \mathcal{D}_2 \begin{bmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{bmatrix} = -k_{2,11} y_1^{(1)} y_1^{(1)} - k_{2,12} y_1^{(1)} y_2^{(1)} - k_{2,22} y_2^{(1)} y_2^{(1)} \end{cases} \quad (C.3)$$

Vu l'équation linéaire associée, il est possible d'écrire la réponse au deuxième ordre. On a, pour chaque degré de liberté,

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} = & -k_{1,11} \int_{-\infty}^{\infty} h_{1,1}^{(1)}(\tau_3) y_1^{(1)}(t - \tau_3) y_1^{(1)}(t - \tau_3) d\tau_3 \\ & - k_{1,12} \int_{-\infty}^{\infty} h_{1,1}^{(1)}(\tau_3) y_1^{(1)}(t - \tau_3) y_2^{(1)}(t - \tau_3) d\tau_3 \\ & - k_{1,22} \int_{-\infty}^{\infty} h_{1,1}^{(1)}(\tau_3) y_2^{(1)}(t - \tau_3) y_2^{(1)}(t - \tau_3) d\tau_3 \end{aligned} \quad (C.4)$$

$$\begin{aligned} y_2^{(2)} = & -k_{2,11} \int_{-\infty}^{\infty} h_{2,2}^{(1)}(\tau_3) y_1^{(1)}(t - \tau_3) y_1^{(1)}(t - \tau_3) d\tau_3 \\ & - k_{2,12} \int_{-\infty}^{\infty} h_{2,2}^{(1)}(\tau_3) y_1^{(1)}(t - \tau_3) y_2^{(1)}(t - \tau_3) d\tau_3 \\ & - k_{2,22} \int_{-\infty}^{\infty} h_{2,2}^{(1)}(\tau_3) y_2^{(1)}(t - \tau_3) y_2^{(1)}(t - \tau_3) d\tau_3 \end{aligned} \quad (C.5)$$

Dans ces équations, on retrouve l'expression générale suivante pour le ddl j :

$$-k_{j,\eta_1\eta_2} \int_{-\infty}^{\infty} h_{j,j}^{(1)}(\tau_3) f_{\eta_1}^{(1)}(t - \tau_3) f_{\eta_2}^{(1)}(t - \tau_3) d\tau_3 \quad (C.6)$$

Où, par définition [2], on a

$$\begin{aligned} y_{\eta_1}^{(1)}(t - \tau_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{\eta_1:1}^{(1)}(\tau_1) x_1(t - \tau_1 - \tau_3) d\tau_1 + \int_{-\infty}^{\infty} h_{\eta_1:2}^{(1)}(\tau_1) x_2(t - \tau_1 - \tau_3) d\tau_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{\eta_1:\eta_1}^{(1)}(\tau_1) x_{\eta_1}(t - \tau_1 - \tau_3) d\tau_1 \end{aligned} \quad (C.7)$$

$$\begin{aligned} y_{\eta_2}^{(1)}(t - \tau_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{\eta_2:1}^{(1)}(\tau_2) x_1(t - \tau_2 - \tau_3) d\tau_2 + \int_{-\infty}^{\infty} h_{\eta_2:2}^{(1)}(\tau_2) x_2(t - \tau_2 - \tau_3) d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{\eta_2:\eta_2}^{(1)}(\tau_2) x_{\eta_2}(t - \tau_2 - \tau_3) d\tau_2 \end{aligned} \quad (C.8)$$

Si on remplace ces expressions dans les équations (C.4) et (C.5), on trouve l'expression générale suivante pour le ddl j

$$-k_{j,\eta_1\eta_2} \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{j,j}^{(1)}(\tau_3) h_{\eta_1:\eta_1}^{(1)}(\tau_1) h_{\eta_2:\eta_2}^{(1)}(\tau_2) x_{\eta_1}(t - \tau_1 - \tau_3) x_{\eta_2}(t - \tau_2 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (C.9)$$

Soit,

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= -k_{1,11} \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_3) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1) h_{1:1}^{(1)}(\tau_2) x_1(t - \tau_1 - \tau_3) x_1(t - \tau_2 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &\quad - k_{1,12} \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_3) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1) h_{2:2}^{(1)}(\tau_2) x_1(t - \tau_1 - \tau_3) x_2(t - \tau_2 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &\quad - k_{1,22} \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_3) h_{2:2}^{(1)}(\tau_1) h_{2:2}^{(1)}(\tau_2) x_2(t - \tau_1 - \tau_3) x_2(t - \tau_2 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad (C.10)$$

$$\begin{aligned} y_2^{(2)} &= -k_{2,11} \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{2:2}^{(1)}(\tau_3) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1) h_{1:1}^{(1)}(\tau_2) x_1(t - \tau_1 - \tau_3) x_1(t - \tau_2 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &\quad - k_{2,12} \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{2:2}^{(1)}(\tau_3) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1) h_{2:2}^{(1)}(\tau_2) x_1(t - \tau_1 - \tau_3) x_2(t - \tau_2 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &\quad - k_{2,22} \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{2:2}^{(1)}(\tau_3) h_{2:2}^{(1)}(\tau_1) h_{2:2}^{(1)}(\tau_2) x_2(t - \tau_1 - \tau_3) x_2(t - \tau_2 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad (C.11)$$

Par définition, on trouve également

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= \iint_{-\infty}^{\infty} h_{1:11}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &\quad + 2 \iint_{-\infty}^{\infty} h_{1:12}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x_1(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &\quad + \iint_{-\infty}^{\infty} h_{1:22}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x_2(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (C.12)$$

Et

$$\begin{aligned}
y_2^{(2)} &= \iint_{-\infty}^{\infty} h_{2:11}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
&+ 2 \iint_{-\infty}^{\infty} h_{2:12}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x_1(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
&+ \iint_{-\infty}^{\infty} h_{2:22}^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x_2(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Si on fait le changement de variable suivant :

$$\tau_1 = \sigma_1 - \tau_3 \quad \tau_2 = \sigma_2 - \tau_3$$

Il est possible d'égaliser les équations (C.10) et (C.11) aux équations (C.12) et (C.13) afin de trouver les expressions des noyaux de Volterra. On a l'expression générale suivante

$$h_{j:\eta_1, \eta_2}^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2) = -\frac{k_{j, \eta_1 \eta_2}}{C_1} \int_{-\infty}^{\infty} h_{j:j}^{(1)}(\tau_3) h_{\eta_1: \eta_1}^{(1)}(\sigma_1 - \tau_3) h_{\eta_2: \eta_2}^{(1)}(\sigma_2 - \tau_3) d\tau_3 \tag{C.14}$$

Où  $C_1 = 1$  quand  $\eta_1 = \eta_2$  et  $C_1 = 2$  quand  $\eta_1 \neq \eta_2$ .

Par définition, la transformée de Fourier est

$$H_{j:\eta_1 \eta_2}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h_{j:\eta_1, \eta_2}^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2) e^{-(\omega_1 \sigma_1 + \omega_2 \sigma_2)} d\sigma_1 d\sigma_2 \tag{C.15}$$

Si on injecte l'expression de  $h_{j:\eta_1, \eta_2}^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2)$  dans cette équation, on trouve

$$H_{j:\eta_1 \eta_2}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{k_{j, \eta_1 \eta_2}}{C_1} \iiint_{-\infty}^{+\infty} h_{j:j}^{(1)}(\tau_3) h_{\eta_1: \eta_1}^{(1)}(\sigma_1 - \tau_3) h_{\eta_2: \eta_2}^{(1)}(\sigma_2 - \tau_3) e^{-(\omega_1 \sigma_1 + \omega_2 \sigma_2)} d\sigma_1 d\sigma_2 d\tau_3 \tag{C.16}$$

Si on réeffectue le changement de variable précédent, on obtient

$$H_{j:\eta_1 \eta_2}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{k_{j, \eta_1 \eta_2}}{C_1} \iiint_{-\infty}^{+\infty} h_{j:j}^{(1)}(\tau_3) h_{\eta_1: \eta_1}^{(1)}(\tau_1) h_{\eta_2: \eta_2}^{(1)}(\tau_2) e^{-(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 + (\omega_1 + \omega_2) \tau_3)} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \tag{C.17}$$

Soit,

$$H_{j:\eta_1, \eta_2}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{k_{j, \eta_1 \eta_2}}{C_1} H_{j:j}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{\eta_1: \eta_1}^{(1)}(\omega_1) H_{\eta_2: \eta_2}^{(1)}(\omega_2) \tag{C.18}$$

Les noyaux de Volterra sont donc respectivement pour les degré de liberté 1 et 2

$$H_1^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \begin{pmatrix} -k_{1,11} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) & -\frac{1}{2} k_{1,12} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) \\ -\frac{1}{2} k_{1,12} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) & -k_{1,22} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) \end{pmatrix} \tag{C.19}$$

$$H_2^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \begin{pmatrix} -k_{2,11} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) & -\frac{1}{2} k_{2,12} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) \\ -\frac{1}{2} k_{2,12} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) & -k_{2,22} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) \end{pmatrix} \tag{C.20}$$

### C.3 Troisième équation associée (2.80)

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 \left[ y_1^{(3)} \right] = & -2k_{1,11} y_1^{(1)} y_1^{(2)} - k_{1,12} y_1^{(1)} y_2^{(2)} - k_{1,12} y_1^{(2)} y_2^{(1)} - 2k_{1,22} y_2^{(1)} y_2^{(2)} \\ & -k_{1,111} y_1^{(1)} y_1^{(1)} y_1^{(1)} - k_{1,112} y_1^{(1)} y_1^{(1)} y_2^{(1)} - k_{1,122} y_1^{(1)} y_2^{(1)} y_2^{(1)} - k_{1,222} y_2^{(1)} y_2^{(1)} y_2^{(1)} \\ \mathcal{D}_2 \left[ y_2^{(3)} \right] = & -2k_{2,11} y_1^{(1)} y_1^{(2)} - k_{2,12} y_1^{(1)} y_2^{(2)} - k_{2,12} y_1^{(2)} y_2^{(1)} - 2k_{2,22} y_2^{(1)} y_2^{(2)} \\ & -k_{2,111} y_1^{(1)} y_1^{(1)} y_1^{(1)} - k_{2,112} y_1^{(1)} y_1^{(1)} y_2^{(1)} - k_{2,122} y_1^{(1)} y_2^{(1)} y_2^{(1)} - k_{2,222} y_2^{(1)} y_2^{(1)} y_2^{(1)} \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

Vu l'équation linéaire associée d'ordre 3, il est possible d'écrire la réponse au troisième ordre pour chaque degré de liberté. On a,

$$\begin{aligned} y_1^{(3)} = & -2k_{1,11} \int_{-\infty}^{\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) y_1^{(2)}(t - \tau_5) d\tau_5 \\ & - k_{1,12} \int_{-\infty}^{\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) y_2^{(2)}(t - \tau_5) d\tau_5 \\ & - k_{1,12} \int_{-\infty}^{\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) y_1^{(2)}(t - \tau_5) y_2^{(1)}(t - \tau_5) d\tau_5 \\ & - 2k_{1,22} \int_{-\infty}^{\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) y_2^{(1)}(t - \tau_5) y_2^{(2)}(t - \tau_5) d\tau_5 \\ & - k_{1,111} \int_{-\infty}^{\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) d\tau_5 \\ & - k_{1,112} \int_{-\infty}^{\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) y_2^{(1)}(t - \tau_5) d\tau_5 \\ & - k_{1,122} \int_{-\infty}^{\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) y_2^{(1)}(t - \tau_5) y_2^{(1)}(t - \tau_5) d\tau_5 \\ & - k_{1,222} \int_{-\infty}^{\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) y_2^{(1)}(t - \tau_5) y_2^{(1)}(t - \tau_5) y_2^{(1)}(t - \tau_5) d\tau_5 \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

$$\begin{aligned} y_2^{(3)} = & -2k_{2,11} \int_{-\infty}^{\infty} h_{2:2}^{(1)}(\tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) y_1^{(2)}(t - \tau_5) d\tau_5 \\ & - k_{2,12} \int_{-\infty}^{\infty} h_{2:2}^{(1)}(\tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) y_2^{(2)}(t - \tau_5) d\tau_5 \\ & - k_{2,12} \int_{-\infty}^{\infty} h_{2:2}^{(1)}(\tau_5) y_1^{(2)}(t - \tau_5) y_2^{(2)}(t - \tau_5) d\tau_5 \\ & - 2k_{2,22} \int_{-\infty}^{\infty} h_{2:2}^{(1)}(\tau_5) y_2^{(1)}(t - \tau_5) y_2^{(2)}(t - \tau_5) d\tau_5 \\ & - k_{2,111} \int_{-\infty}^{\infty} h_{2:2}^{(1)}(\tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) d\tau_5 \\ & - k_{2,112} \int_{-\infty}^{\infty} h_{2:2}^{(1)}(\tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) y_2^{(1)}(t - \tau_5) d\tau_5 \\ & - k_{2,122} \int_{-\infty}^{\infty} h_{2:2}^{(1)}(\tau_5) y_1^{(1)}(t - \tau_5) y_2^{(1)}(t - \tau_5) y_2^{(1)}(t - \tau_5) d\tau_5 \\ & - k_{2,222} \int_{-\infty}^{\infty} h_{2:2}^{(1)}(\tau_5) y_2^{(1)}(t - \tau_5) y_2^{(1)}(t - \tau_5) y_2^{(1)}(t - \tau_5) d\tau_5 \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Par définition, on a

$$y_{\eta_1}^{(1)}(t - \tau_5) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\eta_1:\eta_1}^{(1)}(\tau_1) x_{\eta_1}(t - \tau_1 - \tau_5) d\tau_1 \quad (\text{C.24})$$

et,

$$\begin{aligned}
y_{\eta_2}^{(2)}(t - \tau_5) &= \iint_{-\infty}^{\infty} h_{\eta_2:11}^{(2)}(\tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_2 - \tau_5) x_1(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_2 d\tau_3 \\
&+ 2 \iint_{-\infty}^{\infty} h_{\eta_2:12}^{(2)}(\tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_2 - \tau_5) x_2(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_2 d\tau_3 \\
&+ \iint_{-\infty}^{\infty} h_{\eta_2:22}^{(2)}(\tau_2, \tau_3) x_2(t - \tau_2 - \tau_5) x_2(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_2 d\tau_3
\end{aligned} \tag{C.25}$$

Si on remplace avec l'expression de  $h_{\eta_2:\eta_3\eta_4}^{(2)}$ , c-à-d

$$h_{\eta_2:\eta_3\eta_4}^{(2)}(\tau_2, \tau_3) = -\frac{k_{\eta_2,\eta_3\eta_4}}{C_1} \int_{-\infty}^{\infty} h_{\eta_2:\eta_2}^{(1)}(\tau_4) h_{\eta_3:\eta_3}^{(1)}(\tau_2 - \tau_4) h_{\eta_4:\eta_4}^{(1)}(\tau_3 - \tau_4) d\tau_4 \tag{C.26}$$

On trouve,

$$\begin{aligned}
y_{\eta_2}^{(2)}(t - \tau_5) &= -k_{\eta_2,11} \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{\eta_2:\eta_2}^{(1)}(\tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_2 - \tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_3 - \tau_4) x_1(t - \tau_2 - \tau_5) x_1(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \\
&+ 2 \left( -\frac{k_{\eta_2,12}}{2} \right) \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{\eta_2:\eta_2}^{(1)}(\tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_2 - \tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_3 - \tau_4) x_1(t - \tau_2 - \tau_5) x_2(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \\
&- k_{\eta_2,22} \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{\eta_2:\eta_2}^{(1)}(\tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_2 - \tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_3 - \tau_4) x_2(t - \tau_2 - \tau_5) x_2(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4
\end{aligned} \tag{C.27}$$

Si on injecte ces définitions dans l'expression (C.22), en ayant préalablement séparé la partie provenant de la non-linéarité quadratique et cubique  $\left( y_j^{(3)} = y_j^{(3),I} + y_j^{(3),II} \right)$ , on a





$$\begin{aligned}
y_1^{(3),II} = & -k_{1,111} \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1) h_{1:1}^{(1)}(\tau_2) h_{1:1}^{(1)}(\tau_3) \times \\
& x_1(t - \tau_1 - \tau_4) x_1(t - \tau_2 - \tau_4) x_1(t - \tau_3 - \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \\
& - k_{1,112} \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1) h_{1:1}^{(1)}(\tau_2) h_{2:2}^{(1)}(\tau_3) \times \\
& x_1(t - \tau_1 - \tau_4) x_1(t - \tau_2 - \tau_4) x_2(t - \tau_3 - \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \\
& - k_{1,122} \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1) h_{2:2}^{(1)}(\tau_2) h_{2:2}^{(1)}(\tau_3) \times \\
& x_1(t - \tau_1 - \tau_4) x_2(t - \tau_2 - \tau_4) x_2(t - \tau_3 - \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \\
& - k_{1,222} \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_1) h_{2:2}^{(1)}(\tau_2) h_{2:2}^{(1)}(\tau_3) \times \\
& x_2(t - \tau_1 - \tau_4) x_2(t - \tau_2 - \tau_4) x_2(t - \tau_3 - \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4
\end{aligned} \tag{C.29}$$

Par définition, on a également

$$\begin{aligned}
y_1^{(3)} = & \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{1:111}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) x_1(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
& + 3 \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{1:112}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_1) x_1(t - \tau_2) x_2(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
& + 3 \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{1:122}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_1(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) x_2(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
& + \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{1:222}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_2(t - \tau_1) x_2(t - \tau_2) x_2(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3
\end{aligned} \tag{C.30}$$

Avant d'égaliser ces expressions, il est nécessaire d'effectuer quelques changements au niveau des décalages temporels afin d'obtenir l'expression désirée. L'équation (C.31) devient

$$\begin{aligned}
y_1^{(3),I} = & 2k_{1,11}k_{1,11} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1) h_{1:1}^{(1)}(\tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_2 - \tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_3 - \tau_4) \times \\
& x_1(t - \tau_1 - \tau_5) x_1(t - \tau_2 - \tau_5) x_1(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \\
& + 2k_{1,11}k_{1,12} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1) h_{1:1}^{(1)}(\tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_2 - \tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_3 - \tau_4) \times \\
& x_1(t - \tau_1 - \tau_5) x_1(t - \tau_2 - \tau_5) x_2(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \\
& + 2k_{1,11}k_{1,22} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1) h_{1:1}^{(1)}(\tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_2 - \tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_3 - \tau_4) \times \\
& x_1(t - \tau_1 - \tau_5) x_2(t - \tau_2 - \tau_5) x_2(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \\
& + k_{1,12}k_{2,11} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1) h_{2:2}^{(1)}(\tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_2 - \tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_3 - \tau_4) \times \\
& x_1(t - \tau_1 - \tau_5) x_1(t - \tau_2 - \tau_5) x_1(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \\
& + k_{1,12}k_{2,12} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1) h_{2:2}^{(1)}(\tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_2 - \tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_3 - \tau_4) \times \\
& x_1(t - \tau_1 - \tau_5) x_1(t - \tau_2 - \tau_5) x_2(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \\
& + k_{1,12}k_{2,22} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1) h_{2:2}^{(1)}(\tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_2 - \tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_3 - \tau_4) \times \\
& x_1(t - \tau_1 - \tau_5) x_2(t - \tau_2 - \tau_5) x_2(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \\
& + k_{1,12}k_{1,11} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) h_{2:2}^{(1)}(\tau_3) h_{1:1}^{(1)}(\tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_2 - \tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1 - \tau_4) \times \\
& x_2(t - \tau_3 - \tau_5) x_1(t - \tau_2 - \tau_5) x_1(t - \tau_1 - \tau_5) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \\
& + k_{1,12}k_{1,12} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) h_{2:2}^{(1)}(\tau_2) h_{1:1}^{(1)}(\tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1 - \tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_3 - \tau_4) \times \\
& x_2(t - \tau_2 - \tau_5) x_1(t - \tau_1 - \tau_5) x_2(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \\
& + k_{1,12}k_{1,22} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) h_{2:2}^{(1)}(\tau_1) h_{1:1}^{(1)}(\tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_2 - \tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_3 - \tau_4) \times \\
& x_2(t - \tau_1 - \tau_5) x_2(t - \tau_2 - \tau_5) x_2(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \\
& + 2k_{1,22}k_{2,11} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) h_{2:2}^{(1)}(\tau_3) h_{2:2}^{(1)}(\tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_2 - \tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1 - \tau_4) \times \\
& x_2(t - \tau_3 - \tau_5) x_1(t - \tau_2 - \tau_5) x_1(t - \tau_1 - \tau_5) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \\
& + 2k_{1,22}k_{2,12} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) h_{2:2}^{(1)}(\tau_2) h_{2:2}^{(1)}(\tau_4) h_{1:1}^{(1)}(\tau_1 - \tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_3 - \tau_4) \times \\
& x_2(t - \tau_2 - \tau_5) x_1(t - \tau_1 - \tau_5) x_2(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 \\
& + 2k_{1,22}k_{2,22} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_{1:1}^{(1)}(\tau_5) h_{2:2}^{(1)}(\tau_1) h_{2:2}^{(1)}(\tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_2 - \tau_4) h_{2:2}^{(1)}(\tau_3 - \tau_4) \times \\
& x_2(t - \tau_1 - \tau_5) x_2(t - \tau_2 - \tau_5) x_2(t - \tau_3 - \tau_5) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5
\end{aligned} \tag{C.31}$$

Maintenant que ces changements ont été réalisés, on peut évaluer cette expression à la définition de  $y^{(3)}$ . Si on effectue les changements de variables similaires à ce qu'on avait fait pour le cas d'un système à un degré de liberté et qu'on suit la même démarche, on trouvera les noyaux suivants :

$$\begin{aligned}
H_{1:11}^{(3),I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \frac{1}{3} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) H_{1:1}^{(1)}(\omega_3) \times \\
& \left[ 2k_{1,11}^2 \left( H_{1:1}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \right. \\
& \left. + k_{1,12}k_{2,11} \left( H_{2:2}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \right]
\end{aligned} \tag{C.32}$$

$$\begin{aligned}
H_{1:112}^{(3),I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \frac{1}{3} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_3) \times \\
& \left[ k_{1,11} k_{1,12} \left( H_{1:1}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) \right) \right. \\
& + \frac{1}{2} k_{1,12} k_{2,12} \left( H_{2:2}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) \right) \\
& + k_{1,12} k_{1,11} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \\
& \left. + 2 k_{1,22} k_{2,11} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right]
\end{aligned} \tag{C.33}$$

$$\begin{aligned}
H_{1:122}^{(3),I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \frac{1}{3} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_3) \times \\
& \left[ 2 k_{1,11} k_{1,22} H_{1:1}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) \right. \\
& + k_{1,12} k_{2,22} H_{2:2}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) \\
& + \frac{1}{2} k_{1,12} k_{1,12} \left( H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \\
& \left. + k_{1,22} k_{2,12} \left( H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \right]
\end{aligned} \tag{C.34}$$

$$\begin{aligned}
H_{1:222}^{(3),I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \frac{1}{3} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) H_{2:2}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_3) \times \\
& \left[ k_{1,12} k_{1,22} \left( H_{1:1}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \right. \\
& \left. + 2 k_{1,22} k_{2,22} \left( H_{2:2}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \right]
\end{aligned} \tag{C.35}$$

Et la partie provenant de la non-linéarité cubique est :

$$H_{1:111}^{(3),II}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -k_{1,111} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) H_{1:1}^{(1)}(\omega_3) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \tag{C.36}$$

$$H_{1:112}^{(3),II}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -\frac{1}{3} k_{1,112} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_3) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \tag{C.37}$$

$$H_{1:122}^{(3),II}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -\frac{1}{3} k_{1,122} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_3) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \tag{C.38}$$

$$H_{1:222}^{(3),II}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -k_{1,222} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_3) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \tag{C.39}$$

On obtient les noyaux en sommant les deux contributions :

$$H_{1:\eta_1\eta_2\eta_3}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = H_{1:\eta_1\eta_2\eta_3}^{(3),I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + H_{1:\eta_1\eta_2\eta_3}^{(3),II}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \tag{C.40}$$

Un développement similaire pour le degré de liberté 2 peut être mené, on trouve

$$\begin{aligned}
H_{2:111}^{(3),I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \frac{1}{3} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) H_{1:1}^{(1)}(\omega_3) \times \\
& \left[ 2 k_{2,11} k_{1,11} \left( H_{1:1}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \right. \\
& \left. + k_{2,12} k_{2,11} \left( H_{2:2}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \right]
\end{aligned} \tag{C.41}$$

$$\begin{aligned}
H_{2:112}^{(3),I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \frac{1}{3} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_3) \times \\
& \left[ k_{2,11} k_{1,12} \left( H_{1:1}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) \right) \right. \\
& + \frac{1}{2} k_{2,12} k_{2,12} \left( H_{2:2}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) \right) \\
& + k_{2,12} k_{1,11} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \\
& \left. + 2 k_{2,22} k_{2,11} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right]
\end{aligned} \tag{C.42}$$

$$\begin{aligned}
H_{2:122}^{(3),I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \frac{1}{3} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_3) \times \\
& \left[ 2 k_{2,11} k_{1,22} H_{1:1}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) \right. \\
& + k_{2,12} k_{2,22} H_{2:2}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) \\
& + \frac{1}{2} k_{2,12} k_{1,12} \left( H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \\
& \left. + k_{2,22} k_{2,12} \left( H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \right]
\end{aligned} \tag{C.43}$$

$$\begin{aligned}
H_{2:222}^{(3),I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \frac{1}{3} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) H_{2:2}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_3) \times \\
& \left[ k_{2,12} k_{1,22} \left( H_{1:1}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{1:1}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \right. \\
& \left. + 2 k_{2,22}^2 \left( H_{2:2}^{(1)}(\omega_2 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_3) + H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) \right) \right]
\end{aligned} \tag{C.44}$$

Et la partie provenant de la non-linéarité cubique est :

$$H_{2:111}^{(3),II}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -k_{2,111} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) H_{1:1}^{(1)}(\omega_3) H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \tag{C.45}$$

$$H_{2:112}^{(3),II}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -\frac{1}{3} k_{2,112} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{1:1}^{(1)}(\omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_3) H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \tag{C.46}$$

$$H_{2:122}^{(3),II}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -\frac{1}{3} k_{2,122} H_{1:1}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_3) H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \tag{C.47}$$

$$H_{2:222}^{(3),II}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -k_{2,222} H_{2:2}^{(1)}(\omega_1) H_{2:2}^{(1)}(\omega_2) H_{2:2}^{(1)}(\omega_3) H_{2:2}^{(1)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \tag{C.48}$$

# Bibliographie

- [1] K. Worden and G.R. Tomlinson. *Non linearity in structural dynamics - Detection, Identification and Modelling*. Institute of Physics Publishing, Bristol, 2001.
- [2] M. Schetzen. *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*. Wiley, New York, 1980.
- [3] W.J. Rugh. *Nonlinear System Theory - The Volterra/Wiener Approach*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1981.
- [4] E. Bedrosian and S. O. Rice. The output properties of volterra systems (nonlinear systems with memory) driven by harmonic and gaussian inputs. *Proceedings of the IEEE*, 59(12) :1688–1707, Dec 1971.
- [5] G.-M. Lee. Estimation of non-linear system parameters using higher-order frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(2) :219–228, 1997.
- [6] Luigi Carassale and Ahsan Kareem. Modeling nonlinear systems by volterra series. *Journal of Engineering Mechanics*, 136(6) :801–818, 2010.
- [7] K. Worden, G. Manson, and G.R. Tomlinson. A harmonic probing algorithm for the multi-input volterra series. *Journal of Sound and Vibration*, 201(1) :67–84, 1997.
- [8] Xing-Jian Dong, Zhi-Ke Peng, Wen-Ming Zhang, and Guang Meng. Connection between volterra series and perturbation method in nonlinear systems analyses. *Acta Mechanica Sinica*, 30(4) :600–606, 2014.
- [9] A.Chatterjee. Identification and parameter estimation of a bilinear oscillator using volterra series with harmonic probing. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45(1) :12–20, 2010.
- [10] D.E. de Sá Caetano. *Cable Vibrations in Cable-stayed Bridges*. ETH Hönggerberg, Zürich, 2007.