

## **Analyse multi-échelle de l'évolution des flux de chaleur sensible et latente échangés entre un écosystème forestier et l'atmosphère au moyen de la transformée en ondelettes continue**

**Auteur :** Bitton, Jonathan

**Promoteur(s) :** Charles, Catherine; Heinesch, Bernard

**Faculté :** Gembloux Agro-Bio Tech (GxABT)

**Diplôme :** Master en bioingénieur : sciences et technologies de l'environnement, à finalité spécialisée

**Année académique :** 2018-2019

**URI/URL :** <http://hdl.handle.net/2268.2/7698>

---

*Avertissement à l'attention des usagers :*

*Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.*

*Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.*

---

# 1 Annexes

## 1.1 Formulation des variances temporelles et fréquentielles

Soit une fonction analysante  $g(t)$  et la transformée de Fourier associée  $G(\omega)$ . Supposons, sans perte de généralité, que la fonction  $g(t)$  soit normée, i.e.  $\|g(t)\|^2 = 1$  ce qui implique, par l'égalité de Parseval,  $\|G(\omega)\|^2 = 2\pi$ . La moyenne temporelle de  $g(t)$  est fournie par :

$$\mu_t = \int_{-\infty}^{+\infty} t |g(t)|^2 dt$$

Et la variance associée :

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mu_t)^2 |g(t)|^2 dt$$

Dans le domaine fréquentiel, ces paramètres s'écrivent :

$$\mu_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |G(\omega)|^2 d\omega$$

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \mu_\omega)^2 |G(\omega)|^2 d\omega$$

L'objectif poursuivi est de déterminer la valeur des variances temporelles et fréquentielles pour les fonctions analysantes définies pour la transformée de Fourier à fenêtre et la transformée en ondelettes continue.

### a) Transformée de Fourier à fenêtre

Pour rappel, la fonction analysante  $\psi_{a,b}(t)$  dépend de deux paramètres  $a$  et  $b$ . Etant donné que  $b$  représente la translation de l'ondelette, celle-ci sera constamment centrée en ce point, de par sa symétrie. La moyenne  $\mu_t$  correspond donc au paramètre  $b$ , et on peut écrire :

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - b)^2 |\psi_{a,b}(t)|^2 dt$$

En remplaçant  $\psi_{a,b}$  par sa définition, à savoir :  $\psi_{a,b}(t) = e^{jat} p(t - b)$ , il découle de l'expression précédente :

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - b)^2 |e^{jat} p(t - b)|^2 dt$$

Etant donné que  $|e^{jat}| = 1$ , on déduit :

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - b)^2 |p(t - b)|^2 dt$$

Par le changement de variable  $u = t - b$  l'expression devient :

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u)^2 |p(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |p(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |\psi(t)|^2 dt$$

Pour la résolution fréquentielle :

— La transformée de Fourier de  $\psi_{a,b}(t)$  est  $\Psi_{a,b}(\omega) = e^{jbt} P(\omega - a)$

— La valeur moyenne de  $\psi_{a,b}$  dans le domaine fréquentiel vaut  $a$

*Preuve :*

$$\mu_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\Psi_{a,b}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |P(\omega - a)|^2 d\omega$$

Devenant après changement de variable  $u = \omega - a$  :

$$\mu_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (u + a) |P(u)|^2 du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u |P(u)|^2 du + \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(u)|^2 du$$

La symétrie de la fonction fenêtre implique  $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega |P(\omega)|^2 d\omega = 0$  et les hypothèses simplificatrices initiales permettent de dire  $\int_{-\infty}^{+\infty} |P(\omega)|^2 d\omega = 2\pi$ . L'expression se simplifie en :

$$\mu_\omega = \frac{a}{2\pi} 2\pi = a$$

Au départ de ces deux informations, un développement analogue à celui précédemment mené pour  $\sigma_t^2$  permet de démontrer que :

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\Psi(\omega)|^2 d\omega$$

De fait, les expressions de  $\sigma_t^2$  et  $\sigma_\omega^2$  sont affranchies de  $a$  et  $b$ . Il en découle que les résolutions fréquentielles et temporelles sont indépendantes de ces paramètres.

#### b) Transformée en ondelettes

Dans un souci de simplification des expressions obtenues, supposons l'ondelette initialement centrée en zéro. De telle sorte, les paramètres de moyenne et de variance s'écrivent, pour l'ondelette mère  $\psi(t)$  :

$$\mu_t = \int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi(t)|^2 dt = 0 (= b)$$

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |\psi(t)|^2 dt$$

Après translation et dilatation, ces mêmes paramètres deviennent :

$$\mu_{t_{a,b}} = b$$

$$\sigma_{t_{a,b}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - b)^2 |\psi_{a,b}(t)|^2 dt$$

Dans le cas de la transformée en ondelettes continue, les fonctions analysantes  $\psi_{a,b}(t)$  prennent la forme  $\frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ . Dès lors :

$$\sigma_{t_{a,b}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - b)^2 \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} a \left(\frac{t-b}{a}\right)^2 \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt$$

Au départ du changement de variables  $u = \left(\frac{t-b}{a}\right)$ , impliquant  $dt = a du$ , la relation se simplifie en :

$$\sigma_{t_{a,b}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 u^2 |\psi(u)|^2 du = a^2 \sigma_t^2$$

En ce qui concerne le domaine fréquentiel, les deux paramètres de position et de dispersion définis précédemment s'écrivent, pour l'ondelette mère :

$$\mu_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\Psi(\omega)|^2 d\omega = \gamma$$

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \mu_\omega)^2 |\Psi(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \gamma)^2 |\Psi(\omega)|^2 d\omega$$

Où la valeur moyenne de l'ondelette mère  $\Psi(\omega)$  est fixée à une valeur  $\gamma$ . Il est à noter que l'expression de la moyenne fréquentielle  $\mu_\omega$  en fonction des paramètres  $a$  et  $b$  ne peut être immédiatement déduite pour toutes les ondelettes filles à partir de sa valeur initiale pour l'ondelette mère, contrairement au cas temporel. Elle est évidemment liée au paramètre d'échelle  $a$  mais, les fonctions analysantes n'étant plus sinusoïdales, il n'y a pas une concordance immédiate entre les échelles et les fréquences repérées dans le signal. De fait, il convient de réécrire le paramètre  $\mu_\omega$  en faisant explicitement apparaître l'influence de  $a$  et  $b$ , soit :

$$\mu_{\omega_{a,b}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\Psi_{a,b}(\omega)|^2 d\omega$$

En remplaçant  $\Psi_{a,b}(\omega)$ , la transformée de Fourier de  $\psi_{a,b}(t)$ , par sa valeur, à savoir  $\Psi_{a,b}(\omega) = \sqrt{a}\Psi(a\omega) e^{-j\omega b}$ , il découle :

$$\mu_{\omega_{a,b}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\sqrt{a}\Psi(a\omega) e^{-j\omega b}|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a\omega |\Psi(a\omega)|^2 d\omega$$

Par application du changement de variable  $u = a\omega$  :

$$\mu_{\omega_{a,b}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u |\Psi(u)|^2 \frac{du}{a} = \frac{\gamma}{a}$$

Ainsi, la valeur moyenne de l'ondelette mère  $\gamma$  étant indépendante de  $a$ , la relation précédente établit une définition de la moyenne fréquentielle des ondelettes filles où l'influence de ce paramètre a été mise en exergue. A l'instar de la démarche adoptée pour le cas temporel, il convient désormais de définir la variance de  $\Psi_{a,b}(\omega)$  comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{\omega_{a,b}}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \mu_{\omega_{a,b}})^2 |\Psi_{a,b}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \frac{\gamma}{a})^2 |\sqrt{a}\Psi(a\omega) e^{-j\omega b}|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} (a\omega - \gamma)^2 a |\Psi(a\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} (a\omega - \gamma)^2 |\Psi(a\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

En exploitant à nouveau le changement de variable  $u = a\omega$ , l'expression devient :

$$\sigma_{\omega_{a,b}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} (u - \gamma)^2 |\Psi(u)|^2 \frac{du}{a} = \frac{1}{a^2} \sigma_\omega^2$$

En définitive, après dilatation d'une ondelette d'un facteur  $a$  :

- L'écart-type dans le domaine temporel  $\sigma_t$  est multiplié par  $a$ , diminuant ainsi la résolution temporelle
- L'écart type dans le domaine fréquentiel  $\sigma_\omega$  est divisé par  $a$ , augmentant ainsi la résolution fréquentielle

La translation n'affecte aucunement ces deux paramètres.

## 1.2 Normalisation de l'ondelette de Morlet

L'ondelette de Morlet, définie dans  $L^1 \cap L^2$ , se note :

$$\psi(t) = K e^{-j\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

En vue d'assurer une conservation de l'énergie initiale de l'ondelette mère suite à ses dilatations et translations, la convention générale consiste à adopter une norme  $L^2$  constante entre les ondelettes filles. La formulation générale d'une norme  $L^p$  ( $p \geq 1$ ) associée à une fonction intégrable au sens de Lebesgue est la suivante (Debnadt & Shah, 2015) :

$$\|\psi(t)\|^p = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^p dt < \infty$$

De fait, au vu de la définition d'une l'ondelette, il peut également être envisagé d'égaliser la norme  $L^1$  entre les différentes fonctions analysantes. Les deux cas conduisent à une formulation différente des ondelettes filles ainsi que de la constante apparaissant dans l'expression de l'ondelette de Morlet. Pour rappel, les ondelettes filles sont obtenues par translation et dilatation de l'ondelette mère, à savoir :

$$\psi_{a,b}(t) = \lambda \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Où  $\lambda$  représente le facteur de normalisation à définir.

Somme toute, la présente section a pour vocation de déterminer les paramètres  $K$  et  $\lambda$  pour chacune des deux possibilités susmentionnées.

### a) Conservation de la norme $L^2$

Cette première convention suppose une conservation de l'énergie du signal entre les ondelettes mère et filles, à savoir :

$$\|\psi_{a,b}(t)\|^2 = \|\psi(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt$$

En remplaçant  $\psi_{a,b}(t)$  par sa définition, il ressort :

$$\|\psi_{a,b}(t)\|^2 = \left\| \lambda \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \lambda \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt$$

En posant le changement de variable  $u = \frac{t-b}{a}$ , cette expression se simplifie en :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda \psi(u)|^2 a du = \lambda^2 a \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(u)|^2 du = \lambda^2 a \|\psi(t)\|^2$$

De fait, en vue de conserver une norme  $L^2$ , il convient de fixer  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{a}}$ . Cette normalisation est celle qui a été précédemment présentée.

Dans le cas de l'ondelette de Morlet, il est de commune mesure de lui attribuer une norme unitaire, soit :

$$\|\psi(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| K e^{-j\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \right|^2 dt = 1$$

Le membre de gauche de cette équation peut être simplifié comme suit, en utilisant l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| K e^{-j\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \right|^2 dt = K^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} dt = K^2 \sigma \sqrt{\pi}$$

En égalisant de nouveau les deux membres de l'équation, la valeur de la constante  $K$  se déduit comme étant :

$$K = (\sigma^2 \pi)^{-\frac{1}{4}}$$

### b) Conservation de la norme $L^1$

En ce qui concerne cette seconde normalisation, la relation préservée entre ondelette mère et filles est :

$$\|\psi_{a,b}(t)\| = \|\psi(t)\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)| dt$$

En détaillant l'expression des ondelettes filles, il découle :

$$\|\psi_{a,b}(t)\| = \left\| \lambda \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) \right\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \lambda \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) \right| dt$$

Par un raisonnement analogue au cas de la norme  $L^2$ , on déduit  $\lambda = \frac{1}{a}$ . De fait, l'expression des ondelettes filles devient :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{a} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right)$$

Dans le cadre de cette application, il a été décidé de fixer la valeur de cette norme à 2. De fait, il est possible de déduire la valeur de la constante  $K$  de l'ondelette de Morlet en utilisant :

$$\|\psi(t)\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| K e^{-j\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \right| dt = K \sqrt{2} \sigma \sqrt{\pi}$$

Cette expression étant égale à 2. Il en découle la nouvelle formulation de  $K$ , à savoir  $K = \left( \frac{2}{\sigma^2 \pi} \right)^{\frac{1}{2}}$ .

### 1.3 Application du théorème de corrélation croisée

La propriété de calcul des coefficients d'ondelettes à partir de la transformée de Fourier se base sur le théorème de convolution, permettant d'exprimer cette opération comme un simple produit dans l'espace des fréquences. En d'autres termes, ce théorème stipule :

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(\tau - t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Où \* représente l'opération de convolution.

En apparence, l'expression de la transformée en ondelettes continue correspond à une opération analogue à la convolution, nommée corrélation croisée. Celle-ci se note  $\otimes$  et se définit par :

$$f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau) g^*(t) dt$$

Cette formulation est bien celle utilisée pour générer les coefficients d'ondelette. Au départ de ces définitions, l'objectif des développements suivants est de prouver que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(t - \tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) G^*(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Pour ce faire, il convient de redéfinir cette expression afin de faire apparaître l'opération de convolution :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(-(\tau - t)) dt = f(t) * g^*(-t) = A$$

En dénotant la transformée de Fourier d'une variable par la lettre  $\mathcal{F}$ , le théorème de convolution peut s'écrire :

$$\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(f(t)) \mathcal{F}(g^*(-t))$$

Le terme  $\mathcal{F}(f(t))$  équivaut à  $F(\omega)$ , défini précédemment. Néanmoins, la déduction de la valeur de  $\mathcal{F}(g^*(-t))$  n'est pas immédiate. Afin de remédier à ceci, il convient de développer cette expression :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g^*(-t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(-t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} g^*(\tau) e^{j\omega\tau} (-d\tau) \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right]^* \\ &= \mathcal{F}(g(t))^* \end{aligned}$$

Cette dernière expression, étant connue, équivaut à  $\mathcal{F}(g(t))^* = G^*(\omega)$ . Dès lors, il devient possible d'évaluer l'expression du produit de convolution comme suit :

$$\mathcal{F}(A) = F(\omega) G^*(\omega)$$

En appliquant la transformée inverse aux deux membres et en remplaçant  $A$  par sa valeur initiale, il ressort :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(t - \tau) dt = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega) G^*(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) G^*(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

A l'égard de ce résultat, les coefficients d'ondelettes peuvent se déduire de (norme  $L^2$ ) :

$$\begin{aligned} W_f(a, b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \sqrt{a} \Psi^*(a\omega) e^{j\omega b} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \Psi_{a,b}(\omega) d\omega \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression de la transformée en ondelettes continue se réduit bien à un produit dans le domaine fréquentiel.

## 1.4 Dédution de la relation échelle-fréquence pour l'ondelette de Morlet

Dans le cadre de ce travail, deux interprétations de la correspondance entre les échelles et les fréquences ont été évoquées. La première consiste à considérer le maximum de l'ondelette dans le domaine fréquentiel et la seconde à calculer la transformée en ondelettes continue d'une fonction sinusoïdale de fréquence connue pour en déduire l'échelle correspondante. Cette section a pour optique de démontrer qu'elles sont équivalentes dans le cas de l'ondelette de Morlet modifié. Pour rappel, l'ondelette de Morlet répond à la formulation générale :

$$\Psi(\omega) = K\sqrt{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}}$$

### a) Première approche : fréquence de l'ondelette

Etant donné que l'ondelette de Morlet présente une forme de courbe gaussienne dans l'espace des fréquences, il semble raisonnable de rattacher l'échelle de cette fonction à la fréquence à laquelle sa puissance maximale est atteinte. En pratique, ceci revient à annuler la dérivée première du spectre en puissance de l'ondelette, après lui avoir appliqué la transformée de Fourier.

#### *Ondelette de Morlet usuelle*

Dans le cas de l'ondelette de Morlet usuelle, les fonctions analysantes se déduisent comme suit :

$$\Psi_{a,b}(\omega) = \sqrt{a}\Psi(a\omega)e^{-j\omega b} = \sqrt{a}(\sigma^2\pi)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{\sigma^2(a\omega-\omega_0)^2}{2}}e^{-j\omega b}$$

La puissance de l'ondelette s'obtient par l'opération  $|\Psi_{a,b}(\omega)|^2 = a(\sigma^2\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-\sigma^2(a\omega-\omega_0)^2}$ . Il est possible de déterminer la valeur maximale en appliquant :

$$\frac{\partial |\Psi_{a,b}(\omega)|^2}{\partial \omega} = 0$$

L'expression de la dérivée est donnée par :

$$\frac{\partial |\Psi_{a,b}(\omega)|^2}{\partial \omega} = a(\sigma^2\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}2a(a\omega - \omega_0)$$

La condition d'annulation de la dérivée peut donc se réécrire, en omettant les termes qui ne peuvent être annulés :

$$(a\omega - \omega_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{\omega_0}{a}$$

#### *Ondelette de Morlet modifiée*

En ce qui concerne l'ondelette de Morlet modifié, une définition alternative a été posée pour la déduction des ondelettes filles, à savoir :

$$\Psi_{a,b}(\omega) = \Psi(a\omega)e^{-j\omega b} = 2e^{-\frac{\sigma^2(a\omega-\omega_0)^2}{2}}e^{-j\omega b}$$

Ce deuxième cas conduit nécessairement à la même relation échelle-fréquence  $\omega = \frac{\omega_0}{a}$ , étant donné que seul le terme constant a été modifié.

### b) Seconde approche : fréquence équivalente de Fourier

La méthode alternative consiste à calculer la transformée en ondelettes continue d'une fonction sinusoïdale prédéfinie. Etant donné que la fréquence de cette fonction est connue, il est possible de la rattacher à l'échelle correspondante en déterminant celle qui présente la puissance maximale.

Pour ce faire, le signal d'étude considéré ainsi que la transformée de Fourier associée sont :

$$x(t) = \cos(\omega_x t)$$

$$X(\omega) = \pi(\delta(\omega - \omega_x) \delta(\omega + \omega_x))$$

Avec  $\delta$ , la distribution de Dirac. La transformée en ondelettes continue d'un tel signal se déduit de (**Annexe 1.3**) :

$$W_x(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \Psi_{a,b}(\omega) d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta(\omega - \omega_x) \delta(\omega + \omega_x)) \Psi_{a,b}(\omega) d\omega$$

Par la propriété fondamentale de la distribution de Dirac, à savoir  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_x) \Psi_{a,b}(\omega) d\omega = \Psi_{a,b}(\omega_x)$ , l'expression se réduit à :

$$W_x(a, b) = \frac{1}{2} \Psi_{a,b}(\omega_x) + \frac{1}{2} \Psi_{a,b}(-\omega_x)$$

Etant donné que l'ondelette de Morlet est approximativement analytique, le second terme s'annule. A partir de cette équation, la puissance spectrale est fournie par :

$$P_x(a, b) = |W_x(a, b)|^2 = \left| \frac{1}{2} \Psi_{a,b}(\omega_x) \right|^2$$

#### Ondelette de Morlet usuelle

Au départ des démonstrations du point **a** (première approche), cette expression se développe, dans le cas de l'ondelette de Morlet usuelle, en :

$$P_x(a, b) = \frac{1}{2} a \left( \sigma^2 \pi \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\sigma^2 (a\omega_x - \omega_0)^2}$$

En vue de déterminer l'échelle pour laquelle cette puissance est maximale, il convient d'annuler l'expression de sa dérivée par rapport au paramètre  $a$  comme suit :

$$\frac{\partial P_x(a, b)}{\partial a} = \frac{1}{2} \left( \sigma^2 \pi \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\sigma^2 (a\omega_x - \omega_0)^2} \left( 1 - 2a\omega_x \sigma^2 (a\omega_x - \omega_0) \right) = 0$$

Cette relation peut se réduire à :

$$1 - 2a\omega_x \sigma^2 (a\omega_x - \omega_0) = 0$$

Constituant ainsi une simple équation du second degré dont la résolution donne :

$$\omega = \frac{\sigma\omega_0 + \sqrt{\sigma^2\omega_0^2 + 2}}{2\sigma a}$$

Où la fréquence de la fonction sinusoïdale  $\omega_x$  a été généralisée à une fréquence  $\omega$  quelconque. Cette relation diverge de la correspondance échelle-fréquence déduite pour la première approche.

#### *Ondelette de Morlet modifiée*

Le spectre en puissance de la transformée du signal  $x(t)$  réalisée au départ de l'ondelette de Morlet modifiée peut s'écrire :

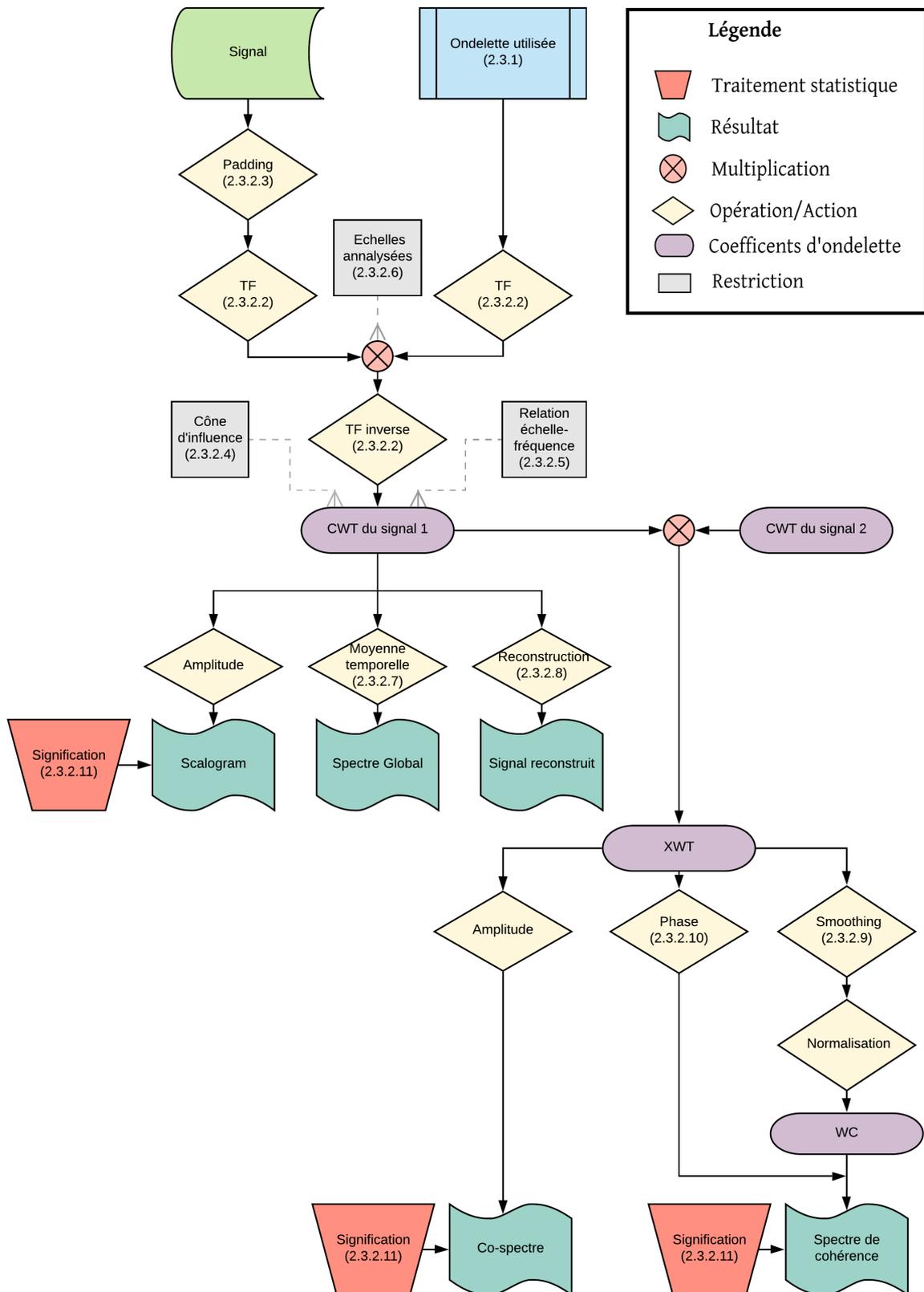
$$P_x(a, b) = \frac{1}{2} 4e^{-\sigma^2(a\omega_x - \omega_0)^2}$$

En suivant la démarche explicitée ci-dessus pour l'ondelette de Morlet usuelle, il est possible de déduire la conversion échelle-fréquence suivante :

$$\omega = \frac{\omega_0}{a}$$

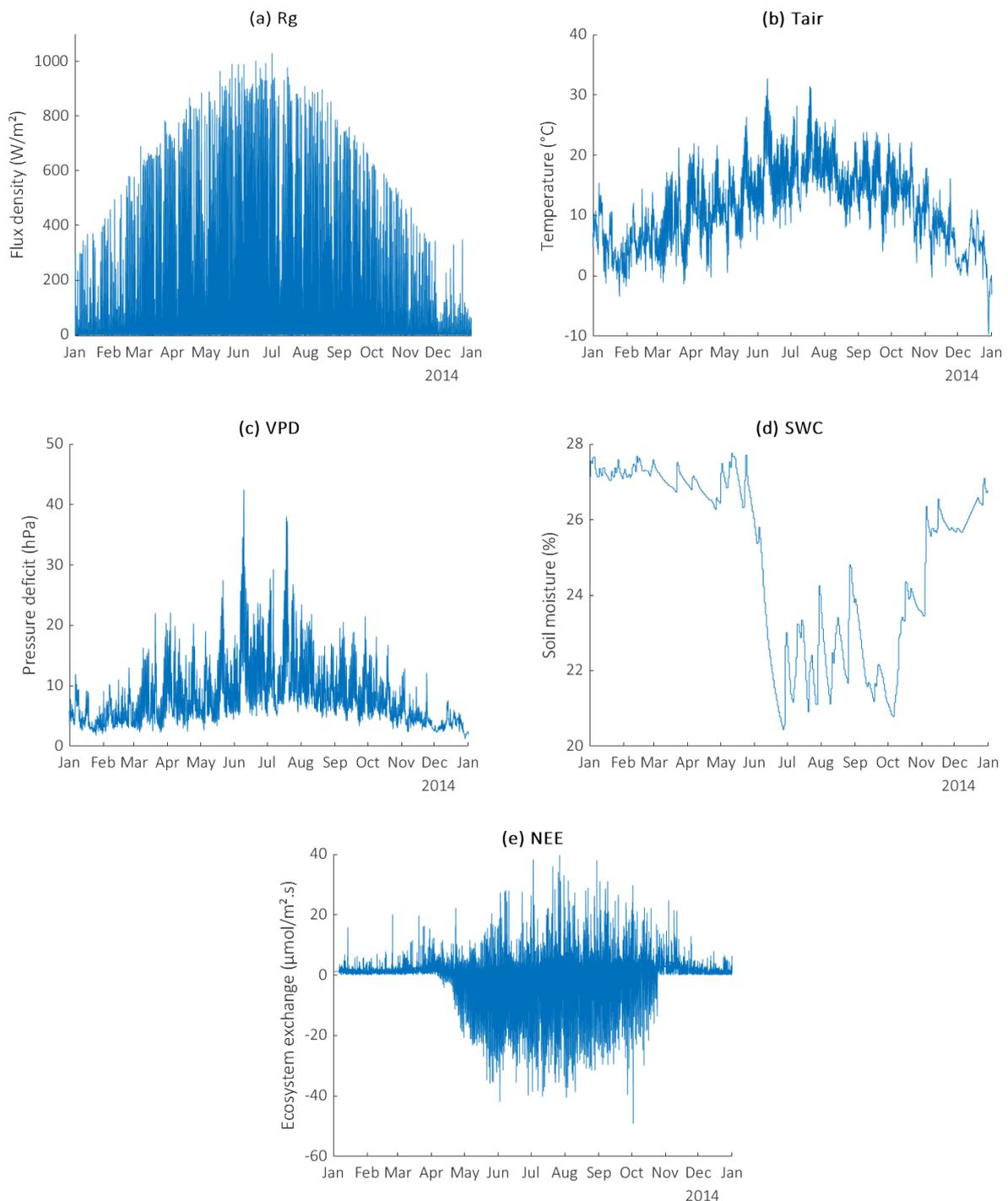
De fait, les deux approches développées aboutissent bien à une relation équivalente pour l'ondelette de Morlet modifiée.

### 1.5 Logigramme de la méthode



## 1.6 Evolution temporelle des variables climatiques étudiées pour l'année 2014

Variables présentées : **(a)** rayonnement incident ( $R_g$ ), **(b)** température de l'air ( $T_{air}$ ), **(c)** déficit en pression de vapeur ( $VPD$ ), **(d)** contenu en eau du sol ( $SWC$ ) et **(e)** échange net de carbone de l'écosystème ( $NEE$ )



## 1.7 Article 1

# MULTI-SCALE DYNAMICS AND ENVIRONMENTAL CONTROLS ON NET ECOSYSTEM CO<sub>2</sub> EXCHANGE OVER A TEMPERATE SEMIARID SHRUBLAND

Jia et al, 2018 : Agric. For. Meteorol., 259, 250–259.

<https://doi.org/10.1016/j.agrformet.2018.05.009>

### Objectifs

Les auteurs discutent sous quelles modalités le rayonnement photosynthétiquement actif ( $PAR$ ), la température de l'air ( $T_a$ ), le déficit en pression de vapeur ( $VPD$ ) et le contenu en eau du sol mesuré à 30 cm de profondeur ( $SWC_{30}$ ) modulent la variabilité de l'échange net de carbone ( $NEE$ ) au travers d'une étude sur plusieurs échelles temporelles.

### Matériel et méthodes

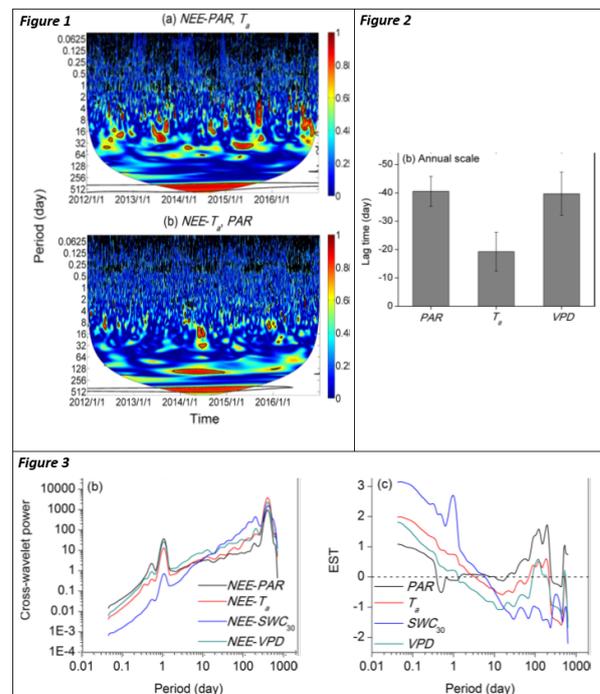
Le site étudié consiste en une zone arbustive semi-aride du nord de la Chine. Les variables disponibles ont été récoltées durant 5 années consécutives (2012-2016). Elles ont été investiguées au moyen de la transformée en ondelettes continue (CWT), de la cohérence par ondelettes (WC) et de la cohérence partielle par ondelettes (PWC), permettant de s'affranchir de l'influence d'une variable externe.

### Résultats et discussion

Par application de la cohérence partielle par ondelettes, il a été possible de mettre en évidence le rôle prépondérant du  $PAR$  sur la  $NEE$  comparativement à celui de la  $T_a$ , au vu de la densité de plus élevé de coefficients significatifs dans le cas de la première variable (Figure 1). Néanmoins, sur une échelle annuelle, la variable la plus influente est la  $T_a$  car elle présente un déphasage plus faible avec la  $NEE$  (Figure 2). Qui plus est, la cohérence entre la  $NEE$  et  $SWC_{30}$  après retrait de chacune des autres variables (cf Article, Fig.

8) a permis d'illustrer l'influence de la sécheresse aux échelles pluri-mensuelles sur l'échange de  $NEE$ . Cette information se retrouve également au sein des spectres globaux de puissance croisée (Figure 3). De même, les zones de cohérence significatives entre la  $NEE$  et  $SWC_{30}$  marquent un déclin de la cohérence entre  $PAR$  et  $NEE$  (cf Article, Fig. 5). Ceci illustre la mitigation de l'effet du  $PAR$  subséquente à la déplétion des réserves en eau.

Enfin, les auteurs implémentent le concept de transfert spectral de l'écosystème (EST), permettant d'exprimer la variabilité relative de la  $NEE$  par rapport à ses variables directrices (Figure 3).



## 1.8 Article 2

### GROSS ECOSYSTEM PHOTOSYNTHESIS CAUSES A DIURNAL PATTERN IN METHANE EMISSION FROM RICE

Hatala et al., 2012 : Geophys. Res. Lett., 39, L06409.

<https://doi.org/10.1029/2012GL051303>

#### Objectifs

L'objet de cet article est l'étude des mécanismes à l'origine de l'émission de méthane ( $\text{CH}_4$ ) des cultures de riz.

#### Matériel et méthodes

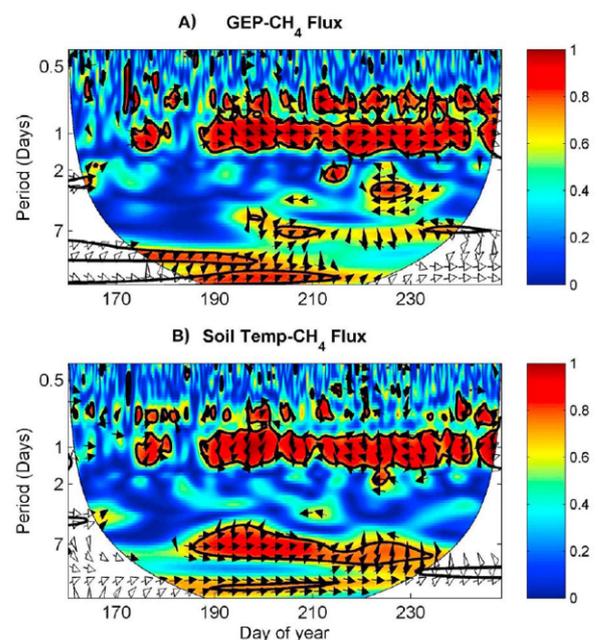
Les données ont été récoltées en Californie (USA) durant la période de croissance du riz (15 juin 2011 au 15 octobre 2011). Outre le flux de  $\text{CH}_4$ , la production primaire brute (*GEP*) et la température (*Temp*) du sol ont été mesurés. En vue d'investiguer ces variables, la cohérence par ondelettes leur a été appliquée.

#### Résultats et discussion

L'évolution journalière du  $\text{CH}_4$  semble corrélée à la fois à celle du *GEP* et de la température du sol (Figure 1). Cet effet se marque particulièrement durant la saison de croissance, pour laquelle les flux étudiés prennent des valeurs plus importantes. Les auteurs proposent de se concentrer sur la bande journalière au vu de sa prépondérance dans le spectre de cohérence (Figure 1). Contrairement à ce que d'autres études ont proposé, la Figure 1 met en exergue l'influence de la *GEP* sur les émissions de  $\text{CH}_4$ . En effet, le spectre

de cohérence illustre une avance de  $1.3 \pm 0.08$  heures du *GEP* et un retard de  $5.5 \pm 0.1$  heures de la température du sol par rapport au  $\text{CH}_4$ . Ceci suppose que la *GEP* est la variable directrice des émissions des  $\text{CH}_4$ , étant donné que la température du sol suit les variations de ce gaz. Finalement, les auteurs mentionnent l'influence de la température du sol sur les flux de  $\text{CH}_4$  à une échelle hebdomadaire (Figure 1), sans émettre d'interprétation quant à son origine physique

Figure 1



## 1.9 Article 3

### WAVELET ANALYSIS OF WINTERTIME AND SPRING THAW $\text{CO}_2$ AND $\text{N}_2\text{O}$ FLUXES FROM AGRICULTURAL FIELDS

Furon et al., 2008 : Agric. For. Meteorol., 148, 1305-1317.

<https://doi.org/10.1016/j.agrformet.2008.03.006>

#### Objectifs

Cet article a pour vocation de déterminer l'impact des variations de température sur les émissions de  $\text{N}_2\text{O}$  et de  $\text{CO}_2$  d'un sol sujet au gel. Deux autres objectifs sont poursuivis (non discutés) : comparer deux pratiques agricoles sur les flux de  $\text{N}_2\text{O}$  et examiner la relation entre les flux de  $\text{CO}_2$  et de  $\text{N}_2\text{O}$ .

#### Matériel et méthodes

Les deux flux, accompagnés de mesures de températures ( $T$ ) de l'air et du sol à 5cm et 25cm, ont été mesurés à Ontario (Canada) de 2001 à 2004. L'influence des mesures des températures a été évaluée au moyen de la cohérence par ondelettes.

#### Résultats et discussion

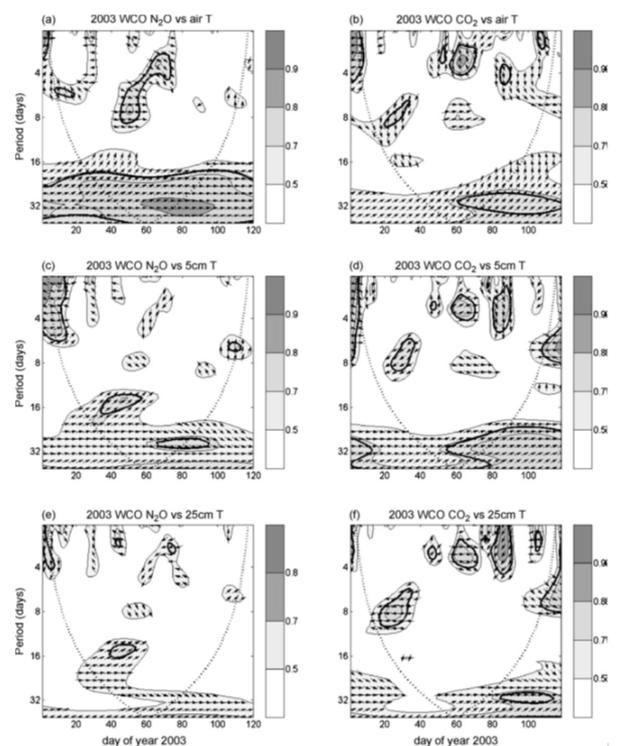
Les auteurs ont lié les émissions de  $\text{N}_2\text{O}$  du sol principalement aux conditions de surface, correspondant à celles des premiers mm dudit sol. Ceci s'explique par une corrélation plus élevée avec la température de l'air, pour laquelle 45% des coefficients possédant une cohérence supérieure à 0,5 (Figure 1).

Les 3 spectres relatifs au  $\text{N}_2\text{O}$  (Figure 1, gauche) illustrent un amenuisement de la cohérence au plus la température est prise profondément dans le sol. Furon et al. (2008) lie ce comportement à la réduction du  $\text{N}_2\text{O}$  en  $\text{N}_2$  lors de sa remontée vers

la surface. Par ailleurs, les 3 autres spectres (Figure 1, droite) semblent corroborer cette hypothèse. Effectivement, le  $\text{CO}_2$ , non altéré durant la remontée, ne présente pas de cohérence significativement impactée par la profondeur de mesure de la température.

Enfin, au départ de l'ensemble de ces informations, les auteurs supposent que les flux de  $\text{N}_2\text{O}$  émis durant la fonte des neiges (DOY 62-98) sont majoritairement déterminés par la production de surface et moins par des libérations de quantités piégées en profondeur.

Figure 1



## 1.10 Article 4

### TEMPORAL COUPLING OF SUBSURFACE AND SURFACE SOIL CO<sub>2</sub> FLUXES : INSIGHTS FROM A NONSTEADY STATE MODEL AND CROSS-WAVELET COHERENCE ANALYSIS

Samuels-Crow et al, 2018 : J. Geophys. Res. Biogeosci., 123, 1406–1424.

<https://doi.org/10.1002/2017JG004207>

#### Objectifs

Cet article propose d'étudier sous quelles conditions physiques et biologiques la production totale de CO<sub>2</sub> dans le sol ( $S_{Total}$ ) peut être approximée par la respiration du sol ( $R_{soil}$ ).

#### Matériel et méthodes

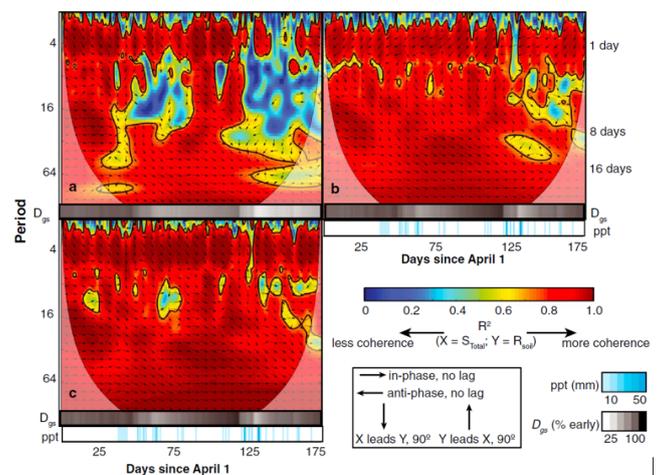
$S_{Total}$  et  $R_{soil}$  ont été déterminés en utilisant le modèle (DETECT), paramétré au départ de variables environnementales supposées représentatives des conditions de prairie au Wyoming (USA) du 1er avril au 30 septembre 2008. L'analyse est basée sur l'utilisation de la cohérence par ondelettes (WC), que ce soit entre  $S_{Total}$  et  $R_{soil}$  ou avec le contenu en eau du sol ( $SWC$ ) et la température du sol ( $T_s$ ) en distinguant 3 types de sol : (a) argile, (b) limon et (c) sable (indices utilisés en Figure 1).

#### Résultats et discussion

Le spectre de cohérence entre  $S_{Total}$  et  $R_{soil}$  pour les trois types de sol est proposé en Figure 1. Celle-ci illustre l'influence de la granulométrie du sol sur la différence entre ces deux paramètres. De manière globale, les auteurs proposent que  $R_{soil}$  est un bon estimateur de  $S_{Total}$  au plus le sol est grossier et de texture sableuse. Par ailleurs la Figure 1 met en exergue l'influence des précipitations sur la concordance entre  $S_{Total}$  et  $R_{soil}$ . Il semble que les deux variables soient fortement corrélées et en concordance de phase lorsque le sol est relativement sec (1-25 avril). Néanmoins, lors

d'évènements de précipitations, cette relation se dégrade, dans une mesure plus conséquente pour les sols argileux. Dans ce dernier cas, la cohérence diminue au point de ne plus apparaître significative (Figure 1a). En ce qui concerne le limon et le sable, si la cohérence est préservée, le déphasage s'accroît avec  $S_{Total}$  en avance sur  $R_{soil}$ . Les auteurs proposent également de dresser le spectre global de cohérence pour ces trois types de sol, en fonction de la distribution des racines (superficielles ou profondes). A partir de la représentation graphique (cf Article, Fig. 5), ils ont illustré que l'influence de cette distribution impacte majoritairement les sols argileux. Enfin, sur base de la cohérence avec les variables climatiques, Samuels-Crow et al. (2018) ont mis en évidence l'influence du  $SWC$  aux grandes échelles et celle de  $T_{sol}$  à une échelle journalière (cf Article, Figs. 7 et 8)

Figure 1



## 1.11 Article 5

### MULTISCALE ANALYSIS OF TEMPORAL VARIABILITY OF SOIL CO<sub>2</sub> PRODUCTION AS INFLUENCED BY WEATHER AND VEGETATION

Vargas et al, 2010 : Global Change Biol., 16, 1589–1605.

<https://doi.org/10.1111/j.1365-2486.2009.02111.x>

#### Objectifs

Les auteurs proposent d'étudier l'influence des processus biophysiques sur la production de CO<sub>2</sub> du sol ( $P_s$ ) en examinant les relations entre cette variable et le rayonnement photosynthétiquement actif ( $PAR$ ), la température du sol ( $T_s$ ) ainsi que le contenu en eau du sol ( $SWC$ ). Ils ont également pour optique de tester la performance de modèles empiriques de caractérisation des flux de CO<sub>2</sub> du sol.

#### Matériel et méthodes

Le site étudié est une forêt mixte de conifères et de chênes aux USA. Les relations entre les variables ont été étudiées de 2006 à 2008 au moyen de la transformée en ondelettes continue (CWT) et la cohérence en ondelettes (WC). La performance de techniques de modélisation de  $P_s$ , basées sur la  $T_s$  et  $SWC$ , a été évaluée en utilisant la CWT directement sur les résidus de ces modèles. Ces résidus sont générés en comparant les valeurs de  $P_s$  prédites avec celles mesurées sous les mêmes conditions.

#### Résultats et discussion

Les auteurs ont illustré la dépendance de la  $P_s$  aux variations du  $SWC$  et de la  $T_s$ , s'étendant sur des échelles comprises respectivement entre 2-32 jours et 2-64 jours

(cf Article, Figs. 4 et 5). Il semble que les effets de la  $SWC$  sur  $P_s$  sont largement exacerbés par les pluies estivales de la région, et ce, d'autant plus que la végétation concernée est jeune et clairsemée. Cette conclusion se base sur le fait qu'une cohérence plus importante se démarque aux échelles précitées (cf Article, Fig. 4). Par ailleurs, les zones de cohérence les plus élevées entre  $P_s$  et  $T_s$  se remarquent en conditions humides, illustrant l'interaction du  $SWC$  et de la  $T_s$ . Cet article soutient, sur base de régressions, que la différence de phase entre  $PAR$  et  $P_s$  explique 70% de celle entre  $T_s$  et  $P_s$ , à une échelle journalière (Figure 1). Au départ des valeurs de cette différence, ils ont déterminé que le  $PAR$  était la variable directrice de l'évolution journalière de  $P_s$  par le biais de l'influence de la photosynthèse sur les flux de CO<sub>2</sub>. Enfin, en appliquant la CWT au résidus des modèles empiriques, Vargas et al. (2010) ont, dans un premier temps, mis en exergue des zones significatives à une échelle journalière (Figure 2). Celles-ci concordent avec les périodes de stress induites par des faibles  $SWC$ . Les événements de précipitations présentent également un effet non négligeable à des échelles intermédiaires (Figure 2). Ces résultats illustrent la nécessité de considérer d'autres variables directrices que le  $SWC$  et la  $T_s$  pour les modélisations.

