

Travail de Fin d'Etudes : Modélisation des vibrations latérales des passerelles sous l'effet des piétons

Auteur : Lô, Ismaël

Promoteur(s) : Denoel, Vincent

Faculté : Faculté des Sciences appliquées

Diplôme : Master en ingénieur civil des constructions, à finalité spécialisée en "civil engineering"

Année académique : 2019-2020

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/9049>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



UNIVERSITÉ DE LIÈGE
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

**Modélisation des vibrations latérales des
passerelles sous l'effet des piétons**
Interaction piéton-structure

Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade de
Master Ingénieur Civil des Constructions par Ismaël Lô

Promoteur : Prof. Vincent Denoël

Jury : Vincent de Ville de Goyet

Yves Duchêne

Philippe Duflot

Année académique 2019 - 2020

Remerciements

Au terme de ce travail, il me semble important de remercier les personnes ayant contribué de près ou de loin à sa réalisation.

Tout d'abord, je souhaite exprimer toute ma gratitude envers le Professeur Vincent Denoël pour m'avoir proposé ce sujet passionnant et pour l'encadrement de qualité qu'il m'a fourni malgré le contexte dans lequel nous avons tous été forcés de vivre. Sa capacité à simplifier des problèmes complexes ainsi que ses conseils éclairés mais surtout éclairants m'ont permis d'arriver au bout de ce travail. Son intérêt et son enthousiasme envers le sujet traité ont constitué une source de motivation supplémentaire.

Je remercie également les membres du jury, M. Vincent de Ville de Goyet, M. Yves Duchêne et M. Philippe Duflot pour l'attention qu'ils pourront porter à l'évaluation de ce travail. J'espère que ce dernier leur apportera satisfaction.

« *Le bonheur, c'est l'équation entre le temps et les tiens* »... Il est évident que le bonheur ne se résume pas à une relation cartésienne entre deux variables, mais j'apprécie le sens que porte cette phrase. Je tiens à remercier mes amis proches, Armel, Léo, Salomé, Sarah, pour tous ces instants de bonheur au quotidien. Chacune de ces relations, longues de plusieurs années déjà, m'a permis d'avancer et de me construire sur un plan personnel ainsi que de garder un savant équilibre entre études et vie sociale. Je leur en suis infiniment reconnaissant.

Enfin, je tiens à remercier ma famille, en particulier mes parents et ma petite sœur Sara pour leur soutien de tous les instants mais également mon grand-père pour m'avoir toujours encouragé à stimuler ma curiosité. Je souhaite que ce travail qui constitue l'aboutissement de ces cinq années d'enseignement universitaire vous emplisse de fierté.

Ismaël Lô, 9 juin 2020.

Résumé

L'utilisation de matériaux à haute performance et le développement des méthodes de calcul par ordinateur permettent aux ingénieurs de concevoir des passerelles de plus en plus légères et élancées. Ces structures sont de plus en plus flexibles et possèdent souvent une ou plusieurs fréquences propres dans le domaine des fréquences des sollicitations résultant l'activité humaine. De plus, l'amortissement structurel est souvent faible, ce qui les rend sensibles aux sollicitations induites par le passage de piétons. La force latérale engendrée par la marche de piétons peut conduire à des vibrations d'amplitude importante et l'on peut observer une interaction (*synchronisation*) entre les piétons et la structure.

Ce travail investigate ce phénomène d'interaction piéton-structure. Un premier modèle considérant un seul mode est d'abord étudié, modélisant le piéton par un oscillateur de Van der Pol. Une analyse à échelles multiples permet de montrer que la réponse est gouvernée par un groupe adimensionnel \mathcal{D} , fonction de la masse du piéton, de la masse modale et de l'amortissement structurel. Par la suite, l'influence d'un second mode de vibration est étudiée en ajoutant un degré de liberté supplémentaire à la structure. L'analyse à échelles multiples démontre dans ce cas-ci que la réponse est gouvernée par deux groupes adimensionnels \mathcal{D}_I et \mathcal{D}_{II} , fonction de la masse du piéton, des masses modales des deux modes considérées, de l'amortissement structurel mais également de la différence de fréquence entre les fréquences propres de chacun des modes. Finalement, une application sur une passerelle réelle est étudiée en considérant la passerelle de Mantes-la-Jolie - Limay en région parisienne.

Abstract

The use of high strength materials and the development of computer methods allow engineers to design lighter and more slender footbridges. These structures are more and more flexible and often have one or more natural frequencies in the range of the loading frequencies due to human activity. Furthermore, the structural damping is often low, which make them sensitive to human-induced loading. The lateral force resulting from human walking may lead to large amplitude vibrations and one can observe an interaction (*synchronization*) between the pedestrians and the structure.

This work investigates the human-structure interaction. Firstly, a single mode model is studied modeling the pedestrian, with a Van der Pol oscillator. A multiple scale analysis shows that the response is governed by a dimensionless group \mathcal{D} , expressed as a function of the mass of the pedestrian, the modal mass and the structural damping. Afterwards, the influence of a second mode of vibrations is analyzed by adding an additional degree of freedom to the structure. The multiple scale analysis shows in this case that the response is governed by two dimensionless groups \mathcal{D}_I and \mathcal{D}_{II} , expressed as a function of the mass of the pedestrian, the modal masses of the two considered modes, the structural damping and the frequency detuning between the two modes. Eventually, a case study is analyzed considering the Mantes-la-Jolie – Limay footbridge near Paris.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte	1
1.2	Démarche	2
2	Problématique générale	4
2.1	La marche des piétons et son influence sur une structure	4
2.1.1	Observations sur la marche	4
2.1.2	Variabilité des grandeurs caractéristiques de la marche	6
2.1.3	Force engendrée par la marche un piéton	6
2.2	Cas notables de vibrations latérales excessives dues à la foule	9
2.3	Mécanismes d'interaction	11
2.3.1	Interaction piéton-piéton	11
2.3.2	Interaction piéton-structure	12
2.4	Le phénomène de synchronisation	13
2.4.1	Définition de la synchronisation	14
2.4.2	L'oscillateur auto-entretenu	15
2.4.3	Différence entre synchronisation et résonance	17
2.5	L'oscillateur de Van der Pol	18
2.6	Classification des modèles d'interaction	20
2.7	Mesures d'atténuation	21
3	Modèle à 1 mode de vibration	23
3.1	Présentation de l'oscillateur MHVR dans le cas d'un sol rigide	24
3.2	Système couplé piéton-structure	25
3.2.1	Mise sous forme adimensionnelle	26
3.2.2	Ordre de grandeur des paramètres du problème	28
3.2.3	Système d'équations moyennées	28
3.2.4	Analyse de la phase lente sur le cycle limite	30
3.2.5	Amplitude de la réponse sur le cycle limite	32
3.2.6	Période du cycle limite	34
3.2.7	Validation des équations moyennées	35

3.3	Prise en compte de la déformée modale	42
3.3.1	Système d'équations moyennées prenant en compte la déformée modale	42
3.3.2	Simulation de la dynamique rapide du système en prenant en compte la forme modale	43
3.4	Conclusions	48
4	Modèle à 2 modes de vibration	49
4.1	Introduction	50
4.2	Mise sous forme adimensionnelle	52
4.3	Ordre de grandeur des paramètres du problème	53
4.4	Système d'équations moyennées	54
4.5	Analyse de la phase lente sur le cycle limite	56
4.6	Amplitude de la réponse sur le cycle limite	65
4.7	Période du cycle limite	70
4.8	Validation des équations moyennées	71
4.9	Prise en compte des déformées modales	81
4.9.1	Système d'équations moyennées prenant en compte les déformées modales	81
4.9.2	Simulation de la dynamique rapide du système	82
4.10	Conclusions	91
5	Application : Passerelle de Mantes-la-Jolie - Limay	92
5.1	Présentation de l'ouvrage	92
5.2	Caractéristiques modales et propriétés relatives au piéton	94
5.3	Réponse de la passerelle lors de la traversée d'un piéton	96
5.3.1	Formes modales non prise en compte	97
5.3.2	Allers et retours du piéton sur l'ouvrage	100
5.4	Conclusions de l'application	112
6	Conclusions générales et perspectives	113
	Annexes	115
A	Analyse par échelles multiples du système à un mode de vibration	116
B	Analyse par échelles multiples du système à un mode de vibration avec prise en compte de la forme modale	119
C	Analyse par échelles multiples du système à deux modes de vibration	122
D	Analyse par échelles multiples du système à deux modes de vibration avec prise en compte des formes modales	126

E	Figures annexes	131
E.1	Équations moyennées pour le système à 1 mode	131
E.2	Passerelle de Mantes-la-Jolie - Limay	133
	Références	136

Table des figures

2.1	Définition du cycle de marche complet, de la longueur d'un pas et schématisation des forces engendrées par la marche.	5
2.2	Variation de la longueur de pas et de la fréquence de marche en fonction de la vitesse de marche.	7
2.3	Relation entre la vitesse de marche en fonction de l'âge et du sexe	7
2.4	Densité de probabilité de la fréquence de marche f_m et de la vitesse de marche v	8
2.5	Force latérale générée par la marche au cours du temps	9
2.6	Différence de fréquence ΔF de deux oscillateurs couplés en fonction de la différence de fréquence Δf de ces deux mêmes oscillateurs découplés.	15
2.7	Régimes synchrones possibles de deux pendules presque identiques.	16
2.8	Représentation des oscillations périodiques d'un oscillateur auto-entretenu. . .	17
2.9	Solution de l'équation de l'oscillateur de Van der Pol.	20
3.1	Système à deux degrés de liberté utilisé pour étudier le couplage piéton-structure. .	24
3.2	Différence de phase entre le piéton et la passerelle à l'état stationnaire pour différentes valeurs du paramètre adimensionnel \mathcal{D}	32
3.3	Amplitude maximale de la réponse sur le cycle limite pour différentes valeurs du groupe adimensionnel \mathcal{D}	34
3.4	Validation des équations moyennées pour le système couplé pour différentes valeurs de Ω (data set 1).	39
3.5	Validation des équations moyennées pour le système couplé pour différentes valeurs de Ω (data set 2).	40
3.6	Période et fréquence de la réponse sur le cycle limite pour les deux jeux de données utilisés.	41
3.7	Simulations temporelles de la dynamique rapide du système en tenant compte de la forme du mode pour différentes valeurs de Ω (jeu de données 1).	46
3.8	Simulations temporelles de la dynamique rapide du système en tenant compte de la forme du mode pour différentes valeurs de Ω (jeu de données 2).	47
4.1	Système à trois degrés de liberté utilisé pour étudier le couplage piéton-structure. .	50

4.2	Déphasage entre le piéton et le premier mode de vibration en fonction du detuning piéton-structure δ	61
4.3	Déphasage entre le piéton et le second mode de vibration en fonction du detuning piéton-structure δ	62
4.4	Déphasage entre le piéton et le premier mode de vibration en fonction du detuning piéton-structure δ	63
4.5	Déphasage entre le piéton et le second mode de vibration en fonction du detuning piéton-structure δ	64
4.6	Amplitudes des réponses $R_y^{(I)}$, $R_y^{(II)}$ et R_u sur le cycle limite.	66
4.7	Amplitudes des réponses $R_y^{(I)}$, $R_y^{(II)}$ et R_u sur le cycle limite.	69
4.8	Validation des équations moyennées pour le système couplé à deux modes de vibrations. Amplitudes $R_y^{(I)}$, $R_y^{(II)}$ et R_u au cours du temps pour le data set 1. . .	74
4.9	Validation des équations moyennées pour le système couplé à deux modes de vibrations. Déphasage entre le piéton et les deux modes structurels pour le data set 1.	75
4.10	Validation des équations moyennées pour le système couplé à deux modes de vibrations. Amplitudes $R_y^{(I)}$, $R_y^{(II)}$ et R_u au cours du temps pour le data set 2. . .	76
4.11	Validation des équations moyennées pour le système couplé à deux modes de vibrations. Déphasage entre le piéton et les deux modes structurels pour le data set 2.	77
4.12	Validation des équations moyennées pour le système couplé à deux modes de vibrations. Amplitudes $R_y^{(I)}$, $R_y^{(II)}$ et R_u au cours du temps pour le data set 3. . .	78
4.13	Validation des équations moyennées pour le système couplé à deux modes de vibrations. Déphasage entre le piéton et les deux modes structurels pour le data set 3.	79
4.14	Période et fréquence de la réponse sur le cycle limite pour les jeux de données utilisés.	80
4.15	Amplitudes résultant des simulations temporelles de la dynamique rapide du système prenant en compte les formes modales pour le jeu de données 1. . . .	85
4.16	Déphasages résultant des simulations temporelles de la dynamique rapide du système prenant en compte les formes modales pour le jeu de données 1. . . .	86
4.17	Amplitudes résultant des simulations temporelles de la dynamique rapide du système prenant en compte les formes modales pour le jeu de données 2. . . .	87
4.18	Déphasages résultant des simulations temporelles de la dynamique rapide du système prenant en compte les formes modales pour le jeu de données 2. . . .	88
4.19	Amplitudes résultant des simulations temporelles de la dynamique rapide du système prenant en compte les formes modales pour le jeu de données 3. . . .	89
4.20	Déphasages résultant des simulations temporelles de la dynamique rapide du système prenant en compte les formes modales pour le jeu de données 3. . . .	90

5.1	Présentation de la passerelle de Mantes-la-Jolie - Limay.	93
5.2	Croquis de la passerelle de Mantes-la-Jolie.	94
5.3	Formes des modes I et III de la passerelle de Mantes-La-Jolie - Limay.	95
5.4	Force F_p générée par la marche du piéton modélisé à l'aide de l'oscillateur de Van der Pol sur un sol rigide au cours du temps.	96
5.5	Amplitude du déplacement structurel et du balancement du piéton autour de son centre de gravité dans le cas où les déformées modales ne sont pas prises en compte.	98
5.6	Amplitude de l'accélération de la structure et du balancement du piéton autour de son centre de gravité dans le cas où les déformées modales ne sont pas prises en compte.	99
5.7	Déphasage entre le piéton et les deux premiers modes latéraux dans le cas où les déformées modales ne sont pas prises en compte.	100
5.8	Courbe de lock-in pour la passerelle de Mantes-La-Jolie - Limay.	101
5.9	Amplitude du déplacement de la passerelle quand le piéton fait des allers-retours	102
5.10	Amplitude de l'accélération de la passerelle quand le piéton fait des allers-retours	103
5.11	Amplitude de l'accélération de la passerelle quand le piéton fait des allers-retours, zoom sur la fenêtre temporelle correspondant au second voyage du piéton.	104
5.12	Déphasage entre le piéton et la passerelle quand le piéton fait des allers-retours	105
5.13	Force latérale appliquée à la passerelle au cours des différents passage.	106
5.14	Accélération de la structure au cours du temps en $x = \frac{L}{4}$, $x = \frac{L}{2}$ et $x = \frac{3L}{4}$ pour $f_p = 0.94$ Hz.	108
5.15	Accélération de la structure au cours du temps en $x = \frac{L}{4}$, $x = \frac{L}{2}$ et $x = \frac{3L}{4}$ pour $f_p = 1.03$ Hz.	109
5.16	Accélération de la structure au cours du temps en $x = \frac{L}{4}$, $x = \frac{L}{2}$ et $x = \frac{3L}{4}$ pour $f_p = 1$ Hz.	111
E.1	Validation des équations moyennées pour le système couplé pour différentes valeurs de Ω (data set 1).	132
E.2	Accélération de la structure au cours du temps en $x = \frac{L}{4}$, $x = \frac{L}{2}$ et $x = \frac{3L}{4}$ pour $f_p = 0.9$ Hz.	134
E.3	Accélération de la structure au cours du temps en $x = \frac{L}{4}$, $x = \frac{L}{2}$ et $x = \frac{3L}{4}$ pour $f_p = 1.05$ Hz.	135

Liste des tableaux

2.1	Moyenne et écart-type de la fréquence de marche, de la vitesse de marche et de la longueur de pas.	6
2.2	Facteurs de chargement dynamique (DLF) pour la composante latérale de la force due à la marche.	9
2.3	Classification et description des modèles d'interaction piéton-structure. . . .	21
3.1	Intervalle de variation des paramètres du problème.	28
3.2	Données numériques utilisées pour la validation des équations moyennées. . .	36
3.3	Données numériques la simulation de la dynamique rapide du système tenant compte de la forme du mode.	44
4.1	Intervalle de variation des paramètres du problème.	54
4.2	Données numériques utilisées pour la validation des équations moyennées. . .	71
4.3	Données numériques utilisées pour la validation des équations moyennées. . .	83
5.1	Propriétés modales des modes I et III de la passerelle de Mantes-La-Jolie - Limay.	94
5.2	Paramètres utilisés pour la modélisation de la force latérale engendrée par le passage d'un piéton.	96

Liste des symboles

β	Paramètre relatif à l'amortissement du piéton	$[\text{m}^{-2}]$
\mathcal{D}	Groupement adimensionnel fonction de la masse modale et de l'amortissement	$[-]$
δ	Detuning entre le piéton et le premier mode structurel	$[-]$
$\dot{\square}$	Dérivée temporelle	
DLF	Facteur de chargement dynamique	$[-]$
μ	Paramètre relatif à l'amortissement du piéton	$[-]$
Ω	Mistuning entre le piéton et le premier mode structurel	$[-]$
ω	Fréquence angulaire	$[\text{rad/s}]$
ω_p	Fréquence angulaire du piéton sur un sol rigide	$[\text{rad/s}]$
ω_s	Pulsation propre de la structure	$[\text{rad/s}]$
Φ	Mode structurel	
ϕ	Phase relative	$[\text{rad}]$
ψ	Phase relative	$[\text{rad}]$
ρ	Densité de piétons	$[\text{personne/m}^2]$
ρ_{\max}	Densité maximale de piétons	$[\text{personne/m}^2]$
ρ_c	Densité critique de piétons	$[\text{personne/m}^2]$
I, II, III, ...	Indice faisant référence au mode 1, 2, 3...	
τ	Temps adimensionnel	$[-]$
\mathcal{U}	Déplacement latéral de piéton adimensionnel	$[-]$

\mathbf{Y}	Déplacement nodal latéral de la structure	[m]
ξ	Coefficient d'amortissement structurel	[-]
\mathcal{Y}	Déplacement structurel adimensionnel	[-]
C	Amortissement modal de la structure	[kg/s]
c_p	Coefficient d'amortissement lié aux piétons (critère d'Arup)	[Nsm]
f_m	Fréquence de marche (nombre de pas par seconde)	[Hz]
f_p	Fréquence de la force latérale engendrée par la marche	[Hz]
F_p	Force latérale engendrée par la marche d'un piéton	[N]
K	Raideur modale de la structure	[kg/s ²]
L_p	Longueur de pas d'un piéton	[m]
M	Masse modale de la structure	[kg]
m_p	Masse d'un piéton	[kg]
n	Nombre de piétons	[-]
R_u	Amplitude lente de la réponse du piéton sur le cycle limite	[-]
R_y	Amplitude lente de la réponse structurelle sur le cycle limite	[-]
T	Temps lent adimensionnel	[-]
T_m	Période d'un cycle de marche complet	[s]
$u_y(t)$	Déplacement latéral du piéton autour de son centre de gravité	[m]
v	Vitesse de marche du piéton	[m/s]
W	Poids du piéton	[N]
$y(t)$	Amplitude modale du déplacement de la structure	[m]

1.1 Contexte

Élégance, finesse, légèreté, flexibilité,... Ces adjectifs sont caractéristiques des passerelles piétonnes modernes. Leurs travées sont de plus en plus élancées et avec l'utilisation de matériaux à haute performance, la volonté d'économiser les matières premières mais également le développement des méthodes de calcul par ordinateur, les structures sont également de plus en plus légères. En conséquence de cette légèreté, le ratio entre charges variables et charges permanentes est assez élevé. Ainsi, beaucoup de structures sont susceptibles de vibrer et de poser des problèmes aux états limites de service lorsqu'elles sont sollicitées par des charges dynamiques.

Une force dynamique non négligeable dans le cadre des passerelles piétonnes est la force engendrée par le passage des piétons, aussi bien par la marche que par la course. Suite à ce chargement dynamique, l'ouvrage peut se mettre à osciller verticalement mais également horizontalement. Un mouvement de torsion du tablier est également possible dans certains cas.

L'étude des vibrations latérales des passerelles soumises à un chargement de piétons est devenue une préoccupation majeure en dynamique des structures après l'an 2000. En effet, lors de l'inauguration du London Millenium Bridge à Londres le 10 juin 2000, entre 80 000 et 100 000 personnes ont traversé la passerelle et environ 2000 personnes se sont trouvées au même instant sur la structure. A cause de cette densité de piétons relativement élevée, la passerelle s'est mise à vibrer latéralement de manière assez inattendue, provoquant l'inconfort des personnes sur la structure [6]. Cet événement a suscité par la suite un nombre considérable de recherches de la part des ingénieurs qui ont permis de mettre en évidence que la passerelle possédait un mode propre de vibration latérale de l'ordre de 1 Hz, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que la fréquence de la force latérale engendrée par la marche des piétons et qu'il existait un mécanisme d'interaction entre les piétons et la structure.

Bien que l'exemple du London Millenium Bridge soit un des exemples les plus cités dans la littérature, plusieurs autres structures ont souffert du même phénomène. C'est notamment le cas du T-Bridge au Japon [22], de la passerelle Léopold-Sédar-Sengor¹ à Paris ou encore de la passerelle La Belle Liégeoise située à proximité du parc de la Boverie à Liège [30].

De manière générale, les vibrations induites par le mouvement humain sur les structures sont de nos jours considérées comme un problème aux états limites de service plutôt qu'un problème de résistance [38]. Les humains étant assez sensibles aux vibrations, leur comportement s'adapte à la réponse de la structure, si bien que l'amplitude des vibrations reste généralement suffisamment faible pour ne pas causer de dommages à la structure.

Le phénomène ayant été relativement bien investigué, il existe un certain nombre de modèles, la plupart basés sur des mesures expérimentales. Cependant, malgré la pléthore de modèles existants, les scientifiques n'ont pas encore réussi à se mettre d'accord de manière unanime quant au phénomène déclencheur de ces vibrations.

Ce travail a pour but d'apporter une meilleure compréhension physique du phénomène et des paramètres influençant la réponse de la structure. Il a également pour objectif d'investiguer la réponse de la structure quand deux modes de vibrations ont des fréquences propres voisines.

1.2 Démarche

Une bonne compréhension physique du phénomène nécessite le développement d'expressions analytiques faciles à appréhender, permettant d'identifier les paramètres déterminants du problème. Dans cette optique, ce travail se décompose en plusieurs parties dont le degré de complexité augmente progressivement.

Le plan de travail s'articule de la manière suivante :

- ◇ Premièrement, un état de l'art est réalisé pour poser les bases qui serviront à l'étude du phénomène.
- ◇ Ensuite, un premier système couplé piéton-structure à un mode de vibration est étudié à l'aide d'une méthode par perturbations. Il en résulte des expressions analytiques simples permettant d'étudier la réponse du système.
- ◇ Par après, l'étude est poussée plus loin en ajoutant un second degré de liberté à la structure permettant d'investiguer l'effet de deux modes de vibration de fréquences

¹Ancienne passerelle de Solférino.

propres proches. L'approche suivie est semblable à celle développée dans le cas d'un seul mode de vibration tout en prenant en compte de nouveaux paramètres.

- ◇ Enfin, une application pratique à un ouvrage réel est étudiée. La structure choisie pour ce cas d'étude est la passerelle de Mantes-la-Jolie - Limay.

2

Problématique générale

« Engineering is the art of modeling materials we do not wholly understand, into shapes we cannot precisely analyse so as to withstand forces we cannot properly asses, in such a way that the public has no reason to suspect the extent of our ignorance. »

Dr A. R. Dykes

Le phénomène d'interaction piéton-structure (ou foule-structure) est un phénomène complexe faisant intervenir différentes notions qu'il convient d'introduire. Ce chapitre propose de définir la problématique générale du phénomène et également de faire l'inventaire de quelques modèles existant dans la littérature.

2.1 La marche des piétons et son influence sur une structure

2.1.1 Observations sur la marche

La marche est par définition le mouvement qui permet le déplacement du corps sur deux pieds dans une direction donnée. Un individu qui marche se déplace en posant un pied devant l'autre en gardant au moins un des deux pieds en contact avec la surface sur laquelle il se déplace [40]. Deux phases peuvent être distinguées lors de la marche : la première, au cours de laquelle les deux pieds sont simultanément en contact avec le sol et la seconde durant laquelle un seul pied est en contact avec le sol. On dit que la marche est libre lorsque le déplacement du piéton n'est pas influencé par son environnement extérieur (autre piéton, obstacle,...).

Le temps pour réaliser un cycle complet de marche T_m [s] est défini comme la période de temps entre deux contacts successifs du même pied avec le sol. Cette grandeur n'est autre

que l'inverse de la fréquence de marche f_m [Hz], définie comme le nombre de pas par seconde. Dans des conditions de marche libre, la fréquence de marche est de l'ordre de 1.5 – 2.5 Hz [1].

La longueur d'un pas L_p est définie comme la distance entre les deux pieds lorsque ceux-ci sont simultanément en contact avec le sol.

La force engendrée par la marche d'un piéton peut être décomposée en 3 composantes [1] : une composante verticale et deux horizontales. La première de ces composantes horizontales est perpendiculaire à la direction du déplacement du piéton, c'est la composante latérale. C'est cette composante qui nous intéresse dans le cadre du développements de vibrations latérales excessives d'une structure. La seconde composante horizontale est parallèle à la direction du mouvement, c'est la composante longitudinale. Cette dernière est en général relativement faible par rapport à la composante latérale. L'ordre de grandeur de la composante verticale est généralement de 750–800 N et celui de la composante latérale de 40–60 N.

La longueur de pas et les composantes de la force engendrée par la marche sont schématisées à la Figure 2.1.

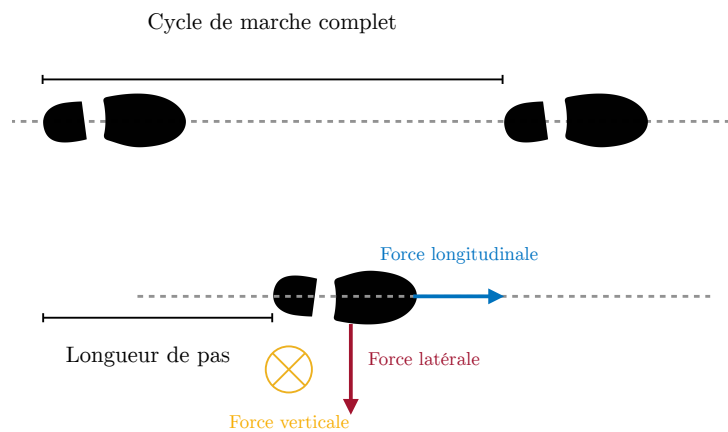


Figure 2.1 – Définition du cycle de marche complet, de la longueur d'un pas et schématisation des forces engendrées par la marche.

La vitesse de marche libre v [m/s], est liée à la fréquence de marche et à la longueur de pas par la relation suivante

$$v = \frac{L_p}{T_m} = L_p f_m \quad (2.1)$$

2.1.2 Variabilité des grandeurs caractéristiques de la marche

Les paramètres définissant la marche d'une personne tels que la fréquence de marche ou la longueur des pas varient d'un individu à l'autre et varient même pour un même individu au cours du temps. Yamasaki et al. ont montré que les femmes avaient tendance à faire des pas plus petits que les hommes pour une même vitesse de déplacement [41]. Ces résultats sont illustrés à la Figure 2.2. Notons également que ces paramètres vont évoluer au cours de la vie d'un individu. En effet, on peut aisément imaginer qu'un jeune enfant ne se déplace pas à la même vitesse qu'un jeune adulte ou qu'une personne âgée. Cette variabilité est illustrée à la Figure 2.3. Ricciardelli et Pizzimenti [29] ont pour leur part affirmé sur base de résultats expérimentaux que la fréquence de marche était statistiquement indépendante de la taille et du poids des individus. Cette affirmation signifie que la variabilité observée serait plutôt à mettre sur le compte des habitudes personnelles ou des caractéristiques comportementales des individus plutôt que des caractéristiques physiques.

Cette variabilité est souvent prise en compte en faisant l'hypothèse d'une distribution normale [18]. Une série d'études statistiques ont été effectuées par les scientifiques pour déterminer la valeur moyenne et l'écart-type de chaque caractéristique. Inévitablement, ces études fournissent en général des valeurs qui diffèrent légèrement suivant les auteurs. Après avoir comparé plusieurs études différentes, K. Lievens [18] a proposé les valeurs données à la Table 2.1. La densité de probabilité de la fréquence et de la vitesse de marche selon ces données sont illustrées à la Figure 2.4.

Caractéristique	μ_i	σ_i
f_m [Hz]	1.86	0.18
v [m/s]	1.33	9.13
L_p [m]	0.72	0.1

Table 2.1 – Moyenne et écart-type proposés par K. Lievens pour la fréquence de marche f_m , la vitesse de marche v et la longueur de pas L_p [18].

2.1.3 Force engendrée par la marche un piéton

Comme déjà énoncé plus tôt, la marche d'un piéton génère une force à trois composantes : une verticale et deux horizontales (longitudinale et latérale). Celle qui nous intéresse dans le cadre de ce travail est la composante latérale. Or, cette composante a été assez peu investiguée en comparaison avec la composante verticale pour laquelle une pléthore d'études existe. On considère parfois que la composante latérale vaut environ 10 % de la composante

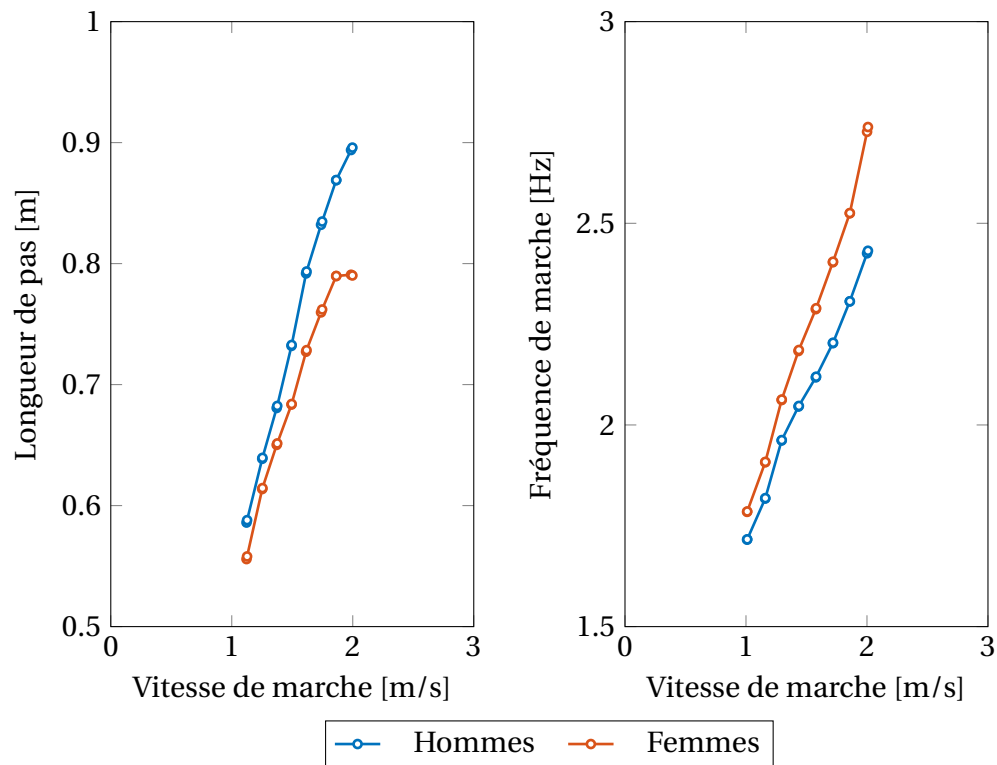


Figure 2.2 – Variation de la longueur de pas et de la fréquence de marche en fonction de la vitesse de marche. (Figure basée sur les données de Yamasaki et al. [41]).

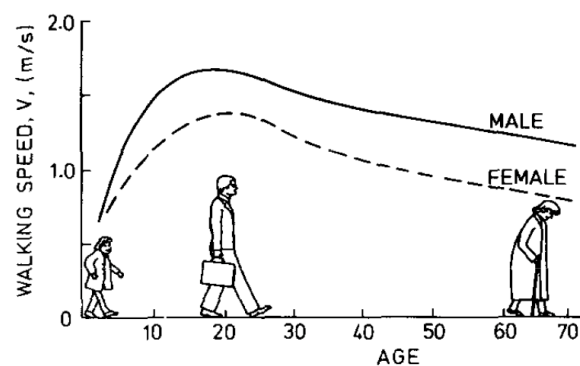


Figure 2.3 – Relation entre la vitesse de marche en fonction de l'âge et du sexe (issu de [32].)

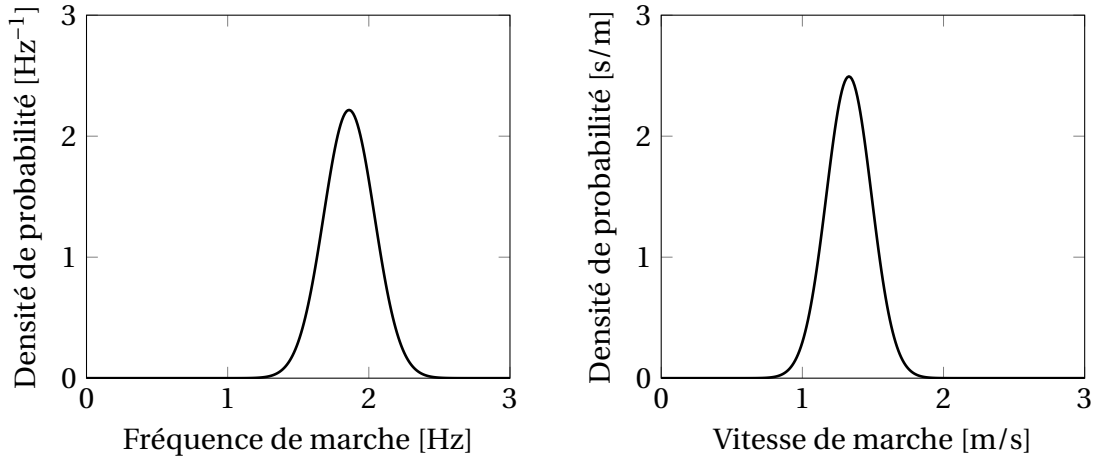


Figure 2.4 – Densité de probabilité de la fréquence de marche f_m et de la vitesse de marche v selon les données fournies à la Table 2.1.

verticale.

Une étude expérimentale a toutefois été menée par Ricciardelli et Pizzimenti [29] sur la composante latérale à l'aide d'un tapis de course permettant de mesurer la force latérale résultant de la marche d'un piéton sur un sol rigide (pas de mouvement latéral de la structure) ainsi que sur un sol vibrant horizontalement avec une amplitude et une fréquence données. Leur étude a montré que pour la plupart des sujets, la fréquence de la composante latérale de la force engendrée par la marche se situait aux alentours de 0.6 – 1.1 Hz. Cette fréquence n'est autre que la moitié de la fréquence de marche.

En tout généralité, la marche est un processus non-périodique, ou en tout cas, pas parfaitement périodique. Cependant, on la considère le plus souvent comme tel, ce qui permet de l'exprimer à partir de sa décomposition en séries de Fourier. Ainsi, la composante latérale de la force générée par la marche peut s'écrire

$$F_p(t) = F_{p0} + \sum_{i=1}^n \Delta F_{Li} \sin(2\pi i f_m + \phi_i) \quad (2.2)$$

où f_m est la fréquence de marche du piéton, $F_{p0} = 0$ est la force latérale moyenne, ΔF_{Li} et ϕ_i sont l'amplitude de Fourier et la phase associée à la i -ème harmonique, et n est le nombre d'harmoniques contribuant à la force. La valeur de la phase n'est pas souvent donnée dans la littérature. On définit les facteurs de chargement dynamique DLF_i (*dynamic load factor* en anglais) comme l'amplitude de Fourier divisée par le poids du piéton

$$DLF_i = \frac{\Delta F_{Li}}{W}. \quad (2.3)$$

Les valeurs des cinq premiers DLFs pour la composante latérale de la force engendrée par la marche identifiées par Ricciardelli et Pizzimenti sont données à la Table 2.2. Elles sont comparées aux valeurs fournies par Bachmann et Ammann [1].

Auteur	DLF ₁	DLF ₂	DLF ₃	DLF ₄	DLF ₅
Ricciardelli et Pizzimenti [29]	0.04	0.0077	0.023	0.0043	0.011
Bachmann and Ammann [1]	0.039	0.01	0.042	0.012	0.015

Table 2.2 – Facteurs de chargement dynamique (DLF) pour la composante latérale de la force due à la marche.

La force latérale générée par la marche (normalisée par rapport au poids du piéton) au cours du temps est représentée à la Figure 2.5. Il a été fait l’hypothèse d’une fréquence de marche $f_m = 2\text{Hz}$. De plus, la phase associée à chaque harmonique a été considérée comme étant égale à 0, faute de valeur fournie.

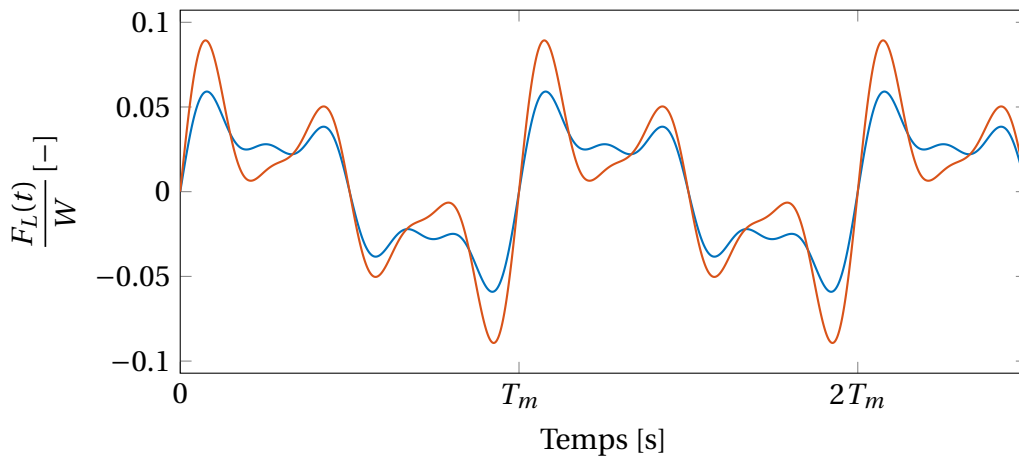


Figure 2.5 – Force latérale générée par la marche au cours du temps selon les données de Ricciardelli et Pizzimenti [29] (courbe bleue) et Bachmann et Ammann [1] (courbe rouge).

2.2 Cas notables de vibrations latérales excessives de passerelles dues à la foule

Le problème des vibrations latérales de passerelles soumises au passage d’une foule est devenu un sujet de recherche intensive pour les ingénieurs au début des années 2000. Les passerelles modernes sont souvent caractérisées par des fréquences propres relativement

faibles, du même ordre que la fréquence d'excitation des sollicitations dues à l'activité humaine.

Deux exemples importants dans l'histoire de la recherche sur les vibrations latérales excessives dues à l'activité humaine sont la passerelle de Solférino à Paris (renommée depuis passerelle Léopold-Sédar-Senghor) et la passerelle du Millenium à Londres, inaugurées respectivement en 1999 et 2000, qui ont toutes deux dû être fermées quelque temps après leur inauguration à cause de l'inconfort engendré par des vibrations latérales excessives. Ces deux événements ont attiré l'attention des ingénieurs en Europe sur ce phénomène bien qu'il ne s'agisse pas de sa première manifestation, certains cas similaires ayant déjà été rapportés dans les années 1950 [14]. Les recherches menées dans ce domaine ont amené à développer des guides permettant d'évaluer le comportement vibratoire des passerelles sous l'effet des piétons comme celui du Sétra [31].

Un incident largement cité également dans la littérature est le cas du pont du parc de Toda (Toda Park Bridge ou *T-Bridge*) inauguré au Japon en 1989 qui a été abondamment étudié par Nakamura [21–23]. Ce pont haubané constituait le seul lien entre un stade et une gare routière dans la ville de Toda. A la fin de chaque événement sportif, le pont était traversé par plusieurs milliers de spectateurs avec une densité de piétons estimée à 1 – 1.5 personne/m². Bien que les vibrations observées étaient d'amplitude limitée, elles provoquaient un sentiment d'inconfort auprès des usagers.

Des tests ont été organisés en laboratoire mais également grandeur nature sur ces 3 structures. Les tests en laboratoire ne peuvent investiguer que le comportement individuel d'un piéton alors que des tests grandeur nature permettent d'étudier l'influence de la corrélation entre de nombreux individus.

Les tests réalisés sur le London Millenium Bridge ont eu lieu en augmentant progressivement le nombre de piétons (jusqu'à 275) sur la passerelle. Avec ces tests, il a pu être montré qu'au-delà d'un nombre critique de piétons, l'amplitude de la réponse de la structure peut être très importante [6]. Les essais ont pu mettre en exergue que la force engendrée par les piétons était corrélée à la vitesse latérale de la structure sous la forme d'un amortissement négatif. Cela suggère donc que les piétons induisent une force $F(t) = c_p \dot{Y}$, où c_p est un terme d'amortissement des piétons ($c_p = 300$ Nsm pour l'ouvrage en question) et \dot{Y} est la vitesse de la passerelle. Ces recherches ont abouti à un critère de stabilité simple connu sous le nom de critère de stabilité d'Arup. Ce critère donne le nombre critique de piétons annulant l'amortissement structurel et pouvant donc provoquer une instabilité. En particulier, pour

une foule uniformément distribuée, ce critère prend la forme simple

$$N_{cr} = \frac{4\pi f M \xi}{c_p \frac{1}{L} \int_0^L [\Phi(x)]^2 dx} \quad (2.4)$$

où L est la longueur de la passerelle, M est la masse modale, ξ est le taux d'amortissement, f est la fréquence propre de la passerelle et $\Phi(x)$ est la forme du mode. Ce modèle, bien que simple d'apparence, nécessite de connaître le coefficient c_p qui n'est pas nécessairement le même selon les cas. La variabilité de c_p a été étudiée par Ingólfsson qui a déterminé expérimentalement que ce coefficient dépendait de la fréquence et de l'amplitude de vibration de la structure [16].

2.3 Mécanismes d'interaction

L'existence de vibrations latérales de grande amplitude est due à la combinaison de deux types d'interaction : l'interaction piéton-structure et l'interaction piéton-piéton. Ces deux mécanismes traduisent simplement le fait que les caractéristiques de la marche (vitesse, fréquence, longueur de pas) sont affectées non seulement par la densité de la foule mais également par le mouvement de la structure.

2.3.1 Interaction piéton-piéton

Lorsqu'un groupe d'individus se déplace, ceux-ci ont tendance à ajuster leur fréquence de marche entre eux. Ce phénomène de synchronisation entre piétons est plus important dans des foules à forte densité (supérieure à 1 personne/m²). Or, une passerelle est limitée dans l'espace par des gardes-corps sans compter les éventuels obstacles pouvant se trouver sur celle-ci. Tout ceci augmente le degré d'interaction entre les individus et la marche peut donc ne plus être considérée comme libre suivant les conditions.

Les observations suivantes ont été faites sur l'interaction piéton-piéton [14] :

- ◇ la fréquence de marche moyenne (ainsi que la vitesse et la longueur de pas) diminue quand la densité de la foule augmente ;
- ◇ la variabilité entre individus mesurée comme étant l'écart-type de la fréquence de marche dans la foule diminue quand la densité de la foule augmente ;
- ◇ il n'y a pas de synchronisation de phase collective. Il existe cependant, de manière occasionnelle, une synchronisation de la phase entre quelques individus.

Il semblerait donc que l'interaction piéton-piéton soit gouvernée par un changement de la vitesse d'avancement de la foule. Dès lors, pour faire face à ce changement de vitesse d'avancement du groupe, chaque piéton s'adapterait en modifiant sa fréquence de marche ainsi que sa longueur de pas.

Puisqu'une densité de foule élevée réduit la vitesse à laquelle les individus se déplacent, on peut aisément imaginer une densité maximale de piétons ρ_{\max} , au-delà de laquelle ces derniers éprouvent des difficultés pour se déplacer voire se trouvent contraints de s'arrêter. Physiquement, cette limite est de l'ordre de $1.6 - 1.8$ personne/m² [1].

Il existe une densité critique de piétons en-dessous de laquelle les piétons peuvent marcher indépendamment les uns des autres (conditions de marche libre). Cette densité critique se situe aux alentours de $\rho_c = 0.3$ personne/m² [3]. Au-delà de valeur critique, les piétons commencent à interagir entre eux.

La force latérale générée par le passage d'une foule composée de n piétons est donnée par la somme de n forces quasi-périodiques avec des phases distribuées aléatoirement. De manière équivalente, on considère que cette force est égale à celle générée par \sqrt{n} piétons complètement synchronisés. Si la force générée est faible, l'amplitude des vibrations et l'accélération de la structure sont peu importantes et les piétons ne sont pas affectés par le mouvement de l'ouvrage. On considère dans ce cas que la foule se déplace sur un sol rigide [29]. Dans le cas contraire, il y a interaction/synchronisation entre la foule et la structure ; les piétons ajustent leur fréquence de marche et leur phase avec celles de la structure. Ce type d'interaction sera expliquée en détail à la section 2.3.2.

Dans le cas où la densité de la foule est supérieure à la densité critique ρ_c , une synchronisation entre les piétons s'installe et ce, peu importe le mouvement de la structure. Comme énoncé plus haut, ce n'est pas la foule entière qui se synchronise mais plutôt des petits groupes d'individus qui marchent avec la même fréquence et la même phase. Dans ce cas, la force exercée par la foule composée de n piétons tend vers la somme des forces générées par chaque piéton individuellement. Ainsi, en fonction du mouvement qui sera induit sur la structure, on peut assister ou non à une synchronisation avec la structure.

2.3.2 Interaction piéton-structure

L'interaction piéton-structure peut être vue comme la combinaison de deux phénomènes. Le premier résulte de l'effet des piétons sur la structure qui influe les propriétés apparentes de la structure comme la masse et l'amortissement par exemple. Le second est dû à l'effet du mouvement de la structure qui modifie les paramètres de marche des piétons comme la

fréquence, la vitesse de déplacement, la longueur de pas et éventuellement l'amplitude du balancement latéral de chaque piéton.

Une approche communément acceptée par les ingénieurs est que, lorsque l'amplitude des vibrations structurelles est trop importante, les piétons ajustent leur fréquence de marche et se synchronisent avec la structure afin de garantir leur équilibre. Ce phénomène a été mis en évidence par Nakamura et Fujino [22], en filmant une foule traversant le T-Bridge et en analysant le mouvement de la tête d'un certain nombre de piétons. Ils ont estimé qu'environ 20% des piétons étaient synchronisés avec le mouvement de la structure.

Certains auteurs n'adhèrent cependant pas à l'idée que la synchronisation est le mécanisme déclenchant ces vibrations latérales importantes. C'est notamment le cas de Macdonald qui a proposé un modèle ne nécessitant pas de synchronisation entre les piétons et la structure mais qui permet tout de même de produire des vibrations importantes [19]. Plutôt que de considérer que le piéton ajuste sa fréquence de marche pour garantir son équilibre, il considère que la stabilité est assurée par un ajustement de la position du pied d'appui. Il se pourrait néanmoins qu'une fois les grandes amplitudes de vibrations structurelles initiées, le piéton se synchronise sur le mouvement de la structure.

Après une campagne expérimentale, Ingólfsson et al. ont affirmé que la fréquence de marche et la phase du piéton étaient peu affectés par le mouvement latéral de la structure et donc que la synchronisation ne pouvait avoir lieu que si le ratio de la fréquence de marche et la fréquence de vibration de la passerelle était proche de l'unité [15]. Ils ont par ailleurs observé que, sur une large gamme de fréquences, les piétons agissaient comme des amortisseurs négatifs sur la structure. Ce dernier fait indiquerait que la synchronisation n'est pas une précondition nécessaire pour initier des vibrations latérales de grande amplitude. Leur étude met aussi en avant la disparité des forces générées par les piétons lors de la marche. Dès lors, pour une estimation précise de la susceptibilité aux vibrations latérales, ils préconisent de se baser sur une approche probabiliste.

2.4 Le phénomène de synchronisation

Cette section a pour but de donner certaines bases théoriques du phénomène de synchronisation introduit aux sections précédentes. Elle définit notamment la synchronisation de manière plus détaillée et présente l'oscillateur auto-entretenu ainsi que ses propriétés. Pour de plus amples informations, le lecteur peut se référer à [28].

2.4.1 Définition de la synchronisation

La synchronisation peut être vue comme un ajustement du rythme d'objets oscillants causé par leur faible interaction (ou couplage) [28]. Ainsi, si l'on considère deux oscillateurs différents ayant chacun leur fréquence d'oscillation f_1 et f_2 et que l'on les couple, ils pourraient se mettre à osciller à une fréquence commune, on parle de phénomène de lock-in. Chacun des oscillateurs possède sa propre source d'énergie, on parle d'oscillateurs *auto-entretenus*. Cette notion sera développée en profondeur à la section 2.4.2.

Le fait que la synchronisation puisse se produire ou non dépend des deux facteurs suivants :

La force de couplage : elle caractérise l'intensité de l'interaction entre les oscillateurs. Si elle est nulle, il n'y a pas d'interaction. Cette grandeur est assez difficile à mesurer expérimentalement. Pour comprendre ce qu'elle représente, considérons deux oscillateurs (par exemple deux pendules) fixés à un même support. Si le support est infiniment rigide, les oscillateurs ne s'influencent pas l'un l'autre. Dans ce cas, la force de couplage est nulle. Cependant, si ce support n'est pas rigide et peut vibrer à cause du mouvement des oscillateurs, alors il y a interaction entre ces derniers. Ils « ressentent » en quelque sorte la présence de l'autre et interagissent. Notons tout de même que si le couplage est trop fort on ne peut plus parler de synchronisation. En effet, dans ce cas, on peut considérer que les deux systèmes ont été unifiés et ne forment plus qu'un seul oscillateur, ils sont contraints d'avoir le même mouvement. Dans ce cas, puisqu'il n'existe plus qu'un seul système, on ne peut plus considérer qu'il s'agit d'un phénomène de synchronisation.

La différence de fréquence : On définit la différence de fréquence (*frequency detuning* en anglais) par $\Delta f = f_1 - f_2$. Elle quantifie la différence entre les oscillateurs quand ils sont *découplés*. Plus cette différence est petite, plus il y a de chance que les oscillateurs se synchronisent. Cette grandeur est assez facile à mesurer expérimentalement. Par ailleurs, on peut calculer les fréquences F_1 et F_2 quand les oscillateurs sont *couplés*. En répétant l'opération pour différentes valeurs de Δf , on obtient l'évolution de $\Delta F = F_1 - F_2$ en fonction de Δf . On peut représenter graphiquement les résultats obtenus comme illustré de manière schématique à la Figure 2.6. Une telle courbe est typique de deux oscillateurs interagissant et ce, peu importe leur nature. Lorsque la différence de fréquence (*detuning*) des oscillateurs découplés Δf est petite, la différence de fréquence des oscillateurs couplés ΔF est nulle. La fréquence des oscillations des deux oscillateurs couplés est identique. On parle aussi d'*entraînement* de fréquence; ils se synchronisent. L'intervalle de fréquence Δf pour lequel la synchronisation se produit (appelé aussi région de synchronisation) s'élargit généralement lorsque la force de couplage augmente.

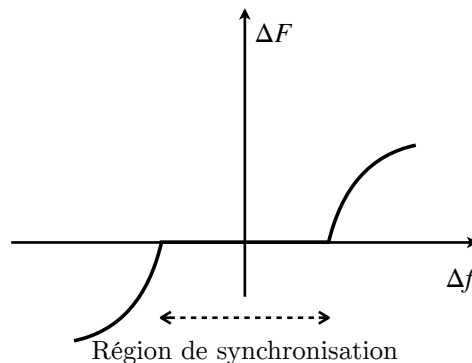


Figure 2.6 – Différence de fréquence ΔF de deux oscillateurs couplés en fonction de la différence de fréquence Δf de ces deux mêmes oscillateurs découplés (reproduit depuis [28]).

Une notion importante dans les phénomènes de synchronisation est la *phase* d'un oscillateur. La phase est une quantité qui augmente de 2π au cours d'un cycle oscillatoire. Elle permet de déterminer de manière univoque l'état d'un oscillateur périodique.

Plus que la phase d'un oscillateur elle-même, c'est la différence de phase entre deux oscillateurs qui est d'un intérêt notable. Prenons l'exemple de deux pendules oscillant à la même fréquence. Bien qu'ils oscillent à la même fréquence, les deux pendules ne sont pas nécessairement dans le même état simultanément. En effet, il se peut que lorsque l'un oscille vers la gauche, l'autre oscille vers la droite bien qu'ils atteignent leurs positions extrêmes en même temps. On parle dans ce cas de synchronisation en *opposition de phase*, il existe un déphasage de π entre eux. Dans le cas contraire, si les deux pendules vont dans la même direction et atteignent leur position extrême (extrême gauche par exemple) en même temps, cela signifie que leurs phases sont proches et on parle de synchronisation en *phase*. Ces deux situations sont illustrées à la Figure 2.7.

Comprenons bien que, malgré que les phases des deux pendules soient très proches lorsque ceux-ci oscillent en phase, elles ne sont pas tout à fait égales l'une à l'autre, il existe toujours un léger déphasage. Ce déphasage n'est pas toujours visible à l'œil nu. Il est néanmoins toujours présent lors que les deux oscillateurs présentent initialement des périodes (ou fréquences) d'oscillations différentes. Il en va de même lorsque les oscillateurs sont en opposition de phase, le déphasage n'est jamais parfaitement égal à π .

2.4.2 L'oscillateur auto-entretenu

Un oscillateur auto-entretenu est un oscillateur qui contient une source interne qui lui permet de générer son mouvement oscillatoire. Ainsi, lorsqu'il est isolé, il continuera à osciller à son propre rythme jusqu'à épuisement de sa source d'énergie.

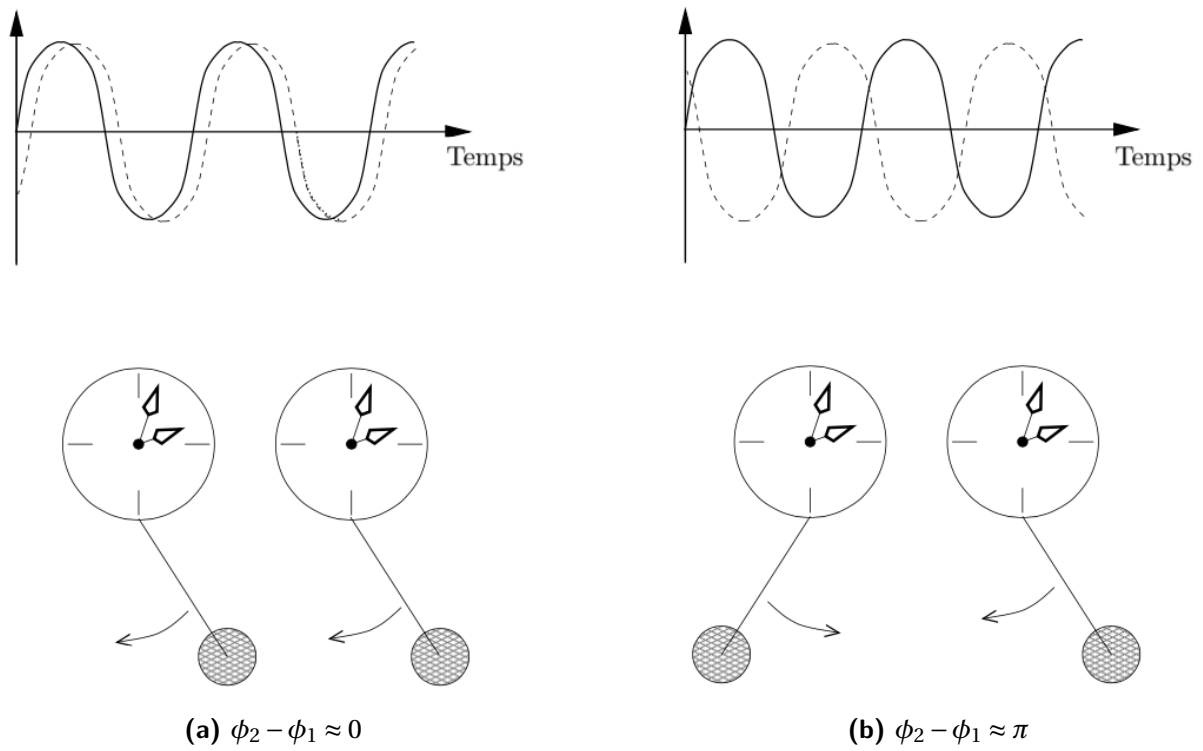


Figure 2.7 – Régimes synchrones possibles de deux pendules presque identiques [28].

Si l'on considère un oscillateur auto-entretenu produisant un processus périodique, il peut être représenté par une courbe fermée dans le plan de phase que l'on appelle cycle limite (voir Figure 2.8).

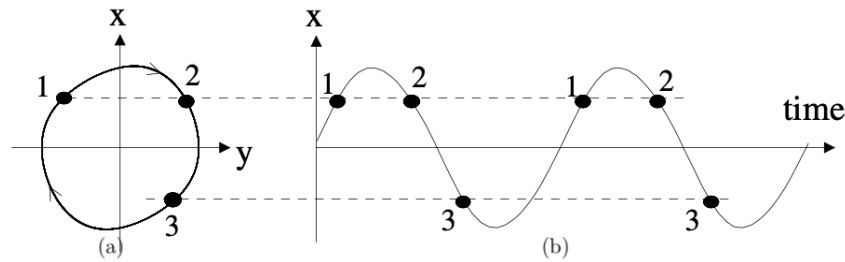


Figure 2.8 – Représentation des oscillations périodiques d'un oscillateur auto-entretenu (issu de [28]). (a) plan de phase, (b) domaine temporel.

Les oscillations d'un oscillateur auto-entretenu sont stables aux petites perturbations. Ainsi, si les oscillations sont légèrement perturbées, le rythme originel est retrouvé après une période transitoire. En d'autres mots, si le point de phase (x, y) est écarté du cycle limite, il aura tendance à retourner sur le cycle limite. Le cycle limite a tendance à attirer les trajectoires de phase qui se situent dans son voisinage. Ceci implique par ailleurs que les oscillations ne dépendent pas des conditions initiales (en tout cas dans certaines limites).

2.4.3 Différence entre synchronisation et résonance

La résonance est un phénomène bien connu des systèmes vibratoires. Un système physique (un pont ou un bâtiment par exemple) peut être sensible à certaines fréquences, appelées *fréquences propres*. Si on applique à ce système une sollicitation périodique dont la fréquence est proche de la fréquence de résonance, le système va être le siège de vibrations d'amplitude de plus en plus importante. On parle alors de résonance.

Considérons une poutre ayant une pulsation propre ω_0 à laquelle on applique une sollicitation périodique ω . La poutre va se mettre à osciller très légèrement tant que ω est éloigné de ω_0 . Lorsque ω est proche de ω_0 , on assiste à des oscillations de plus grande amplitude. Cette amplitude est d'autant plus grande que l'amortissement structurel est faible. Si l'on retire la sollicitation extérieure, en fonction de son amortissement, la poutre va arrêter d'osciller plus ou moins rapidement. Il ne s'agit pas d'un oscillateur auto-entretenu et on ne peut dès lors pas parler de synchronisation puisque la structure n'adapte pas sa fréquence d'oscillation à la fréquence de la sollicitation. Elle ne possède pas de source d'énergie interne.

2.5 L'oscillateur de Van der Pol

L'oscillateur de Van der Pol est un oscillateur à amortissement non linéaire proposé par Balthasar Van der Pol dans les années 1920 dans le cadre de ses recherches sur les circuits électriques. Cet oscillateur est représenté mathématiquement par une équation différentielle d'ordre 2 [17, 24] qui s'écrit

$$\ddot{x} - \varepsilon \dot{x}(1 - x^2) + x = 0 \quad (2.5)$$

où x est la variable dynamique étudiée et $\varepsilon > 0$ un paramètre. L'équation (2.5) est l'équation dans le cas d'oscillations libres. Si les oscillations sont forcées, un terme apparaît au membre de droite pour représenter l'excitation extérieure.

Lorsque x est petit, le terme en x^2 est négligeable et (2.5) est une équation différentielle linéaire avec un amortissement négatif $-\varepsilon \dot{x}$. Quand le terme x est grand, le terme en x^2 domine et l'amortissement est positif.

Pour des petites valeurs de ε ($\varepsilon \ll 1$), (2.5) peut être réécrite

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) - y \\ \dot{y} &= x. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Lorsque $\varepsilon = 0$, le système ne dissipe pas d'énergie et la solution est donnée par

$$x = A \cos(t + \phi) \quad (2.7)$$

$$y = A \sin(t + \phi) \quad (2.8)$$

Afin d'obtenir une solution dans le cas où ε est petit, on introduit deux variables u et v qui sont telles que

$$\begin{aligned} u &= x \cos t + y \sin t \\ v &= -x \sin t + u \cos t. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ces variables sont substituées dans le système (2.6), et il vient

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \varepsilon \left(u \cos t - v \sin t - \frac{1}{3}(u \cos t - v \sin t)^3 \right) \cos t \\ \dot{v} &= -\varepsilon \left(u \cos t - v \sin t - \frac{1}{3}(u \cos t - v \sin t)^3 \right) \sin t \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ces deux dernières équations montrent que \dot{u} et \dot{v} sont $\mathcal{O}(\varepsilon)$ et donc que les variables u et v

varient beaucoup moins vite que $\cos t$ et $\sin t$ ($\varepsilon \ll 1$). En intégrant sur t de 0 à 2π , il vient

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{\varepsilon}{8} u [4 - (u^2 + v^2)] \\ \dot{v} &= \frac{\varepsilon}{8} v [4 - (u^2 + v^2)] .\end{aligned}\tag{2.11}$$

Enfin, on peut introduire une dernière variable r qui est telle que $r = \sqrt{u^2 + v^2}$. On obtient alors une autre équation différentielle

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon}{8} r (4 - r^2) .\tag{2.12}$$

Dans le cas où le membre de gauche de cette dernière équation est nul (état stationnaire), il existe une solution $r = 2$ produisant un équilibre stable. Cette solution n'est rien d'autre que l'amplitude de la réponse de l'oscillateur de Van der Pol une fois son cycle limite atteint. Une résolution numérique de (2.6) permet de mieux appréhender cette notion.

La solution de l'équation de Van der Pol est donnée à la Figure 2.9 pour deux jeux de conditions initiales et pour $\varepsilon = 0.15$. Si l'on s'intéresse à la résolution temporelle, on observe que, peu importe les conditions initiales, l'amplitude de la réponse finit par tendre vers 2. Dans le plan de phase, on observe également que peu importe les conditions initiales, la réponse tend vers un cercle de rayon 2 qui est le cycle limite. Suivant les conditions aux limites qui sont imposées, le système tendra plus ou moins vite vers son cycle limite.

L'oscillateur de Van der Pol est un oscillateur auto-entretenu et peut dès lors être utilisé pour modéliser un piéton puisque ce dernier produit son énergie lui-même.

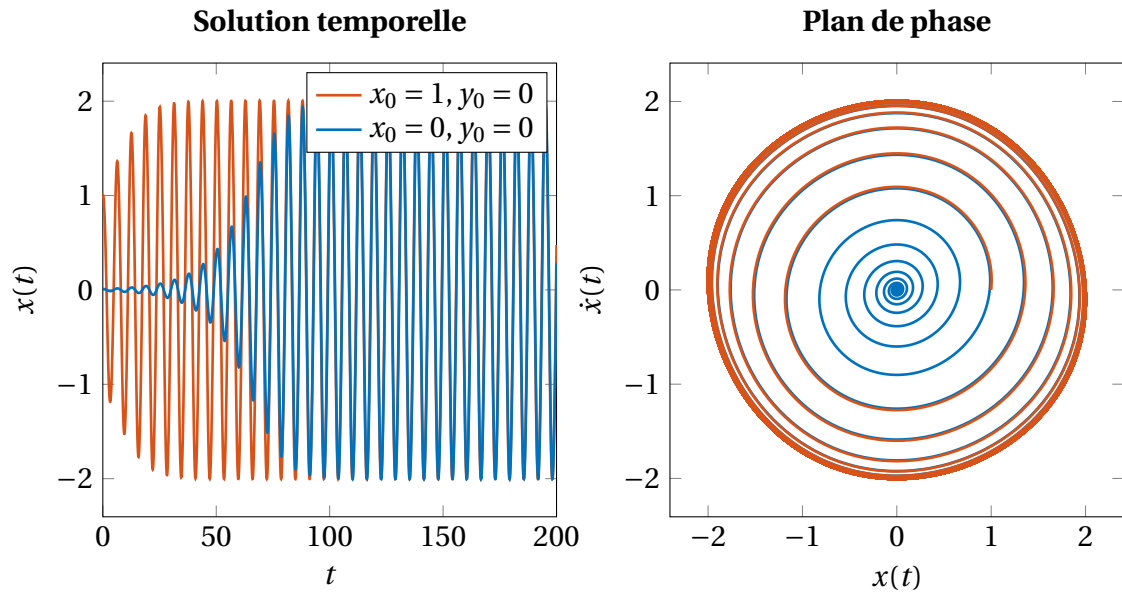


Figure 2.9 – Solution de l'équation de l'oscillateur de Van der Pol (2.6), dans le cas où $\epsilon \ll 1$ ($\epsilon = 0.15$) pour deux jeux de conditions initiales ($x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ et $x_0 = 1, \dot{x}_0 = 0$).

2.6 Classification des modèles d'interaction

Au vu de la quantité de travaux publiés ces dernières années concernant la problématique des passerelle soumise à un chargement de foule, il peut être intéressant de réaliser une classification des différents modèles existants. La philosophie derrière ces modèles n'est pas toujours la même et on peut les répartir selon cinq classes [11]. Une telle classification est présentée de manière non exhaustive à la Table 2.3.

La classification proposée permet de mettre en évidence plusieurs niveaux de couplage et différentes échelles de modélisation. Il peut y avoir un couplage complet entre la foule et la structure comme dans la classe A. On définit une échelle macro où les piétons forment une foule (classes A et B). Les classes C à E s'intéressent au comportement individuel, on parle donc d'échelle micro. La classe C considère un couplage entre le piéton et la structure et s'intéresse donc à l'influence que ces derniers ont l'un sur l'autre. La classe D ne considère pas de couplage mais l'influence du mouvement (imposé) de la structure sur le comportement du piéton. La classe E représente la situation la plus simple où il n'y a pas de couplage et où le sol ne se déplace pas (sol rigide).

Classe	Description
Classe A	Modélisation d'une foule sur un sol en mouvement. Le problème est doublement couplé; les interactions piéton-piéton et piéton-structure sont simultanément prises en compte. La modélisation de la foule peut se faire de deux manières différentes. Une première façon de faire est de la modéliser comme un fluide compressible [3, 36, 37]. On qualifie souvent cette approche d'approche « continue ». Une approche dite « discrète » existe également [6, 25–27].
Classe B	Modélisation d'une foule sur un sol rigide. Le problème est simplement couplé, seules les interactions piéton-piéton sont prises en compte.
Classe C	Modélisation d'un (ou de quelques) piétons(s) sur un sol en mouvement. Le problème est simplement couplé mais contrairement à la classe B, c'est l'interaction piéton-structure qui est analysée et non l'interaction piéton-piéton. Un exemple théorique de cette catégorie a été proposé par Macdonald [19].
Classe D	Modélisation d'un piéton sur un sol dont le mouvement est connu (imposé). Le problème est par conséquent non couplé [11].
Classe E	Modélisation d'un seul piéton sur un sol rigide. Le problème est non couplé [10, 19].

Table 2.3 – Classification et description des modèles d'interaction piéton-structure.

2.7 Mesures d'atténuation

Le guide du Sétra [31] propose une méthodologie pour évaluer le comportement vibratoire des passerelles piétonnes. Il définit différentes classes de passerelles (de I à IV) et différents niveaux de confort à adopter. Ensuite, en fonction de l'accélération de la passerelle sous chargement dynamique, il convient de vérifier si les critères de confort sont bel et bien rencontrés. Dans le cas contraires, plusieurs solutions peuvent être envisagées.

Une première solution peut être de modifier les fréquences propres des modes en question en jouant sur la raideur de la structure notamment. Ainsi, on peut tenter que les fréquences propres de la passerelle se situent en dehors de la plage des fréquences du chargement dynamique. Cette mesure est généralement envisagée à l'étape de dimensionnement. Elle semble toutefois compliquée à mettre en œuvre vu qu'elle suggère d'augmenter la raideur de la structure sans modifier sa masse.

Une autre solution peut être d'installer des amortisseurs sur la passerelle. Cette solution a notamment été adoptée sur le London Millenium Bridge [6] ou encore sur la Belle Liégeoise.

C'est probablement l'approche la plus courante.

Enfin, Venuti et Bruno [35] se sont inspirés des travaux réalisés en ingénierie du vent pour atténuer les vibrations dues aux phénomènes de détachement de tourbillons (*VIVs*, *Vortex-Induced-Vibrations*). Puisque l'on peut modéliser une foule comme un fluide compressible, que l'on assiste à un phénomène de synchronisation entre la foule et la structure comme dans le cas des *VIVs*, ils ont décidé de pousser l'analogie un pas plus loin. Le principe est qu'en modifiant la largeur de la travée par endroit, en ajoutant des obstacles ponctuels pour les piétons, il est possible de modifier la densité de la foule et ainsi la longueur de pas des piétons et leur fréquence, *i.e.*, la sollicitation exercée par la foule sur l'ouvrage. Le but est de réduire l'accélération structurelle en-dessous du seuil de perception de 0.1 m/s^2 [31] en jouant sur l'interaction piéton-piéton. Cette méthode n'est pas efficace si les vibrations latérales ont lieu dans un contexte de marche libre puisque ces mesures n'auront alors pas d'effet sur le comportement des piétons.

3

Étude d'un modèle couplé à un mode de vibration

« When you want to know how things really work, study them when they're coming apart. »

William Gibson

Le but de ce chapitre est d'étudier un modèle couplé piéton-structure en ne considérant qu'un mode de vibration pour la passerelle et un seul piéton. D'après la classification proposée à la Table 2.3 de la section 2.6, un tel modèle appartiendrait à la classe C.

L'approche développée est dans la continuité des travaux de S. Erlicher et al. [10, 11] qui, après une campagne expérimentale sur un sol rigide, ont proposé un oscillateur hybride entre un oscillateur de Van der Pol et un oscillateur de Rayleigh. Ils ont ensuite étudié leur modèle de manière théorique dans le cas où un mouvement harmonique est appliqué à la structure.

Le but ici est d'étudier le comportement du modèle couplé piéton-structure à l'aide d'un simple oscillateur de Van der Pol. Le choix de se ramener à un oscillateur plus basique que le modèle MHVR se justifie par la recherche d'expressions analytiques simples et la volonté de limiter le nombre de paramètres à considérer. L'oscillateur de Van der Pol est souvent choisi pour décrire les phénomènes de synchronisation et a, par ailleurs, déjà été utilisé par Paulissen et Metrikine pour représenter l'interaction foule-structure dans le cas du Millenium Bridge à Londres [25].

La situation étudiée peut être schématisée comme illustré à la Figure 3.1. Le piéton est modélisé par un système à 1 DDL dont la masse m_p est concentrée en un point qui est le centre de gravité du piéton. La structure est représentée par un système à 1 DDL dans sa base modale. On peut supposer qu'il s'agit du premier mode latéral. On considère par ailleurs que le piéton suit une trajectoire rectiligne dans le sens longitudinal de la passerelle.

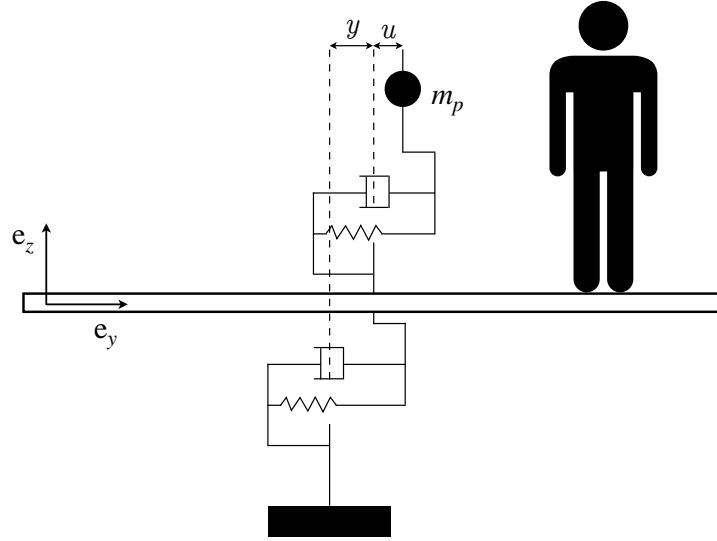


Figure 3.1 – Système à deux degrés de liberté utilisé pour étudier le couplage piéton-structure (adapté de [11]).

Le problème étudié étant un problème de synchronisation, les développements suivants sont similaires à ceux réalisés en ingénierie du vent sur la problématique des VIVs [8].

Ce chapitre commence par une rapide présentation du modèle MHVR développé dans le cas d'un sol rigide. Ensuite, un système couplé piéton-structure est étudié sous forme adimensionnelle à l'aide d'une méthode d'analyse par perturbations sans considérer la forme du mode. Les équations obtenues sont ensuite comparées à la solution obtenue en résolvant la dynamique complète du système couplé. La dernière étape consiste à prendre en compte la déformée modale dans l'analyse.

3.1 Présentation de l'oscillateur MHVR dans le cas d'un sol rigide

Afin de modéliser la force latérale résultant de la marche des piétons, S. Erlicher et al. ont proposé un oscillateur hybride de Van der Pol/Rayleigh modifié (MHVR, *modified hybrid Van der Pol/Rayleigh*) [10]. Leur étude se déroulant sur un sol *rigide*, un tel modèle s'inscrit dans la classe E selon la classification de la Table 2.3. L'équation de cet oscillateur est donnée par

$$\ddot{u}_y - 2\mu\omega_p\dot{u}_y \left(1 - \beta u_y^2 - \frac{\gamma}{\omega_p} \dot{u}_y u_y - \frac{\delta}{\omega_p^2} \dot{u}_y^2 \right) + \omega_p^2 u_y = 0 \quad (3.1)$$

où

- ◇ $u_y(t)$ est le déplacement latéral du centre de masse du piéton ;
- ◇ $\dot{}$ représente la dérivée par rapport au temps ;
- ◇ ω_p est la fréquence angulaire de marche du piéton sur un sol rigide ;
- ◇ μ, β, γ et δ sont les coefficients associés aux termes d'amortissement.

Ce modèle a été obtenu en imposant des conditions fortes sur β et δ : $\beta > 0$ et $\delta \geq 0$ ou $\beta \geq 0$ et $\delta > 0$.

L'oscillateur MHVR est relativement général et il peut facilement être ramené à un oscillateur de Van der Pol en posant $\gamma = \delta = 0$. Ainsi, (3.1) devient

$$\ddot{u}_y - 2\mu\omega_p\dot{u}_y(1 - \beta u_y^2) + \omega_p^2 u_y = 0. \quad (3.2)$$

En posant $\gamma = \beta = 0$, l'oscillateur se ramène à un oscillateur de Rayleigh.

3.2 Système couplé piéton-structure

Si le mouvement latéral de la structure est pris en compte, le phénomène peut être décrit par un système couplé piéton-structure composé d'une équation représentant la dynamique de la structure dans sa base modale et de l'équation représentant la dynamique du piéton (basée sur l'oscillateur de Van der Pol (3.2)).

Les équations du mouvement sont donc données par

$$\begin{cases} M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = \int_0^L F_p(t)\delta(x - vt)\Phi(x) dx \\ m_p\ddot{u}_y + F_p(t) = -m_p\ddot{y} \end{cases} \quad (3.3)$$

où

- ◇ $y(t)$ est le déplacement latéral de la structure ;
- ◇ δ est la fonction de Dirac ;
- ◇ $\Phi(x)$ est la forme du mode ;
- ◇ v est la vitesse d'avancement du piéton selon l'axe longitudinal de la passerelle (supposée constante) ;
- ◇ M est la masse modale ;

- ◇ C est l'amortissement modal;
- ◇ K est la raideur modale;
- ◇ m_p est la masse d'un piéton;
- ◇ $F_p(t) = m_p \left(2\mu\omega_p \dot{u}_y (\beta u_y^2 - 1) + \omega_p^2 u_y \right) = -m_p (\ddot{u}_y + \ddot{y})$ est la force latérale engendrée par le piéton sur la passerelle.

En introduisant l'expression de $F_p(t)$ dans (3.3), il vient

$$\begin{cases} (M + m_p) \ddot{y} + C \dot{y} + Ky = -m_p \ddot{u}_y \Phi(vt) \\ \ddot{u}_y + 2\mu\omega_p \dot{u}_y (\beta u_y^2 - 1) + \omega_p^2 u_y = -\ddot{y}. \end{cases} \quad (3.4)$$

La masse d'un seul piéton étant négligeable devant celle de la passerelle, le système précédent peut être réécrit

$$\begin{cases} M \ddot{y} + C \dot{y} + Ky = -m_p \ddot{u}_y \Phi(vt) \\ \ddot{u}_y + 2\mu\omega_p \dot{u}_y (\beta u_y^2 - 1) + \omega_p^2 u_y = -\ddot{y}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Dans la suite des développements, on suppose un mode $\Phi(x) = 1$. L'influence de la forme du mode sera prise en compte à la section 3.3.

3.2.1 Mise sous forme adimensionnelle

Le système (3.5) peut être adimensionnalisé en introduisant un temps caractéristique $t^* = 1/\omega_s$ où ω_s est la pulsation propre de la structure, un déplacement structurel caractéristique y^* et un déplacement caractéristique du piéton u^* . Les grandeurs adimensionnelles suivantes peuvent ensuite être définies

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t}{t^*} \\ \mathcal{Y}(\tau) &= \frac{y[t(\tau)]}{y^*} \\ \mathcal{U}(\tau) &= \frac{u_y[t(\tau)]}{u^*} \end{aligned} \quad (3.6)$$

représentant respectivement un temps, un déplacement structurel et un déplacement de piéton adimensionnel.

D'autres grandeurs, comme la pulsation propre ω_s et le coefficient d'amortissement ξ de la structure, permettant d'obtenir une forme adimensionnelle des équations sont également

introduites

$$\begin{aligned}\omega_s^2 &= \frac{K}{M} \\ \xi &= \frac{C}{2M\omega_s} \\ m_0 &= \frac{m_p}{M} \\ \Omega &= \frac{\omega_p}{\omega_s}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

En introduisant ces paramètres dans le système (3.5), il vient après quelques développements

$$\begin{cases} \mathcal{Y}'' + 2\xi\mathcal{Y}' + \mathcal{Y} = -m_0 \frac{u^*}{y^*} \mathcal{U}'' \\ \mathcal{U}'' + 2\mu\Omega\mathcal{U}'(\beta u^{*2}\mathcal{U}^2 - 1) + \Omega^2\mathcal{U} = -\frac{y^*}{u^*} \mathcal{Y}'' \end{cases}\tag{3.8}$$

où l'apostrophe définit les dérivées par rapport au temps adimensionnel τ .

Il reste à fournir une définition adéquate aux déplacements caractéristiques y^* et u^* introduits précédemment. Un choix naturel pour u^* est de choisir $u^* = 1/\sqrt{\beta}$ de telle sorte que le produit de β et u^{*2} apparaissant dans (3.8) soit égal à 1. Le déplacement structural caractéristique y^* est choisi de telle sorte que le ratio y^*/u^* apparaissant au membre de droite de la deuxième équation de (3.8) soit petit. En choisissant $y^* = \mu u^* = \mu/\sqrt{\beta}$, le rapport multipliant l'accélération de la structure dans la deuxième équation est un petit nombre. Cette définition permet d'obtenir un second membre relativement petit et donc un léger couplage entre les équations, condition requise dans le cadre de l'étude d'un problème de synchronisation [28].

Dès lors, la version adimensionnelle du système (3.3) est donnée par

$$\begin{cases} \mathcal{Y}'' + 2\xi\mathcal{Y}' + \mathcal{Y} = -\mu\mathcal{M}_0\mathcal{U}'' \\ \mathcal{U}'' + 2\mu\Omega\mathcal{U}'(\mathcal{U}^2 - 1) + \Omega^2\mathcal{U} = -\mu\mathcal{Y}'' \end{cases}\tag{3.9}$$

où le paramètre $\mathcal{M}_0 \sim 1$ a été défini par

$$\mathcal{M}_0 := \frac{m_0}{\mu^2} = \frac{m_p/M}{\mu^2}.\tag{3.10}$$

Il s'agit donc d'un rapport de deux petits nombres dont la présence est justifiée par l'utilisation d'une analyse par échelle multiple présentée par après. Il contient des informations concernant le rapport des masses et l'amortissement du piéton.

3.2.2 Ordre de grandeur des paramètres du problème

L'ordre de grandeur des différents paramètres intervenant dans (3.9) est donné à la Table 3.1.

Paramètre	Intervalle de variation
μ	$[0.05 - 0.2]$
Ω	$[0.5 - 1.5]$
m_0	$[3 \times 10^{-4} - 2 \times 10^{-3}]$
ξ	$[1 \times 10^{-3} - 1.5 \times 10^{-2}]$
\mathcal{M}_0	$[0.07 - 1]$
\mathcal{D}	$0.5 - 20$

Table 3.1 – Intervalle de variation des paramètres du problème.

Le paramètre μ est un paramètre relatif au piéton et doit être déterminé expérimentalement. Des valeurs ont été données dans le cas d'un sol rigide [10]. Dans un tel cas, ce paramètre est de l'ordre de 0.5. Il est relativement probable que la valeur typique de ce paramètre soit différente dans le cas d'un sol souple et donc d'interaction entre le piéton et la structure. Une campagne de mesures serait nécessaire pour confirmer cette intuition. Dans le cas présent, il va être fait l'hypothèse que ce paramètre est petit (typiquement de l'ordre de 0.1) afin d'utiliser une méthode d'analyse par perturbations et d'aboutir à une expression analytique simple.

Un groupe adimensionnel \mathcal{D} défini par

$$\mathcal{D} = \frac{\mu^2 \mathcal{M}_0}{4\xi^2} \quad (3.11)$$

sera introduit par la suite (section 3.2.4). Les valeurs de ce groupe de paramètres sont discutées ici pour une meilleure organisation du document.

3.2.3 Système d'équations moyennées

Un paramètre ε est introduit dans (3.9) de telle sorte que l'on définit

$$\xi^* = \frac{\xi}{\varepsilon} \quad (3.12)$$

$$\mu^* = \frac{\mu}{\varepsilon} \quad (3.13)$$

qui sont tous deux de l'ordre de 1. La définition de ε sera discutée plus tard. A ce stade, il est juste fait l'hypothèse que ε est petit. Dès lors, le système (3.9) peut être réécrit

$$\begin{cases} \mathcal{Y}'' + 2\varepsilon\xi^* \mathcal{Y}' + \mathcal{Y} = -\varepsilon\mu^* \mathcal{M}_0 \mathcal{U}'' \\ \mathcal{U}'' + 2\varepsilon\mu^* \Omega \mathcal{U}' (\mathcal{U}^2 - 1) + \Omega^2 \mathcal{U} = -\varepsilon\mu^* \mathcal{Y}'' \end{cases} \quad (3.14)$$

On se focalise ici sur une situation de « small mistuning », ce qui signifie que la fréquence de marche du piéton est proche de la fréquence propre de la structure. Ceci peut être formalisé de la manière suivante

$$\Omega = 1 + \varepsilon\delta \quad \Leftrightarrow \quad \delta = \frac{\Omega - 1}{\varepsilon} \quad (3.15)$$

où $\delta \sim 1$ est un paramètre de « detuning » d'ordre 1.

Le système (3.14) est ensuite résolu par une méthode à échelle multiple se basant sur l'ansatz suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\tau; \varepsilon) &= \mathcal{Y}_0[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \varepsilon \mathcal{Y}_1[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \dots \\ \mathcal{U}(\tau; \varepsilon) &= \mathcal{U}_0[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \varepsilon \mathcal{U}_1[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

où \mathcal{Y}_i et \mathcal{U}_i ($i = 0, 1, \dots$) sont de l'ordre de 1. Une échelle de temps lente t^*/ε est introduite, si bien que, la solution recherchée est fonction d'un temps rapide τ et d'un temps lent T défini comme $T = t/(t^*/\varepsilon) = \varepsilon\tau$.

Les développements résultant de l'application de la méthode à échelles multiples sont donnés à l'annexe A. La méthode fait apparaître des termes contenant différentes puissances de ε . Une identification des termes en puissances semblables de ε amène, pour ε^0 ,

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_0 + \mathcal{Y}_0 &= 0 \\ \partial_\tau^2 \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Les solutions de ce système d'équations différentielles homogènes sont données par

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_0 &= R_y(T) \cos(\tau + \varphi(T)) \\ \mathcal{U}_0 &= R_u(T) \cos(\tau + \varphi(T) + \psi(T)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

où $R_y(T)$ et $R_u(T)$ sont des amplitudes lentes et $\psi(T)$ est une phase relative. Ces trois va-

riables satisfont les équations de sécularité (A.11)

$$\begin{cases} R'_y = \frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_0 R_u \sin \psi - \xi^* R_y \\ R'_u = \mu^* \left(R_u - \frac{1}{4} R_u^3 - \frac{1}{2} R_y \sin \psi \right) \\ \varphi' = -\frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_0 \frac{R_u}{R_y} \cos \psi \\ \psi' = \delta + \frac{\mu^*}{2} \left(\mathcal{M}_0 \frac{R_u}{R_y} - \frac{R_y}{R_u} \right) \cos \psi. \end{cases} \quad (3.19)$$

Notons que ce dernier set d'équations comporte quatre équations bien que seulement trois d'entre elles soient nécessaires pour décrire la réponse du système. En effet, la dynamique du système peut être entièrement décrite par les trois variables R_y , R_u et ψ , comme cela sera illustré aux sections suivantes.

3.2.4 Analyse de la phase lente sur le cycle limite

Lorsque le système est dans un état stationnaire, les dérivées de (3.19) s'annulent et il ne reste que les membres de droite de chaque équation. Dès lors, la première de ces relations devient $\frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_0 R_u \sin \psi = \xi^* R_y$ et permet d'écrire le ratio

$$\frac{R_y}{R_u} = \frac{\mu^*}{2\xi^*} \mathcal{M}_0 \sin \psi. \quad (3.20)$$

En introduisant ce ratio dans la troisième relation, il vient après quelques manipulations

$$\xi^* \cot^3 \psi_{LC} + \delta \cot^2 \psi_{LC} + \left(\xi^* - \frac{\mu^{*2}}{4\xi^*} \mathcal{M}_0 \right) \cot \psi_{LC} + \delta = 0 \quad (3.21)$$

qui n'est autre que l'équation de la phase sur le cycle limite. La définition du paramètre ε peut être déduite de l'équation précédente. En effet, en divisant les deux membres par ξ^* , on fait apparaître des termes en $\frac{\delta}{\xi^*}$. Or, en revenant à la définition de δ donnée par (3.15), il vient

$$\frac{\delta}{\xi^*} = \frac{(\Omega - 1)/\varepsilon}{\xi/\varepsilon} = \frac{\Omega - 1}{\xi}. \quad (3.22)$$

Dès lors, il vient $\varepsilon = \xi$ et donc $\xi^* = 1$. L'équation de phase est donc donnée par

$$\cot^3 \psi_{LC} + \delta \cot^2 \psi_{LC} + \left(1 - \frac{\mu^2}{4\xi^2} \mathcal{M}_0 \right) \cot \psi_{LC} + \delta = 0. \quad (3.23)$$

Il peut être opportun de définir dans (3.23) un groupe adimensionnel \mathcal{D} tel que

$$\mathcal{D} := \frac{\mu^2 \mathcal{M}_0}{4\xi^2} = \frac{m_p}{4\xi^2 M}. \quad (3.24)$$

De la définition précédente, il découle que $\mathcal{D} \geq 0$. Ce groupe adimensionnel fait apparaître les principaux paramètres du problème tels que la masse du piéton, la masse modale, le coefficient d'amortissement structural et la fréquence propre de la structure. La définition d'un tel groupe de paramètres permet de simplifier l'étude paramétrique du problème puisque le nombre de paramètres intervenants dans les équations est réduit. Au vu de la définition de \mathcal{D} , on se rend compte que, bien que μ intervienne dans la définition du groupe, il n'a en réalité pas d'influence sur la valeur de celui-ci puisqu'il intervient également dans la définition de \mathcal{M}_0 . La masse du piéton étant petite par rapport à la masse modale de la passerelle, on peut négliger son influence sur \mathcal{D} . Ce groupement de paramètres contient par conséquent majoritairement des informations sur la masse modale de la passerelle et sur son amortissement.

En toute généralité, le polynôme (3.23) possède 3 racines. Néanmoins, seules les racines réelles présentent de l'intérêt. Par la règle des signes de Descartes, on observe qu'il existe 1 ou 3 racines positives lorsque $\delta < 0$ et 1 ou 3 racines négatives lorsque $\delta > 0$. En outre, en utilisant la formule de Cardan, il est possible de démontrer qu'il n'existe qu'une racine réelle au polynôme pour $\mathcal{D} < 1$, peu importe la valeur de δ . Pour $\mathcal{D} > 1$, il existe une ou trois racines réelles à l'équation suivant la valeur de δ .

Ces racines sont données à la Figure 3.2 pour différentes valeurs du paramètre \mathcal{D} . On observe effectivement que lorsque $\mathcal{D} < 1$, il n'y a qu'une seule racine réelle peu importe la valeur de δ . Pour $\mathcal{D} \geq 1$, il existe 1 ou 3 racine(s) réelle(s) en fonction de la valeur de δ .

Plutôt que de s'intéresser aux expressions des racines de l'équation de phase (3.23) qui sont relativement longues à lire et à écrire, on peut plutôt focaliser notre attention sur des solutions approchées. En particulier, on peut rechercher une expression permettant d'exprimer les petites racines du polynôme (3.23) ($|\cot \psi| \ll 1$), ce cas de figure correspondant au phénomène de lock-in et une phase relative $\psi \simeq \pm \frac{\pi}{2}$. Ainsi en négligeant l'effet des termes en $\cot^2 \psi$ et $\cot^3 \psi$, il vient

$$\cot \psi \simeq \frac{-\delta}{1 - \mathcal{D}} \quad (3.25)$$

Cette solution approchée est donnée par les traits discontinus à la Figure 3.2.

Il ressort de l'analyse de la Figure 3.2 que pour qu'il y ait lock-in ($\cot \psi \simeq 0$ et donc $\psi \simeq \pm \frac{\pi}{2}$),

il faut que le detuning δ soit proche de 0. Dans ces conditions, il y a un échange d'énergie maximum entre l'oscillateur et la structure.

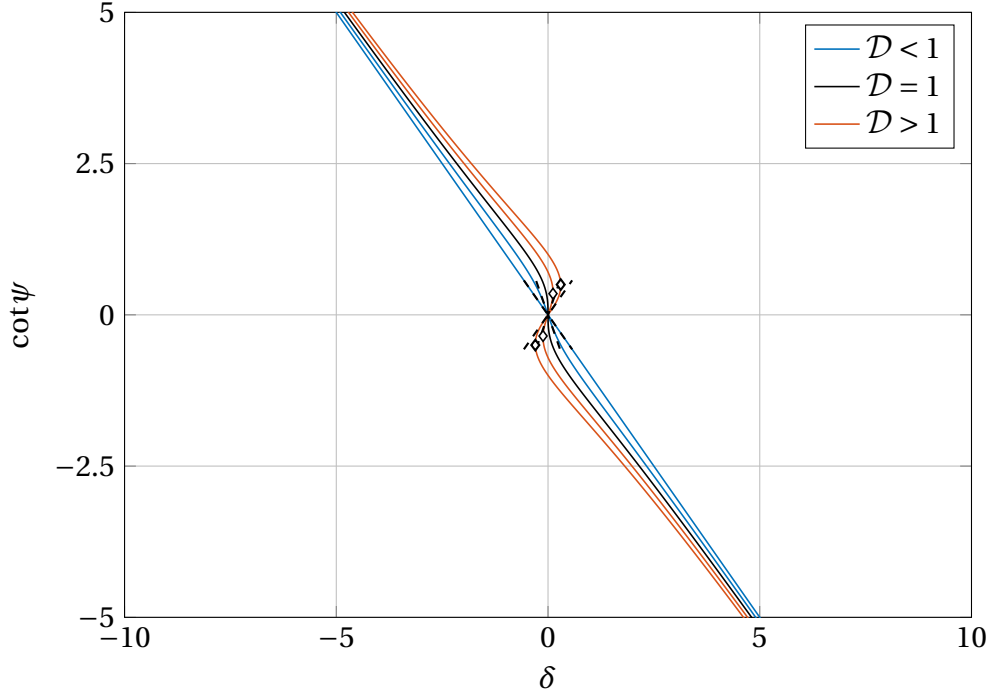


Figure 3.2 – Différence de phase entre le piéton et la passerelle à l'état stationnaire pour $\mathcal{D} = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$. Les traits discontinus représentent la solution approchée.

3.2.5 Amplitude de la réponse sur le cycle limite

Une fois la différence de phase déterminée en résolvant (3.23) les amplitudes R_y et R_u peuvent être obtenues en combinant les deux premières équations de (3.19). On obtient alors l'égalité suivante

$$R_y \sin \psi = \frac{\mu}{2\xi} \mathcal{M}_0 R_u \sin^2 \psi = 2R_u - \frac{1}{2} R_u^3. \quad (3.26)$$

Dès lors, il vient

$$\begin{aligned} R_u &= \sqrt{4 - \mathcal{M}_0 \frac{\mu}{\xi} \sin^2 \psi} \\ R_y &= \frac{\mu}{2\xi^{3/2}} \mathcal{M}_0 |\sin \psi| \sqrt{4\xi - \mathcal{M}_0 \mu \sin^2 \psi} \end{aligned} \quad (3.27)$$

ou encore, en faisant intervenir le groupe adimensionnel \mathcal{D} ,

$$\begin{aligned} R_u &= 2\sqrt{1 - \frac{\xi}{\mu}\mathcal{D}\sin^2\psi} \\ R_y &= 4\frac{\xi}{\mu}\mathcal{D}|\sin\psi|\sqrt{1 - \frac{\xi}{\mu}\mathcal{D}\sin^2\psi}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ainsi, l'amplitude des vibrations de la structure à l'état stationnaire dépend du coefficient d'amortissement ξ , du couplage entre le piéton et la structure par le biais du paramètre μ , du groupe \mathcal{D} et de la phase relative ψ . Au plus le groupement \mathcal{D} est grand, au plus la structure est légère et/ou peu amortie, au plus l'amplitude des vibrations structurelles sera grande.

Au vu de l'expression des deux amplitudes (3.28), il apparait une condition sur \mathcal{D} garantissant que ces dernières soient réelles, qui est telle que

$$\mathcal{D} < \frac{\mu}{\xi}. \quad (3.29)$$

En revenant aux variables dimensionnelles, cette condition s'écrit

$$\frac{m_p}{4\xi\mu M} < 1 \quad (3.30)$$

et exprime simplement que pour qu'il existe une solution, le produit du coefficient d'amortissement ξ , du paramètre μ et de la masse modale M est supérieur à la masse du piéton.

L'amplitude des deux réponses en fonction du detuning δ est donnée à la Figure 3.3 pour différentes valeurs du groupe adimensionnel \mathcal{D} . Pour $\delta = 0$, la courbe de l'amplitude de la réponse structurelle R_y atteint son maximum. Lorsque \mathcal{D} est inférieur ou égal à 1, la courbe a une forme de chapiteau plus ou moins pointu. Si \mathcal{D} est supérieur à 1, la courbe forme une boucle au-dessus de $\delta = 0$. Ces différences de comportement peuvent être mises sur le compte du nombre de racines à l'équation de phase (3.23). En effet, lorsque \mathcal{D} est inférieur à 1, il n'existe qu'une seule racine réelle pour $\delta = 0$ alors qu'il en existe 3 quand \mathcal{D} est supérieur à 1 pour le même detuning. Pour un detuning important, l'amplitude de la réponse structurelle tend vers 0, peu importe la valeur de \mathcal{D} . Enfin, pour $\mathcal{D} = 0$, on obtient une droite horizontale d'ordonnée égale à 0, cette situation correspondant au cas où il n'y a pas de piéton sur la passerelle. Ce résultat, bien qu'évident, permet de vérifier que les développements fournissent des résultats cohérents.

On peut noter que la courbe relative à l'amplitude du piéton atteint un minimum pour $\delta = 0$ et tend vers 2 pour un detuning important. Cette amplitude maximale de 2 est en accord

avec la théorie de l'oscillateur de Van der Pol. Ce minimum est d'autant plus petit que \mathcal{D} est grand. Or, un grand \mathcal{D} implique une amplitude importante de la réponse de la structure. On voit ici l'impact de la réponse structurale sur le comportement du piéton. On note ici aussi un type de courbe différent suivant que \mathcal{D} est inférieur ou supérieur à 1. Lorsque $\mathcal{D} = 0$, on observe une fois de plus une droite horizontale, cette fois-ci d'ordonnée égale à 2. Cette valeur correspond à l'amplitude de la réponse sur le cycle limite pour un oscillateur de Van der Pol libre comme présenté à la section 2.5.

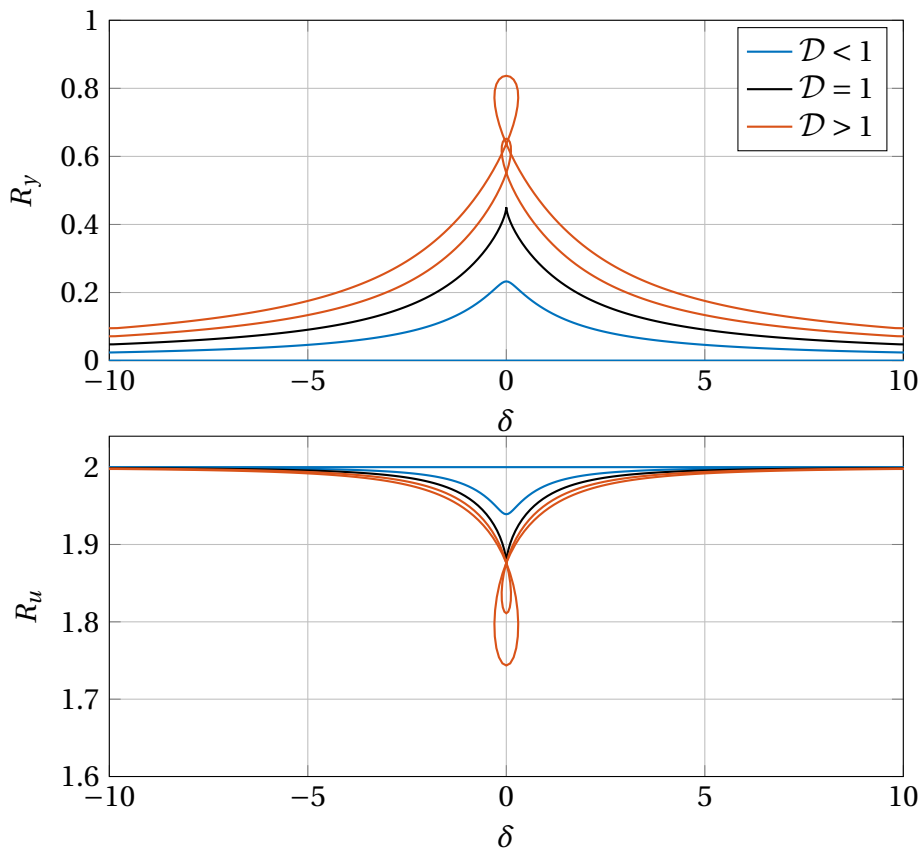


Figure 3.3 – Amplitude maximale de la réponse sur le cycle limite pour différentes valeurs du groupe adimensionnel \mathcal{D} ($\mathcal{D} = \{0, 0.05, 1, 1.5, 2\}$).

3.2.6 Période du cycle limite

La période du cycle limite est obtenue à partir des solutions du système d'équations différentielles homogènes données par (3.18), à savoir $\mathcal{Y}_0 = R_y(T) \cos(\tau + \varphi(T))$ et $\mathcal{U}_0 = R_u(T) \cos(\tau + \varphi(T) + \psi(T))$. Une fois le cycle limite atteint, les variables R_y , R_u et ψ ont convergé vers une solution stationnaire et deviennent constantes pour tout T . Elles satisfont en parti-

culier (3.20). La phase additionnelle $\varphi(T)$ quant à elle satisfait l'équation

$$\varphi' = -\frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_0 \frac{R_u}{R_y} \cos \psi. \quad (3.31)$$

En intégrant cette dernière équation, il vient

$$\begin{aligned} \varphi(T) &= \varphi_0 - \left(\frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_0 \frac{R_u}{R_y} T \cos \psi \right)_{LC} \\ &= \varphi_0 - \xi^* T \cot \psi_{LC} \\ &= \varphi_0 - \xi^* \varepsilon \tau \cot \psi_{LC} \\ &= \varphi_0 - \xi \tau \cot \psi_{LC} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dès lors, en substituant dans l'expression de \mathcal{Y}_0 et \mathcal{U}_0 , la période pour une révolution complète sur le cycle limite est donnée par

$$T_{LC} = \frac{2\pi}{1 - \xi \cot \psi_{LC}} \simeq 2\pi (1 + \xi \cot \psi_{LC}) \quad (3.33)$$

avec un développement en série de Taylor au premier ordre. Cette période est la même pour \mathcal{Y}_0 et \mathcal{U}_0 puisque le système évolue le long d'un cycle limite unique.

Pour un petit detuning ($|\delta| \ll 1$) la période vaut presque 2π . Elle est supérieure à 2π lorsque $\delta < 0$ ($\cot \psi > 0$, cf. Figure 3.2) et inférieure à 2π lorsque $\delta > 0$. Cet allongement ou rétrécissement de la période causé par la différence entre la fréquence propre de la passerelle et la fréquence de marche du piéton est modulé par l'amortissement structural et le déphasage sur le cycle limite ψ_{LC} .

3.2.7 Validation des équations moyennées

Afin de valider les équations moyennées développées précédemment, le système (3.9) est résolu jusqu'à obtention d'un état stationnaire. Puisque l'on résout dans ce cas la dynamique rapide du problème, le pas de temps $d\tau$ doit être suffisamment petit. Il doit en fait être considérablement plus petit que la période de la réponse (qui vaut approximativement 2π). Les résultats obtenus sont ensuite comparés avec ceux obtenus par la solution analytique (3.19). Avec cette approche, le pas de temps utilisé peut être plus grand puisque l'on résout la dynamique lente du système. Les deux systèmes sont résolus à l'aide du solveur ODE45 implémenté dans Matlab et de ses paramètres par défaut [20].

Deux sets de données ont été utilisés pour les simulations numériques permettant de valider les équations moyennées. Les données utilisées pour cette étape de validation sont données

à la Table 3.2.

Paramètres du modèle	Set de données 1	Set de données 2
ξ	$\xi = 0.006$	$\xi = 0.01$
μ	$\mu = 0.05$	$\mu = 0.05$
\mathcal{M}_0	$\mathcal{M}_0 = 0.3$	$\mathcal{M}_0 = 0.1$
\mathcal{D}	$\mathcal{D} = 4.8$	$\mathcal{D} = 0.6$

Table 3.2 – Données numériques utilisées pour la validation des équations moyennées.

Les solutions obtenues pour ces deux jeux de données sont disponibles aux Figures 3.4 et 3.5 pour plusieurs valeurs de Ω . Les lignes continues correspondent à la dynamique rapide (système original) alors que les lignes discontinues correspondent à la dynamique lente (solution des équations moyennées). Un zoom sur la solution à l'état stationnaire est effectué pour $\tau \in [1100, 1120]$. La phase instantanée de chaque signal est calculée via la transformée de Hilbert et la différence de phase (phase relative) entre $\mathcal{Y}(\tau)$ et $\mathcal{U}(\tau)$ est ensuite calculée.

Dans le cas du premier jeu de données (Figure 3.4), on note dans un premier temps une grande amplitude de vibration de la passerelle (de l'ordre de 1.5) pour $\tau \in [300 - 400]$ dans le cas $\Omega = 1$. Cette amplitude maximale correspond au maximum de la courbe de R_y en fonction de Ω . Il y est associé un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ entre le piéton et la passerelle. Cependant, cette solution ne correspond pas à l'amplitude de vibration une fois le cycle limite atteint (état stationnaire), donnée par (3.28). Cette amplitude sur le cycle limite est indiquée par un cercle sur le graphique de R_y en fonction de Ω . Pour $\Omega = 1$, on peut voir que l'amplitude de la réponse stationnaire est de l'ordre de 1. C'est ce que l'on observe également sur la simulation temporelle pour des valeurs de τ supérieures à 1000. Sur le cycle limite, la phase ne vaut plus $\frac{\pi}{2}$ mais est plutôt de l'ordre de 0.5. Ces observations s'expliquent par le fait que le groupe \mathcal{D} est supérieur à 1 dans ce jeu de données et il existe donc 3 racines réelles qui sont solutions de l'équation de phase (3.23). L'une de ces racines est égale à $\pm \frac{\pi}{2}$ (correspondant à $\cot \psi = 0$) mais celle-ci semble être une solution instable. Dès lors, le système tend vers une des deux autres racines qui sont elles non-nulles et égales à un signe près. Une autre manière de voir les choses est que l'amortissement d'une structure est issu de forces de viscosité qui nécessitent un certain temps avant de se développer pleinement. Au début la structure est peu amortie et l'amplitude des vibrations grandit assez rapidement. L'amortissement se mettant petit à petit en place, l'amplitude des vibrations diminue et tend vers une valeur stationnaire. Pour des valeurs de Ω s'éloignant de l'unité, les vibrations dans la structure sont de moins en moins importantes et on observe un déphasage quasi nul entre le piéton et la passerelle. Ce résultat semble assez logique puisque la fréquence d'excitation s'éloigne de plus en plus de

la fréquence propre de la structure au fur et à mesure que Ω s'éloigne de l'unité. Pour un de-tuning important, on avait pu observer à la section 3.2.4 qu'il n'existait qu'une seule racine à l'équation de phase et ce, peu importe le groupement \mathcal{D} . Cette constatation se matérialise dans la simulation temporelle par un déphasage tendant très rapidement vers 0.

La situation est quelque peu différente dans le cas du second jeu de données (Figure 3.5). La première observation est notamment que l'amplitude maximale des vibrations est plus petite dans ce cas-ci. Ce fait peut être attribué au paramètre \mathcal{M}_0 qui est trois fois plus petit dans ce second jeu de données. En revenant à la définition de \mathcal{M}_0 (donnée par (3.10)), cela signifierait une masse modale trois fois plus grande dans cet exemple, toutes autres choses restant égales. Par ailleurs, l'amortissement est également plus important pour ce data set. On note également une forme différente de la solution analytique de R_y puisque cette dernière est désormais en forme de chapiteau et plus en forme de boucle. Ceci est directement lié au fait que le groupe adimensionnel \mathcal{D} , lié au coefficient d'amortissement et à la masse modale, est désormais inférieur à 1 ($\mathcal{D} = 0.58$). Ainsi, le maximum de cette courbe correspond à l'amplitude des vibrations sur le cycle limite. La solution de l'équation de phase est unique et vaut $\pm \frac{\pi}{2}$ dans le cas où $\Omega = 1$, comme on peut l'observer sur les trois graphiques de la dernière rangée.

Dans les deux cas étudiés, la courbe relative aux équations moyennées capture assez bien l'enveloppe de la dynamique rapide. On peut tout de même noter que l'approche par perturbation est un peu moins précise lorsque l'on observe des variations assez brusques d'amplitude. C'est notamment le cas pour le jeu de données 1 lorsque $\Omega = 1$. En effet, pour $\tau \in [400 - 600]$, on observe une décroissance assez rapide de l'amplitude R_y que l'approche moyennée ne capture pas parfaitement. Cette petite imprécision n'est pas dramatique puisqu'il s'agit là de la réponse transitoire.

Notons par ailleurs que la précision de l'enveloppe est directement liée au paramètre μ . Pour de grandes valeurs de μ (supérieures à 0.2), on observe un décalage entre l'approche moyennée et l'approche par simulations numériques. Une simulation du premier data set avec $\mu = 0.2$ est donnée en annexe à la Figure E.1 pour information.

Finalement, la période et la fréquence de la réponse sur le cycle limite sont illustrées à la Figure 3.6 pour les deux jeux de données. La période relative à la simulation temporelle est obtenue en calculant le temps entre deux maxima successifs dans la réponse stationnaire des signaux temporels $\mathcal{V}(\tau)$ et $\mathcal{U}(\tau)$. La courbe analytique est donnée par (3.33). Les données sont représentées pour un large intervalle de Ω , en incluant les valeurs particulières utilisées précédemment, à savoir $\Omega = \{0.85, 0.9, 0.95, 0.99, 1\}$.

Une première remarque que l'on peut formuler au sujet de ces courbes concerne le temps de calcul nécessaire les pour générer. En effet, les points obtenus par simulation nécessitent de simuler la dynamique rapide du système pour chaque valeur de Ω (41 dans le cas présent) jusqu'à atteindre une solution stationnaire, ce qui nécessite un temps de calcul assez important. Avec l'approche moyennée, la courbe est obtenue de manière quasi immédiate à partir de (3.33).

La fréquence est simplement calculée comme étant l'inverse de la période obtenue précédemment. Pour des valeurs de Ω éloignées de l'unité, les points sont alignés sur une droite ce qui indique que l'oscillateur n'adapte pas sa fréquence à celle des oscillations structurelles. Plus on se rapproche de la valeur critique $\Omega = 1$, plus les points s'écartent de cette droite, il y a un ajustement de la fréquence de l'oscillateur. Cet écart est plus important pour le premier jeu de données pour lequel $\mathcal{D} > 1$. Concernant la période sur le cycle limite, pour $\Omega = 1$, on s'attend à ce que celle-ci soit égale à 2π au vu de l'expression (3.33). C'est le cas pour le premier data set mais pas pour le second. Une fois de plus, ceci est lié au nombre de racines à l'équation de phase. Pour $\mathcal{D} < 1$, il existe une racine unique telle que $\cot \psi = 0$ et donc la période des oscillations sur le cycle limite est strictement égale à 2π .

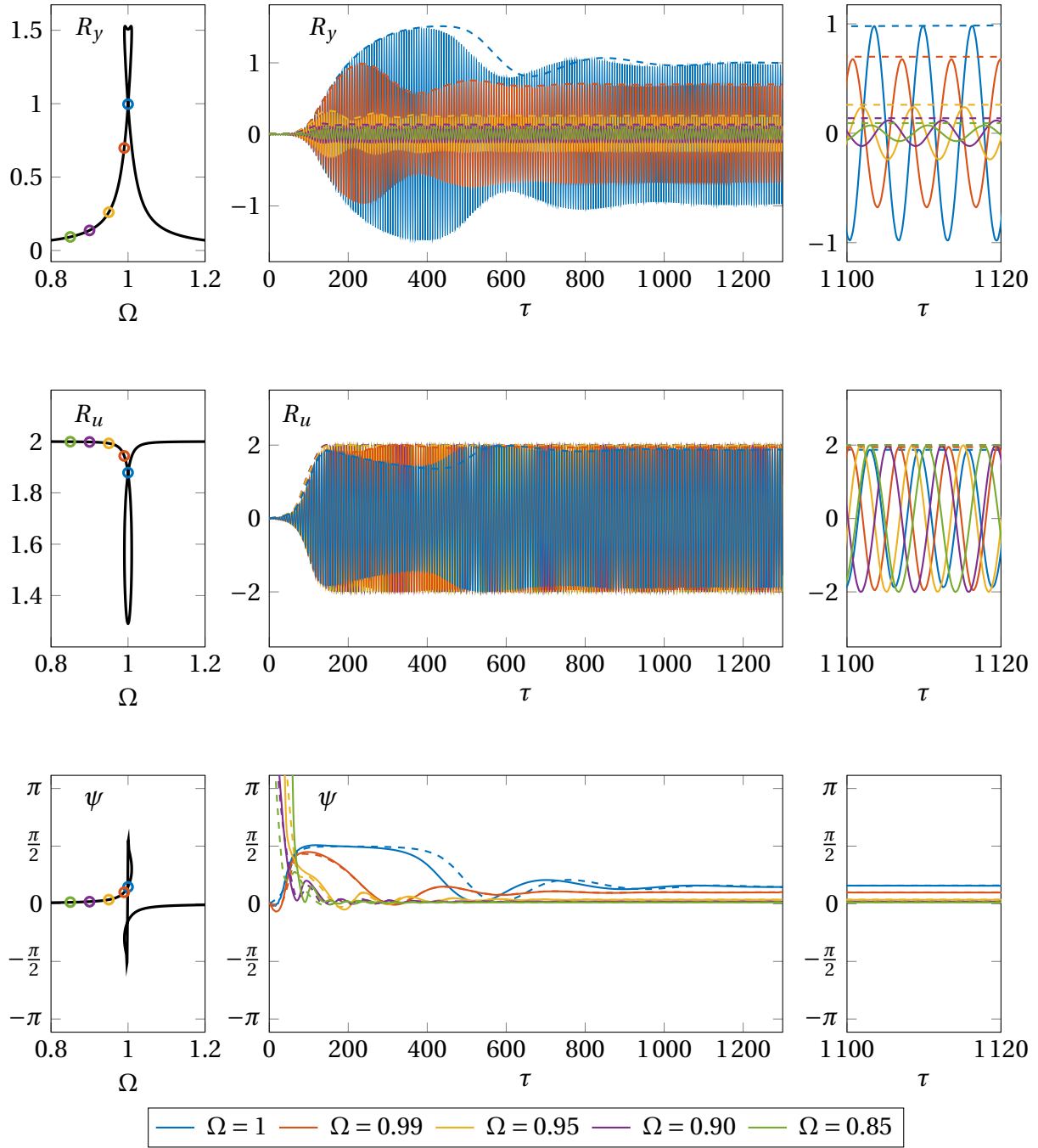


Figure 3.4 – Validation des équations moyennées pour le système couplé pour différentes valeurs de Ω (data set 1).

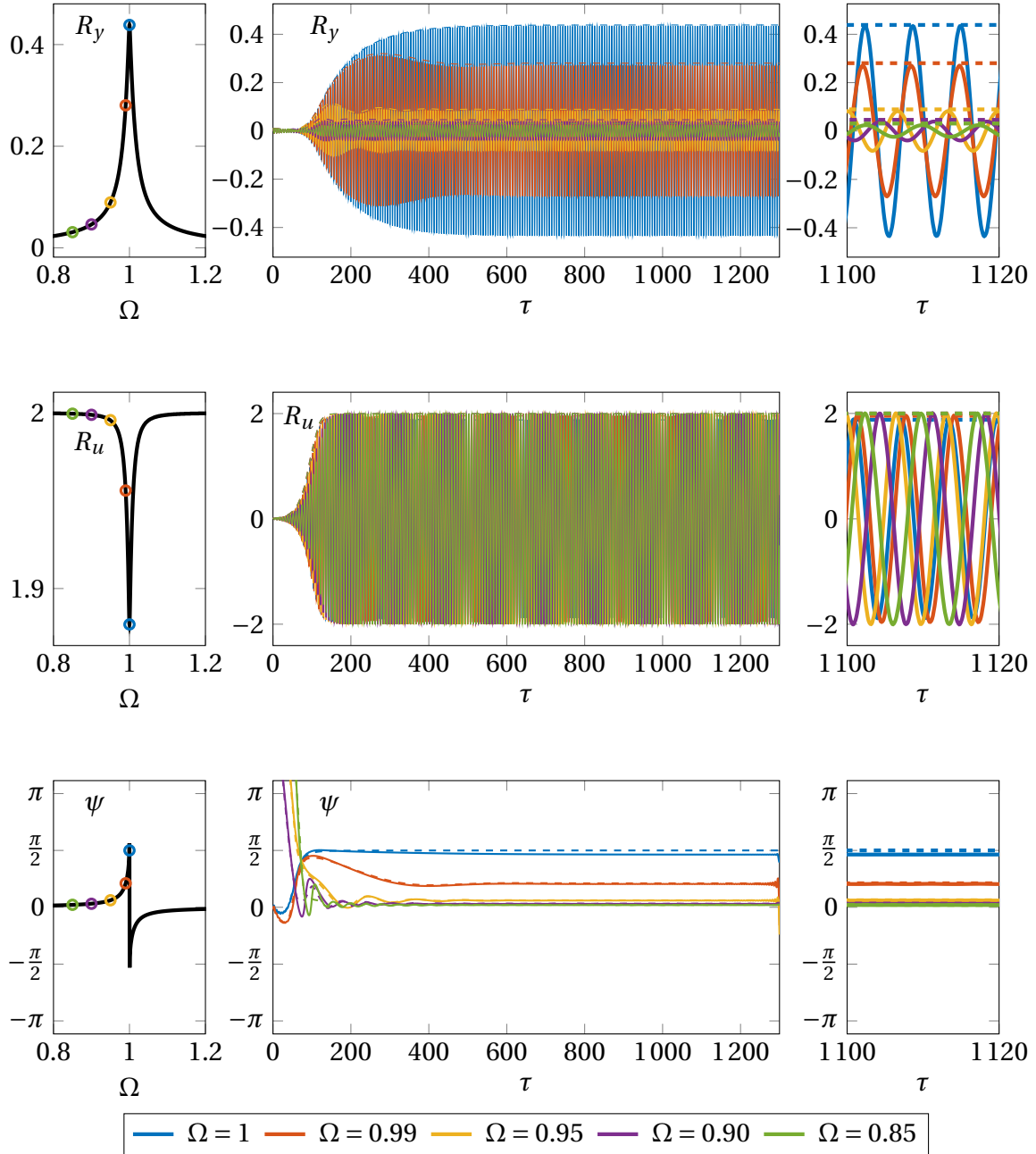


Figure 3.5 – Validation des équations moyennées pour le système couplé pour différentes valeurs de Ω (data set 2).

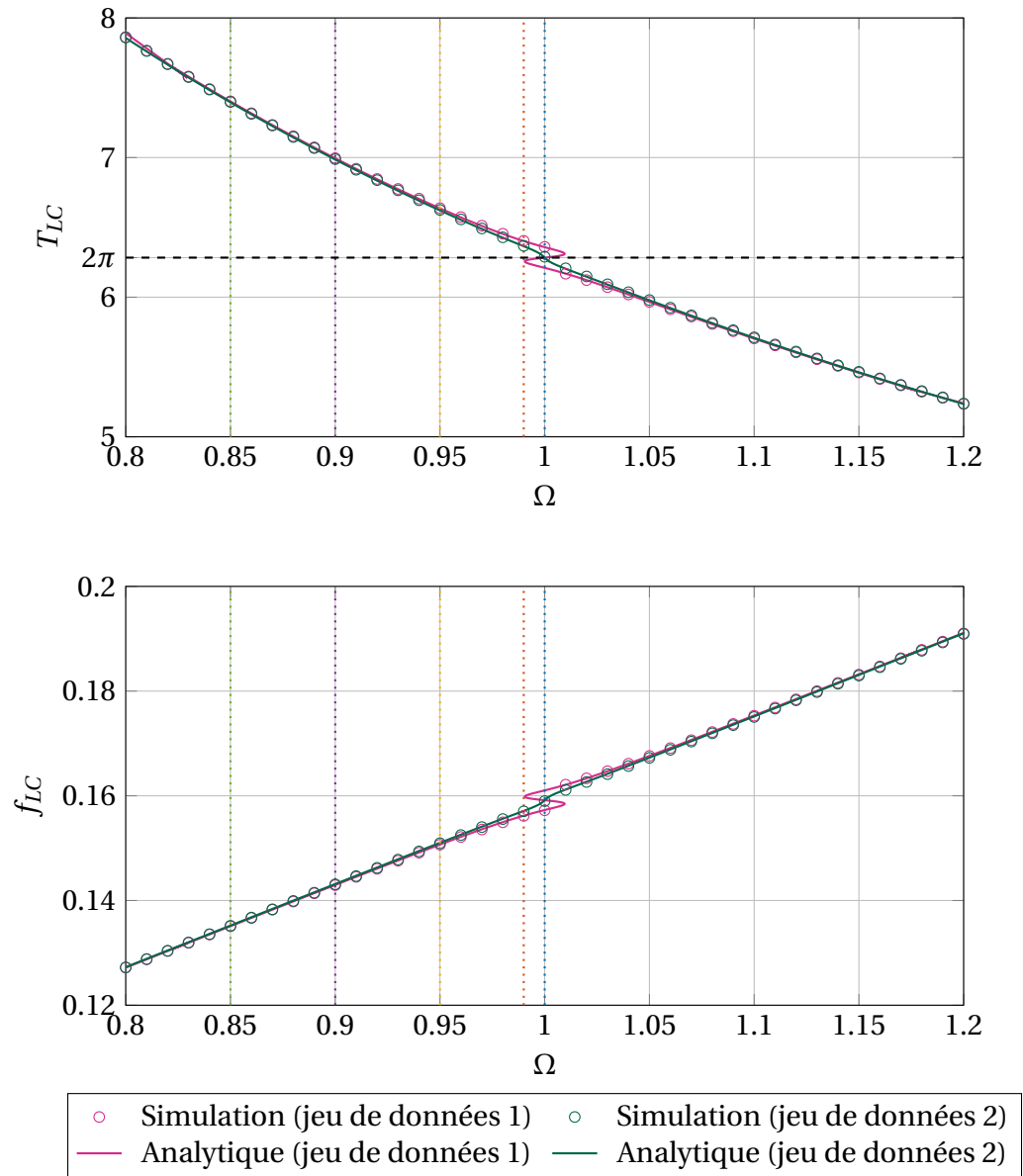


Figure 3.6 – Période et fréquence de la réponse sur le cycle limite pour les deux jeux de données utilisés.

3.3 Prise en compte de la déformée modale

Dans les développements précédents, la forme du mode n'a pas été prise en compte. Dès lors, la position du piéton n'avait pas d'influence sur la réponse de la passerelle. De manière légitime, l'étape suivante du raisonnement est d'étudier l'influence de la déformée modale sur les développements.

3.3.1 Système d'équations moyennées prenant en compte la déformée modale

Le système de base donné par l'expression (3.5) est, pour rappel,

$$\begin{cases} M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = -m_p\ddot{u}_y\Phi(vt) \\ m_p\ddot{u}_y + 2\mu\omega_p\dot{u}_y(\beta u_y^2 - 1) + \omega_p^2 u_y = -m_p\ddot{y}. \end{cases} \quad (3.34)$$

On suppose dès à présent une forme sinusoïdale pour le mode, de telle sorte que

$$\Phi(vt) = \sin\left(\frac{\pi vt}{L}\right). \quad (3.35)$$

Il faut ensuite adimensionnaliser le système (3.34) de manière similaire à ce qui a été fait précédemment. En introduisant le temps adimensionnel τ dans l'expression de la forme du mode, il vient

$$\begin{aligned} \Phi(v\tau) &= \sin\left(\frac{\pi v}{L} \frac{\tau}{\omega_s}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi v}{L} \frac{\tau T_s}{2\pi}\right) \\ &= \sin\left(\frac{v T_s}{2L} \tau\right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

où T_s est la période propre et L la longueur de la passerelle. En partant de l'hypothèse (raisonnable) que $T_s \ll \frac{2L}{v}$, on définit un nouveau paramètre adimensionnel \mathcal{V} qui est au plus de l'ordre de 1, tel que

$$\mathcal{V} = \frac{v T_s}{2\xi L}. \quad (3.37)$$

Dès lors, l'expression de la forme du mode fait apparaître l'échelle de temps lente $T = \varepsilon\tau$ et est donnée par

$$\Phi(\tau) = \sin(\mathcal{V}\xi\tau) = \sin(\mathcal{V}\xi^*\varepsilon\tau). \quad (3.38)$$

Finalement, la version adimensionnelle de (3.34) est donnée par

$$\begin{cases} \mathcal{Y}'' + 2\varepsilon\xi^* \mathcal{Y}' + \mathcal{Y} = -\varepsilon\mu^* \mathcal{M}_0 \mathcal{U}'' \sin(\mathcal{V}\xi^* \varepsilon\tau) \\ \mathcal{U}'' + 2\varepsilon\mu^* \Omega \mathcal{U}' (\mathcal{U}^2 - 1) + \Omega^2 \mathcal{U} = -\varepsilon\mu^* \mathcal{Y}'' \end{cases} \quad (3.39)$$

et est, assez logiquement, semblable au système obtenu auparavant où la forme du mode avait été négligée.

En suivant la même logique de développement qu'aux sections précédentes (voir Annexe B), on obtient les équations moyennées suivantes

$$\begin{cases} R_y' = \frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_0 R_u \sin(\mathcal{V}\xi^* \varepsilon\tau) \sin\psi - \xi^* R_y \\ R_u' = \mu^* \left(R_u - \frac{1}{4} R_u^3 - \frac{1}{2} R_y \sin\psi \right) \\ \varphi' = -\frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_0 \frac{R_u}{R_y} \sin(\mathcal{V}\xi^* \varepsilon\tau) \cos\psi \\ \psi' = \delta + \frac{\mu^*}{2} \left(\mathcal{M}_0 \sin(\mathcal{V}\xi^* \varepsilon\tau) \frac{R_u}{R_y} - \frac{R_y}{R_u} \right) \cos\psi. \end{cases} \quad (3.40)$$

Ces équations sont relativement semblables à celles obtenues précédemment en (3.19), la seule différence étant que la forme du mode multiplie tous les termes en \mathcal{M}_0 . Cependant, à l'inverse du système obtenu sans prendre en compte la forme modale, on observe ici qu'il n'existe pas de solution stationnaire. En effet, l'échelle de temps $T = \varepsilon\tau$ intervient dans la solution. La situation est donc plus complexe que précédemment puisqu'il n'existe pas de solution analytique simple pour les équations (3.40). Par conséquent, il est nécessaire de simuler la dynamique rapide du système en résolvant (3.39), ce qui rend la compréhension physique plus ardue.

3.3.2 Simulation de la dynamique rapide du système en prenant en compte la forme modale

Le système (3.39) a été résolu pour les jeux de paramètres présentés à la Table 3.3. Plusieurs valeurs du paramètre \mathcal{V} sont données puisque ce paramètre est lié à la vitesse du piéton, elle-même liée à sa fréquence de marche. Les autres paramètres sont les mêmes que ceux utilisés dans le cas où la forme du mode n'était pas prise en compte (Table 3.2).

Les résultats obtenus pour le premier jeu de données sont donnés à la Figure 3.7. Le temps de traversée de la passerelle est représenté par une droite verticale en pointillés pour chaque

Paramètres du modèle	Set de données 1	Set de données 2
ξ	$\xi = 0.006$	$\xi = 0.01$
μ	$\mu = 0.05$	$\mu = 0.05$
\mathcal{M}_0	$\mathcal{M}_0 = 0.28$	$\mathcal{M}_0 = 0.093$
\mathcal{D}	$\mathcal{D} = 4.8$	$\mathcal{D} = 0.58$
$\mathcal{V}(\Omega)$	$\mathcal{V} = \{0.97, 0.96, 0.92, 0.87, 0.83\}$	$\mathcal{V} = \{0.58, 0.57, 0.55, 0.52, 0.50\}$

Table 3.3 – Données numériques la simulation de la dynamique rapide du système tenant compte de la forme du mode. Le paramètre \mathcal{V} est lié au mistuning $\Omega = \{0.85, 0.9, 0.95, 0.99, 1\}$

valeur de Ω . Ce dernier est donné par

$$\tau = k \frac{\pi}{\mathcal{V}\xi} \quad (3.41)$$

pour un mode de forme sinusoïdale, où k est un entier positif représentant le nombre de traversées de la passerelle.

Si l'on s'intéresse d'abord à la courbe de la structure, on observe que l'amplitude de vibration augmente jusqu'à atteindre un maximum local dans le voisinage de la moitié du temps de premier passage. A ce moment le piéton vient de passer par le milieu de la travée. En poursuivant sa traversée, la réponse de la passerelle continue à diminuer jusqu'à atteindre un minimum peu après le temps de premier passage. Si le piéton n'entamait pas de seconde traversée, l'amplitude de la structure serait nulle après un laps de temps correspondant au temps de mémoire. Plus il y a d'amortissement, plus ce temps de mémoire est court. Après le temps de premier passage, le piéton entame immédiatement une seconde traversée et on observe une amplitude maximale de vibration plus importante que lors du premier passage. Durant cette seconde traversée, on observe également que le déphasage entre le piéton et la structure vaut approximativement $-\frac{\pi}{2}$ pour $\Omega = \{0.99, 1\}$ pendant une période assez longue à partir de $\tau = 800$. Ce déphasage de $\pm\frac{\pi}{2}$ correspond au régime résonant ce qui explique les amplitudes importantes observées. En régime résonant, l'amplitude de la réponse est gouvernée par l'inverse de l'amortissement, ce qui explique l'amplitude plus faible observée dans le cas du second jeu de données (Figure 3.8). Lors de l'étude du système avec une déformée modale unitaire, on a pu se rendre compte qu'il existait 3 racines à l'équation de phase lorsque $\mathcal{D} > 1$, ce qui est le cas ici. La racine correspondant à $\psi = +\frac{\pi}{2}$ était instable, c'est probablement la raison pour laquelle on observe ici un déphasage de $+\frac{\pi}{2}$ sur une période relativement courte. La période durant laquelle ce dernier vaut $-\frac{\pi}{2}$ étant plus longue, cela pourrait suggérer que cette racine est plus stable. Le système passant plus de temps dans cette configuration, l'amplitude des vibrations observée est plus importante. Pour les autres

valeurs de Ω , on observe un déphasage de 0 ou de π et une amplitude beaucoup plus faible dans la réponse de la structure. Dans ce cas, le piéton et la structure sont la plupart du temps en opposition de phase.

La réponse du piéton, quant à elle, a une amplitude de 2 quand l'amplitude de vibration de la structure est faible. Cependant, une fois que l'amplitude de la réponse est importante (courbes bleue et rouge), celle du piéton n'est plus constante au cours du temps. En effet, celle-ci oscille autour de 2 au cours de la simulation. Si l'on s'intéresse de plus près à la courbe $\Omega = 1$, on note que lorsque la courbe de la structure atteint un maximum local lors du premier passage du piéton, la réponse de ce dernier atteint un minimum local. A l'inverse, lors de la seconde traversée, l'amplitude de la réponse de la structure atteint un autre maximum local avec un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$, la réponse du piéton atteint également un maximum local.

Dans le cas du second jeu de données, le groupe \mathcal{D} est inférieur à 1 et le comportement global observé est différent. En effet, pour $\Omega = 1$, on observe une amplitude similaire dans la réponse structurelle, peu importe la traversée. Le déphasage est de l'ordre de $+\frac{\pi}{2}$ durant une durée égale à celle durant laquelle il est de l'ordre de $-\frac{\pi}{2}$.

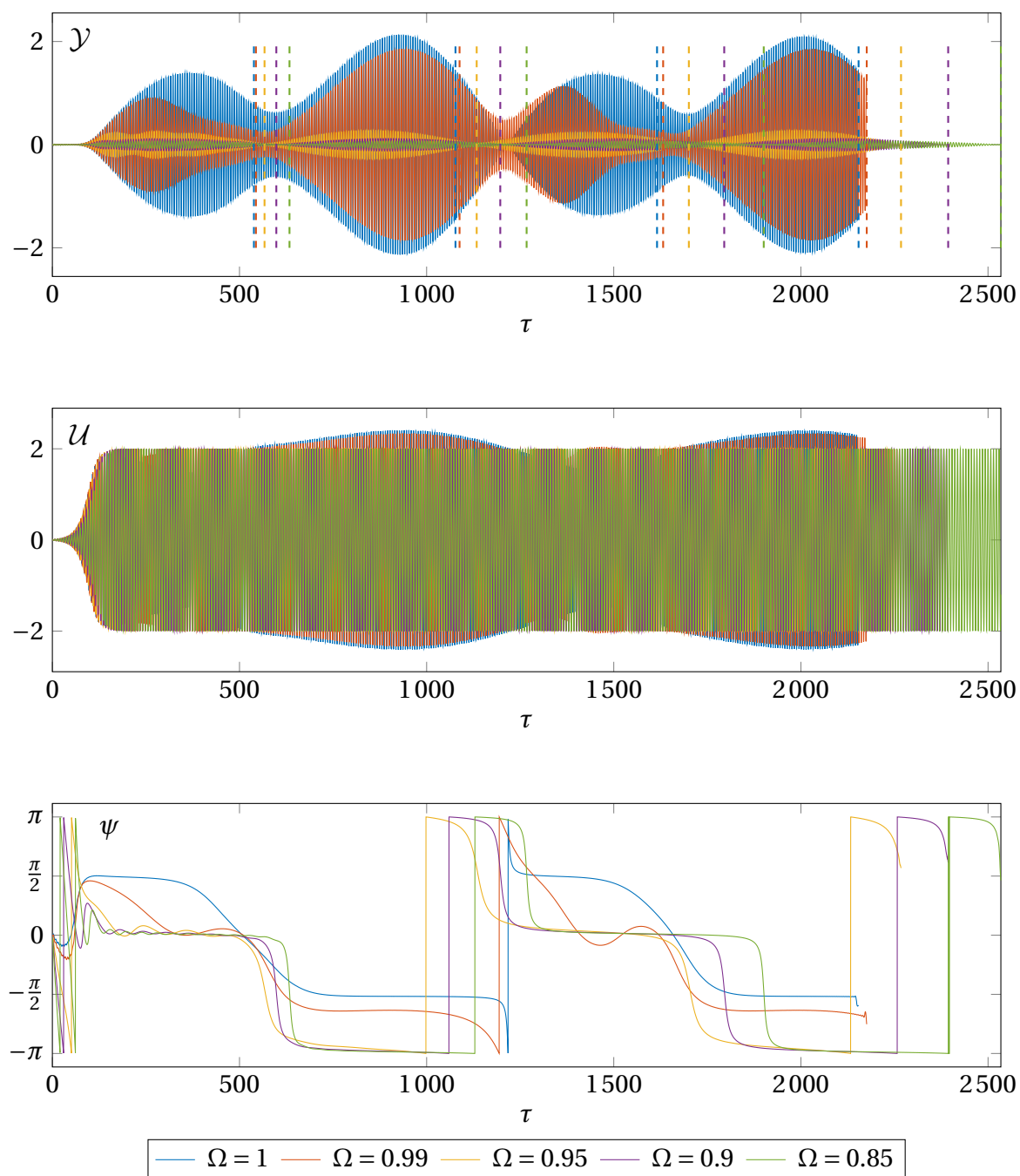


Figure 3.7 – Simulations temporelles de la dynamique rapide du système en tenant compte de la forme du mode pour différentes valeurs de Ω (jeu de données 1).

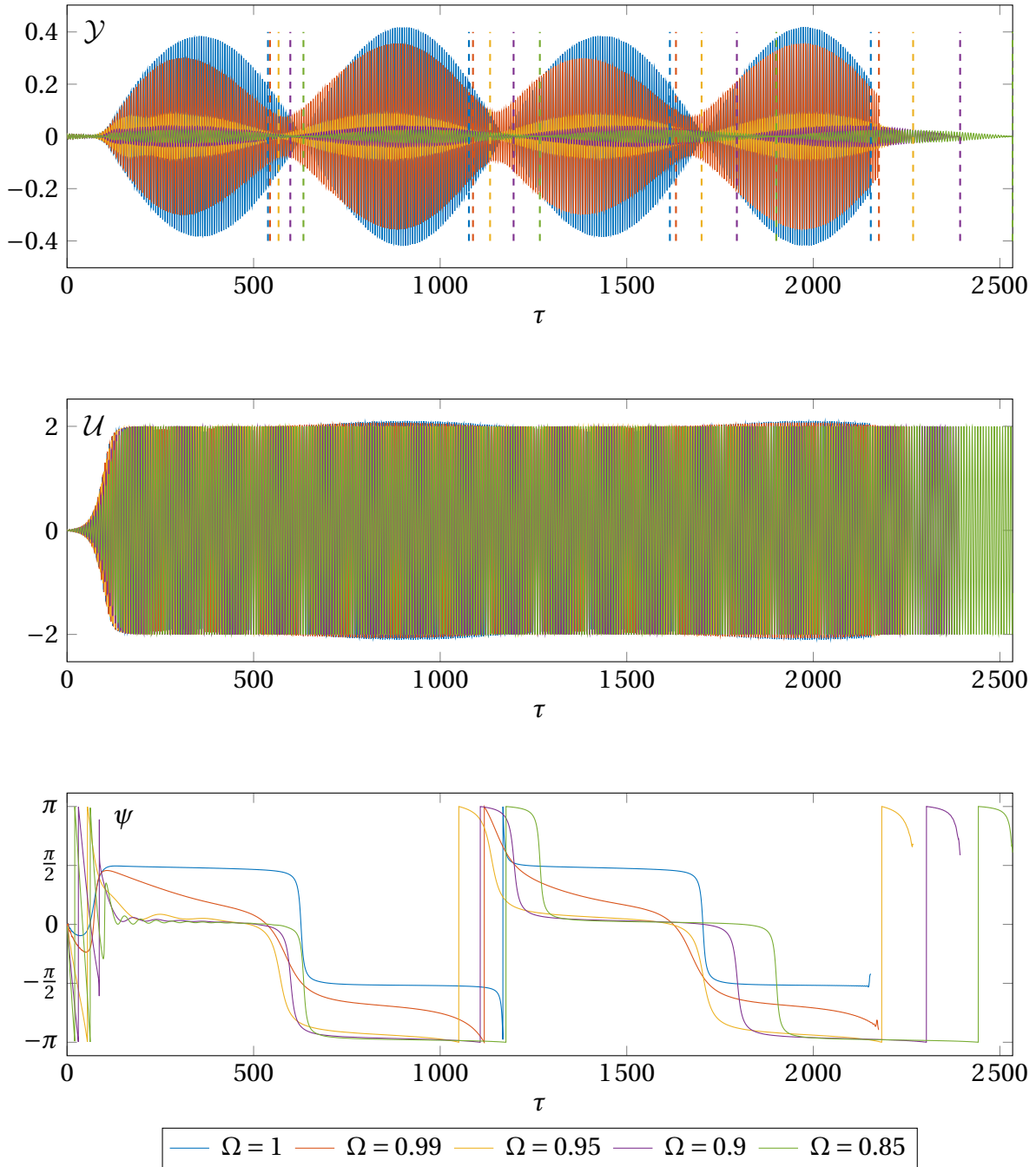


Figure 3.8 – Simulations temporelles de la dynamique rapide du système en tenant compte de la forme du mode pour différentes valeurs de Ω (jeu de données 2).

3.4 Conclusions

Ce chapitre a permis d'étudier en détail le comportement dynamique d'un système couplé piéton-structure à 1 mode de vibration.

En exprimant le problème sous forme adimensionnelle, une méthode à échelles multiples a permis d'obtenir les équations représentant la dynamique lente du système (équations moyennées) dans le cas où la forme du mode n'est pas considérée ($\Phi(x) = 1$). Cette étude a permis de faire apparaître un groupe adimensionnel de paramètres \mathcal{D} , regroupant des informations sur l'amortissement structural, la masse modale de la structure et la masse du piéton. Suivant la valeur de ce groupement, le comportement du système peut différer, la valeur pivot étant $\mathcal{D} = 1$. Il peut exister, suivant la valeur de ce groupe, 1 ou 3 racines à l'équation de phase, toutes n'étant pas toujours stables comme les simulations temporelles ont pu le démontrer. Les développements ont permis de vérifier que l'amplitude de la réponse sur le cycle limite (à l'état stationnaire) est maximale lorsque la fréquence de la force générée par la marche du piéton est la même que la fréquence propre de la structure. Une fois de plus, la forme des courbes obtenues dépendait de la valeur du groupe \mathcal{D} . Des simulations temporelles ont ensuite permis de vérifier que l'approche moyennée capturait bien l'enveloppe de la dynamique rapide du système. Ces simulations temporelles ont permis de générer les courbes de fréquence des oscillations sur le cycle limite qui ont montré que, lorsque le groupement \mathcal{D} est supérieur à 1, le piéton adapte sa fréquence de marche dans le voisinage de $\Omega = 1$. Cette zone d'adaptation est d'autant plus grande que \mathcal{D} est grand. Notons que pour des passerelles réelles, qui sont des structures assez légères et avec un coefficient d'amortissement assez faible, le groupe \mathcal{D} sera généralement supérieur à 1.

Finalement, la forme du mode a été introduite dans les développements en supposant un mode de forme sinusoïdale, ce qui permet de tenir compte de l'emplacement du piéton sur la passerelle. Dans ce cas de figure, la sollicitation se déplace au cours du temps à la vitesse d'avancement du piéton et il n'existe pas de solution stationnaire. La dynamique du système est dès lors plus complexe à analyser puisqu'il est nécessaire de simuler le système. Ces simulations ont tout de même pu montrer qu'il existait des situations où, un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ était observé sur de longues périodes, conduisant à des vibrations structurales d'amplitude importante.

Ce chapitre a donc permis de poser les fondations nécessaires pour permettre d'appréhender l'influence d'un second mode de vibration pour la structure.

4

Étude d'un modèle couplé à deux modes de vibration

« Keep it simple, stupid. »

Kelly Johnson

Le but de ce chapitre est d'étudier un modèle couplé piéton-structure en considérant deux modes de vibration pour la structure. La structure est donc représentée par un système à 2 DDL alors que le piéton est toujours modélisé par un oscillateur de Van der Pol. Cette situation est illustrée à la Figure 4.1.

Pour que cette étude ait du sens, il faut que les deux modes soit relativement proches l'un de l'autre, auquel cas, il pourrait exister une interaction entre les deux modes de la structure. Si leurs fréquences propres respectives venaient à être trop éloignées l'une de l'autre, il serait difficile d'imaginer qu'un piéton avançant à une fréquence donnée pourrait exciter les deux modes simultanément de manière significative.

L'organisation de ce chapitre est globalement similaire à celle du précédent. Le système d'équations décrivant le problème est tout d'abord établi. Ce dernier est alors mis sous forme adimensionnelle en définissant les paramètres adéquats. Ce système sous forme adimensionnelle est ensuite étudié à l'aide d'une méthode par perturbations de manière à dériver des expressions analytiques simples dans le cas où les déformées modales sont négligées. L'influence des déformées modales est finalement étudiée par le biais de simulations temporelles.

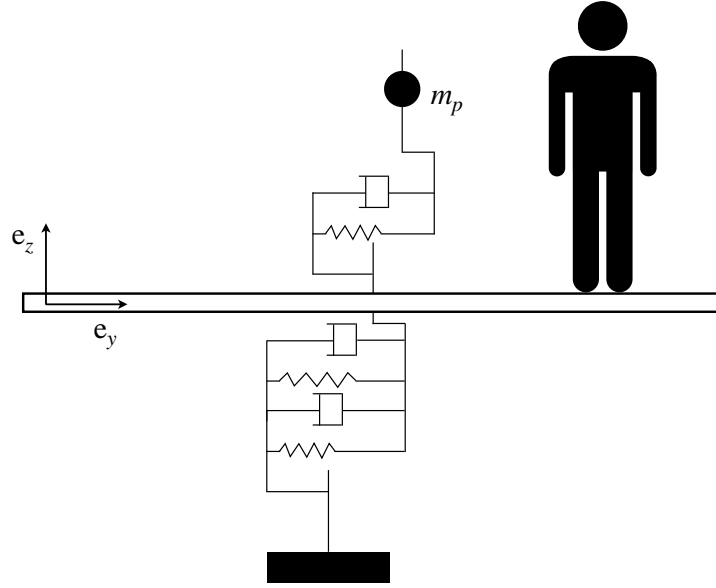


Figure 4.1 – Système à trois degrés de liberté utilisé pour étudier le couplage piéton-structure pour deux modes de vibration (adapté de [11]).

4.1 Introduction

Une fois que l'on considère un second mode de vibration dans l'analyse, une équation doit être ajoutée au système (3.3). Dès lors, les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} M^{(I)} \ddot{y}^{(I)} + C^{(I)} \dot{y}^{(I)} + K^{(I)} y^{(I)} = \int_0^L F_p(t) \delta(x - vt) \Phi^{(I)}(x) dx \\ M^{(II)} \ddot{y}^{(II)} + C^{(II)} \dot{y}^{(II)} + K^{(II)} y^{(II)} = \int_0^L F_p(t) \delta(x - vt) \Phi^{(II)}(x) dx \\ m_p \ddot{u}_y + F_p(t) = -m_p (\ddot{y}^{(I)} + \ddot{y}^{(II)}) \end{cases} \quad (4.1)$$

où

- ◇ les indices I et II représentent respectivement le premier et le second mode latéral de la structure;
- ◇ $y(t)$ est le déplacement latéral de la structure;
- ◇ $\dot{}$ représente la dérivée par rapport au temps;
- ◇ δ est la fonction de Dirac;
- ◇ $\Phi(x)$ est la forme du mode;

- ◇ ν est la vitesse d'avancement du piéton selon l'axe longitudinal de la passerelle (supposée constante);
- ◇ M est la masse modale;
- ◇ C est l'amortissement modal;
- ◇ K est la raideur modale;
- ◇ m_p est la masse d'un piéton;
- ◇ $F_p(t) = m_p \left(\mu \omega_p \dot{u}_y (\beta u_y^2 - 1) + \omega_p^2 u_y \right) = -m_p (\ddot{u}_y + \ddot{y}^{(I)} + \ddot{y}^{(II)})$ est la force latérale engendrée par le piéton sur la passerelle.

Notons que si l'accélération dans le second mode est nulle, on retombe sur la même expression pour la force latérale que celle établie au chapitre 3. En tenant compte de l'expression de $F_p(t)$ dans (4.1), il vient

$$\begin{cases} M^{(I)} \ddot{y}^{(I)} + C^{(I)} \dot{y}^{(I)} + K^{(I)} y^{(I)} = -m_p (\ddot{y}^{(I)} + \ddot{y}^{(II)} + \ddot{u}) \Phi^{(I)}(\nu t) \\ M^{(II)} \ddot{y}^{(II)} + C^{(II)} \dot{y}^{(II)} + K^{(II)} y^{(II)} = -m_p (\ddot{y}^{(I)} + \ddot{y}^{(II)} + \ddot{u}) \Phi^{(II)}(\nu t) \\ \ddot{u}_y + 2\mu\omega_p \dot{u}_y (\beta u_y^2 - 1) + \omega_p^2 u_y = -(\ddot{y}^{(I)} + \ddot{y}^{(II)}) \end{cases} \quad (4.2)$$

ou encore,

$$\begin{cases} (M^{(I)} + m_p) \ddot{y}^{(I)} + C^{(I)} \dot{y}^{(I)} + K^{(I)} y^{(I)} = -m_p (\ddot{y}^{(II)} + \ddot{u}) \Phi^{(I)}(\nu t) \\ (M^{(II)} + m_p) \ddot{y}^{(II)} + C^{(II)} \dot{y}^{(II)} + K^{(II)} y^{(II)} = -m_p (\ddot{y}^{(I)} + \ddot{u}) \Phi^{(II)}(\nu t) \\ \ddot{u}_y + 2\mu\omega_p \dot{u}_y (\beta u_y^2 - 1) + \omega_p^2 u_y = -(\ddot{y}^{(I)} + \ddot{y}^{(II)}) . \end{cases} \quad (4.3)$$

La masse d'un piéton étant négligeable devant les différentes masses modales, le système s'écrit finalement

$$\begin{cases} M^{(I)} \ddot{y}^{(I)} + C^{(I)} \dot{y}^{(I)} + K^{(I)} y^{(I)} = -m_p (\ddot{y}^{(II)} + \ddot{u}) \Phi^{(I)}(\nu t) \\ M^{(II)} \ddot{y}^{(II)} + C^{(II)} \dot{y}^{(II)} + K^{(II)} y^{(II)} = -m_p (\ddot{y}^{(I)} + \ddot{u}) \Phi^{(II)}(\nu t) \\ \ddot{u}_y + 2\mu\omega_p \dot{u}_y (\beta u_y^2 - 1) + \omega_p^2 u_y = -(\ddot{y}^{(I)} + \ddot{y}^{(II)}) . \end{cases} \quad (4.4)$$

De manière similaire à ce qui a été fait au chapitre 3, la forme du mode va être négligée dans un premier temps en choisissant un mode tel que $\Phi(x) = 1$. La position du piéton n'aura donc pas d'influence sur la réponse de la structure. Elle sera prise en compte à la section 4.9.

4.2 Mise sous forme adimensionnelle

Afin d'obtenir une version adimensionnelle du système (4.4), un temps caractéristique t^\star est introduit. Ce temps caractéristique est basé sur la pulsation propre de la structure dans le premier mode et est défini par $t^\star = 1/\omega_s^{(I)}$. On définit également un déplacement caractéristique par mode, $y^{(I)\star}$ et $y^{(II)\star}$, ainsi qu'un déplacement caractéristique pour le piéton u^\star . Dès lors, les grandeurs adimensionnelles suivantes sont introduites

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{t}{t^\star} \\ \mathcal{Y}^{(I)}(\tau) &= \frac{y^{(I)}[t(\tau)]}{y^{(I)\star}} \\ \mathcal{Y}^{(II)}(\tau) &= \frac{y^{(II)}[t(\tau)]}{y^{(II)\star}} \\ \mathcal{U}(\tau) &= \frac{u_y[t(\tau)]}{u^\star}\end{aligned}\tag{4.5}$$

qui représentent respectivement un temps, un déplacement par mode structurel et un déplacement latéral de piéton adimensionnel.

On définit également les paramètres suivants

$$\begin{aligned}\omega_s^{(i)} &= \frac{K^{(i)}}{M^{(i)}} \\ \xi^{(i)} &= \frac{C^{(i)}}{2M^{(i)}\omega_s^{(i)}} \\ m_i &= \frac{m_p}{M^{(i)}} \\ \Omega &= \frac{\omega_p}{\omega_s^{(I)}}\end{aligned}\tag{4.6}$$

où l'indice $i = I, II$ représente le mode considéré. On introduit finalement un dernier paramètre ν représentant l'écart de fréquence entre les deux modes considérés. Ce paramètre est défini par

$$\nu = \frac{\omega_s^{(II)}}{\omega_s^{(I)}}\tag{4.7}$$

Ces différents paramètres sont introduits dans le système (4.4) et il vient

$$\begin{cases} \mathcal{Y}^{(\text{I})''} + 2\xi^{(\text{I})}\mathcal{Y}^{(\text{I})'} + \mathcal{Y}^{(\text{I})} = -m_{\text{I}} \frac{y^{(\text{I})\star}}{y^{(\text{I})\star}} \mathcal{Y}^{(\text{II})''} - m_{\text{I}} \frac{u^\star}{y^{(\text{I})\star}} \mathcal{U}'' \\ \mathcal{Y}^{(\text{II})''} + 2\xi^{(\text{II})}\nu \mathcal{Y}^{(\text{II})'} + \nu^2 \mathcal{Y}^{(\text{II})} = -m_{\text{II}} \frac{y^{(\text{I})\star}}{y^{(\text{II})\star}} \mathcal{Y}^{(\text{I})''} - m_{\text{II}} \frac{u^\star}{y^{(\text{II})\star}} \mathcal{U}'' \\ \mathcal{U}'' + 2\mu\Omega\mathcal{U}'(\beta u^{\star 2} \mathcal{U}^2 - 1) + \Omega^2 \mathcal{U} = -\frac{y^{(\text{I})\star}}{u^\star} \mathcal{Y}^{(\text{I})''} - \frac{y^{(\text{II})\star}}{u^\star} \mathcal{Y}^{(\text{II})''} \end{cases} \quad (4.8)$$

où l'apostrophe représente la dérivée par rapport au temps adimensionnel τ .

Il reste encore à fournir une définition appropriée aux déplacements caractéristiques $y^{(\text{I})\star}$, $y^{(\text{II})\star}$ et u^\star . Dans le même esprit que ce qui a été fait au chapitre 3, le déplacement caractéristique du piéton u^\star est défini par $u^\star = 1/\sqrt{\beta}$. Le déplacement caractéristique de la structure dans le premier mode $y^{(\text{I})\star}$ est donné par $y^{(\text{I})\star} = \mu u^\star = \mu/\sqrt{\beta}$. Celui dans le deuxième mode est donné par $y^{(\text{II})\star} = \mu\nu u^\star = \mu\nu/\sqrt{\beta}$. Les deux déplacements sont du même ordre de grandeur puisque si les deux modes sont proches, la valeur du paramètre ν se situe aux alentours de 1. Ainsi, on obtient un léger couplage entre les différentes équations du problème.

Enfin, on définit deux paramètres \mathcal{M}_{I} et \mathcal{M}_{II} qui sont tous deux (au plus) de l'ordre de 1

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{I}} &= \frac{m_{\text{I}}}{\mu^2} \\ \mathcal{M}_{\text{II}} &= \frac{m_{\text{II}}}{\mu^2 \nu^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dès lors, la version adimensionnelle du système (4.4) est donnée par

$$\begin{cases} \mathcal{Y}^{(\text{I})''} + 2\xi^{(\text{I})}\mathcal{Y}^{(\text{I})'} + \mathcal{Y}^{(\text{I})} = -\mu^2 \nu \mathcal{M}_{\text{I}} \mathcal{Y}^{(\text{II})''} - \mu \mathcal{M}_{\text{I}} \mathcal{U}'' \\ \mathcal{Y}^{(\text{II})''} + 2\xi^{(\text{II})}\nu \mathcal{Y}^{(\text{II})'} + \nu^2 \mathcal{Y}^{(\text{II})} = -\mu^2 \nu \mathcal{M}_{\text{II}} \mathcal{Y}^{(\text{I})''} - \mu \nu \mathcal{M}_{\text{II}} \mathcal{U}'' \\ \mathcal{U}'' + 2\mu\Omega\mathcal{U}'(\mathcal{U}^2 - 1) + \Omega^2 \mathcal{U} = -\mu \mathcal{Y}^{(\text{I})''} - \mu \nu \mathcal{Y}^{(\text{II})''}. \end{cases} \quad (4.10)$$

4.3 Ordre de grandeur des paramètres du problème

La prise en compte d'un second mode de vibration fait apparaître de nouveaux paramètres adimensionnels par rapport au cas précédent. Pour cette raison, les ordres de grandeur de tous les paramètres intervenant dans cette seconde approche sont donnés à la Table 4.1.

Deux groupes adimensionnels, \mathcal{D}_{I} et \mathcal{D}_{II} seront introduits par la suite des développements

Paramètre	Intervalle de variation
μ	$[0.05 - 0.2]$
Ω	$[0.5 - 1.5]$
ν	$[0.85 - 1.15]$
m_I	$[3 \times 10^{-4} - 2 \times 10^{-3}]$
m_{II}	$[3 \times 10^{-4} - 2 \times 10^{-3}]$
$\xi^{(I)}$	$[1 \times 10^{-3} - 1.5 \times 10^{-2}]$
$\xi^{(II)}$	$[1 \times 10^{-3} - 1.5 \times 10^{-2}]$
\mathcal{M}_I	$[0.07 - 1]$
\mathcal{M}_{II}	$[5 \times 10^{-3} - 1]$
\mathcal{D}_I	$0.8 - 25$
\mathcal{D}_{II}	$0.8 - 25$

Table 4.1 – Intervalle de variation des paramètres du problème.

(section 4.5). Leur définition est donnée par

$$\mathcal{D}_I := \frac{\mu^{\star 2}}{4} (\mathcal{M}_I + \mathcal{M}_{II}) \quad (4.11)$$

$$\mathcal{D}_{II} := \frac{\mu^{\star 2}}{4} (\mathcal{M}_I + 2\mathcal{M}_{II}) . \quad (4.12)$$

4.4 Système d'équations moyennées

Le système (4.10) va, à son tour, être étudié à l'aide d'une méthode d'analyse par perturbations (méthode à échelles multiples) afin d'obtenir les équations moyennées du problème. A cette fin, un petit paramètre ε est introduit, tel que l'on peut définir

$$\begin{aligned} \xi_I^{\star} &= \frac{\xi^{(I)}}{\varepsilon} \\ \xi_{II}^{\star} &= \frac{\xi^{(II)}}{\varepsilon} \\ \mu^{\star} &= \frac{\mu}{\varepsilon} . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ainsi, le système (4.10) se réécrit

$$\begin{cases} \mathcal{Y}^{(\text{I})''} + 2\varepsilon\xi_1^* \mathcal{Y}^{(\text{I})'} + \mathcal{Y}^{(\text{I})} = -\varepsilon^2 \mu^{*2} \nu \mathcal{M}_\text{I} \mathcal{Y}^{(\text{III})''} - \varepsilon \mu^* \mathcal{M}_\text{I} \mathcal{U}'' \\ \mathcal{Y}^{(\text{II})''} + 2\varepsilon\xi_\text{II}^* \nu \mathcal{Y}^{(\text{II})'} + \nu^2 \mathcal{Y}^{(\text{II})} = -\varepsilon^2 \mu^{*2} \nu \mathcal{M}_\text{II} \mathcal{Y}^{(\text{I})''} - \varepsilon \mu^* \nu \mathcal{M}_\text{II} \mathcal{U}'' \\ \mathcal{U}'' + 2\varepsilon \mu^* \Omega \mathcal{U}' (\mathcal{U}^2 - 1) + \Omega^2 \mathcal{U} = -\varepsilon \mu^* \mathcal{Y}^{(\text{I})''} - \varepsilon \mu^* \nu \mathcal{Y}^{(\text{II})''}. \end{cases} \quad (4.14)$$

On considère à nouveau une condition de « small mistuning » entre le piéton et le premier mode de la structure, mais également entre les deux modes considérés. Cette situation peut être formalisée de la manière suivante

$$\begin{aligned} \Omega = 1 + \varepsilon \delta &\iff \delta = \frac{\Omega - 1}{\varepsilon} \\ \nu = 1 + \varepsilon \Delta &\iff \Delta = \frac{\nu - 1}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.15)$$

avec $\delta \sim 1$ et $\Delta \sim 1$, deux paramètres de detuning d'ordre 1.

On recherche une solution au système (4.14) prenant la forme de l'ansatz suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^{(\text{I})}(\tau; \varepsilon) &= \mathcal{Y}_0^{(\text{I})}[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \varepsilon \mathcal{Y}_1^{(\text{I})}[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \dots \\ \mathcal{Y}^{(\text{II})}(\tau; \varepsilon) &= \mathcal{Y}_0^{(\text{II})}[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \varepsilon \mathcal{Y}_1^{(\text{II})}[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \dots \\ \mathcal{U}(\tau; \varepsilon) &= \mathcal{U}_0[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \varepsilon \mathcal{U}_1[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \dots \end{aligned} \quad (4.16)$$

où $\mathcal{Y}_i^{(\text{I})}$, $\mathcal{Y}_i^{(\text{II})}$ et \mathcal{U}_i ($i = 0, 1, \dots$) sont de l'ordre de 1. On introduit l'échelle de temps lente t^*/ε et donc le temps lent $T = t/(t^*/\varepsilon) = \varepsilon \tau$ fonction du temps rapide τ et du paramètre ε .

L'application de la méthode à échelles multiples fait apparaître à l'ordre 0 en ε trois équations différentielles homogènes (voir détails à l'annexe C) dont les solutions sont données par

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_0^{(\text{I})} &= R_y^{(\text{I})} \cos(\tau + \varphi(T)) \\ \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} &= R_y^{(\text{II})} \cos(\tau + \varphi(T) + \phi(T)) \\ \mathcal{U}_0 &= R_u \cos(\tau + \varphi(T) + \phi(T) + \psi(T)) \end{aligned} \quad (4.17)$$

où les amplitudes lentes $R_y^{(\text{I})}$, $R_y^{(\text{II})}$, R_u et les phases $\phi(T)$, $\psi(T)$ satisfont les équations de sécularité (C.10)

$$\left\{ \begin{array}{l} R_y^{(\text{I})'} = -\xi_1^* R_y^{(\text{I})} + \frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_1 R_u \sin(\phi + \psi) \\ R_y^{(\text{II})'} = -\xi_2^* R_y^{(\text{II})} + \frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_2 R_u \sin \psi \\ R_u' = \mu^* \left(R_u - \frac{1}{4} R_u^3 - \frac{1}{2} R_y^{(\text{I})} \sin(\phi + \psi) - \frac{1}{2} R_y^{(\text{II})} \sin \psi \right) \\ \phi' = \Delta + \frac{\mu^*}{2} R_u \left(\frac{\mathcal{M}_1}{R_y^{(\text{I})}} \cos(\phi + \psi) - \frac{\mathcal{M}_2}{R_y^{(\text{II})}} \cos \psi \right) \\ \psi' = -\frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_1 \frac{R_u}{R_y^{(\text{I})}} \cos(\phi + \psi) \\ \psi' = \delta - \Delta + \frac{\mu^*}{2} \left(\mathcal{M}_2 \frac{R_u}{R_y^{(\text{II})}} \cos \psi - \frac{R_y^{(\text{I})}}{R_u} \cos(\phi + \psi) - \frac{R_y^{(\text{II})}}{R_u} \cos \psi \right). \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Ce dernier set de six équations permet de représenter la dynamique lente du système. Notons que la dynamique du système peut en fait être représentée par les cinq seules variables $R_y^{(\text{I})}$, $R_y^{(\text{II})}$, R_u , ψ et ϕ .

4.5 Analyse de la phase lente sur le cycle limite

A l'état stationnaire, le membre de gauche de chaque équation de (4.18) s'annule. Ainsi, une fois le cycle limite atteint, on peut écrire

$$\begin{aligned} R_y^{(\text{I})} &= \frac{\mu^*}{2\xi_1^*} \mathcal{M}_1 R_u \sin(\phi + \psi) \\ R_y^{(\text{II})} &= \frac{\mu^*}{2\xi_2^*} \mathcal{M}_2 R_u \sin \psi. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ces 2 relations peuvent ensuite être introduites dans la quatrième et la cinquième équation de (4.18) dont le membre de gauche a été annulé et on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta - \xi_2^* \cot \psi + \xi_1^* \cot(\phi + \psi) = 0 \\ \delta - \Delta + \xi_2^* \cot \psi - \frac{\mu^{*2}}{8} \left(\frac{\mathcal{M}_2}{\xi_1^*} \sin(2\psi) + \frac{\mathcal{M}_1}{\xi_1^*} \sin(2(\phi + \psi)) \right) = 0. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Par la formule trigonométrique de l'angle double, on sait que $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$. Par ailleurs, l'on peut également prouver que $\sin x \cos x = \frac{\cot x}{1 + \cot^2 x}$. Dès lors, en tenant compte de ces re-

lations dans (4.20), il vient

$$\begin{cases} \cot(\phi + \psi) = \frac{\xi_{\text{II}}^*}{\xi_{\text{I}}^*} \cot \psi - \frac{\Delta}{\xi_{\text{I}}^*} \\ \delta - \Delta + \xi_{\text{II}}^* \cot \psi - \frac{\mu^{*2}}{4} \left(\frac{\mathcal{M}_{\text{II}}}{\xi_{\text{I}}^*} \frac{\cot \psi}{1 + \cot^2 \psi} + \frac{\mathcal{M}_{\text{I}}}{\xi_{\text{I}}^*} \frac{\cot(2(\phi + \psi))}{1 + \cot^2(2(\phi + \psi))} \right) = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Afin de développer une expression analytique simple, on fait l'hypothèse que l'amortissement modal est le même dans les deux modes et donc $\xi^{(\text{I})} = \xi^{(\text{II})} = \xi$. Cette hypothèse simplificatrice peut se justifier par le fait que le coefficient d'amortissement est, de manière générale, du même ordre de grandeur. Dès lors, on peut définir le paramètre ε intervenant dans la définition de ξ_{I}^* , ξ_{II}^* , et μ^* comme $\varepsilon = \xi$ de manière analogue aux développements du chapitre 3. Cette hypothèse simplifie quelque peu (4.21) puisque $\xi_{\text{I}}^* = \xi_{\text{II}}^* = 1$. Ainsi, l'équation de phase relative au second mode (deuxième équation de (4.21)) s'écrit

$$\begin{aligned} & \cot^5 \psi + (\delta - 3\Delta) \cot^4 \psi + \left[2 - 2\delta\Delta + 3\Delta^2 - \frac{\mu^2}{4\xi^2} (\mathcal{M}_{\text{I}} + \mathcal{M}_{\text{II}}) \right] \cot^3 \psi \\ & + \left[2\delta - 4\Delta + \delta\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{\mu^2}{4\xi^2} (\mathcal{M}_{\text{I}} + 2\mathcal{M}_{\text{II}}) \Delta \right] \cot^2 \psi \\ & + \left[1 - 2\delta\Delta + 3\Delta^2 - \frac{\mu^2}{4\xi^2} (\mathcal{M}_{\text{I}} + \mathcal{M}_{\text{II}} + \Delta^2 \mathcal{M}_{\text{II}}) \right] \cot \psi \\ & + \delta - \Delta + \delta\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{\mu^2}{4\xi^2} \mathcal{M}_{\text{I}} \Delta = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

L'équation précédente fait intervenir plusieurs paramètres qu'il peut être judicieux de regrouper. Dans cette optique, on définit deux groupes adimensionnels \mathcal{D}_{I} et \mathcal{D}_{II} qui permettent d'étudier de manière globale l'influence des paramètres μ , ξ , \mathcal{M}_{I} et \mathcal{M}_{II} sur le problème considéré. La définition de ces groupes de paramètres est donnée par

$$\mathcal{D}_{\text{I}} := \frac{\mu^{*2}}{4} (\mathcal{M}_{\text{I}} + \mathcal{M}_{\text{II}}) \quad (4.23)$$

$$\mathcal{D}_{\text{II}} := \frac{\mu^{*2}}{4} (\mathcal{M}_{\text{I}} + 2\mathcal{M}_{\text{II}}). \quad (4.24)$$

Au vu de cette définition, les intervalles de variation \mathcal{D}_{I} et \mathcal{D}_{II} sont liés. En effet,

$$\frac{\mathcal{D}_{\text{II}}}{2} \leq \mathcal{D}_{\text{I}} \leq \mathcal{D}_{\text{II}} \quad (4.25)$$

puisque les paramètres \mathcal{M}_{I} et \mathcal{M}_{II} sont nécessairement positifs. Au plus \mathcal{M}_{I} est grand vis-à-vis de \mathcal{M}_{II} , au plus \mathcal{D}_{I} est proche de \mathcal{D}_{II} . Dans le cas extrême où \mathcal{M}_{II} est nul (masse modale du second mode infinie), $\mathcal{D}_{\text{I}} = \mathcal{D}_{\text{II}}$. L'autre cas extrême est $\mathcal{M}_{\text{I}} = 0$, dans cas-là, $\mathcal{D}_{\text{I}} = \frac{\mathcal{D}_{\text{II}}}{2}$.

Ces groupements traduisent donc l'importance relative des masses modales et du detuning structurel (ν intervient dans la définition de \mathcal{M}_{II}). Ils contiennent également des informations sur l'amortissement structurel puisque $\mu^* = \frac{\mu}{\varepsilon} = \frac{\mu}{\xi}$. La valeur arborée par ces deux groupes est cependant indépendante de μ , ce paramètre intervenant également dans la définition de \mathcal{M}_{I} et \mathcal{M}_{II} .

L'introduction des groupements adimensionnels dans (4.22) donne

$$\begin{aligned} & \cot^5 \psi + (\delta - 3\Delta) \cot^4 \psi + [2 - 2\delta\Delta + 3\Delta^2 - \mathcal{D}_{\text{I}}] \cot^3 \psi \\ & + [2\delta - 4\Delta + \delta\Delta^2 - \Delta^3 + \mathcal{D}_{\text{II}}\Delta] \cot^2 \psi \\ & + [1 - 2\delta\Delta + 3\Delta^2 - \mathcal{D}_{\text{I}} - \Delta^2(\mathcal{D}_{\text{II}} - \mathcal{D}_{\text{I}})] \cot \psi \\ & + \delta - \Delta + \delta\Delta^2 - \Delta^3 + (2\mathcal{D}_{\text{I}} - \mathcal{D}_{\text{II}})\Delta = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Cette dernière équation permet de déterminer le déphasage entre le piéton et le second mode de vibration. Pour déterminer le déphasage entre le piéton et le premier mode, il faut revenir à (4.21) et l'on a

$$\cot(\phi + \psi) = \cot \psi - \Delta. \quad (4.27)$$

En faisant de nouveau appel à la règle du signe de Descartes, on observe qu'il existe 1 ou 3 racines positives ainsi que 1 ou 3 racines négatives à l'équation de phase lorsque δ est dans le voisinage de Δ . Cependant, il n'existe pas de formule analytique permettant de calculer les racines d'un polynôme d'ordre 5 comme c'est le cas avec la formule de Cardan pour une équation cubique. Dès lors, il est assez ardu de fournir des valeurs de \mathcal{D}_{I} et \mathcal{D}_{II} permettant d'identifier rapidement, de manière unanime, le nombre de racines réelles à l'équation, comme cela a pu être fait pour le paramètre \mathcal{D} à la section 3.2.4. L'équation (4.26) sera donc résolue numériquement uniquement.

Le déphasage du piéton avec chacun des modes a été calculé pour différentes valeurs du detuning structurel Δ en faisant varier \mathcal{D}_{I} en gardant \mathcal{D}_{II} constant.

Le déphasage du piéton avec le premier mode est donné à la Figure 4.2. Intéressons nous d'abord à la situation où le groupe \mathcal{D}_{I} tend vers \mathcal{D}_{II} (dernière rangée de graphiques). Dans ce cas toutes les courbes tendent à se resserrer et se superposent même lorsque $\mathcal{D}_{\text{I}} = \mathcal{D}_{\text{II}}$. On récupère alors un comportement similaire à ce qui a été étudié précédemment lorsqu'un seul mode était considéré. Peu importe le detuning structurel Δ , la solution de l'équation de phase (4.27) est la même pour une valeur donnée de δ . Pour $\delta = 0$, il existe plusieurs racines dont $\cot(\phi + \psi) = 0$, peu importe Δ . Cette solution indique donc un déphasage de $\pm \frac{\pi}{2}$ entre le piéton et le premier mode. On observe cependant qu'il existe deux autres solutions qui sont de l'ordre de $\cot(\phi + \psi) = 2$. La stabilité de ces différentes racines pourra être étudiée au travers de simulations temporelles du système initial (4.10).

Si l'on considère maintenant le cas où \mathcal{D}_I tend vers $\frac{\mathcal{D}_{II}}{2}$, il existe, pour $|\Delta| \gg 0$, il existe une solution unique à l'équation de phase qui est telle que $\cot(\phi + \psi) = 0$ dans le voisinage de $\delta = 0$. Au plus le detuning entre les deux modes Δ est important, au plus cette solution existe pour un δ proche de 0. Ceci indique que si les fréquences propres des modes en question sont très éloignées l'une de l'autre, les modes n'interagissent pas entre eux et on peut les considérer de manière découplées.

Le même exercice a été réalisé avec le second mode à la Figure 4.3. Une première constatation est que les courbes sont simplement translatées verticalement d'un facteur égal à Δ par rapport aux courbes relatives au premier mode. Au vu du lien entre les deux phases établi en (4.27), cette observation semble cohérente. Considérons à nouveau, dans un premier temps, le cas \mathcal{D}_I tendant vers \mathcal{D}_{II} . Pour le premier mode, les courbes étaient superposées. Ici, on observe que la courbe relative à $\Delta = 0$ est simplement translatée verticalement d'une quantité égale à Δ . Dans l'autre cas extrême, \mathcal{D}_I tendant vers $\frac{\mathcal{D}_{II}}{2}$, la courbe relative à $\Delta = 0$ est translatée horizontalement d'une quantité égale à Δ également. Dans ce cas, on observe une solution $\cot \psi = 0$ et deux autres solutions $\cot \psi \neq 0$ pour $\delta = \Delta$. Ces deux cas extrêmes correspondent à des situations où il n'existe pas d'interaction entre les modes. Pour des valeurs intermédiaires de \mathcal{D}_I , on observe plusieurs racines dont $\cot \psi = 0$ dans le voisinage de $\delta = \Delta$ jusqu'à $\mathcal{D}_I = 3.5$. Au-delà de cette valeur de \mathcal{D}_I , il n'existe qu'une seule racine dans le voisinage de $\delta = \Delta$. Au plus \mathcal{D}_I augmente, au plus le premier mode affiche son influence et l'abscisse de la racine $\cot \psi = 0$ se décale en direction de $\delta = 0$.

A la section 3.2.4, on a pu se rendre compte qu'en fonction de la valeur arborée par le groupement \mathcal{D} (inférieure ou supérieure à 1), il existait 1 ou 3 racines réelles à l'équation de phase. Il semblerait que l'on observe un comportement similaire dans le cas où un second mode est considéré. A la Figure 4.4 et à la Figure 4.5, on a représenté le déphasage avec le premier et le second mode respectivement, pour différentes valeurs du detuning Δ et pour $\mathcal{D}_{II} = 1.5$, le paramètre \mathcal{D}_I variant dans son intervalle de validité.

Concernant le déphasage avec le premier mode (Figure 4.4), on observe tout d'abord que les courbes sont plus resserrées que précédemment pour les petites valeurs de \mathcal{D}_I que lorsque \mathcal{D}_{II} était égal à 5. Tant que $\mathcal{D}_I < 1$, il n'existe qu'une racine réelle à l'équation de phase, peu importe δ et Δ . En particulier, dans le voisinage de $\delta = 0$, il existe une solution telle que $\cot(\phi + \psi) = 0$ indiquant un déphasage de $\pm \frac{\pi}{2}$ entre le piéton et le premier mode. Une fois que \mathcal{D}_I est supérieur ou égal à 1, il existe plusieurs racines réelles à l'équation de phase pour $\delta = 0$ lorsque $\Delta = 0$; on retrouve un comportement semblable au cas à un mode. Il existe ensuite une valeur charnière de \mathcal{D}_I , pour laquelle l'équation de phase possède plusieurs racines réelles peu importe Δ pour un petit δ ($|\delta| \ll 1$).

Dans le cas du second mode (Figure 4.5), pour toutes les valeurs de \mathcal{D}_I comprises dans l'intervalle de définition, il existe une et une seule racine dans le voisinage de $\delta = \Delta$ qui est telle que $\cot \psi = 0$ et donc $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$. Ce résultat indique une synchronisation possible sur le mode 2 pour ces combinaisons de \mathcal{D}_I et \mathcal{D}_{II} avec une fréquence de marche adéquate pour le piéton.

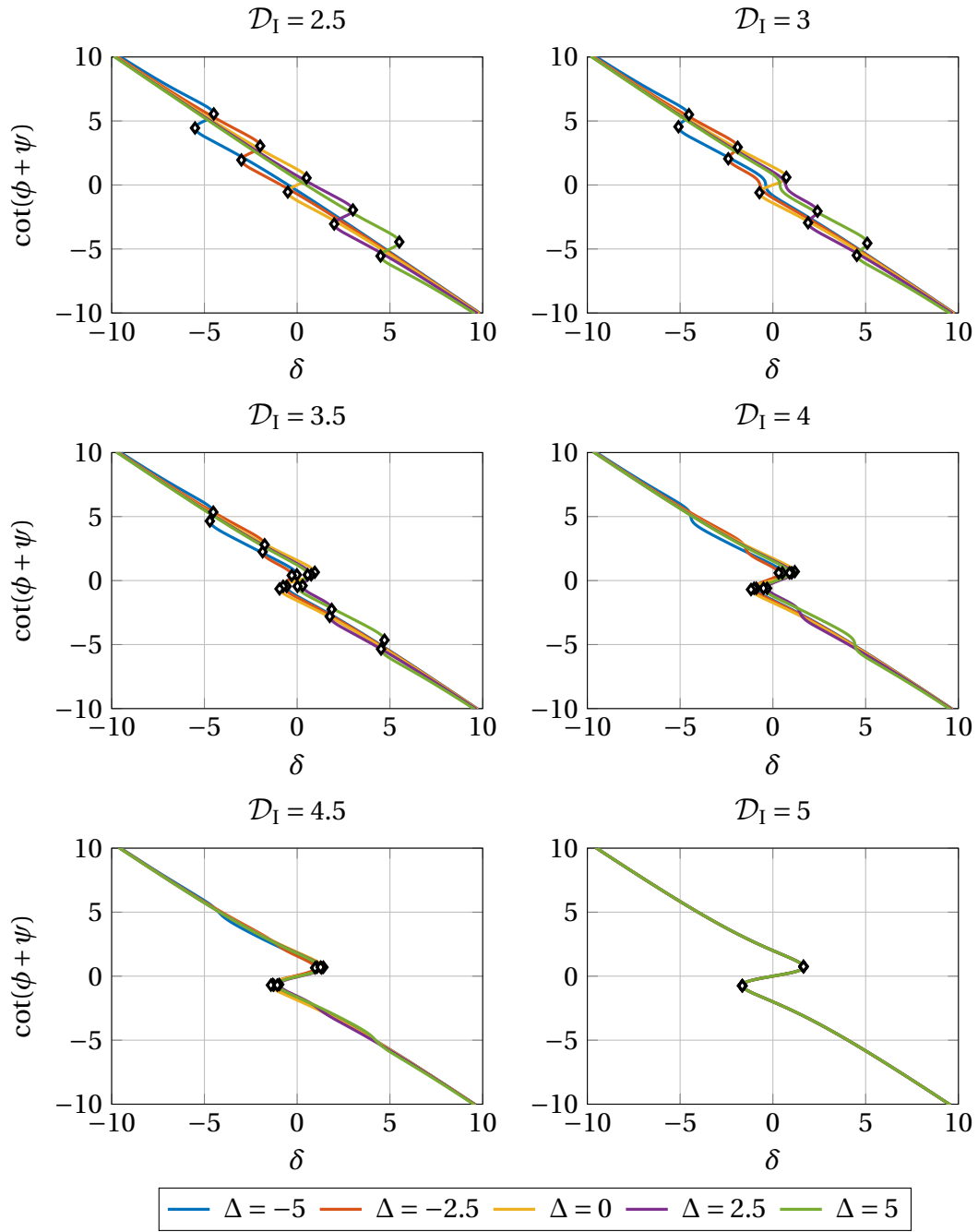


Figure 4.2 – Déphasage entre le piéton et le premier mode de vibration en fonction du detuning piéton-structure δ pour différentes valeurs du detuning structurel Δ et du groupement adimensionnel \mathcal{D}_I ($\mathcal{D}_{II} = 5$).

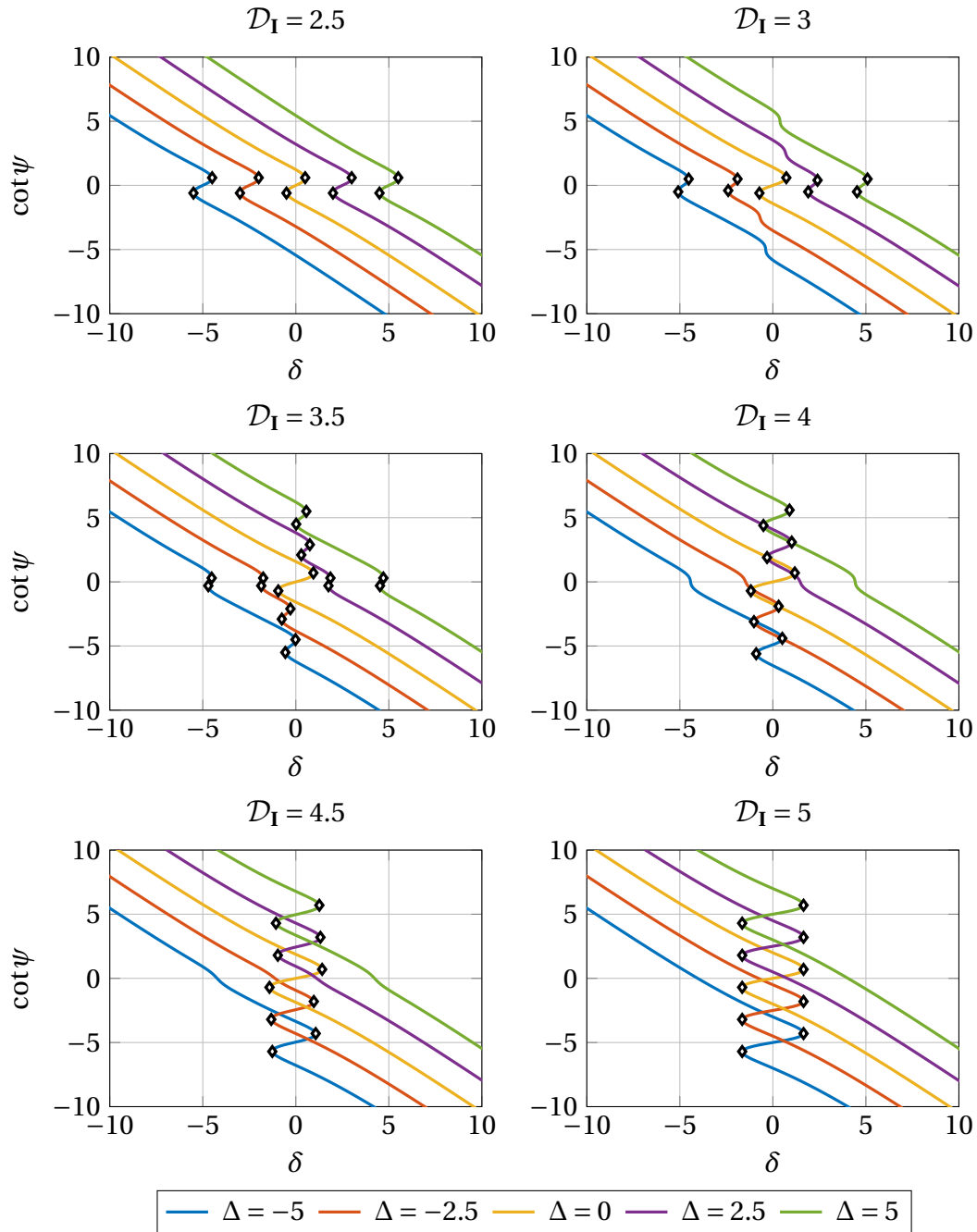


Figure 4.3 – Déphasage entre le piéton et le second mode de vibration en fonction du detuning piéton-structure δ pour différentes valeurs du detuning structurel Δ et du groupement adimensionnel \mathcal{D}_I ($\mathcal{D}_{II} = 5$).

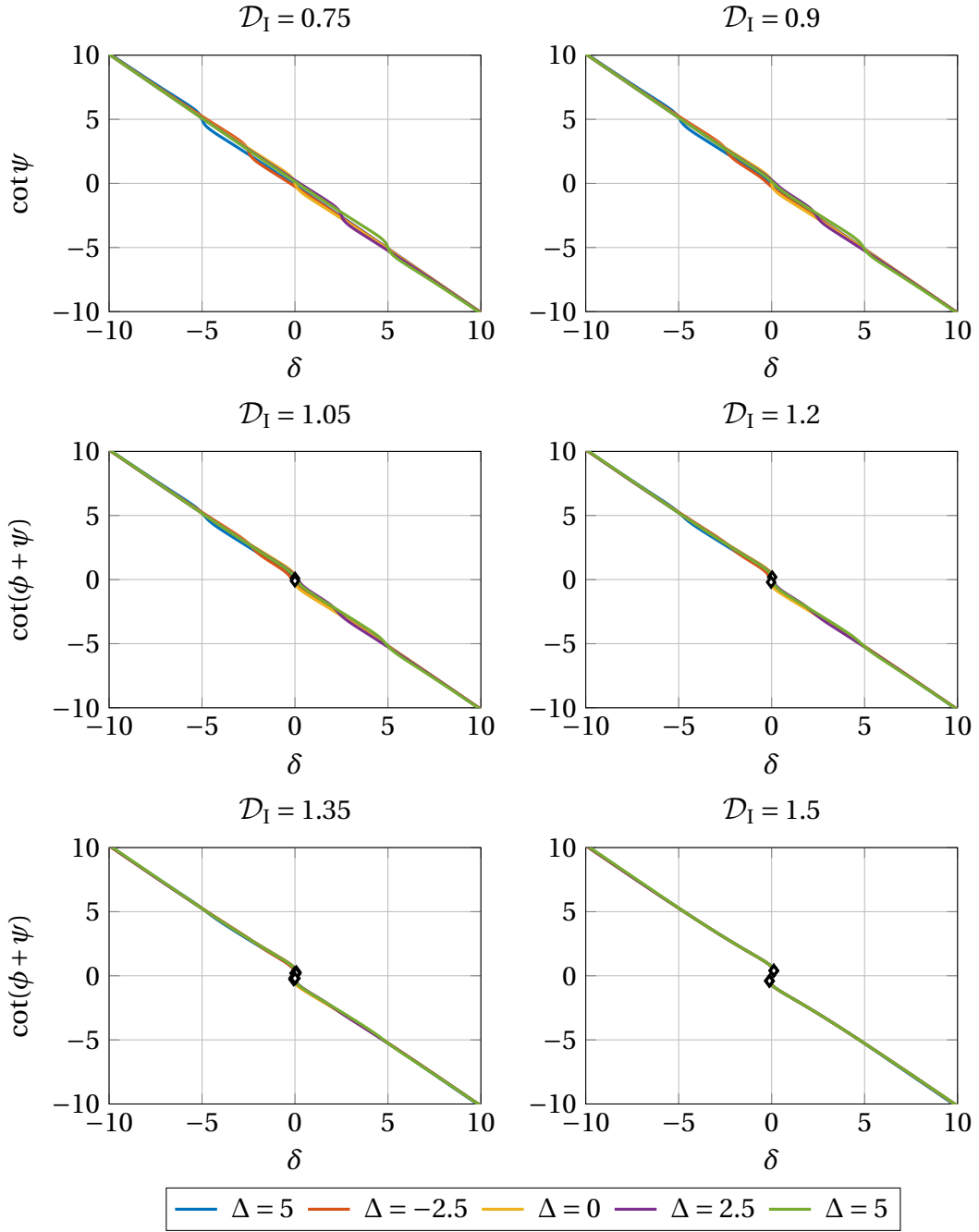


Figure 4.4 – Déphasage entre le piéton et le premier mode de vibration en fonction du detuning piéton-structure δ pour différentes valeurs du detuning structurel Δ et du groupement adimensionnel \mathcal{D}_I ($\mathcal{D}_{II} = 1.5$).

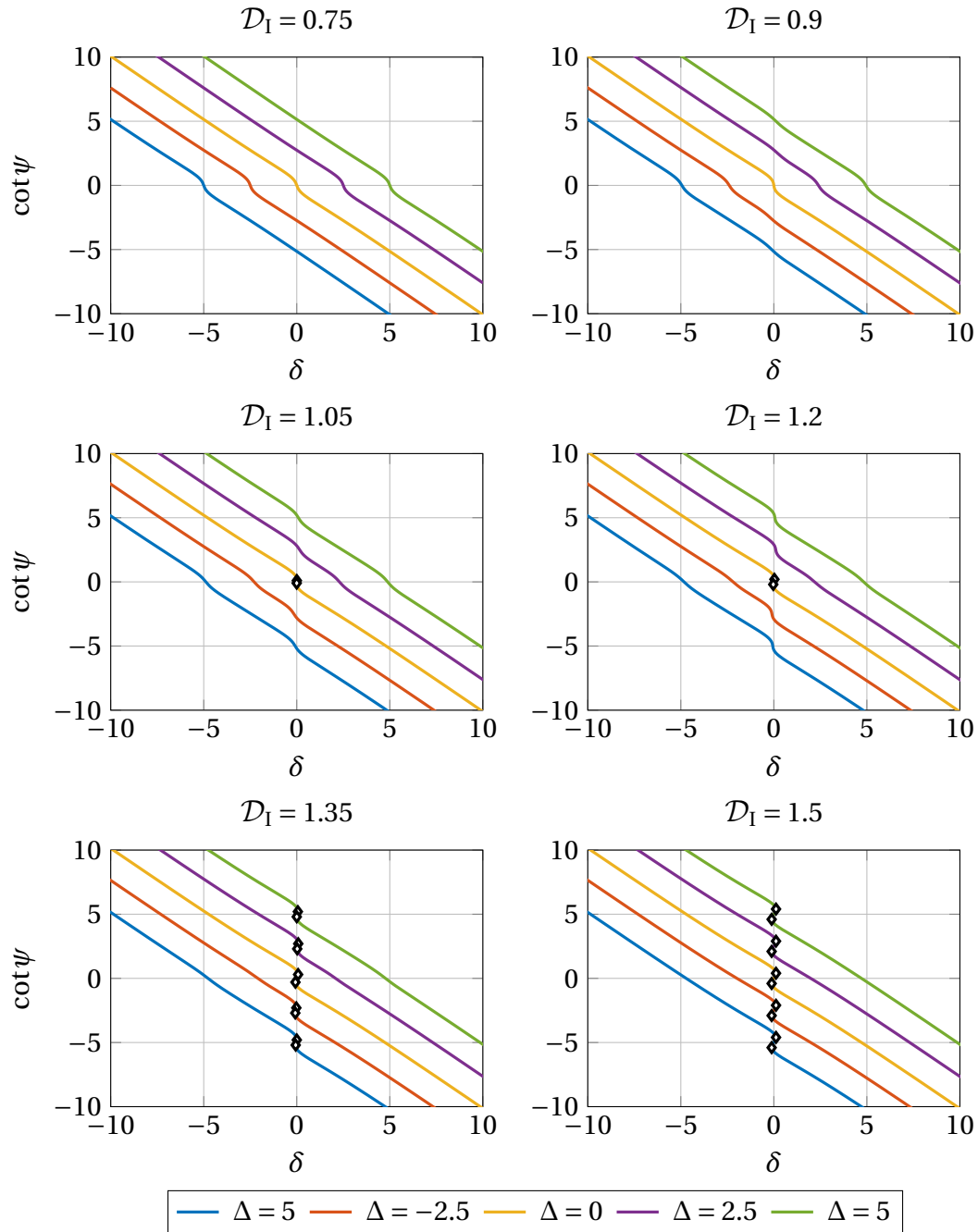


Figure 4.5 – Déphasage entre le piéton et le second mode de vibration en fonction du detuning piéton-structure δ pour différentes valeurs du detuning structurel Δ et du groupement adimensionnel \mathcal{D}_I ($\mathcal{D}_{II} = 1.5$).

4.6 Amplitude de la réponse sur le cycle limite

Les phases relatives entre le premier mode et le piéton ainsi que le second mode et le piéton sont obtenues respectivement à l'aide des relations (4.27) et (4.26). Une fois les phases relatives connues, les amplitudes de vibration $R_y^{(I)}$, $R_y^{(II)}$ et R_u sur le cycle limite sont obtenues en combinant les trois premières équations de (4.18). Dès lors, on obtient le système suivant

$$\begin{aligned} R_y^{(I)} &= \frac{\mu}{2\xi} \mathcal{M}_I R_u \sin(\phi + \psi) \\ R_y^{(II)} &= \frac{\mu}{2\xi} \mathcal{M}_{II} R_u \sin \psi \\ R_u &= \frac{1}{4} R_u^3 + \frac{1}{2} R_y^{(I)} \sin(\phi + \psi) + \frac{1}{2} R_y^{(II)} \sin \psi. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Les groupes adimensionnels \mathcal{D}_I et \mathcal{D}_{II} peuvent être introduits dans (4.28), qui se réécrit

$$\begin{aligned} R_y^{(I)} &= 2 \frac{\xi}{\mu} (2\mathcal{D}_I - \mathcal{D}_{II}) R_u \sin(\phi + \psi) \\ R_y^{(II)} &= 2 \frac{\xi}{\mu} (\mathcal{D}_{II} - \mathcal{D}_I) R_u \sin \psi \\ R_u &= \frac{1}{4} R_u^3 + \frac{1}{2} R_y^{(I)} \sin(\phi + \psi) + \frac{1}{2} R_y^{(II)} \sin \psi. \end{aligned} \quad (4.29)$$

La résolution de ce dernier système permet de déterminer les amplitudes de vibration sur le cycle limite

$$\begin{aligned} R_u &= 2 \sqrt{1 + \frac{\xi}{\mu} (\mathcal{D}_I - \mathcal{D}_{II}) \sin^2 \psi + \frac{\xi}{\mu} (\mathcal{D}_{II} - 2\mathcal{D}_I) \sin^2(\phi + \psi)} \\ R_y^{(I)} &= 4 \frac{\xi}{\mu} (2\mathcal{D}_I - \mathcal{D}_{II}) |\sin(\phi + \psi)| \sqrt{1 + \frac{\xi}{\mu} (\mathcal{D}_I - \mathcal{D}_{II}) \sin^2 \psi + \frac{\xi}{\mu} (\mathcal{D}_{II} - 2\mathcal{D}_I) \sin^2(\phi + \psi)} \\ R_y^{(II)} &= 4 \frac{\xi}{\mu} (\mathcal{D}_{II} - \mathcal{D}_I) |\sin \psi| \sqrt{1 + \frac{\xi}{\mu} (\mathcal{D}_I - \mathcal{D}_{II}) \sin^2 \psi + \frac{\xi}{\mu} (\mathcal{D}_{II} - 2\mathcal{D}_I) \sin^2(\phi + \psi)}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Les amplitudes de réponse sur le cycle limite en fonction du detuning entre le piéton et le premier mode δ sont données à la Figure 4.6 pour différentes valeurs du groupe adimensionnel \mathcal{D}_I . Le groupe \mathcal{D}_{II} est fixé à 5 et le detuning entre les deux modes Δ vaut 5 également.

Si $\mathcal{D}_I = \frac{\mathcal{D}_{II}}{2} = 2.5$, l'amplitude de la réponse dans le premier mode est nulle et elle est maximale dans le second mode. Ce maximum est atteint pour $\delta = \Delta = 5$. L'amplitude de la réponse du piéton atteint un minimum local pour la même abscisse. Dans l'autre cas extrême où $\mathcal{D}_I = \mathcal{D}_{II} = 5$, l'amplitude de la réponse dans le second mode est nulle alors qu'elle est

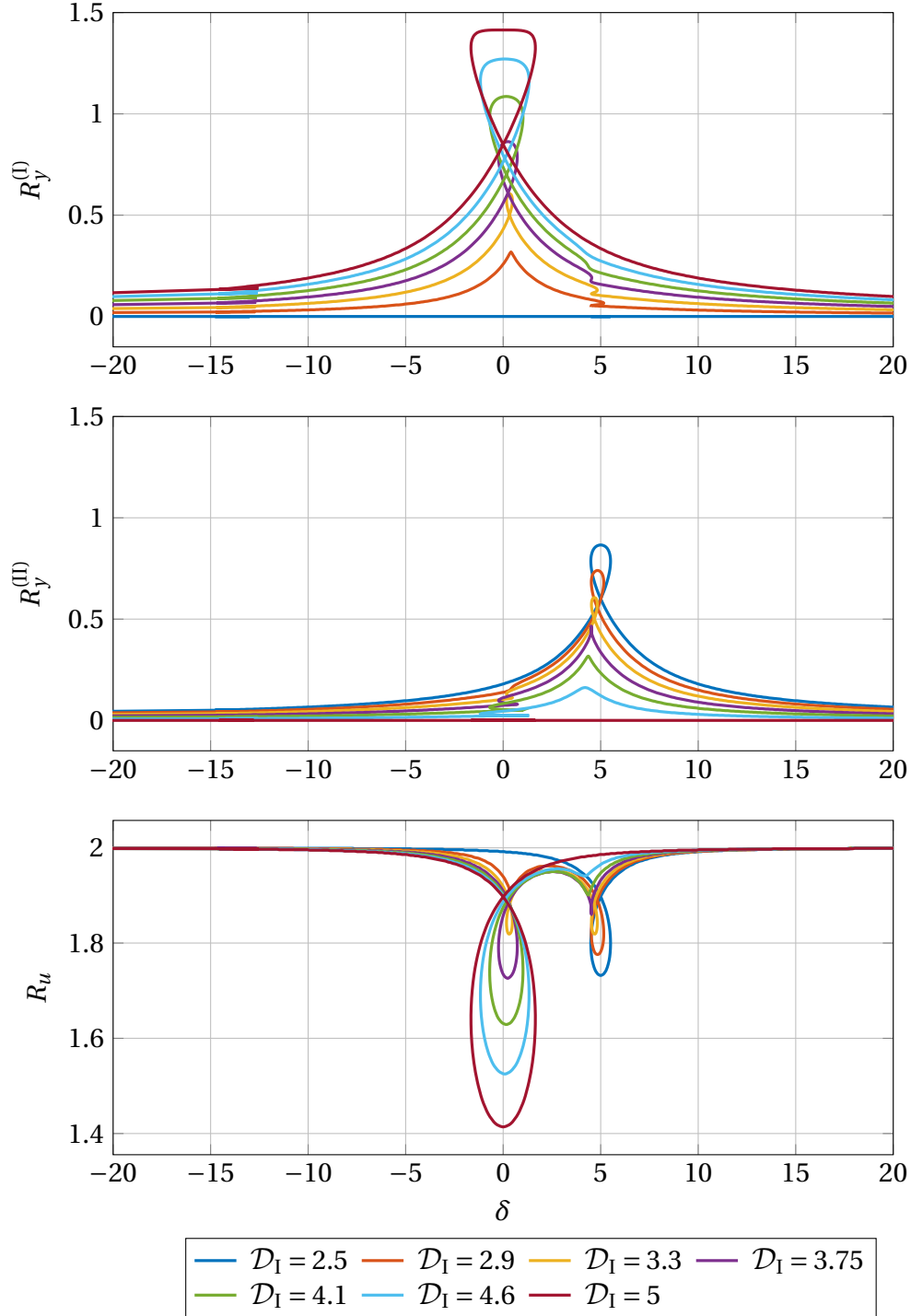


Figure 4.6 – Amplitudes des réponses $R_y^{(I)}$, $R_y^{(II)}$ et R_u sur le cycle limite pour différentes valeurs du groupe adimensionnel \mathcal{D}_I ($\mathcal{D}_{II} = 5$). Le « detuning » entre les deux modes est $\Delta = 5$.

maximale dans le premier mode. Entre ces deux situations, les courbes relatives à l'amplitude de la réponse dans les différents modes atteignent une amplitude maximale moins grande et ce maximum ne se produit plus à la même abscisse. En effet, dans le cas du premier mode, on observe un décalage de l'abscisse du maximum vers la droite (de $\delta = 0$ dans la direction de $\delta = \Delta$ en fait) au plus \mathcal{D}_I est petit par rapport à \mathcal{D}_{II} . C'est l'inverse dans le cas du second mode, avec un décalage de l'abscisse du maximum de $\delta = \Delta$ dans la direction de $\delta = 0$, au plus \mathcal{D}_I est proche de \mathcal{D}_{II} . Le detuning produisant l'amplitude maximale se situe dès lors entre $\delta = 0$ et $\delta = \Delta$. En outre, on observe que pour des valeurs intermédiaires de \mathcal{D}_I , la courbe du premier mode est légèrement perturbée pour une abscisse correspondant au maximum de la réponse dans le second mode. On observe un comportement similaire pour la courbe du second mode, où la courbe est perturbée dans le voisinage de $\delta = 0$. On constate par ailleurs que plus \mathcal{D}_I tend vers \mathcal{D}_{II} (resp. $\frac{\mathcal{D}_{II}}{2}$), plus la courbe relative au premier (resp. second) mode tend à être symétrique par rapport à $\delta = 0$ (resp. $\delta = \Delta$). Ces deux cas extrêmes traduisent des situations où l'on n'observe pas d'interaction entre les modes. En outre, si l'on s'intéresse à la courbe relative à la réponse du piéton, on constate qu'elle atteint deux minima locaux dans le voisinage de $\delta = 0$ et $\delta = \Delta$. Cette observation fait sens puisque l'on sait que le piéton adapte sa réponse en fonction de la réponse de la structure.

Notons que la courbe du piéton atteint deux minima locaux identiques pour $\mathcal{D}_I = 3.3$. Pour cette valeur particulière de \mathcal{D}_I , on observe que l'amplitude maximale de la réponse dans les deux modes est du même ordre de grandeur et que la courbe du premier mode n'est autre que le miroir de celle du second. Ce cas correspond à la situation où $\frac{\mathcal{D}_I}{\mathcal{D}_{II}} = \frac{2}{3}$. De part et d'autre de cette valeur charnière, c'est l'un ou l'autre mode qui domine.

Le même exercice a été réalisé à la Figure 4.7 pour $\mathcal{D}_{II} = 1.5$ en gardant le même detuning structurel ($\Delta = 5$). Pour le premier mode, on récupère le comportement en chapiteau observé au chapitre 3 pour toutes les valeurs de \mathcal{D}_I utilisées sauf pour $\mathcal{D}_I > 1.25$. Si l'on met cette observation avec les solutions de l'équation de phase à la Figure 4.4, on réalise que ce comportement est lié au fait qu'il n'existe qu'une seule racine réelle au polynôme en $\cot(\phi + \psi)$ pour un detuning structurel Δ non nul. A partir du moment où il existe plus d'une racine, la courbe d'amplitude forme une boucle dans le voisinage de $\delta = 0$, de manière similaire à ce que l'on a pu observer au chapitre précédent. On avait également pu se rendre compte par le biais des simulations numériques que l'amplitude sur le cycle limite correspondait à l'ordonnée du nœud de cette boucle. L'amplitude maximale correspondait à un déphasage de $\pm \frac{\pi}{2}$ et à un échange d'énergie maximum entre la structure et le piéton. Cette solution n'était cependant pas stable et l'amplitude sur le cycle limite tendait donc vers une amplitude inférieure, correspondant à une valeur différente pour le déphasage. La courbe relative au second mode, pour sa part, affiche un comportement en forme de chapiteau pour toutes les valeurs de \mathcal{D}_I présentées, puisqu'il n'existe qu'une racine à l'équation de phase dans le

voisinage de $\delta = \Delta$. On peut dès lors s'attendre à une synchronisation sur ce mode à condition que la sollicitation s'effectue à la bonne fréquence.

En conclusion, l'analyse de ces deux figures a permis de confirmer que l'amplitude maximale dans le premier mode s'effectue pour un detuning δ situé dans le voisinage de 0 et celle dans le second mode pour δ dans le voisinage de Δ . Ceci signifie que pour de faibles écarts de fréquences entre les deux modes ($|\Delta|$ compris dans les environs de l'intervalle $]0 - 10[$), les deux modes peuvent interagir. Pour de plus grandes valeurs de Δ , il n'y a pas de vibration d'amplitude significative dans les deux modes simultanément et donc, pas de réelle interaction. De plus, plus le groupement de paramètres \mathcal{D}_{II} est grand, plus l'amplitude des vibrations structurelles observées sera grande. En fonction du rapport $\frac{\mathcal{D}_I}{\mathcal{D}_{II}}$, le piéton sera plus sensible à l'un ou l'autre mode, ce qui se traduit par un minimum local dans sa courbe d'amplitude.

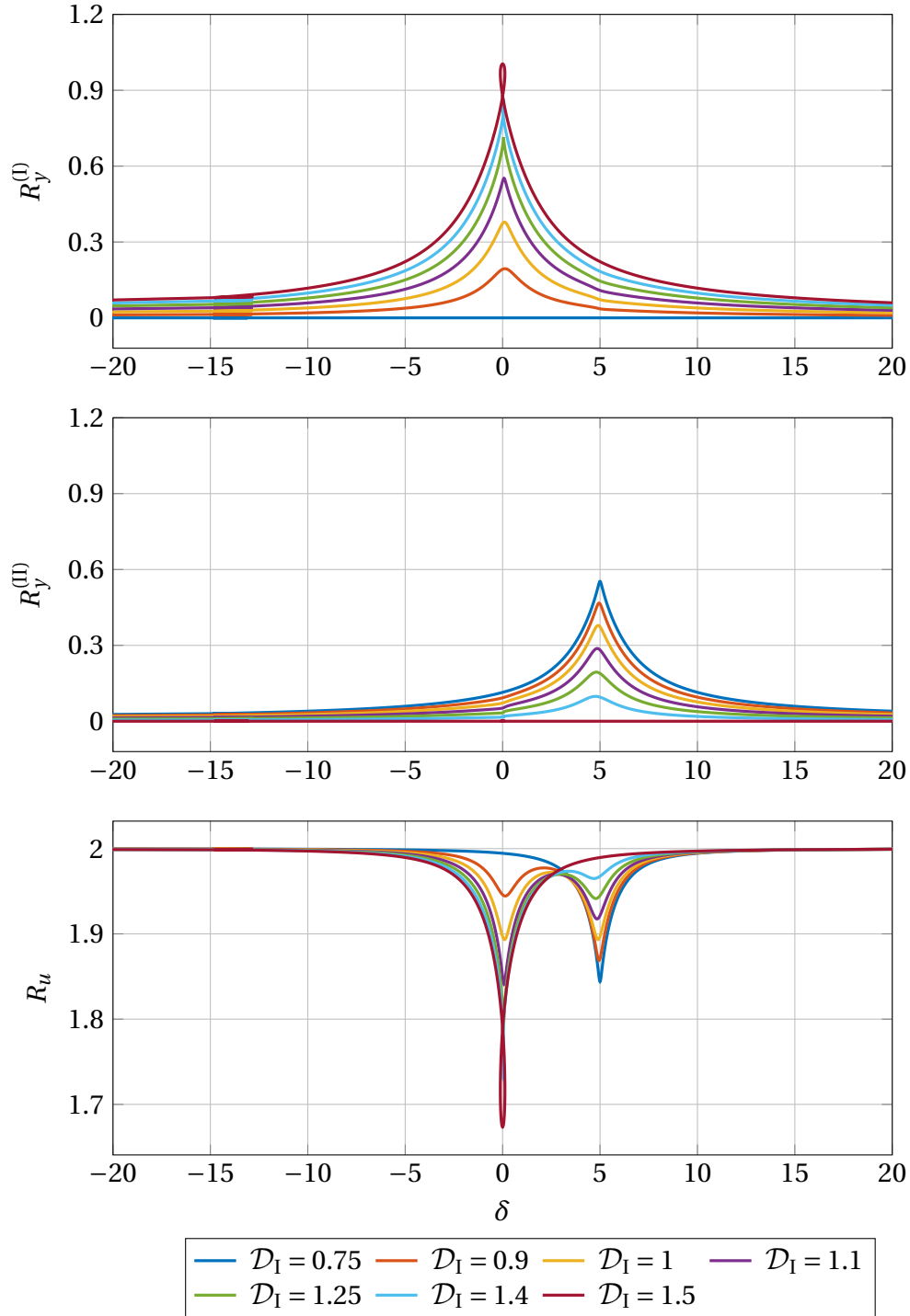


Figure 4.7 – Amplitudes des réponses $R_y^{(I)}$, $R_y^{(II)}$ et R_u sur le cycle limite pour différentes valeurs du groupe adimensionnel \mathcal{D}_I ($\mathcal{D}_{II} = 1.5$). Le « detuning » entre les deux modes est $\Delta = 5$.

4.7 Période du cycle limite

La période du cycle limite peut être obtenue à partir des solutions des équations différentielles homogènes (4.17), à savoir

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} &= R_y^{(\text{I})} \cos(\tau + \varphi(T)) \\ \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} &= R_y^{(\text{II})} \cos(\tau + \varphi(T) + \phi(T)) \\ \mathcal{U}_0 &= R_u \cos(\tau + \varphi(T) + \phi(T) + \psi(T))\end{aligned}\quad (4.31)$$

Une fois le cycle limite atteint, les variables $R_y^{(\text{I})}$, $R_y^{(\text{II})}$, R_u , ϕ et ψ ont convergé vers une solution stationnaire. Le membre de gauche des équations correspondantes de (4.18) est nul. En particulier, la première équation du système donne

$$\frac{R_y^{(\text{I})}}{R_u} = \frac{\mu^*}{2\xi_1^*} \mathcal{M}_1 \sin(\phi + \psi) = \frac{\mu}{2\xi} \mathcal{M}_1 \sin(\phi + \psi). \quad (4.32)$$

La phase additionnelle $\varphi(T)$ quant à elle, pourrait encore être légèrement dépendante du temps. Elle satisfait en fait la cinquième équation de (4.18), à savoir

$$\varphi' = -\frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_1 \frac{R_u}{R_y^{(\text{I})}} \cos(\phi + \psi). \quad (4.33)$$

En intégrant cette dernière équation, il vient

$$\begin{aligned}\varphi(T) &= \varphi_0 - \left(\frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_1 \frac{R_u}{R_y^{(\text{I})}} T \cos(\phi + \psi)_{LC} \right) \\ &= \varphi_0 - \left(\frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_1 \frac{2\xi_1^*}{\mu^* \mathcal{M}_1} T \frac{\cos(\phi + \psi)_{LC}}{\sin(\phi + \psi)_{LC}} \right) \\ &= \varphi_0 - (\xi_1^* T \cot(\phi + \psi)_{LC}) \\ &= \varphi_0 - (\xi_1^* \varepsilon \tau \cot(\phi + \psi)_{LC}) \\ &= \varphi_0 - (\xi^{(\text{I})} \tau \cot(\phi + \psi)_{LC})\end{aligned}\quad (4.34)$$

ou encore, puisqu'il a été fait l'hypothèse que l'amortissement était le même dans les deux modes,

$$\varphi(T) = \varphi_0 - (\xi \tau \cot(\phi + \psi)_{LC}). \quad (4.35)$$

En substituant dans les expressions de $\mathcal{Y}_0^{(\text{I})}$, $\mathcal{Y}_0^{(\text{II})}$ et \mathcal{U}_0 , la période pour une révolution complète sur le cycle limite est donnée par

$$T_{LC} = \frac{2\pi}{1 - \xi \cot(\phi + \psi)_{LC}} \simeq 2\pi (1 + \xi \cot(\phi + \psi)_{LC}) \quad (4.36)$$

avec un développement de Taylor au premier ordre.

Lorsque de detuning entre le piéton et le premier mode est petit ($|\delta| \ll 1$), le terme en $\cot(\phi + \psi)$ est presque nul et la période vaut approximativement 2π . Il y a une élongation de la période quand $\delta < 0$ ($\cot(\phi + \psi) > 0$) et un raccourcissement de cette dernière lorsque $\delta > 0$ ($\cot(\phi + \psi) < 0$). La période d'oscillations sur le cycle limite est donc gouvernée par l'amortissement structural et par le déphasage entre le piéton et le premier mode de la structure. Notons que ce déphasage est relié au déphasage entre le piéton et le second mode au travers de (4.27).

4.8 Validation des équations moyennées

La validation des équations moyennées (4.18) suit le même esprit que ce qui a été réalisé au chapitre précédent lorsqu'un seul mode avait été considéré.

Les trois sets de données utilisés sont donnés à la Table 4.2. Le detuning structural Δ a été maintenu constant ($\Delta = 5$) pour tous les jeux de données. Ce n'est pas le cas de l'amortissement structural et donc du paramètre $\nu = 1 + \varepsilon\Delta$ (rapport des fréquences des deux modes structurels). Ce paramètre est égal à 1.05 pour les deux premiers data sets et vaut 1.06 pour le dernier. Pour chaque simulation, plusieurs valeurs de mistuning piéton-structure sont considérées, comprenant les valeurs particulières $\Omega = 1$ et $\Omega = \nu$.

Paramètres du modèle	Set de données 1	Set de données 2	Set de données 3
$\xi^{(I)} = \xi^{(II)} = \xi$	$\xi = 0.01$	$\xi = 0.01$	$\xi = 0.012$
Δ	$\Delta = 5$	$\Delta = 5$	$\Delta = 5$
ν	$\nu = 1.05$	$\nu = 1.05$	$\nu = 1.06$
μ	$\mu = 0.05$	$\mu = 0.05$	$\mu = 0.05$
\mathcal{M}_I	$\mathcal{M}_I = 0.14$	$\mathcal{M}_I = 0.56$	$\mathcal{M}_I = 0.13$
\mathcal{M}_{II}	$\mathcal{M}_{II} = 0.51$	$\mathcal{M}_{II} = 0.10$	$\mathcal{M}_{II} = 0.1$
\mathcal{D}_I	$\mathcal{D}_I = 4.0$	$\mathcal{D}_I = 4.1$	$\mathcal{D}_I = 1$
\mathcal{D}_{II}	$\mathcal{D}_{II} = 7.2$	$\mathcal{D}_{II} = 4.8$	$\mathcal{D}_{II} = 1.4$
$\frac{\mathcal{D}_I}{\mathcal{D}_{II}}$	$\frac{\mathcal{D}_I}{\mathcal{D}_{II}} = 0.56$	$\frac{\mathcal{D}_I}{\mathcal{D}_{II}} = 0.87$	$\frac{\mathcal{D}_I}{\mathcal{D}_{II}} = 0.69$

Table 4.2 – Données numériques utilisées pour la validation des équations moyennées.

Les résultats relatifs aux simulations temporelles du premier jeu de données sont donnés aux Figures 4.8 et 4.9. Pour ce premier data set, le paramètre \mathcal{M}_I est relativement petit par

rapport à \mathcal{M}_{II} ce qui pourrait indiquer une masse modale plus importante dans le premier mode. En conséquence, on observe que \mathcal{D}_I est proche de $\frac{\mathcal{D}_{II}}{2}$, le rapport des deux groupes étant égal à 0.56.

Si l'on s'intéresse d'abord à l'amplitude de la réponse du premier mode (première rangée de graphiques de la Figure 4.8), on observe que lorsque $\Omega = 1$, cette dernière est légèrement inférieure à 0.5 une fois le cycle limite atteint. Notons que, bien que le piéton se déplace dans ce cas avec une fréquence égale la fréquence propre du mode, la réponse de la structure dans ce mode n'est pas maximale. En effet, si l'on regarde la courbe analytique de la réponse calculée à l'aide de (4.30) (graphique de gauche), on se rend compte que le maximum est atteint pour une valeur de Ω légèrement supérieure à 1 et donc une fréquence de marche quelque peu supérieure à la fréquence propre du mode. Il en va de même pour la courbe de R_u qui atteint un minimum local pour une valeur de Ω légèrement supérieure à 1. En termes de déphasage (Figure 4.9), on observe momentanément, pour le cas $\Omega = 1$, un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ pour $\tau \in [150 - 300]$ avant de converger vers une valeur proche de $\frac{\pi}{4}$ une fois le cycle limite atteint. Dans les autres cas, on observe un déphasage tendant soit vers 0 soit vers π sur le cycle limite.

Dans le cas du second mode, on observe une amplitude assez grande lorsque $\Omega = 1.05$ (fréquence de sollicitation égale à la fréquence de résonance). Cette amplitude grandit progressivement jusqu'à atteindre un maximum de l'ordre de 1.5 lorsque τ se situe dans les environs de 250, avant de diminuer et de tendre vers sa valeur à l'état stationnaire. Si l'on regarde la courbe analytique, on s'aperçoit que l'amplitude sur le cycle limite ne correspond pas au maximum de la courbe. Il existe en fait plusieurs racines à l'équation de phase (4.26) et celle produisant l'amplitude maximale semble être instable. Ainsi, bien que l'amplitude soit momentanément égale à ce maximum au cours de la période transitoire, le système converge vers un état plus stable, un état où il « se sent mieux » au fur et à mesure de la simulation. En termes de déphasage, cela correspond à un déphasage momentanément de $\frac{\pi}{2}$ avant de tendre vers $\frac{3\pi}{4}$ sur le cycle limite.

Enfin, concernant le piéton, on observe une amplitude de l'ordre de 2 pour des valeurs de Ω éloignées de 1 et de ν . Par ailleurs, l'amplitude du déplacement latéral du piéton est minimale pour $\Omega \simeq \nu$, montrant que le piéton est sensible aux oscillations de grande amplitude.

Les résultats obtenus pour le deuxième data set sont donnés aux Figures 4.10 et 4.11. Dans ce second jeu de données, les groupes de paramètres \mathcal{D}_I et \mathcal{D}_{II} sont assez proches, le rapport des deux étant égal à 0.87. On observe ainsi un comportement opposé à celui du premier data set, la masse modale du second mode étant désormais prépondérante. Ainsi, lorsque le mode II est en résonance ($\Omega = 1.05$), $R_y^{(I)}$ est supérieure à $R_y^{(II)}$, le second mode ayant du

mal à vibrer de manière importante. La courbe relative au piéton atteint un minimum pour $\Omega = 1$, puisque c'est ce mistuning qui engendre l'amplitude structurelle maximale.

Finalement, les résultats relatifs au troisième data set sont donnés aux Figures 4.12 et 4.13. Dans ce dernier jeu de données, l'amortissement a été quelque peu augmenté et vaut désormais 1.2%. On note que les groupements \mathcal{D}_I et \mathcal{D}_{II} sont plus petits que pour les data sets étudiés jusqu'à présent, étant respectivement égaux à 1 et 1.4. En conséquence, les courbes analytiques relatives à l'amplitude de la réponse de chacun des deux modes exhibent le comportement en forme de chapiteau discuté à la section 4.6 et une amplitude sur le cycle limite égale au maximum de cette courbe. Cette amplitude est de l'ordre de 0.5 pour le premier mode et 0.4 pour le second. Pour cette raison, le minimum de la courbe relative au piéton est atteint pour $\Omega = 1$. Finalement, pour chacun des modes, le déphasage sur le cycle limite est de l'ordre de $\frac{\pi}{2}$ pour une valeur adéquate du mistuning Ω , indiquant dès lors une synchronisation parfaite entre le piéton et le mode en question.

Avant de clôturer cette section, intéressons nous à la période et à la fréquence de la réponse sur le cycle limite, données à la Figure 4.14. Les deux droites mauves verticales en traits pointillés correspondent respectivement à $\Omega = 1.05$ et $\Omega = 1.06$. On observe un très bon accord entre les résultats obtenus par simulations numériques et les résultats obtenus analytiquement par perturbations. Pour le troisième jeu de données, on observe que tous les points de la courbe de fréquence sont pratiquement alignés sur une droite. Ce n'est pas le cas pour les deux autres jeux de données. Ce comportement est, de nouveau, à mettre en relation avec le nombre de racines à l'équation de phase.

Pour conclure, pour les trois jeux de données étudiés, l'approche moyennée permet de capter correctement l'enveloppe du système. Les équations moyennées (4.18) peuvent donc être considérées comme valides.

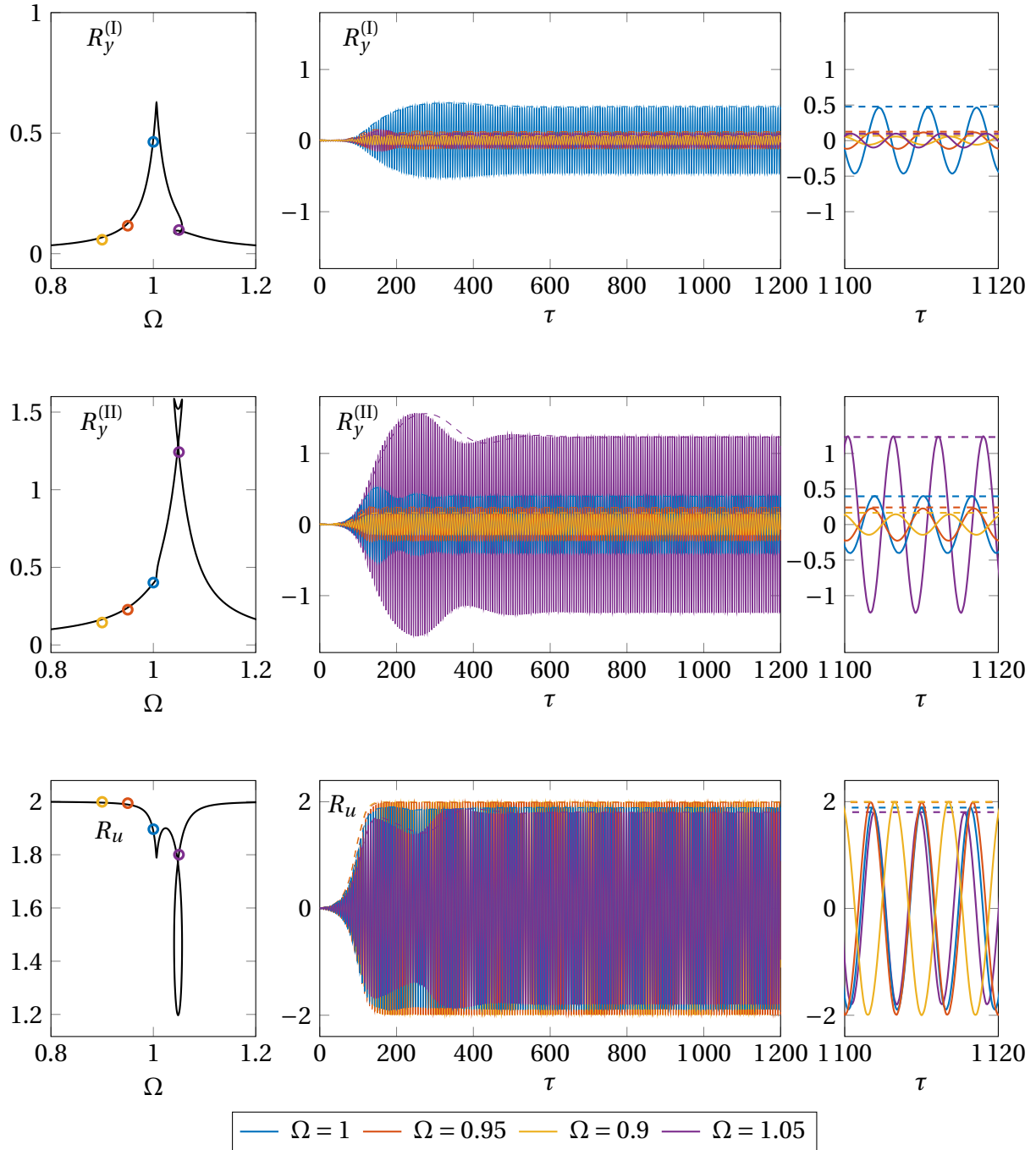


Figure 4.8 – Validation des équations moyennées pour le système couplé à deux modes de vibrations. Amplitudes $R_y^{(I)}$, $R_y^{(II)}$ et R_u au cours du temps pour le data set 1 ($\Delta = 5$, $\nu = 1.05$).

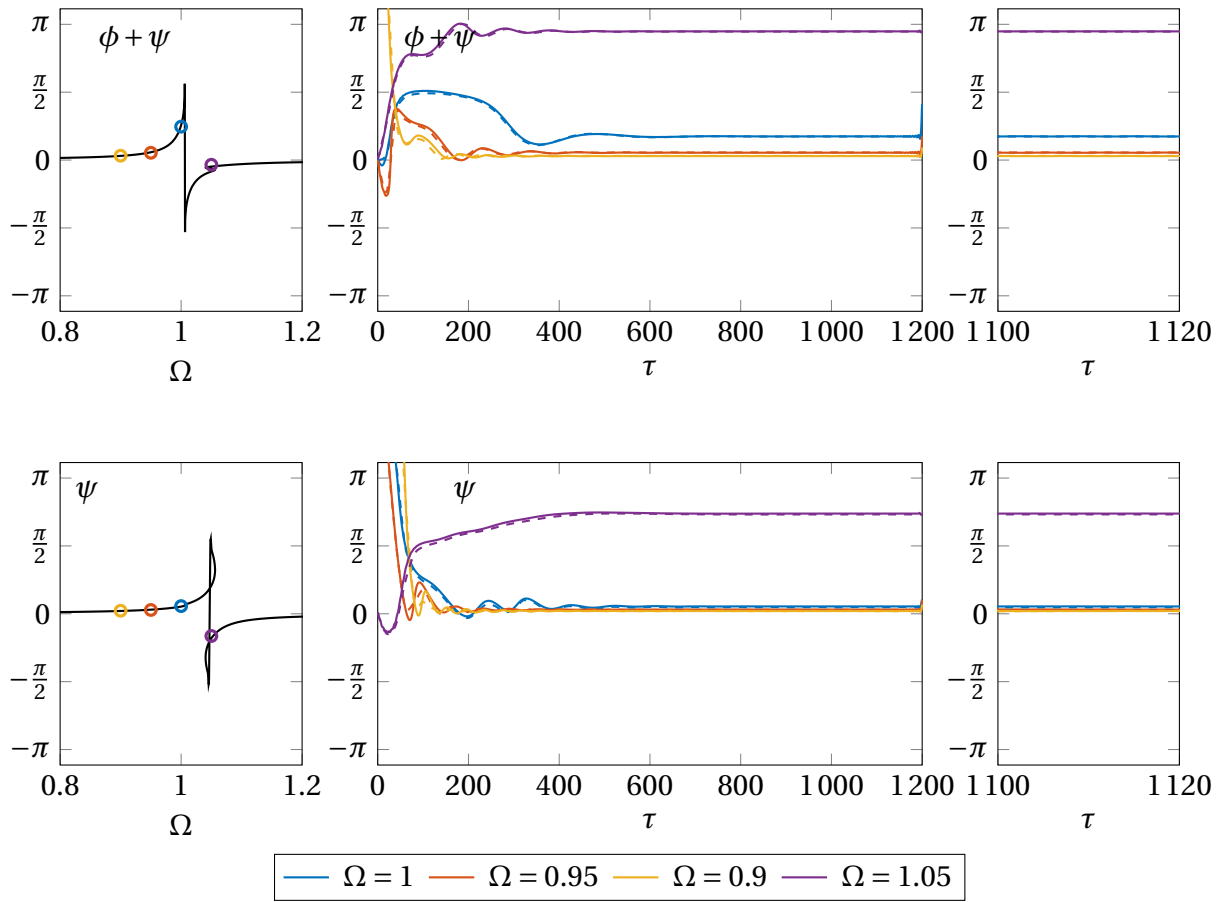


Figure 4.9 – Validation des équations moyennées pour le système couplé à deux modes de vibrations. Déphasage entre le piéton et les deux modes structuraux pour le data set 1 ($\Delta = 5$, $\nu = 1.05$).

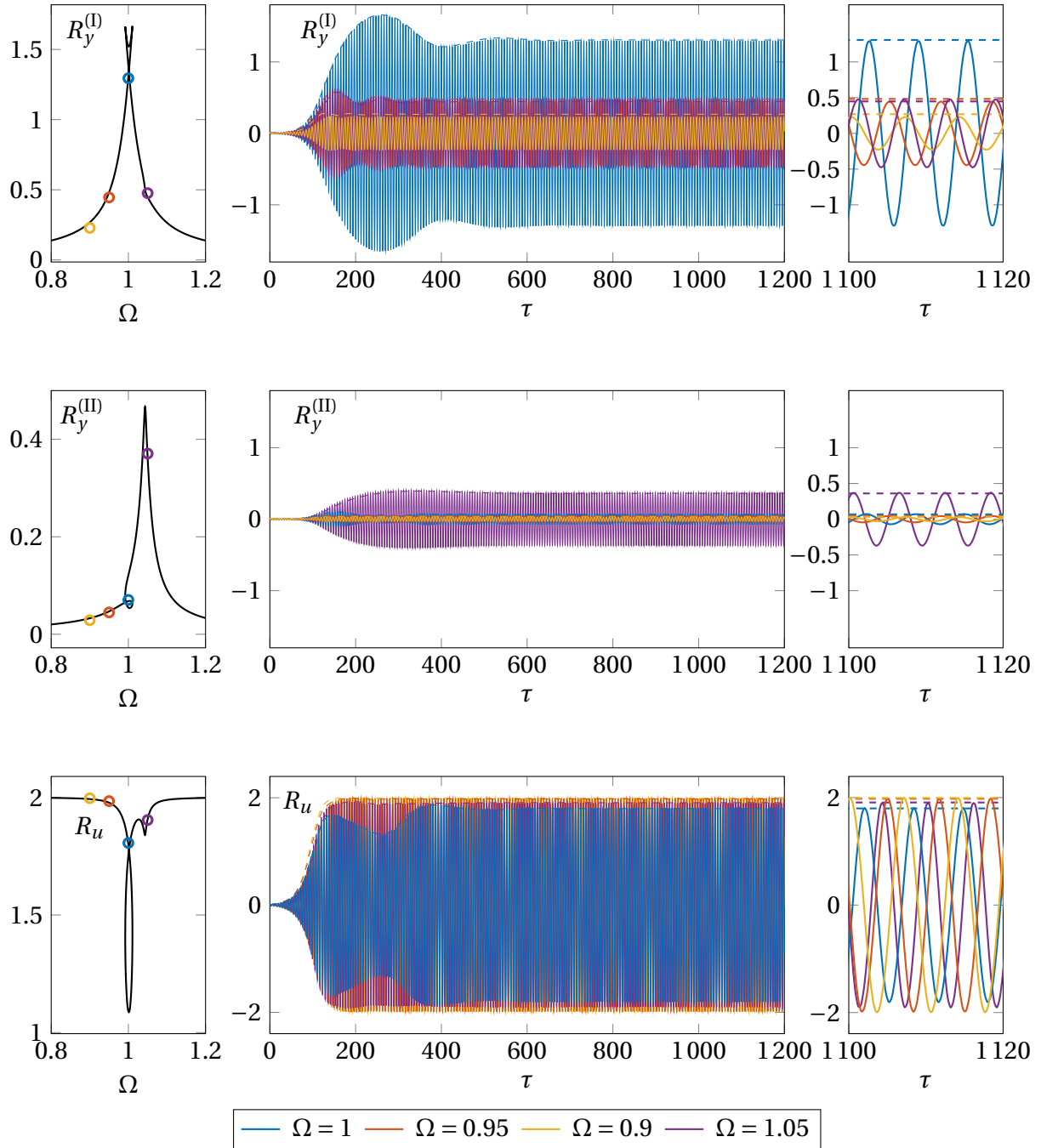


Figure 4.10 – Validation des équations moyennées pour le système couplé à deux modes de vibrations. Amplitudes $R_y^{(I)}$, $R_y^{(II)}$ et R_u au cours du temps pour le data set 2 ($\Delta = 5$, $\nu = 1.05$).

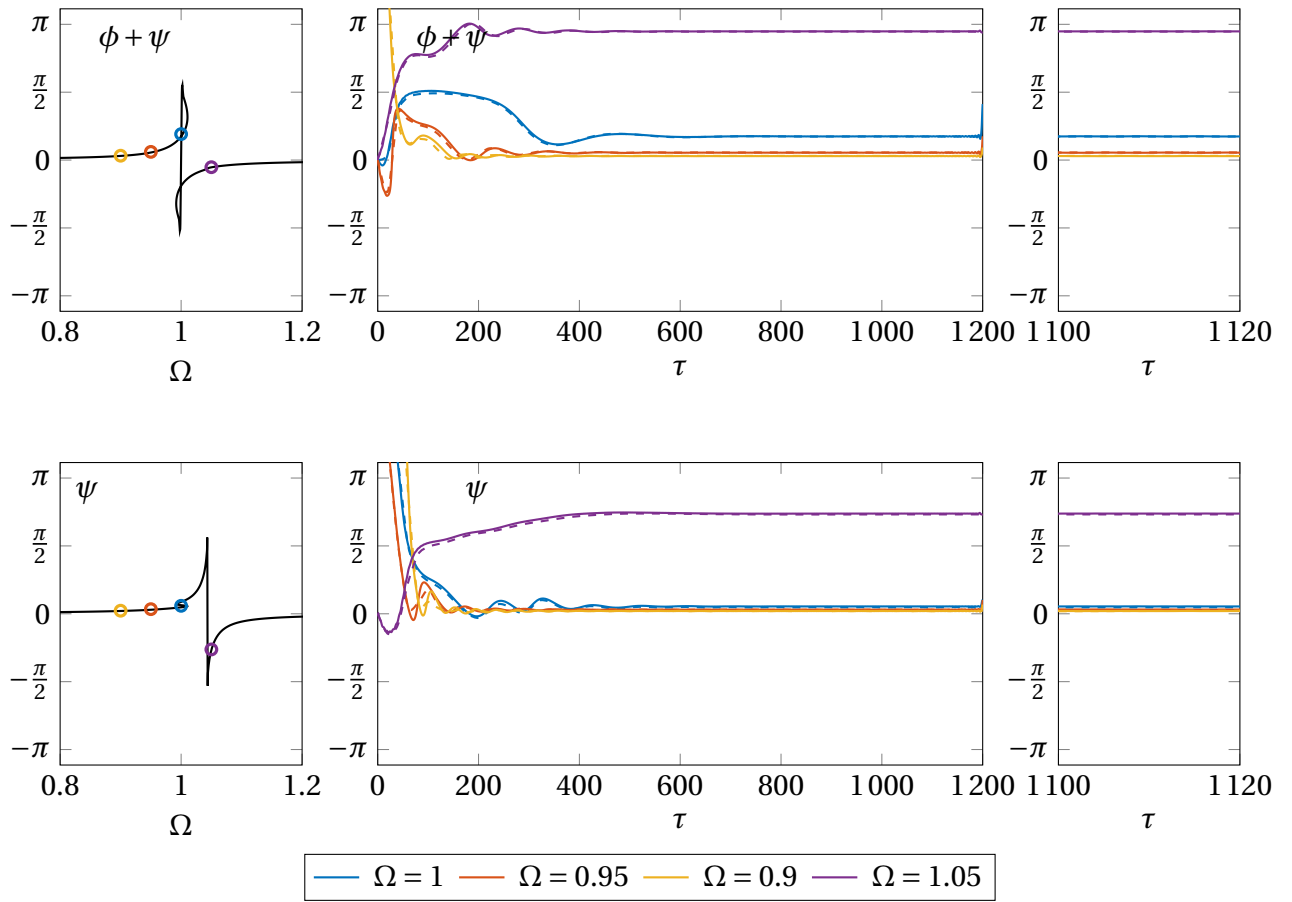


Figure 4.11 – Validation des équations moyennées pour le système couplé à deux modes de vibrations. Déphasage entre le piéton et les deux modes structurels pour le data set 2 ($\Delta = 5$, $\nu = 1.05$).

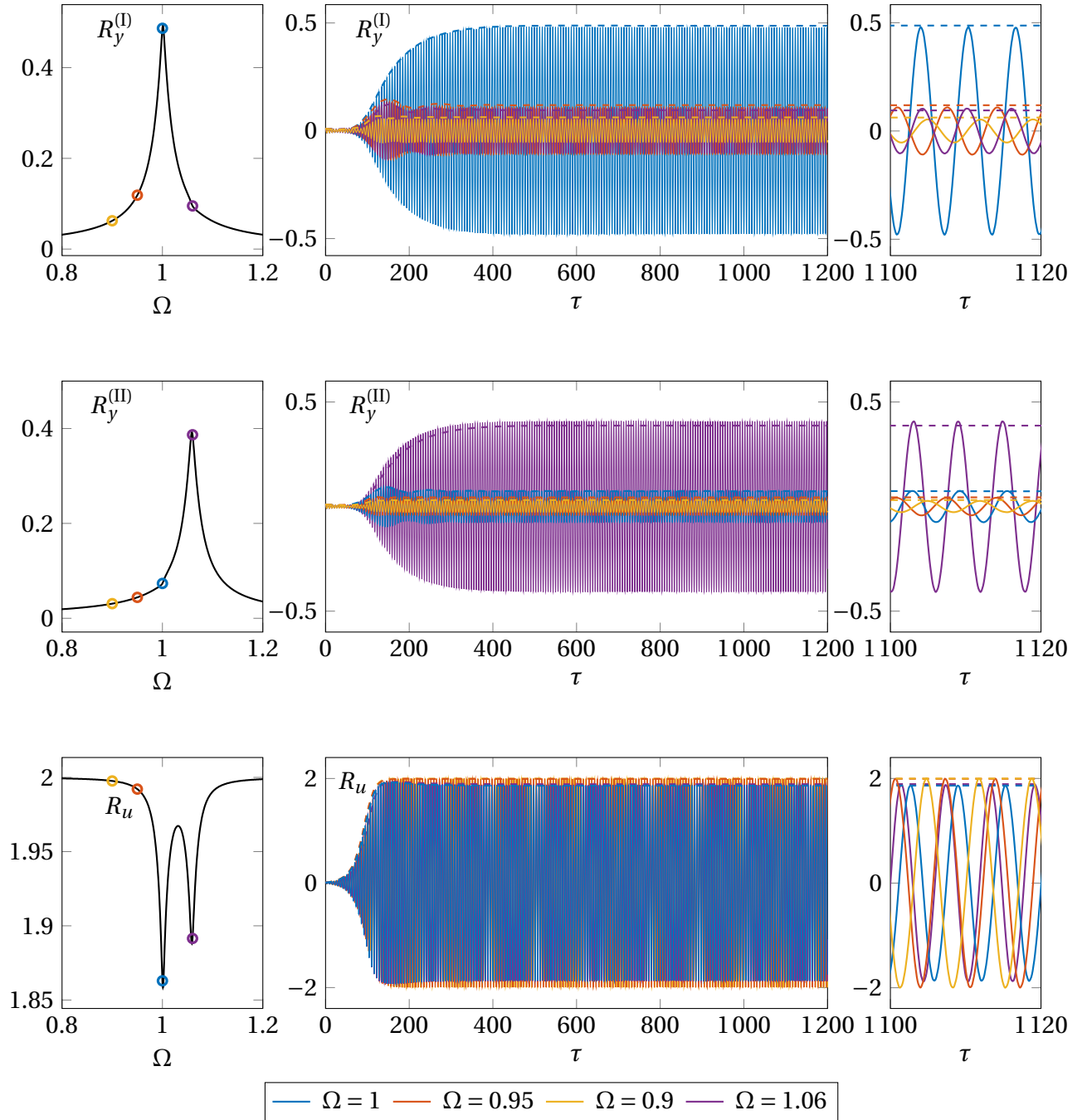


Figure 4.12 – Validation des équations moyennées pour le système couplé à deux modes de vibrations. Amplitudes $R_y^{(I)}$, $R_y^{(II)}$ et R_u au cours du temps pour le data set 3 ($\Delta = 5$, $\nu = 1.06$).

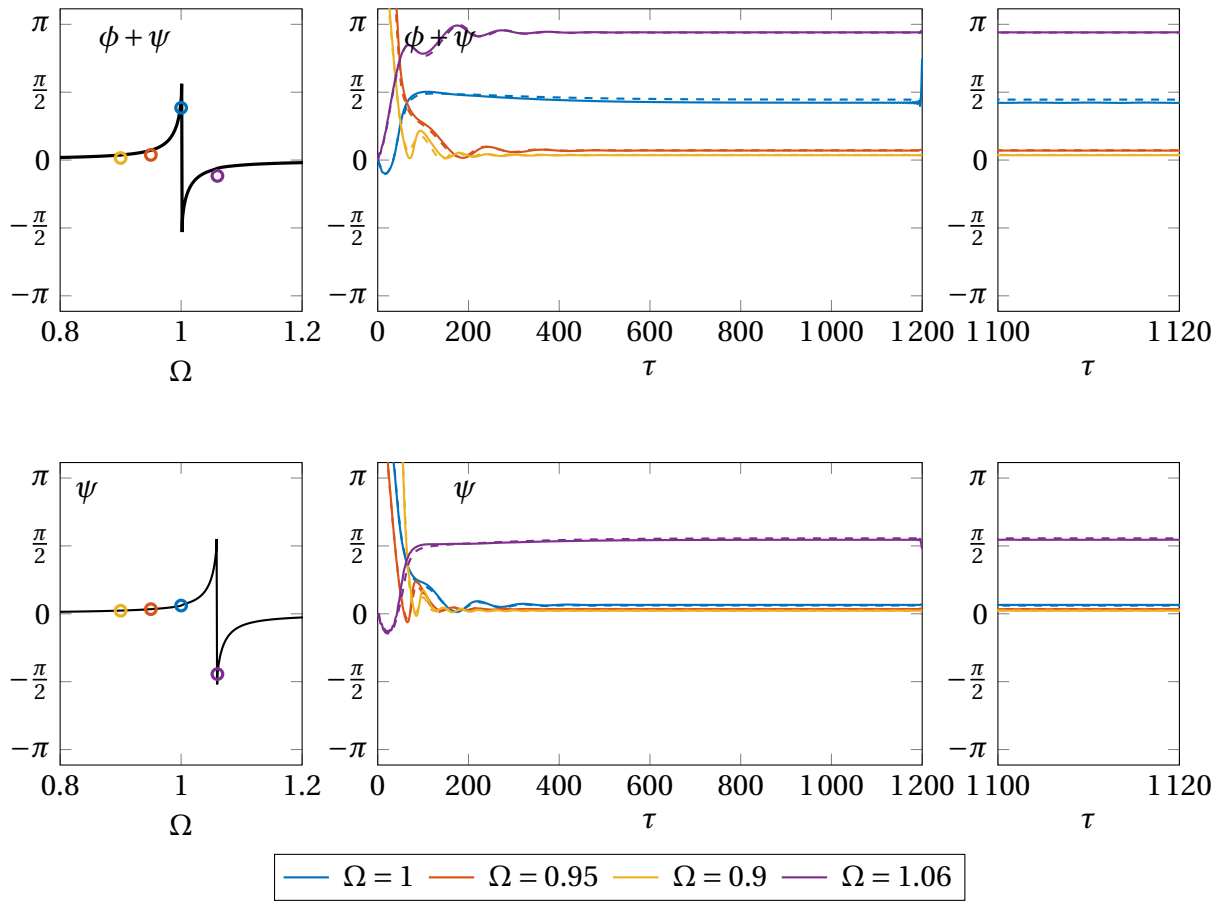


Figure 4.13 – Validation des équations moyennées pour le système couplé à deux modes de vibrations. Déphasage entre le piéton et les deux modes structurels pour le data set 3 ($\Delta = 5$, $\nu = 1.06$).

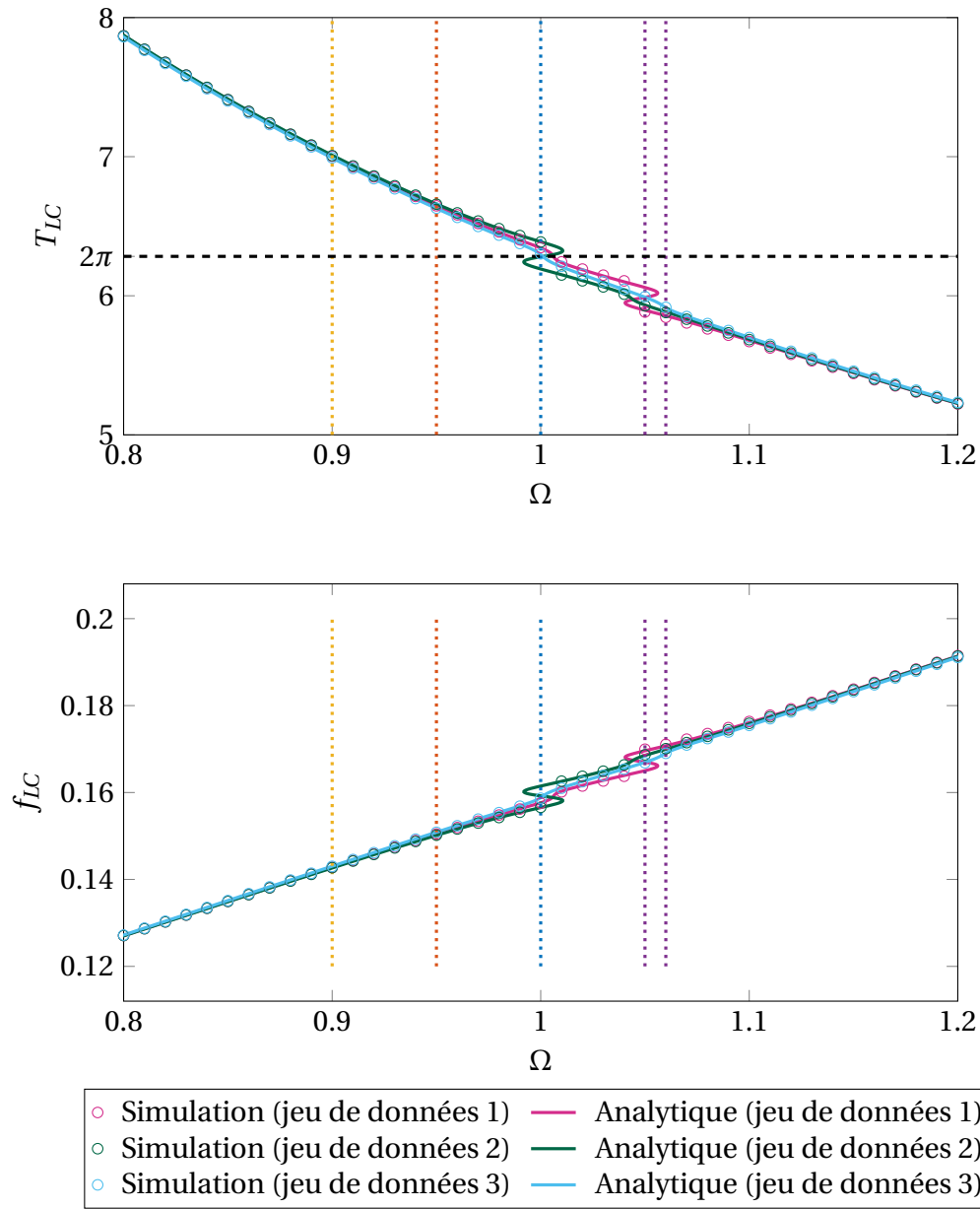


Figure 4.14 – Période et fréquence de la réponse sur le cycle limite pour les jeux de données utilisés.

4.9 Prise en compte des déformées modales

Après avoir négligé les déformées modales dans l'analyse, il est désormais temps d'étudier leur influence (et donc celle de la position du piéton) sur la réponse de la structure.

4.9.1 Système d'équations moyennées prenant en compte les déformées modales

Le système initial sous forme dimensionnelle donné par l'équation (4.4) est, pour rappel,

$$\begin{cases} M^{(I)} \ddot{y}^{(I)} + C^{(I)} \dot{y}^{(I)} + K^{(I)} y^{(I)} = -m_p (\ddot{y}^{(II)} + \ddot{u}) \Phi^{(I)}(vt) \\ M^{(II)} \ddot{y}^{(II)} + C^{(II)} \dot{y}^{(II)} + K^{(II)} y^{(II)} = -m_p (\ddot{y}^{(I)} + \ddot{u}) \Phi^{(II)}(vt) \\ \ddot{u}_y + 2\mu\omega_p \dot{u}_y (\beta u_y^2 - 1) + \omega_p^2 u_y = -(\ddot{y}^{(I)} + \ddot{y}^{(II)}) . \end{cases} \quad (4.37)$$

Dès à présent, l'hypothèse est faite que les modes sont de forme sinusoïdale, de telle sorte que le premier mode ait un seul ventre et le second deux. Ainsi, les formes modales sont données par

$$\Phi^{(I)}(vt) = \sin\left(\frac{\pi vt}{L}\right) \quad \text{et} \quad \Phi^{(II)}(vt) = \sin\left(\frac{2\pi vt}{L}\right). \quad (4.38)$$

L'introduction du temps adimensionnel τ dans les expressions des formes modales fait apparaître, de manière similaire à ce qui a été effectué à la section 3.3, la période propre du premier mode de la structure $T_s^{(I)}$. Ces expressions s'écrivent dès lors

$$\Phi^{(I)}(v\tau) = \sin\left(\frac{vT_s^{(I)}}{2L}\tau\right) \quad \text{et} \quad \Phi^{(II)}(v\tau) = \sin\left(\frac{vT_s^{(I)}}{L}\tau\right). \quad (4.39)$$

Le paramètre adimensionnel \mathcal{V} , donné à la section 3.3, est réutilisé ici en adaptant les notations

$$\mathcal{V} = \frac{vT_s^{(I)}}{2\xi L}. \quad (4.40)$$

Notons que l'on capitalise ici sur l'hypothèse utilisée dans les sections précédents, à savoir que le coefficient d'amortissement est le même dans les deux modes. L'introduction de ce paramètre permet d'introduire l'échelle de temps lente $T = \varepsilon\tau$ de telle sorte que

$$\begin{aligned} \Phi^{(I)}(\tau) &= \sin(\mathcal{V}\xi^{(I)}\tau) = \sin(\mathcal{V}\varepsilon\xi_1^*\tau) \\ \Phi^{(II)}(\tau) &= \sin(2\mathcal{V}\xi^{(I)}\tau) = \sin(2\mathcal{V}\varepsilon\xi_1^*\tau) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Finalement, la version adimensionnelle de (4.37) est donnée par

$$\begin{cases} \mathcal{Y}^{(\text{I})''} + 2\xi^{(\text{I})}\mathcal{Y}^{(\text{I})'} + \mathcal{Y}^{(\text{I})} = \left(-\mu^2\nu\mathcal{M}_{\text{I}}\mathcal{Y}^{(\text{II})''} - \mu\mathcal{M}_{\text{I}}\mathcal{U}''\right)\sin(\mathcal{V}\varepsilon\xi_{\text{I}}^*\tau) \\ \mathcal{Y}^{(\text{II})''} + 2\xi^{(\text{II})}\nu\mathcal{Y}^{(\text{II})'} + \nu^2\mathcal{Y}^{(\text{I})} = \left(-\mu^2\nu\mathcal{M}_{\text{II}}\mathcal{Y}^{(\text{I})''} - \mu\nu\mathcal{M}_{\text{II}}\mathcal{U}''\right)\sin(2\mathcal{V}\varepsilon\xi_{\text{I}}^*\tau) \\ \mathcal{U}'' + 2\mu\Omega\mathcal{U}'(\mathcal{U}^2 - 1) + \Omega^2\mathcal{U} = -\mu\mathcal{Y}^{(\text{I})''} - \mu\nu\mathcal{Y}^{(\text{II})''}. \end{cases} \quad (4.42)$$

En appliquant la méthode d'analyse à échelles multiples au système (4.42) (voir détails à l'annexe D), on obtient les équations moyennées suivantes

$$\begin{cases} R_y^{(\text{I})'} = -\xi_{\text{I}}^* R_y^{(\text{I})} + \frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_{\text{I}} R_u \sin(\mathcal{V}\xi_{\text{I}}^* \varepsilon \tau) \sin(\phi + \psi) \\ R_y^{(\text{II})'} = -\xi_{\text{II}}^* R_y^{(\text{II})} + \frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_{\text{II}} R_u \sin(2\mathcal{V}\xi_{\text{I}}^* \varepsilon \tau) \sin \psi \\ R_u' = \mu^* \left(R_u - \frac{1}{4} R_u^3 - \frac{1}{2} R_y^{(\text{I})} \sin(\phi + \psi) - \frac{1}{2} R_y^{(\text{II})} \sin \psi \right) \\ \phi' = \Delta + \frac{\mu^*}{2} R_u \left(\frac{\mathcal{M}_{\text{I}}}{R_y^{(\text{I})}} \cos(\phi + \psi) \sin(\mathcal{V}\xi_{\text{I}}^* \varepsilon \tau) - \frac{\mathcal{M}_{\text{II}}}{R_y^{(\text{II})}} \sin(2\mathcal{V}\xi_{\text{I}}^* \varepsilon \tau) \cos \psi \right) \\ \psi' = -\frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_{\text{I}} \sin(\mathcal{V}\xi_{\text{I}}^* \varepsilon \tau) \frac{R_u}{R_y^{(\text{I})}} \cos(\phi + \psi) \\ \psi' = \delta - \Delta + \frac{\mu^*}{2} \left(\mathcal{M}_{\text{II}} \frac{R_u}{R_y^{(\text{II})}} \sin(2\mathcal{V}\xi_{\text{I}}^* \varepsilon \tau) \cos \psi - \frac{R_y^{(\text{I})}}{R_u} \cos(\phi + \psi) - \frac{R_y^{(\text{II})}}{R_u} \cos \psi \right). \end{cases} \quad (4.43)$$

Cette fois encore, on observe que la prise en compte de la forme modale ne permet pas d'obtenir une solution stationnaire. Une simulation de la dynamique rapide est dès lors nécessaire pour pouvoir étudier le système (4.42).

4.9.2 Simulation de la dynamique rapide du système

Les données utilisées pour les simulations temporelles sont fournies à la Table 4.3. Ces données sont les mêmes que celles de la Table 4.2 lorsque la forme du mode était négligée, seul le paramètre $\mathcal{V}(\Omega)$ a été ajouté.

Les simulations temporelles relatives au premier jeu de données sont disponibles aux Figures 4.15 et 4.16, respectivement pour l'amplitude des vibrations et pour le déphasage entre le piéton et chacun des deux modes.

L'amplitude de vibration est plus grande dans le second mode que dans le premier. Ce fait peut être attribué au ratio $\frac{\mathcal{D}_{\text{I}}}{\mathcal{D}_{\text{II}}}$, de l'ordre de 0.5 dans ce jeu de données. Dans le second mode, on observe deux maxima locaux sur une traversée, correspondant chacun à l'instant où le piéton se trouve sur un ventre. En termes de déphasage entre le piéton et le premier mode, la phase relative vaut momentanément $\frac{\pi}{2}$ quand le piéton est au milieu de la travée dans le

Paramètres du modèle	Set de données 1	Set de données 2	Set de données 3
$\xi^{(I)} = \xi^{(II)} = \xi$	$\xi = 0.01$	$\xi = 0.01$	$\xi = 0.012$
Δ	$\Delta = 5$	$\Delta = 5$	$\Delta = 5$
ν	$\nu = 1.05$	$\nu = 1.05$	$\nu = 1.06$
μ	$\mu = 0.05$	$\mu = 0.05$	$\mu = 0.05$
\mathcal{M}_I	$\mathcal{M}_I = 0.14$	$\mathcal{M}_I = 0.56$	$\mathcal{M}_I = 0.13$
\mathcal{M}_{II}	$\mathcal{M}_{II} = 0.51$	$\mathcal{M}_{II} = 0.10$	$\mathcal{M}_{II} = 0.1$
\mathcal{D}_I	$\mathcal{D}_I = 4.0$	$\mathcal{D}_I = 4.1$	$\mathcal{D}_I = 1$
\mathcal{D}_{II}	$\mathcal{D}_{II} = 7.2$	$\mathcal{D}_{II} = 4.8$	$\mathcal{D}_{II} = 1.4$
$\frac{\mathcal{D}_I}{\mathcal{D}_{II}}$	$\frac{\mathcal{D}_I}{\mathcal{D}_{II}} = 0.56$	$\frac{\mathcal{D}_I}{\mathcal{D}_{II}} = 0.87$	$\frac{\mathcal{D}_I}{\mathcal{D}_{II}} = 0.69$
$\mathcal{V}(\Omega)$	$\mathcal{V} = \{0.45, 0.43, 0.48\}$	$\mathcal{V} = \{0.45, 0.43, 0.48\}$	$\mathcal{V} = \{0.38, 0.36, 0.40\}$

Table 4.3 – Données numériques utilisées pour les simulations .

cas $\Omega = 1$. On note cependant que ce déphasage n'est pas vraiment constant, il évolue momentanément dans le voisinage de $\frac{\pi}{2}$ avant d'évoluer vers $-\frac{\pi}{2}$ et ainsi de suite. Dans le cas du second mode, le déphasage se situe majoritairement entre $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ lorsque $\Omega = \nu$ ce qui explique l'amplitude importante dans ce mode. Comme observé au chapitre précédent, la durée du déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ est plus longue, ce qui explique l'amplitude plus importante observée durant cette période.

Le deuxième data set (Figures 4.17 et 4.18) affiche pour sa part une amplitude de réponse beaucoup plus grande dans le premier mode que dans le second, ce qui est à attribuer au rapport $\frac{\mathcal{D}_I}{\mathcal{D}_{II}}$, proche de l'unité. L'amplitude dans le premier mode est supérieure lors du voyage retour du piéton que lors du voyage aller. Dans le second mode, on atteint toujours l'amplitude maximale sur la seconde moitié de la traversée et la minimale quand le piéton se trouve à mi-travée puisque le piéton se trouve alors sur un nœud du mode. On observe un déphasage de $\frac{-\pi}{2}$ pendant une période assez longue sur le premier mode lors du voyage retour du piéton pour $\Omega = 1$. On observe également un déphasage de l'ordre de $\pm\frac{\pi}{2}$ dans le second mode pour $\Omega = \nu = 1.05$.

Pour le troisième data set (Figures 4.19 et 4.20), on observe une différence d'amplitude beaucoup moins grande entre les différents modes. Cela s'explique par les valeurs relativement proches des paramètres \mathcal{M}_I et \mathcal{M}_{II} , ce qui se traduit par un rapport $\frac{\mathcal{D}_I}{\mathcal{D}_{II}}$ de l'ordre de 2/3. Ces deux groupements ont une valeur assez faible pour ce jeu de données, \mathcal{D}_I étant égal à 1 et \mathcal{D}_{II} à 1.4. Cette situation implique des amplitudes assez faibles des réponses de chacun des modes (de l'ordre de 0.5 au maximum pour le premier mode et de l'ordre de 0.4 au maximum pour le second), à l'instar de ce qui a été observé sans formes modales. La structure étant for-

tement amortie, on note après le passage du piéton par un nœud du mode, une amplitude presque nulle dans la réponse de chaque mode. Finalement, concernant le déphasage entre le piéton et le premier (resp. second) mode, celui-ci passe une durée équivalente dans le voisinage de $\frac{\pi}{2}$ et de $-\frac{\pi}{2}$ pour $\Omega = 1$ (resp. $\Omega = \nu$), ce qui explique que l'amplitude de la réponse structurelle soit semblable entre les différentes traversées.

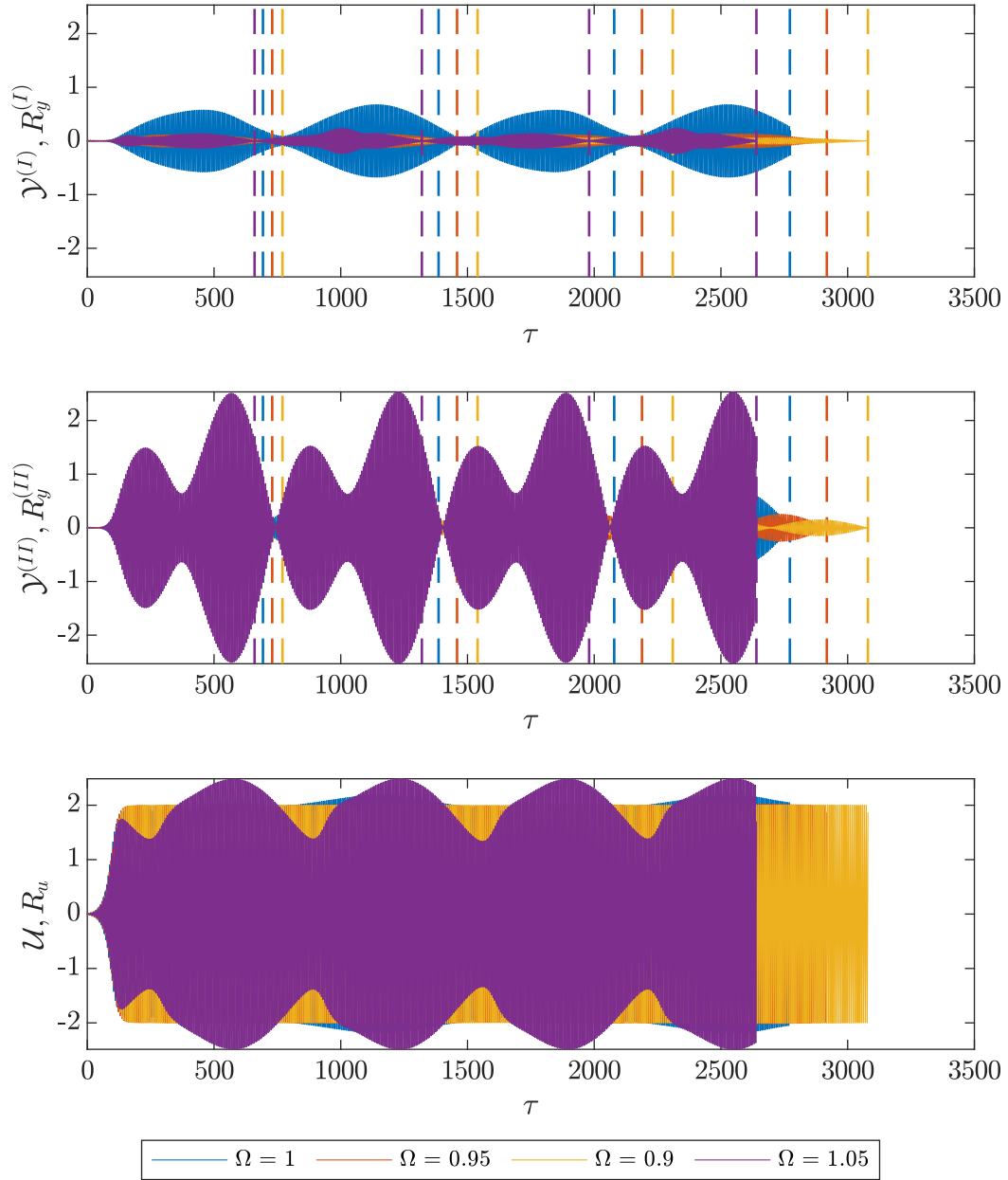


Figure 4.15 – Amplitudes résultant des simulations temporelles de la dynamique rapide du système prenant en compte les formes modales pour le jeu de données 1.

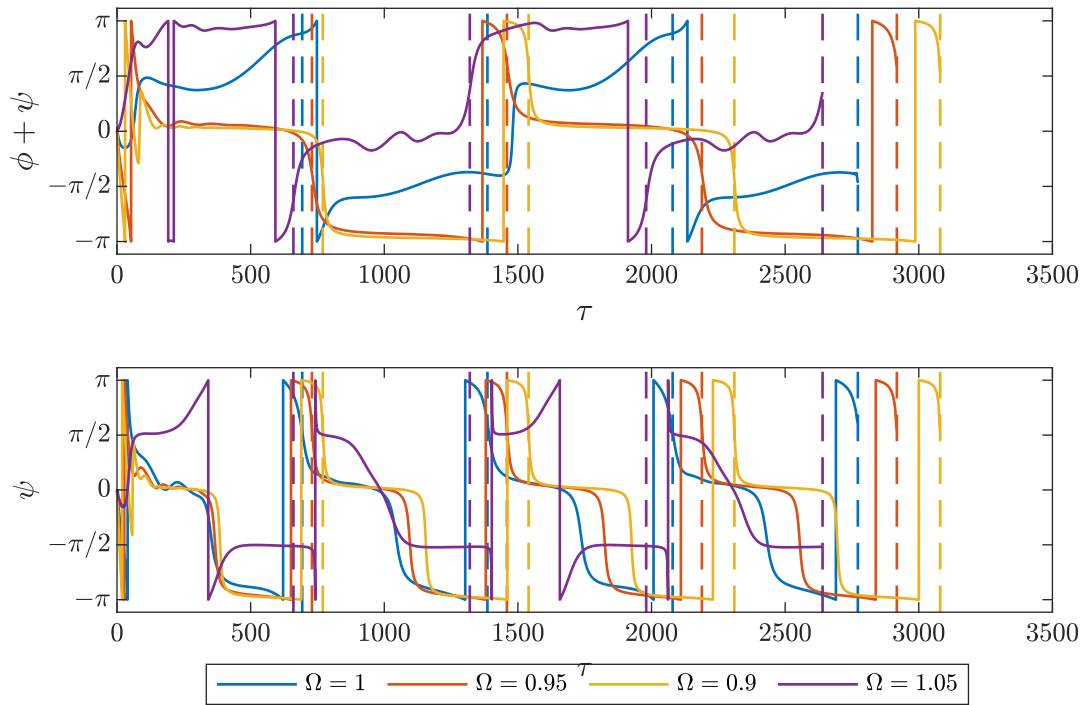


Figure 4.16 – Déphasages résultant des simulations temporelles de la dynamique rapide du système prenant en compte les formes modales pour le jeu de données 1.

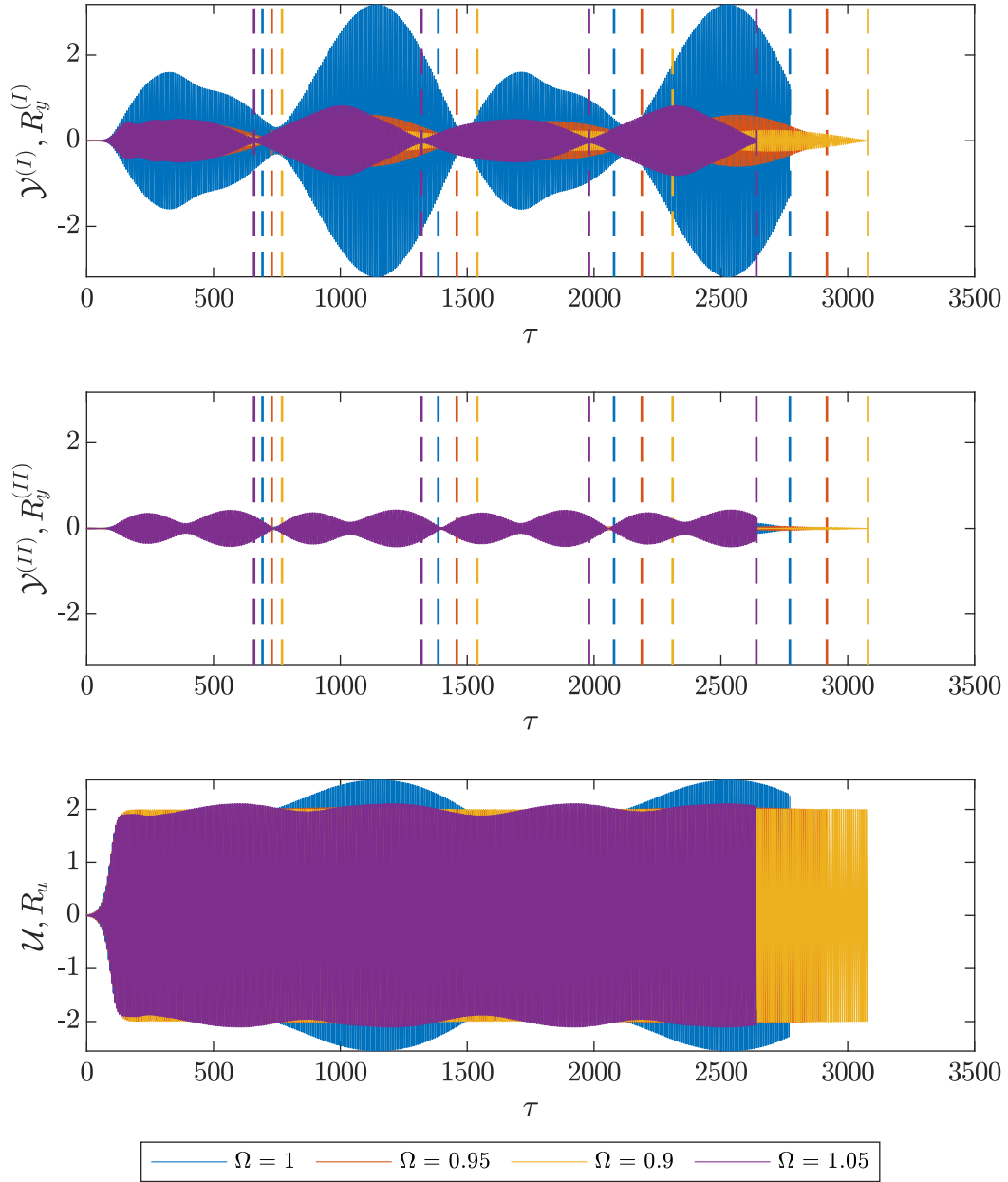


Figure 4.17 – Amplitudes résultant des simulations temporelles de la dynamique rapide du système prenant en compte les formes modales pour le jeu de données 2.

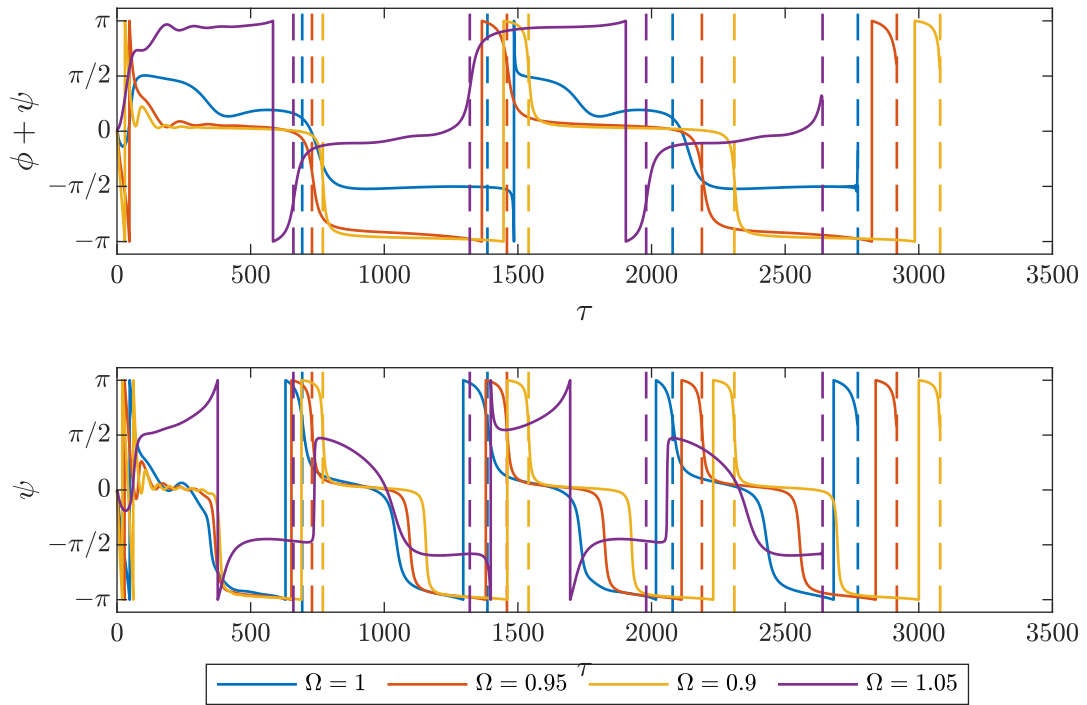


Figure 4.18 – Déphasages résultant des simulations temporelles de la dynamique rapide du système prenant en compte les formes modales pour le jeu de données 2.

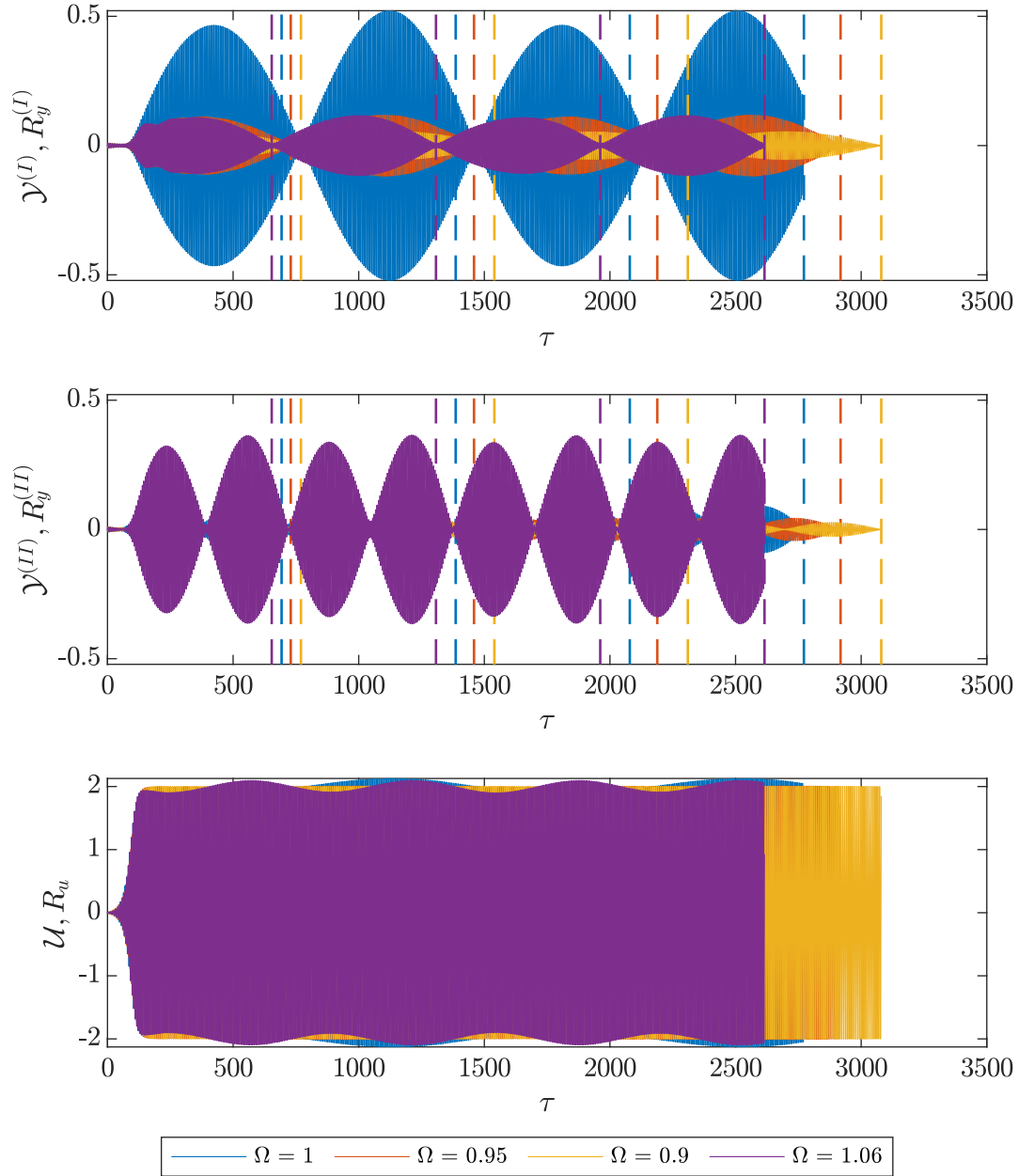


Figure 4.19 – Amplitudes résultant des simulations temporelles de la dynamique rapide du système prenant en compte les formes modales pour le jeu de données 3.

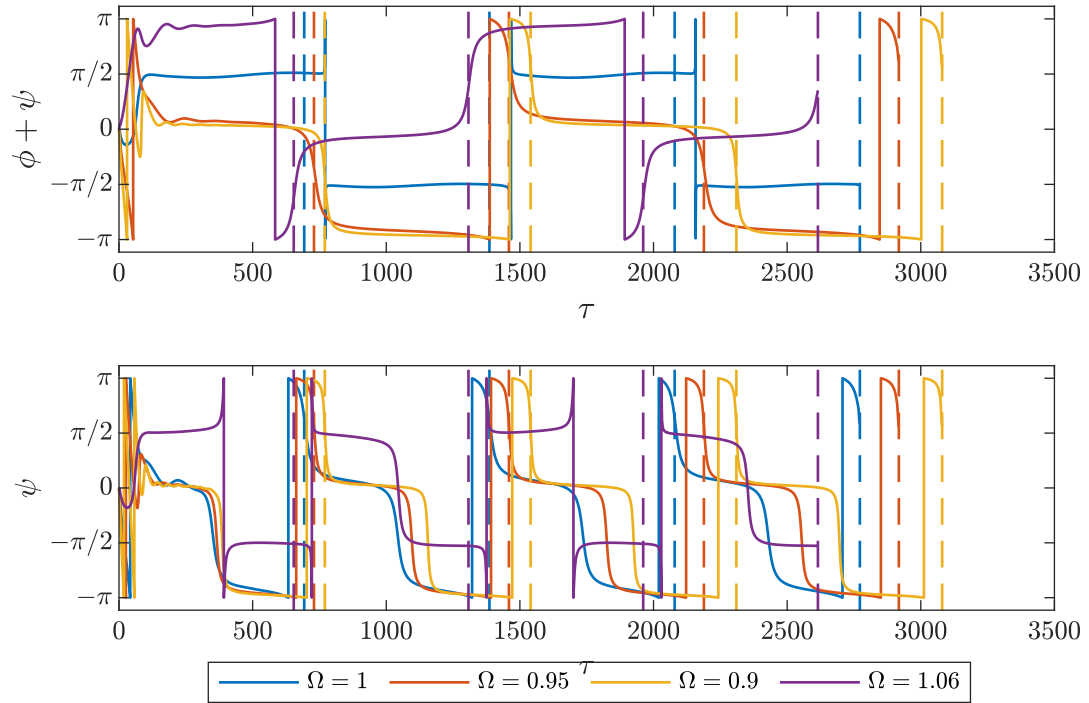


Figure 4.20 – Déphasages résultant des simulations temporelles de la dynamique rapide du système prenant en compte les formes modales pour le jeu de données 3.

4.10 Conclusions

Dans ce chapitre, le comportement d'un système couplé piéton-structure à deux modes de vibration a pu être étudié.

Une méthode à échelles multiples appliquée au système sous forme adimensionnelle a permis d'établir les équations moyennées du problème, dans le cas où les déformées modales étaient négligées. Par la suite, deux groupements de paramètres \mathcal{D}_I et \mathcal{D}_{II} ont pu être établis, relatifs aux masses modales de chacun des modes, à la masse du piéton et au coefficient d'amortissement. Rappelons qu'il a été supposé que ce coefficient d'amortissement était le même dans les deux modes, ce qui n'est pas toujours le cas en pratique. Suivant la valeur des deux groupes adimensionnels \mathcal{D}_I et \mathcal{D}_{II} , il existe une ou plusieurs racines à l'équation de phase, stables ou pas. Cette (in-)stabilité a pu être observée au travers des simulations temporelles. Il a pu être montré que l'amplitude de la réponse structurelle dans chacun des modes dépendait de la valeur des groupements \mathcal{D}_I et \mathcal{D}_{II} et de la fréquence de la sollicitation. Finalement, les simulations temporelles ont permis de valider les équations moyennées en montrant que l'enveloppe de la réponse dynamique était correctement capturée.

Dans un second temps, les déformées modales ont été prises en compte dans les développements, en supposant des modes de forme sinusoïdale. Ce cas de figure, permettant d'étudier la réponse en fonction de la position du piéton sur la travée, ne possède pas de solution stationnaire, ce qui le rend relativement complexe à étudier. Les simulations temporelles ont permis de mettre en exergue qu'il existait des solutions plus stables que d'autres pour le déphasage, ce qui permettait d'obtenir une amplitude de réponse plus importante.

Ce chapitre clôturera donc la partie relative aux développements théoriques de ce travail. Les observations faites au cours de ce chapitre vont nous permettre d'étudier le comportement d'une structure réelle au chapitre suivant.

5

Application : Passerelle de Mantes-la-Jolie-Limay

*« All models are wrong, but some of them
are useful »*

George Box

Après avoir analysé le phénomène d'interaction piéton-structure avec un puis deux modes de vibrations de manière théorique, il est temps d'appliquer ces conclusions à un cas concret. La passerelle choisie dans le cadre de cette application est la passerelle de Mantes-la-Jolie - Limay en région parisienne.

Ce chapitre présente d'abord brièvement la structure étudiée ainsi que ses propriétés modales. La structure est ensuite soumise à un chargement de piéton et sa réponse est étudiée, d'abord en négligeant les déformées modales, puis en en tenant compte.

On parle dans ce chapitre d'un piéton mais, de manière équivalente, on pourrait parler d'un petit groupe de piétons. La seule condition est que ces piétons soient synchronisés entre eux (en fréquence et en phase) et qu'ils se situent dans le même voisinage sur la travée, de sorte que leur mouvement puisse être modélisé par un seul oscillateur de Van der Pol.

5.1 Présentation de l'ouvrage

Inaugurée le 20 septembre 2019, la passerelle de Mantes-la-Jolie - Limay relie le centre de ville de Mantes-la-Jolie à celui de Limay dans le département des Yvelines en Île-de-France. L'ouvrage est réservé aux usagers pratiquant la mobilité « douce », c'est-à-dire, les piétons et les cyclistes. Il est donc directement concerné par la problématique des vibrations latérales engendrées par le passage des piétons.

Des vues de l'ouvrage sont données à la Figure 5.1. On peut s'apercevoir que la structure traverse la Seine en deux fois, passant par l'Île aux Dames. La partie de l'ouvrage traitée dans le

cadre de ce travail est celle de gauche, reliant Mantes-La-Jolie à l'Île aux Dames. La seconde partie de l'ouvrage reliant l'Île aux Dames à Limay n'est autre que vieux pont de Mantes, qui a été restauré dans le cadre de la construction de la passerelle piétonne.



(a) Vue aérienne



(b) Vue de projet



(c) Vieux pont de Mantes restauré

Figure 5.1 – Présentation de la passerelle de Mantes-la-Jolie - Limay. La partie de l'ouvrage concernée par ce travail (vue de projet (b)) est celle de gauche sur la vue aérienne (a). La seconde partie de l'ouvrage est le vieux pont de Mantes (c).

<http://www.smsr.fr/index.php/laces-aux-berges-et-a-leau/les-passerelles/14-laces-aux-berges-et-a-leau/les-passerelles/>

L'ouvrage est réalisé en charpente métallique avec un platelage bois. Il est long de 204 m et large de 6 m. Il se compose de trois travées principales de 66.72 m, 59.16 m et 63.66 m ainsi que de deux courtes travées d'approches de 6.7 m de chaque côté de l'ouvrage. Les trois travées principales reposent sur les piles nommées P1 à P4 du schéma de la Figure 5.2.

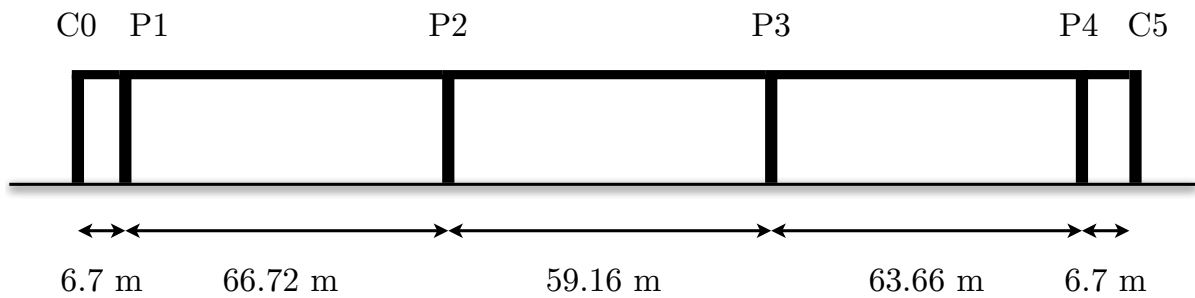


Figure 5.2 – Croquis de la passerelle de Mantes-la-Jolie (C = culée, P = pile).

5.2 Caractéristiques modales et propriétés relatives au piéton

Une campagne expérimentale a été menée en avril 2019 visant à déterminer les propriétés modales (fréquences propres, coefficients d'amortissement, masses généralisées, formes modales) des sept premiers modes de la passerelle et les comparer à celles estimée par le bureau d'étude [9]. En particulier, il ressort de l'analyse des caractéristiques modales que les deux premiers modes latéraux (mode I et mode III), ont des fréquences propres relativement proches (respectivement 0.94 Hz et 1.03 Hz). Or, il se trouve que ces deux fréquences se trouvent dans la plage de fréquences de la force latérale résultant de la marche des piétons. Le rapport de ces deux fréquences étant proche de 1 ($\nu = 1.1$), la situation s'inscrit dans l'étude menée au chapitre précédent et constitue dès lors une belle application des résultats discutés plus tôt.

Les propriétés modales (fréquence propre f_i , masse modale¹ M_i et coefficient d'amortissement ξ_i) des modes en question sont données à la Table 5.1. On observe un rapport entre les masses modales de l'ordre de 4 avec une masse généralisée dans le premier mode de 250 t. Au vu de l'étude menée précédemment, on pressent une réponse plus importante dans le mode III que dans le mode I. Cette intuition se devra d'être vérifiée par les simulations temporelles.

Mode i	f_i [Hz]	M_i [10^3 kg]	ξ_i [%]
I	0.94	250	0.5
III	1.03	63	0.9

Table 5.1 – Propriétés modales des modes I et III de la passerelle de Mantes-La-Jolie - Limay [9].

¹Compte tenu d'une normalisation du mode à un maximum unitaire.

La forme des deux modes traités dans cette application est donnée à la Figure 5.3. Ces formes ont été mesurées expérimentalement en déplaçant des accéléromètres le long de la passerelle alors qu'elle était excitée la fréquence de résonance de chaque mode.

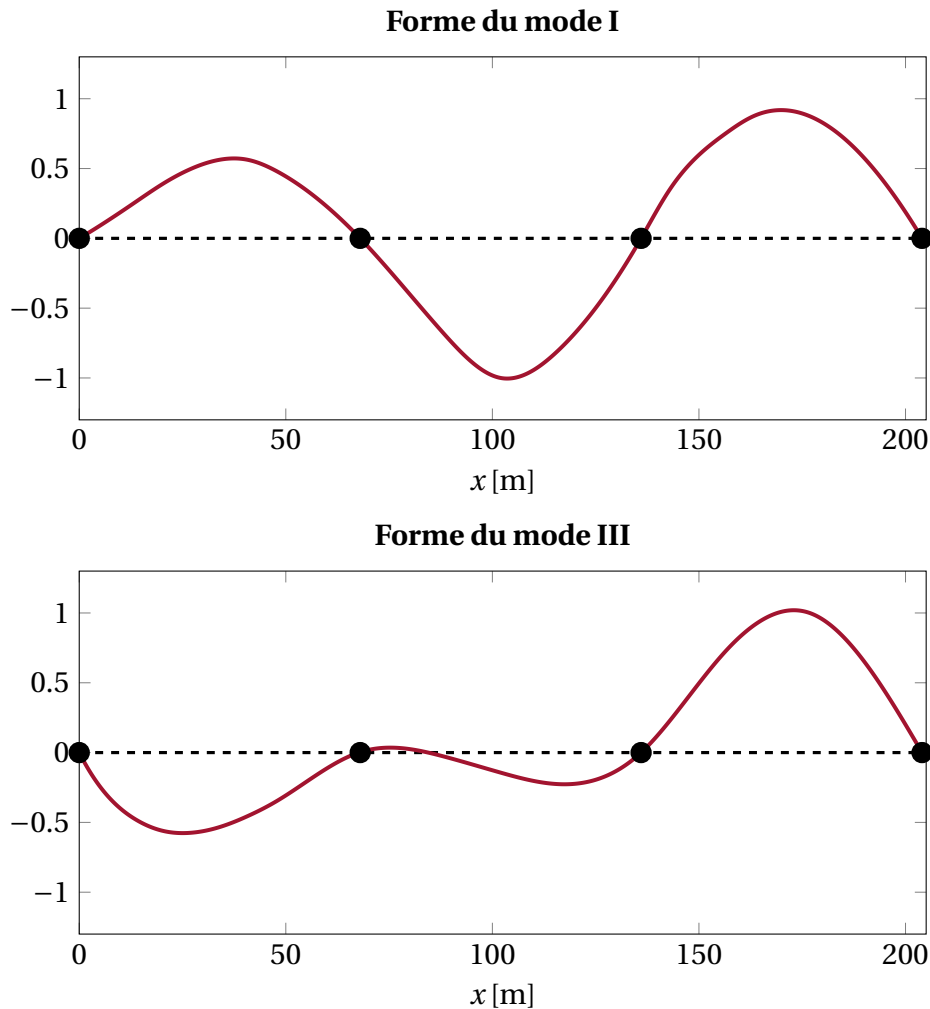


Figure 5.3 – Formes des modes I et III de la passerelle de Mantes-La-Jolie - Limay.

Comme discuté plus tôt (section 3.2.2), à la connaissance de l'auteur, il n'existe pas d'étude expérimentale modélisant la marche d'un piéton sur un sol souple à l'aide d'un oscillateur de Van der Pol. Il n'y a donc pas de valeurs pour les paramètres μ et β validées expérimentalement. Pour contourner ce problème, les paramètres μ et β ont été choisis de telle sorte que la force générée par la marche du piéton sur un sol rigide atteigne une valeur désirée. Ainsi, les paramètres de l'oscillateur ont été fixés à $\mu = 0.1$ et $\beta = 7900 \text{ m}^{-2}$ afin de générer une force d'une amplitude de 70 N sur un sol rigide pour une fréquence de 1 Hz. La force générée par l'oscillateur sur un sol rigide avec ces paramètres est donnée à la Figure 5.4. Une manière,

peut-être plus commode, de parler du paramètre β est en fait de l'interpréter comme un déplacement caractéristique. Dès lors, on peut l'exprimer sous la forme $1\sqrt{\beta} = 0.011\text{ m}$, ce qui est probablement plus parlant physiquement parlant.

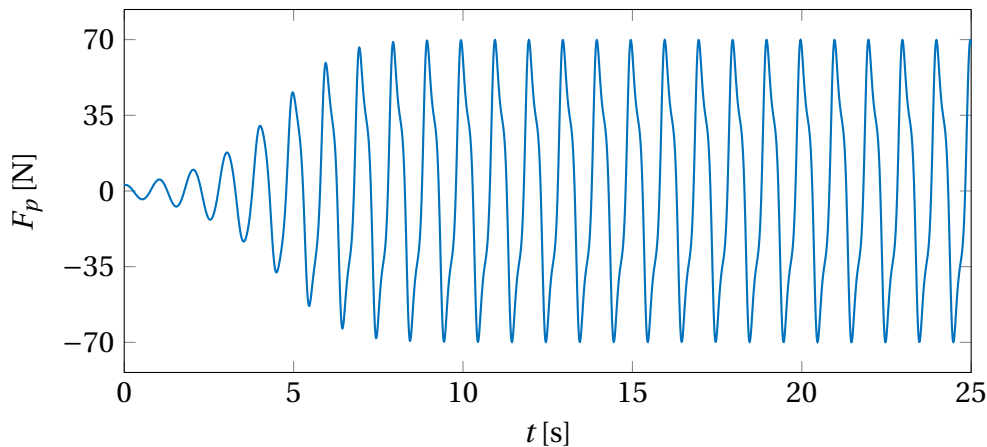


Figure 5.4 – Force F_p générée par la marche du piéton modélisé à l'aide de l'oscillateur de Van der Pol sur un sol rigide au cours du temps avec $\mu = 0.1$ et $\beta = 7900\text{ m}^{-2}$.

Tous les paramètres utilisés pour modéliser le piéton sont repris à la Table 5.2. La longueur de pas choisie est la longueur moyenne donnée à la Table 2.1. Plusieurs fréquences sont considérées dans la plage 0.9 – 1.05 Hz, permettant des vitesses d'avancement comprises entre 1.3 et 1.5 m/s.

Paramètre	Valeur
$\mu[-]$	0.1
$\beta[\text{m}^{-2}]$	7900
$F_p[\text{N}]$	70
$L_p[\text{m}]$	0.72
$f_p[\text{Hz}]$	{0.9, 0.94, 1, 1.03, 1.05}
$v[\text{m/s}]$	{1.3, 1.35, 1.44, 1.48, 1.51}

Table 5.2 – Paramètres utilisés pour la modélisation de la force latérale engendrée par le passage d'un piéton.

5.3 Réponse de la passerelle lors de la traversée d'un piéton

Le système couplé piéton-structure dans la base modale est celui donné par (4.4) qui, pour rappel, s'écrit

$$\begin{cases} M^{(I)} \ddot{y}^{(I)} + C^{(I)} \dot{y}^{(I)} + K^{(I)} y^{(I)} = -m_p (\ddot{y}^{(III)} + \ddot{u}) \Phi^{(I)}(vt) \\ M^{(III)} \ddot{y}^{(III)} + C^{(III)} \dot{y}^{(III)} + K^{(III)} y^{(III)} = -m_p (\ddot{y}^{(I)} + \ddot{u}) \Phi^{(III)}(vt) \\ \ddot{u}_y + 2\mu\omega_p \dot{u}_y (\beta u_y^2 - 1) + \omega_p^2 u_y = -(\ddot{y}^{(I)} + \ddot{y}^{(III)}) . \end{cases} \quad (5.1)$$

Ce système va d'abord être résolu en supposant des déformées modales unitaires, ce cas d'étude étant plus simple à analyser dans un premier temps. Dans un second temps, les déformées réelles de la passerelle seront prises en compte dans les simulations, permettant de simuler le cas où le piéton effectue des allers-retours sur la passerelle.

5.3.1 Formes modales non prise en compte

Pour commencer, on simule la traversée de la passerelle par un piéton sans prendre en compte les déformées modales de la passerelle. Ce cas n'est certainement pas le plus réaliste puisqu'il simule la réponse à une sollicitation appliquée au ventre de chaque mode, ce qui est bien sûr incompatible avec la marche d'un piéton. Néanmoins, ce cas théorique permet de mieux comprendre le comportement de l'ouvrage avant d'augmenter le degré de complexité dans la modélisation. Ainsi, la réponse de la passerelle n'est pas influencée par la position du piéton sur cette dernière et l'on atteindra donc une réponse stationnaire après une période transitoire.

L'amplitude du déplacement de la passerelle est donnée à la Figure 5.5. Il est parfois plus commode de parler en termes d'accélération puisque les critères de confort sont basés sur cette grandeur, c'est pourquoi l'amplitude de l'accélération est également donnée à la Figure 5.6.

On observe pour les deux modes une période transitoire à la résonance d'une centaine de secondes. Ce laps de temps de mise en régime correspond en fait au temps de mémoire de la structure qui est donné par

$$t_r = \frac{T_s^{(I)}}{2\xi^{(I)}} = 106 \text{ s}. \quad (5.2)$$

Durant cette période transitoire, on observe aux alentours de $t = 45 \text{ s}$ une accélération $\ddot{y}_3 = 0.045 \text{ m/s}^2$ lorsque le piéton marche à la même fréquence que la fréquence propre du mode 3 ($f_p = 1.03 \text{ Hz}$). A l'état stationnaire, l'accélération vaut $\ddot{y}_3 = 0.030 \text{ m/s}^2$.

Si l'on s'intéresse à l'amplitude de l'accélération du premier mode, on observe que l'amplitude maximale observée reste limitée (inférieure à 0.015 m/s^2 durant la période transitoire, de l'ordre de 0.010 m/s^2 au maximum au cours de la période stationnaire), même dans le cas où la fréquence du piéton est égale à la fréquence de résonance de ce mode ($f_p = 0.94 \text{ Hz}$).

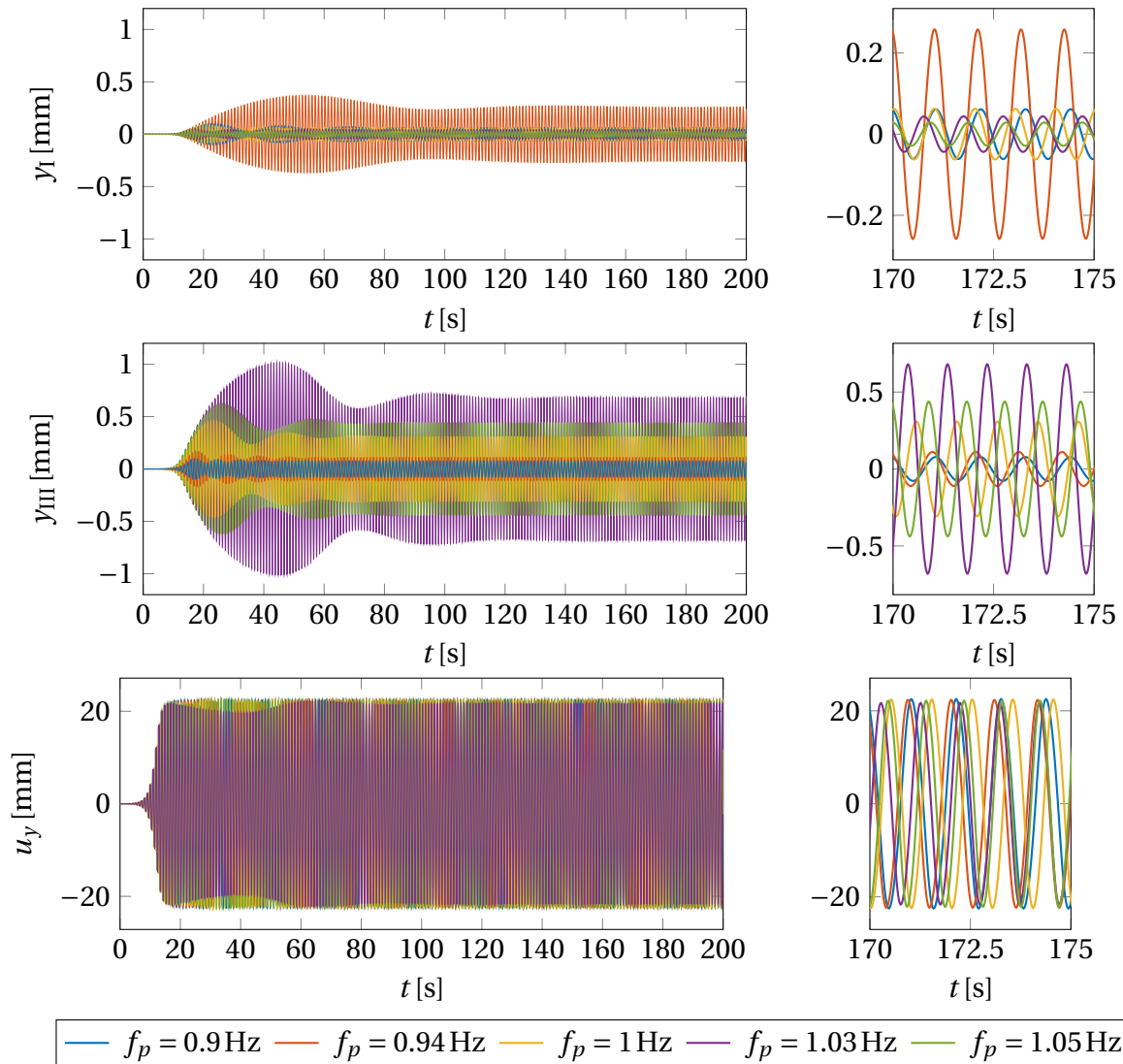


Figure 5.5 – Amplitude du déplacement structurel et du balancement du piéton autour de son centre de gravité pour $f_p = \{0.9, 0.94, 1.0, 1.03, 1.05, 1.05\}$ Hz dans le cas où les déformées modales ne sont pas prises en compte.

Lorsque l'on s'éloigne de cette fréquence, l'amplitude des vibrations est beaucoup plus faible et devient même négligeable, l'accélération étant de l'ordre de 0.003 m/s^2 . Cette faible amplitude s'explique notamment par la masse généralisée assez importante de ce mode (par comparaison avec celle du mode III).

Par ailleurs, en termes de déphasage, on observe dans chacun des modes, momentanément, un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ en début de simulation lorsque le piéton se déplace à la même fréquence que la fréquence propre du mode (respectivement 0.94 Hz et 1.03 Hz). Ce déphasage correspond à la période transitoire et pendant laquelle l'amplitude des vibrations augmente

5.3. Réponse de la passerelle lors de la traversée d'un piéton

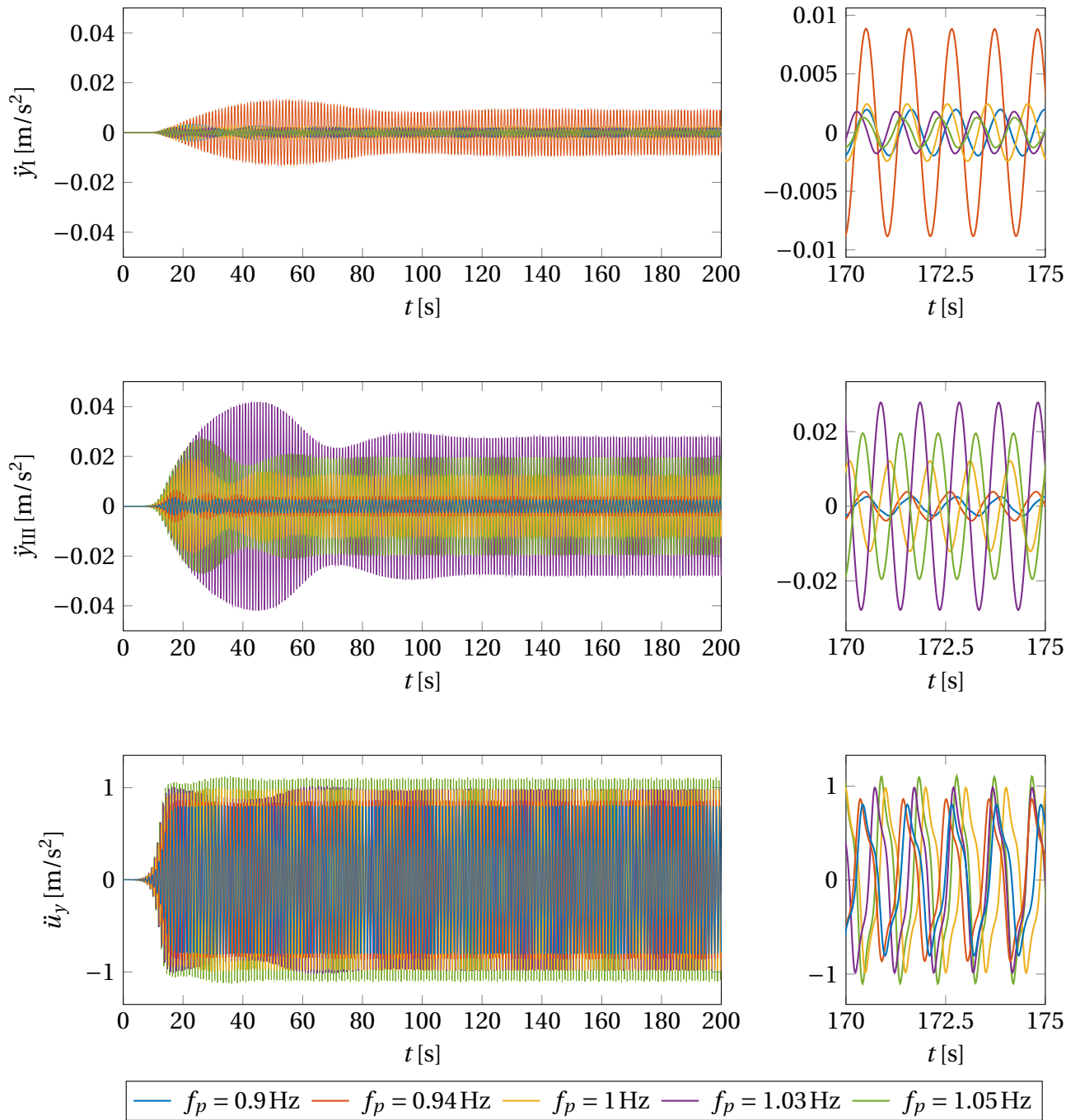


Figure 5.6 – Amplitude de l'accélération de la structure et du balancement du piéton autour de son centre de gravité pour $f_p = \{0.9, 0.94, 1.0, 1.03, 1.05, 1.05\}$ Hz dans le cas où les déformées modales ne sont pas prises en compte.

significativement. Sur le long terme, le déphasage évolue vers une valeur plus faible et une configuration dans laquelle le système « se sent bien ».

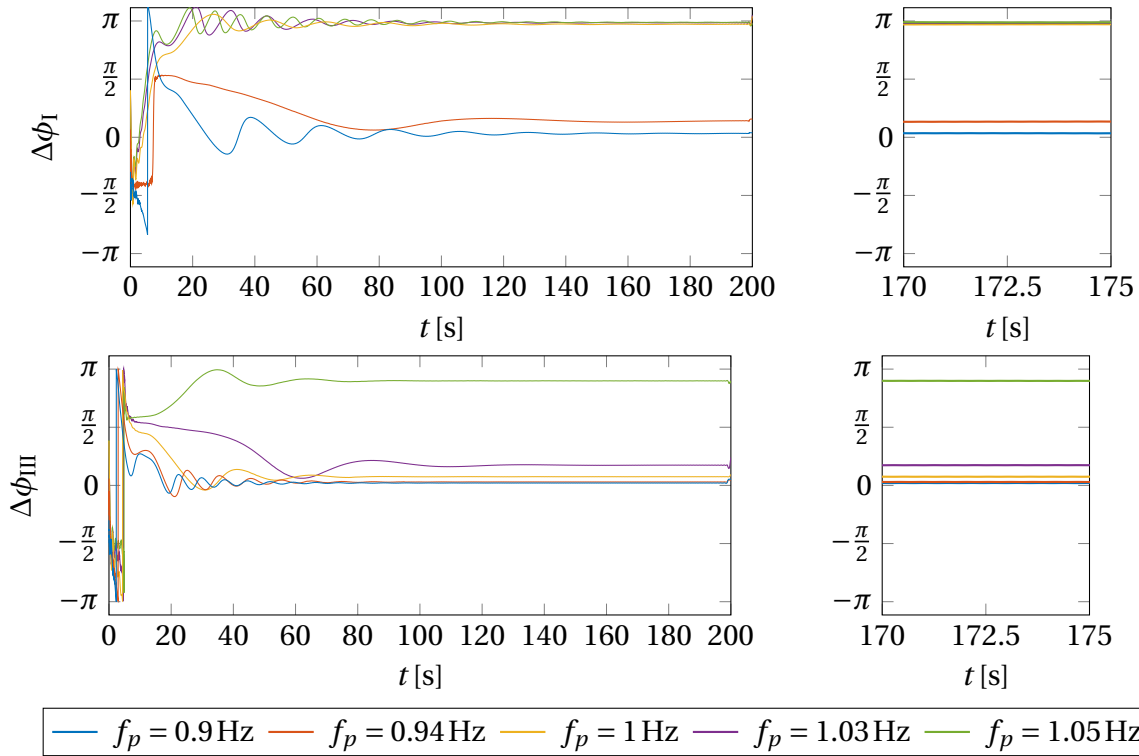


Figure 5.7 – Déphasage entre le piéton et les deux premiers modes latéraux pour $f_p = \{0.9, 0.94, 1.0, 1.03, 1.05, 1.05\}$ Hz dans le cas où les déformées modales ne sont pas prises en compte.

Finalement, intéressons-nous à la courbe de lock-in de la passerelle, donnée à la Figure 5.8. On note une zone entre 0.9 et 1.15 Hz pour laquelle la fréquence de sollicitation f_p n'est pas strictement égale à la fréquence des oscillations une fois l'état stationnaire atteint. Cette bande de fréquences correspond à l'intervalle de fréquences dans lequel le piéton va adapter sa fréquence de marche aux vibrations de la structure.

5.3.2 Simulation d'allers et retours du piéton sur l'ouvrage

Considérons désormais le cas où un même piéton réalise des allées et venues sur la passerelle. Cette situation nécessite de prendre en compte la forme des modes de la structure. Au vu des fréquences et des vitesses de marches étudiées, le temps nécessaire pour effectuer une traversée de la passerelle (voyage aller uniquement) est compris entre 135 et 157 s.

Afin de simuler la réponse libre de la structure (une fois que le piéton a terminé l'ensemble de ses traversées), il convient de prendre en compte le temps de mémoire t_r de la structure donné par (5.2). Ce temps est ajouté au temps nécessaire au piéton pour effectuer l'en-

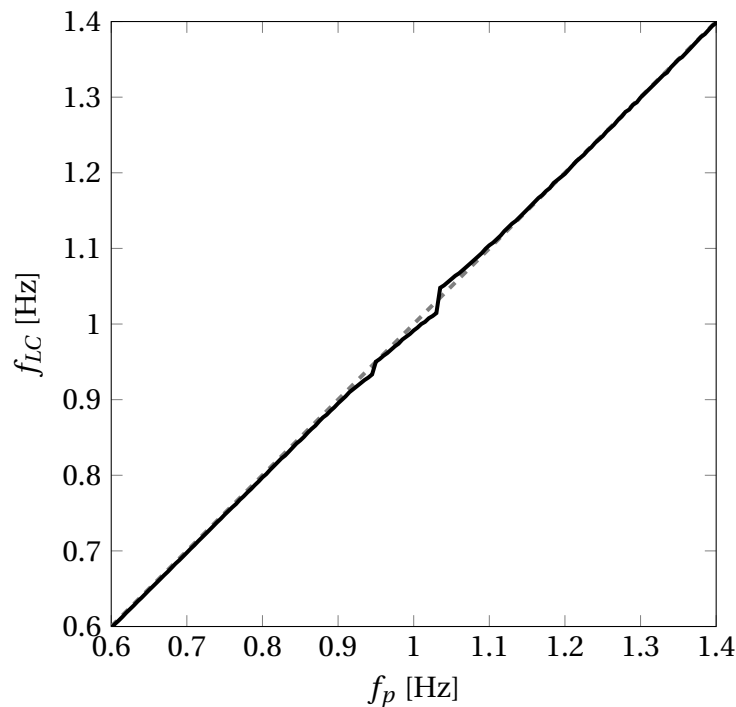


Figure 5.8 – Courbe de lock-in pour la passerelle de Mantes-La-Jolie - Limay.

semble de ses allers retours sur la structure. Une fois que le piéton a effectué l'ensemble de ses traversées, il quitte la passerelle, et la simulation continue jusqu'à ce que les vibrations de l'ouvrage soient totalement amorties.

Pour les simulations temporelles, il a été choisi de simuler deux allers-retours du piéton sur la passerelle. Les résultats sont donnés aux Figures 5.9, 5.10 et 5.12, respectivement en termes d'amplitude de déplacement, d'amplitude d'accélération et de déphasage. Bien évidemment, les courbes d'accélération et de déplacement affichent un comportement similaire. Nous nous concentrerons donc sur les premières. Par ailleurs, un zoom est réalisé sur l'accélération des différentes variables pour le second aller-retour à la Figure 5.11, ce qui permet d'analyser la réponse une fois l'effet des conditions initiales passé.

La première observation que l'on peut faire est que la marche à 0.9Hz ne génère pas une accélération importante dans la passerelle. Cette fréquence est trop éloignée de la fréquence de résonance du mode III et, le mode I, bien que possédant un coefficient d'amortissement plus faible et une fréquence propre proche de cette valeur, ne produit pas non plus une accélération importante. A la fréquence de résonance du mode I ($f_p = 0.94\text{Hz}$), on observe l'amplitude maximale dans le premier mode ($\ddot{y}_1 = 0.014\text{m/s}^2$). L'amplitude est importante quand le piéton se trouve sur la travée centrale et sur la travée de droite. Cette observation est évidemment liée à la forme du mode I. L'amplitude de l'accélération est encore limitée

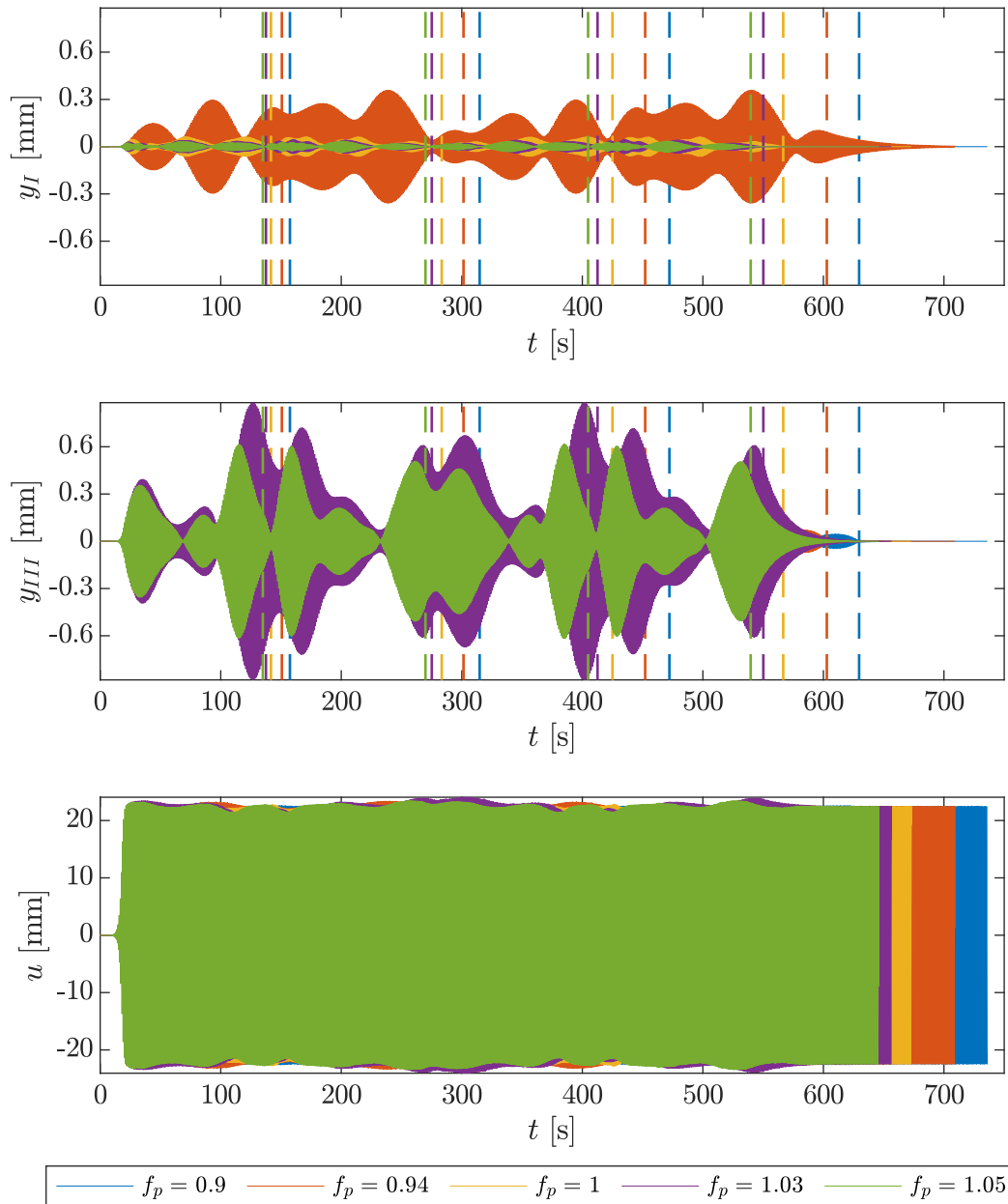


Figure 5.9 – Amplitude du déplacement de la passerelle quand le piéton fait des allers-retours

dans le mode III ($\ddot{y}_1 = 0.005 \text{ m/s}^2$ au maximum). La situation devient plus intéressante quand la fréquence de marche se situe entre les deux fréquence de résonance ($f_p = 1 \text{ Hz}$). Dans ce cas de figure, la réponse du premier mode est assez limitée; par contre, celle du troisième mode commence à grandir en amplitude. En effet, au début du voyage retour du piéton, l'amplitude de l'accélération vaut $\ddot{y}_3 = 0.017 \text{ m/s}^2$. A cette fréquence presque médiane, c'est le troisième mode, ayant une fréquence propre supérieure à celle du premier mode qui répond de manière importante. De manière assez logique, lorsque le mode III est sollicité à

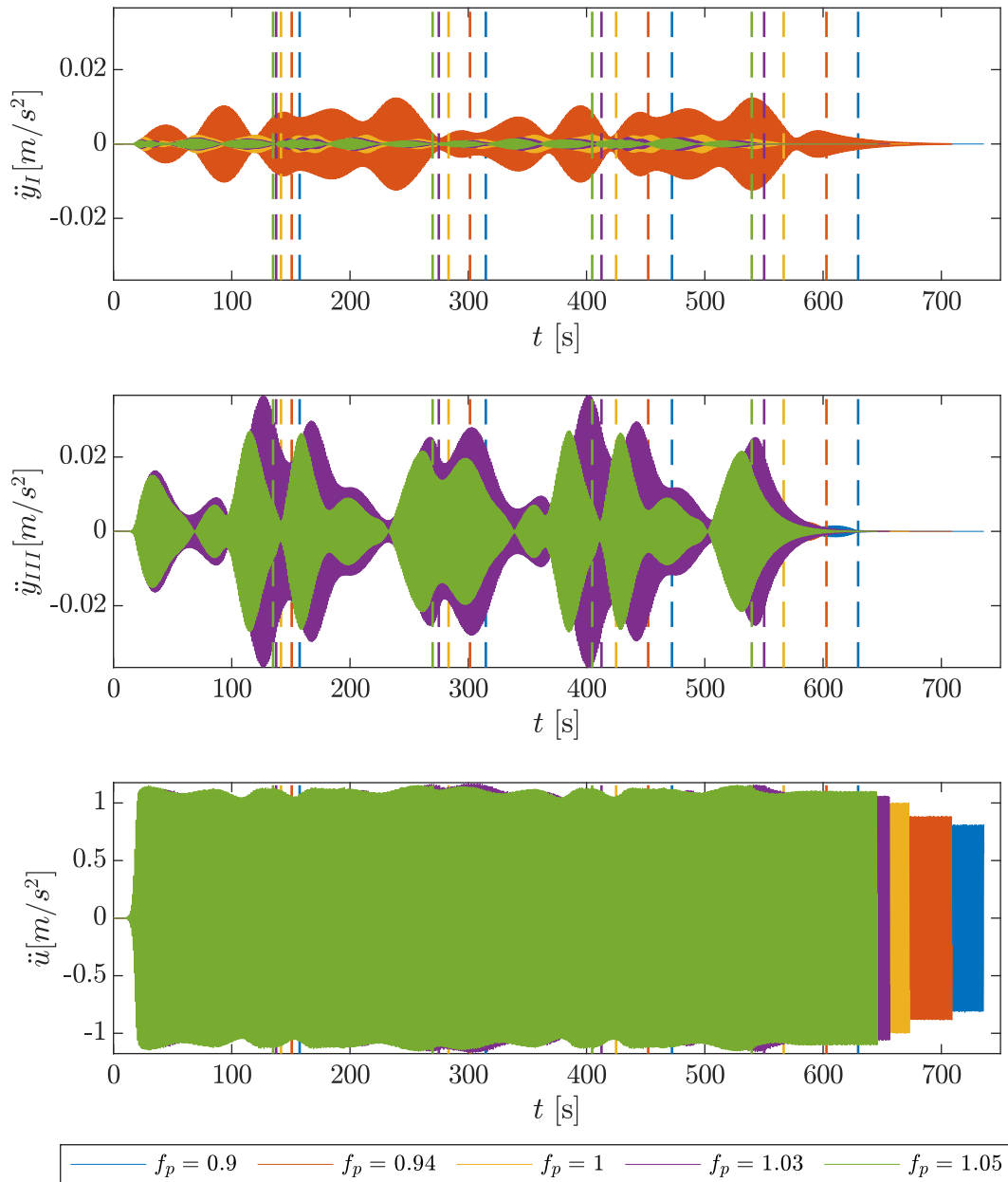


Figure 5.10 – Amplitude de l'accélération de la passerelle quand le piéton fait des allers-retours

sa fréquence de résonance ($f_p = 1.03$ Hz), on observe l'amplitude maximale dans ce mode ($\ddot{y}_3 = 0.04$ m/s²) alors celle dans le mode I est de plus en plus limitée. En outre, les grandes amplitudes sont observées aux instants correspondant aux moments où le piéton se situe sur la travée droite de l'ouvrage. Lorsque le piéton est sur la travée centrale, l'amplitude est assez faible et elle est modérée quand il se situe sur la travée de gauche. Ces observations font sens au vu de la déformée modale. Finalement, la situation où $f_p = 1.05$ Hz produit encore une accélération assez importante dans le troisième mode.

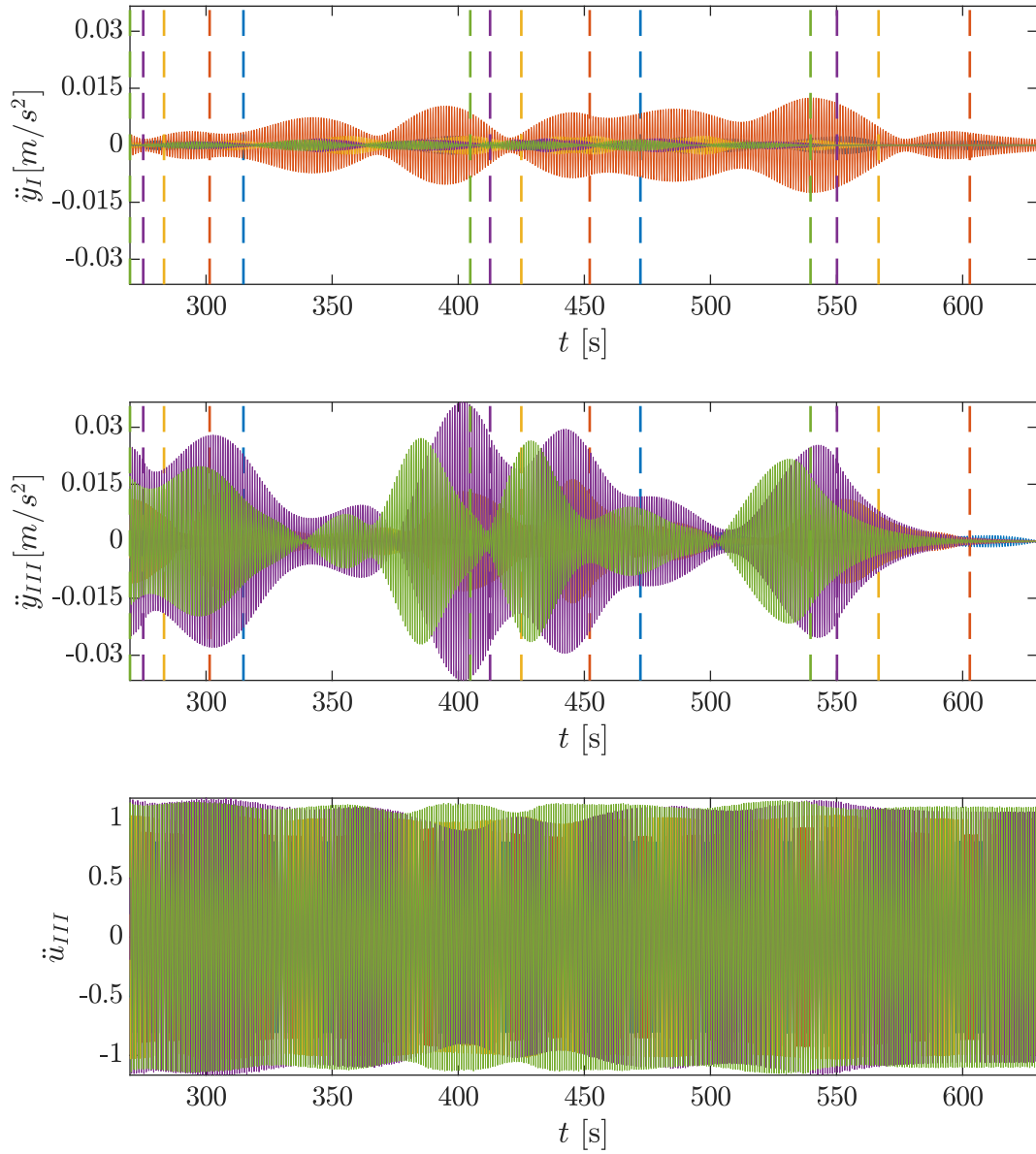


Figure 5.11 – Amplitude de l'accélération de la passerelle quand le piéton fait des allers-retours, zoom sur la fenêtre temporelle correspondant au second voyage du piéton.

Les courbes de déphasage (Figure 5.12) arborent pour leur part un comportement assez erratique. Cet aspect s'explique par le fait que la phase calculée est ramenée dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$ et que certains signaux oscillent légèrement autour de π . Cette précision faite, on observe pour le premier mode des périodes plus ou moins longues de déphasage égal à $\pm \frac{\pi}{2}$ pour $f_p = 0.94 \text{ Hz}$, correspondant en fait aux instants où la structure est en résonance. Concernant les autres fréquences, le déphasage varie entre $-\pi$, 0 et π . Dans le cas du mode III, on observe également des périodes assez longues de déphasage de $\pm \frac{\pi}{2}$ lorsque $f_p = 1.03 \text{ Hz}$, notamment

entre 200 et 400 secondes. Ce laps de temps correspond approximativement au temps entre le milieu du premier retour et du piéton et la fin du second aller. Pour les autres fréquences, la phase oscille également entre $-\pi$, 0 et π .

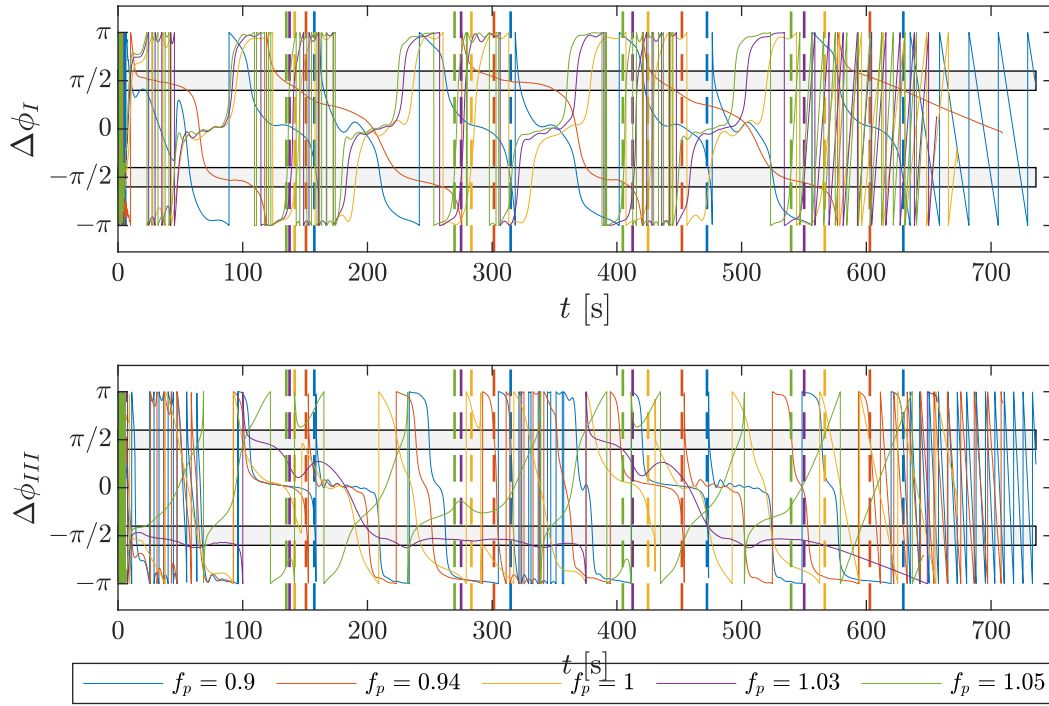


Figure 5.12 – Déphasage entre le piéton et la passerelle quand le piéton fait des allers-retours

Par ailleurs, on peut calculer la force latérale appliquée à la passerelle au cours du temps. Cette dernière est obtenue à partir de la dernière équation de (5.1) et s'écrit

$$F_p = -m_p (\ddot{u}_y + \ddot{y}^{(I)} + \ddot{y}^{(III)}) . \quad (5.3)$$

Elle est représentée à la Figure 5.13 pour les différentes fréquences de la sollicitation. On observe que lorsque la réponse de la structure est peu importante ($f_p = 0.9\text{ Hz}$), la force latérale a une amplitude quasi constante de l'ordre de 55 N. Lorsque l'amplitude des vibrations structurelle est plus importante, notamment quand f_p est égale à la fréquence de résonance d'un des deux modes, l'amplitude varie beaucoup plus au cours du temps. Pour $f_p = 1.03\text{ Hz}$, l'amplitude varie entre 60 et 80 N. Elle est minimale lorsque l'amplitude de l'accélération structurelle dans le mode III est maximale; le piéton ressent un mouvement structurel important et la force générée par sa marche est donc plus faible. La variation d'amplitude est moins importante lorsque $f_p = 0.94\text{ Hz}$ parce que l'amplitude des vibrations générée avec cette fréquence de sollicitation est assez faible.

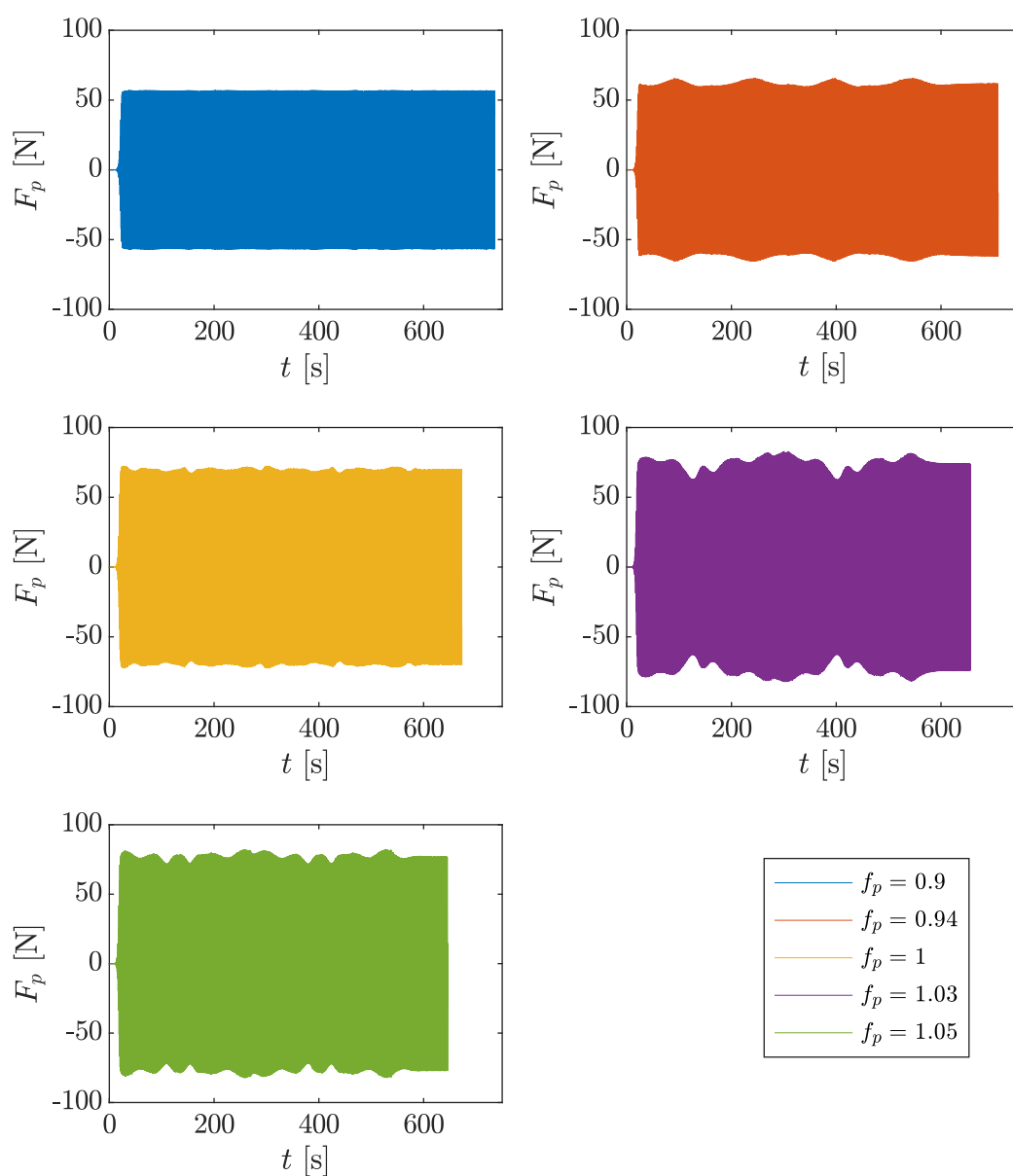


Figure 5.13 – Force latérale appliquée à la passerelle au cours des différents passage.

Finalement, après avoir calculé l'amplitude du déplacement et de la structure dans la base modale, on peut revenir à la base nodale et étudier le déplacement ou l'accélération en quelques points particuliers de la structure. Pour ce faire, il suffit d'utiliser la transformation suivante

$$\mathbf{Y}(t) = y_I(t)\Phi_I + y_{III}(t)\Phi_{III} \quad (5.4)$$

où Φ_i est la forme du mode, y_i représente l'amplitude modale du déplacement puisque le mode est normé à un maximum unitaire et $\mathbf{Y}(t)$ est le déplacement nodal. Le changement de variable (5.4) permet donc de connaître le déplacement (et par conséquent l'accélération), en tout point de la structure au cours du temps.

L'exercice a été réalisé pour les différentes fréquences étudiées et pour les positions $x = L/4$, $x = L/2$ et $x = 3L/4$, correspondant à la moitié de chaque travée. A la Figure 5.14, on a représenté l'accélération en ces 3 positions particulières pour une fréquence $f_p = 0.94$ Hz. Sur la première travée ($x = \frac{L}{4}$), on observe une accélération assez faible (de l'ordre 0.005 m/s^2 au maximum), ce qui s'explique par le fait la réponse est majoritairement gouvernée par le premier mode pour cette fréquence et que la déformée du mode est assez faible à cet endroit (environ 0.5). L'accélération est par contre beaucoup plus grande sur la travée centrale ($x = \frac{L}{2}$), la déformée modale étant égale à 1 dans ce cas. On atteint alors une accélération de l'ordre de 0.015 m/s^2 , résultant majoritairement de la contribution du premier mode, l'influence du troisième étant quasi nulle sur cette travée. Finalement, l'accélération sur la dernière travée est un peu inférieure à celle observée sur la travée centrale (0.010 m/s^2 au maximum) mais on note une contribution plus significative du mode III sur cette travée.

Lorsque le piéton sollicite la structure à la fréquence de résonance du mode III (Figure 5.15), le premier mode n'a presque aucune influence sur la réponse structurelle sur la première et la dernière travée, l'accélération observée dans ce mode étant assez faible. C'est d'ailleurs sur cette dernière travée que l'on note l'accélération la plus grande, jusqu'à 0.02 m/s^2 lorsque le piéton se trouve au niveau du ventre du mode III sur cette travée. Si l'on extrapole ces résultats, on imagine assez facilement qu'un groupe de quelques piétons, tous synchronisés entre eux, pourrait engendrer une accélération telle que le seuil de confort communément admis de 0.1 m/s^2 pourrait être atteint.

Finalement, un dernier cas de figure intéressant est celui où la fréquence de la sollicitation générée par la marche du piéton se situe entre les fréquences propres respectives des deux modes ($f_p = 1$ Hz, Figure 5.16). Pour cette fréquence intermédiaire, l'accélération sur la travées extérieures est toujours gouvernée par le troisième mode mais l'influence du premier mode se fait plus ressentir sur la travée centrale. L'accélération engendrée est relativement petite par rapport à celle que l'on peut mesurer sur la troisième travée (de l'ordre de 0.005 m/s^2 contre 0.010 m/s^2) mais ce qui est intéressant est le fait qu'elle soit due à l'inter-

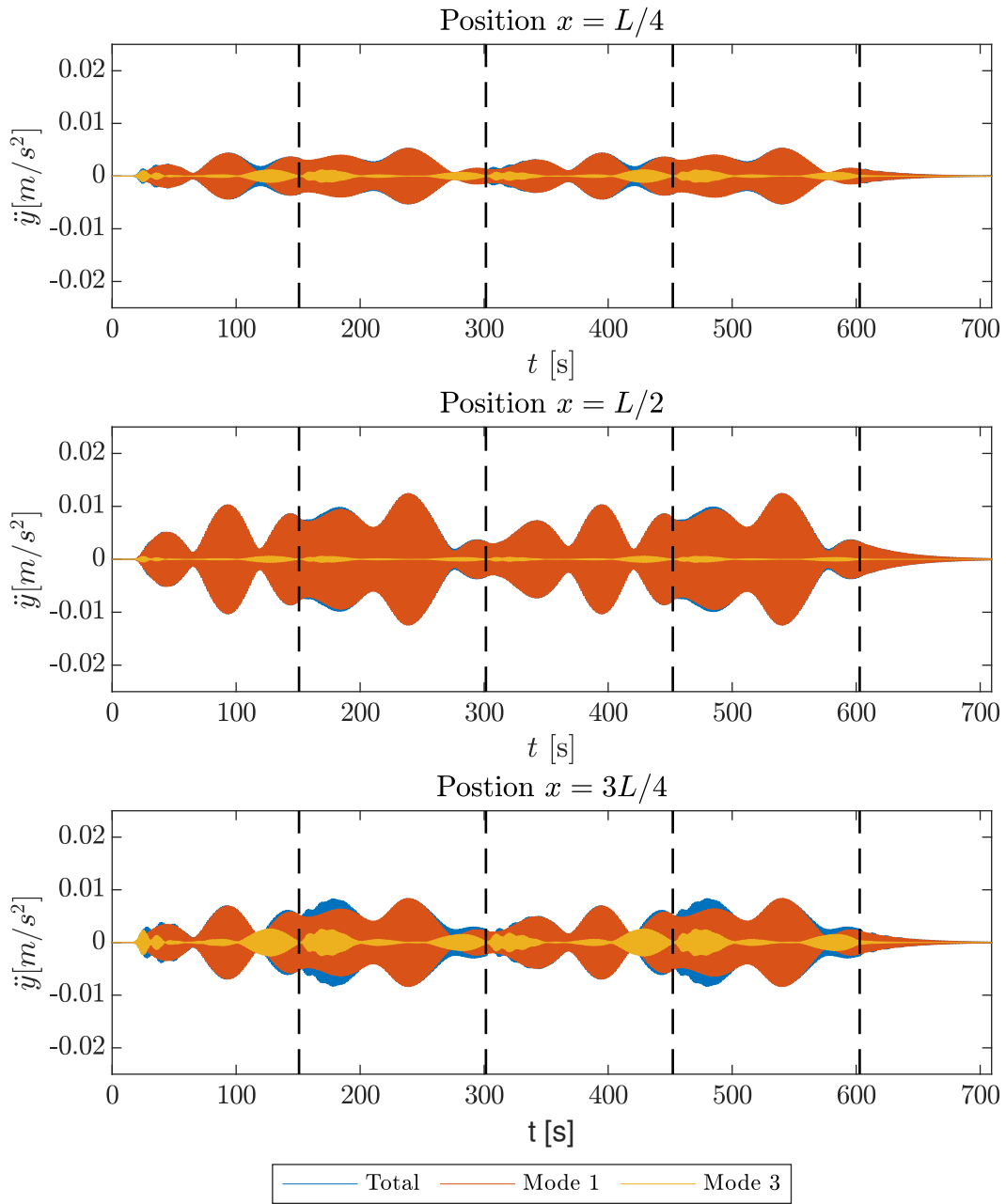


Figure 5.14 – Accélération de la structure au cours du temps en $x = \frac{L}{4}$, $x = \frac{L}{2}$ et $x = \frac{3L}{4}$ pour $f_p = 0.94\text{Hz}$.

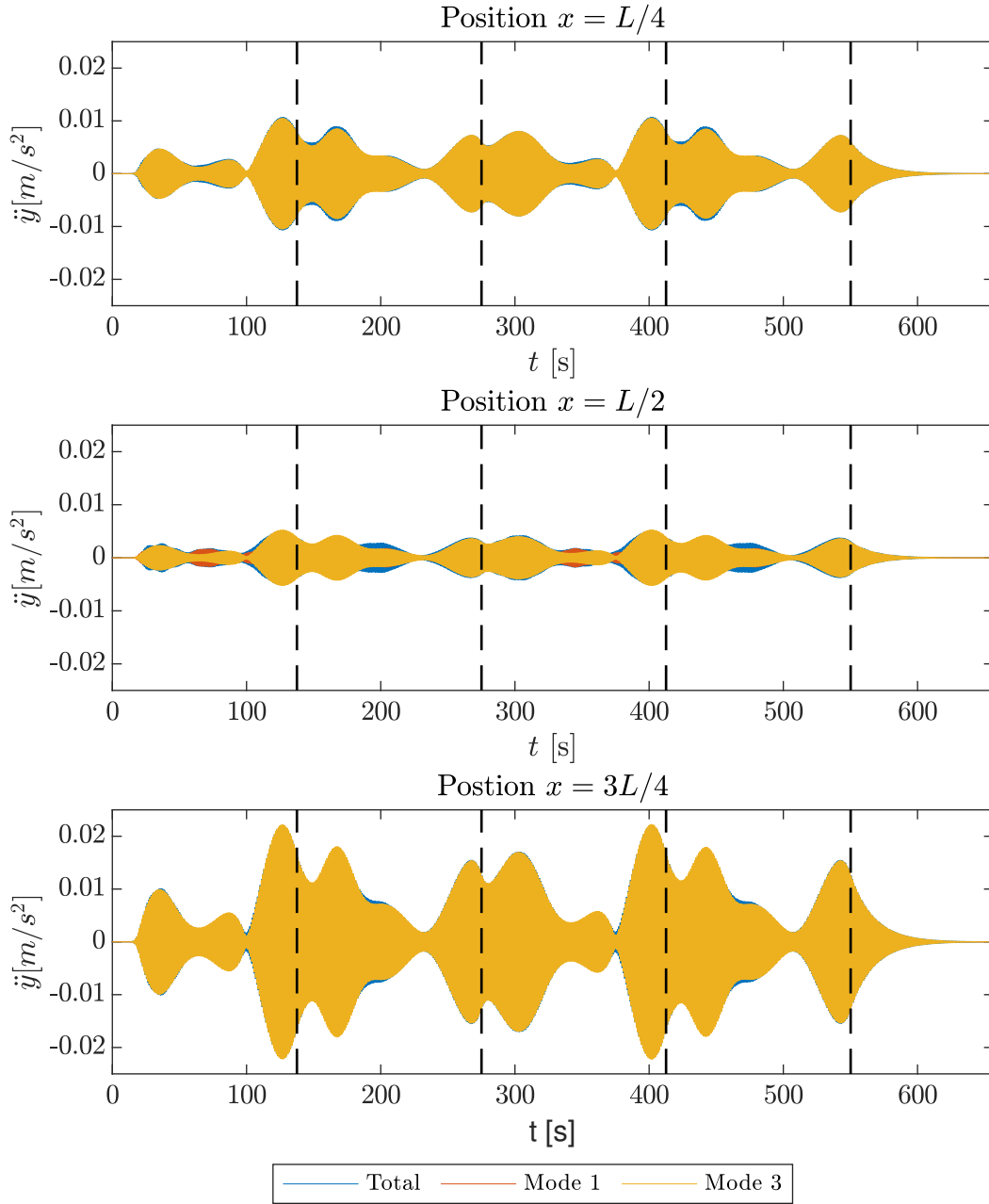


Figure 5.15 – Accélération de la structure au cours du temps en $x = \frac{L}{4}$, $x = \frac{L}{2}$ et $x = \frac{3L}{4}$ pour $f_p = 1.03\text{Hz}$.

action des deux modes. En effet, on remarque que, suivant la position du piéton sur la passerelle, c'est tantôt un mode qui gouverne l'accélération sur la travée centrale, tantôt l'autre. On note une interaction au moment où le piéton se situe sur la travée de gauche (entre 270 et 320 secondes). Il n'y a pas de mode dominant dans ce cas-là, et l'accélération observée est due aux deux modes.

Les figures relatives aux deux autres fréquences ($f_p = 0.9\text{ Hz}$ et $f_p = 1.05\text{ Hz}$) sont données à l'annexe [E.2](#).

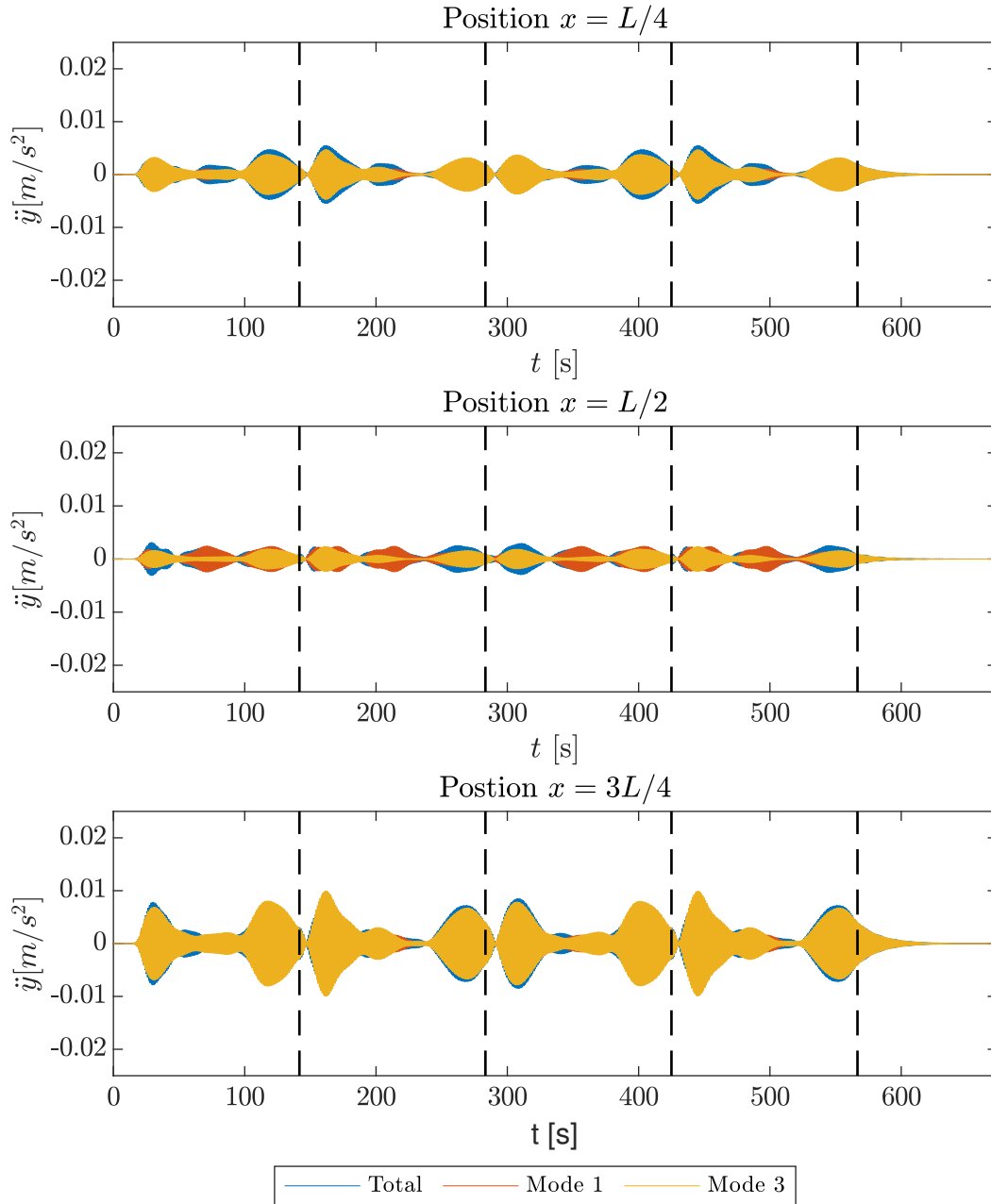


Figure 5.16 – Accélération de la structure au cours du temps en $x = \frac{L}{4}$, $x = \frac{L}{2}$ et $x = \frac{3L}{4}$ pour $f_p = 1$ Hz.

5.4 Conclusions de l'application

Ce chapitre a permis d'étudier l'interaction piéton-structure sur un ouvrage réel, à savoir la passerelle de Mantes-la-Jolie - Limay. Cette passerelle possède deux modes de fréquences propres proches, dans le domaine des fréquences associées à la marche, et est donc sensible au passage des piétons.

Dans un premier temps, les déformées modales n'ont pas été prises en compte dans la simulation, ce qui a permis de s'intéresser à la réponse stationnaire de l'ouvrage. Cette étude a permis de montrer, qu'à la résonance, le mode III possédait une amplitude de vibration plus importante que le premier mode. Cette observation est liée à la masse modale du premier mode assez importante (250 t) en comparaison avec celle du troisième mode (63 t). La courbe de lock-in a également pu être générée et on a pu noter, qu'entre 0.9 et 1.1 Hz, le piéton se synchronise avec la passerelle et adapte sa fréquence de marche en conséquence.

La seconde partie de ce cas d'étude a consisté à simuler la réponse de la structure alors que la sollicitation se déplaçait le long de la travée. Ces simulations ont permis d'obtenir l'amplitude modale de la réponse de la structure pour différentes fréquences de sollicitations. La masse modale du premier mode étant assez élevée (250 t), l'amplitude observée dans ce mode est relativement limitée, même lorsque la sollicitation s'effectue à la fréquence de résonance. L'amplitude observée dans le mode III était pour sa part plus importante, surtout pour des fréquences de sollicitation supérieures à 1 Hz. En particulier, lorsque la fréquence de la sollicitation était égale à la fréquence de résonance, des périodes assez longues de synchronisation avec un déphasage de $\pm \frac{\pi}{2}$ ont pu être observées. Finalement, un retour à la base nodale a permis d'étudier le comportement au cours du temps en différents points particuliers de la structure.

Pour une force latérale d'amplitude assez modérée, des accélérations structurelles importantes ont pu être générées. Sur la travée centrale, on a pu constater une accélération allant jusqu'à 0.01 m/s^2 lorsque la sollicitation s'effectuait à une fréquence égale à la fréquence de résonance du premier mode. Sur les travées extérieures, c'est le mode III qui a conduit aux plus grandes accélérations, allant jusqu'à 0.01 m/s^2 et 0.02 m/s^2 sur les travées de gauche et de droite respectivement. Dès lors, un groupe de quelques piétons, synchronisés entre eux, pourrait engendrer une accélération importante et dépasser le critère de confort de 0.1 m/s^2 .

6

Conclusions générales et perspectives

« The ideal engineer is a composite... He is not a scientist, he is not a mathematician, he is not a sociologist or a writer; but he may use the knowledge and techniques of any or all of these disciplines in solving engineering problems. »

Nathan W. Dougherty

Le phénomène d'oscillations latérales des passerelles engendrées par la marche des piétons est une problématique récurrente des passerelles modernes. Le passage des piétons peut engendrer une force latérale importante et faire entrer la passerelle en vibration. Les piétons, ressentant ce mouvement, ont tendance à adapter leur fréquence de marche pour garder l'équilibre et se synchronisent donc avec la passerelle, ce qui a tendance à augmenter l'amplitude des vibrations structurelles. De plus, les piétons ont tendance à s'influencer les uns les autres et à se synchroniser entre eux également. On peut donc distinguer deux types d'interactions, à savoir l'interaction piéton-structure et l'interaction piéton-structure.

Ce travail a d'abord présenté la problématique afin de clarifier les différents types d'interaction. Différents modèles existants dans la littérature ont été présentés de manière non exhaustive et ont été classés en différentes catégories suivant le type d'interactions dont ils traitaient.

Par la suite, l'attention s'est focalisée sur l'interaction piéton-structure, en étudiant un modèle à un mode de vibration par le biais d'une méthode à échelles multiples. La structure a été modélisée par un système à 1 degré de liberté alors que le piéton a été modélisé à l'aide d'un oscillateur de Van der Pol. Cette méthode a permis d'exprimer la réponse stationnaire de la structure à l'aide de quelques relations analytiques simples représentant la dynamique lente (enveloppe) du problème. Il a été démontré que la dynamique lente était gouverné par

un groupe adimensionnel de paramètres \mathcal{D} . Ces relations ont ensuite été validées en comparant les résultats qu'elles procuraient avec les résultats obtenus en simulant le système original (dynamique rapide). La prise en compte de la déformée modale a fait apparaître une dynamique plus complexe, ne pouvant être étudiée par une approche analytique. Le comportement observé semblait tout de même lié au groupe \mathcal{D} .

Le degré de complexité a ensuite été légèrement augmenté en ajoutant un second mode structurel à l'analyse. L'approche par échelles multiples a alors montré que dans ce cas de figure, la dynamique lente du système était gouvernée par deux groupes adimensionnels de paramètres \mathcal{D}_I et \mathcal{D}_{II} . Les relations obtenues ont une nouvelle fois été validées par le biais de simulations temporelles du système original. Le caractère instationnaire de la solution lorsque la déformée modale a été prise en compte nous a forcé à simuler la réponse du système pour pouvoir l'analyser. Ces simulations ont montré que les groupes \mathcal{D}_I et \mathcal{D}_{II} jouaient un rôle dans la réponse instationnaire du système.

Finalement, une application sur la passerelle de Mantes-la-Jolie - Limay a été étudiée, permettant de mettre en évidence la sensibilité de cette passerelle à la sollicitation induite par la marche des piétons.

La méthodologie de ce travail a visé à développer des solutions analytiques simples à appréhender. Elle a permis d'étudier en détail l'interaction piéton-structure en modélisant un piéton par un oscillateur de Van der Pol. Une prochaine étape pourrait être d'étudier l'interaction piéton-piéton de manière similaire afin d'étudier le comportement d'une foule et l'interaction foule-structure dans le cas d'une structure à 2 modes de fréquences propres similaires. Par ailleurs, la recherche bibliographique a mis en évidence qu'il n'existait pas un consensus entre les ingénieurs au sujet du mécanisme initiant les oscillations latérales des passerelles. Certains affirment que c'est un ajustement de fréquence de marche des piétons (et donc le phénomène de synchronisation) afin de garantir leur équilibre alors que d'autres affirment que cet équilibre est assuré en contrôlant le déplacement latéral du centre de masse du piéton sans adapter sa fréquence de marche. A l'heure actuelle, le débat reste entier.

Annexes

A

Analyse par échelles multiples du système à un mode de vibration

Le système étudié sous forme adimensionnelle est donnée par

$$\begin{cases} \mathcal{Y}'' + 2\varepsilon\xi_1\mathcal{Y}' + \mathcal{Y} = -\varepsilon\mu_1\mathcal{M}_0\mathcal{U}'' \\ \mathcal{U}'' + 2\varepsilon\mu_1\Omega\mathcal{U}'(\mathcal{U}^2 - 1) + \Omega^2\mathcal{U} = -\varepsilon\mu_1\mathcal{Y}'' \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

La solution recherchée est de la forme de l'ansatz (3.16), qui est pour rappel,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\tau; \varepsilon) &= \mathcal{Y}_0[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \varepsilon\mathcal{Y}_1[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \dots \\ \mathcal{U}(\tau; \varepsilon) &= \mathcal{U}_0[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \varepsilon\mathcal{U}_1[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Après introduction de l'échelle de temps lente t^*/ε et du temps lent $T = t/(t^*/\varepsilon) = \varepsilon\tau$, il convient de remplacer les dérivées temporelles par des dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= \partial_\tau + \varepsilon\partial_T \\ \frac{d^2}{d\tau^2} &= \partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_\tau\partial_T + \varepsilon^2\partial_T^2. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

L'ansatz (A.2) est ensuite introduit dans les équations (A.1). En se limitant au second ordre, il vient

$$\begin{aligned} &(\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_\tau\partial_T + \varepsilon^2\partial_T^2)(\mathcal{Y}_0 + \varepsilon\mathcal{Y}_1) + 2\varepsilon\xi_1(\partial_\tau + \varepsilon\partial_T)(\mathcal{Y}_0 + \varepsilon\mathcal{Y}_1) + (\mathcal{Y}_0 + \varepsilon\mathcal{Y}_1) \\ &\quad = -\varepsilon\mu_1\mathcal{M}_0(\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_\tau\partial_T + \varepsilon^2\partial_T^2)(\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) \\ &(\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_\tau\partial_T + \varepsilon^2\partial_T^2)(\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) + 2\varepsilon\mu_1\Omega(\partial_\tau + \varepsilon\partial_T)(\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1)(\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1)^2 - 1 \\ &\quad + \Omega^2(\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) = -\varepsilon\mu_1(\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_\tau\partial_T + \varepsilon^2\partial_T^2)(\mathcal{Y}_0 + \varepsilon\mathcal{Y}_1). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Le paramètre ε étant un petit nombre, on peut se limiter dans les développements aux termes en ε^0 et ε^1 . Ainsi, il vient

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2\mathcal{Y}_0 + 2\varepsilon\partial_\tau\partial_T\mathcal{Y}_0 + \varepsilon\partial_\tau^2\mathcal{Y}_1 + 2\varepsilon\xi_1\partial_\tau\mathcal{Y}_0 + \mathcal{Y}_0 + \varepsilon\mathcal{Y}_1 &= -\mu_1\varepsilon\mathcal{M}_0\partial_\tau^2\mathcal{U}_0 \\ \partial_\tau^2\mathcal{U}_0 + 2\varepsilon\partial_\tau\partial_T\mathcal{U}_0 + \varepsilon\partial_\tau^2\mathcal{U}_1 + 2\varepsilon\mu_1\Omega(\mathcal{U}_0^2 - 1)\partial_\tau\mathcal{U}_0 + \Omega^2(\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) &= -\mu_1\varepsilon\partial_\tau^2\mathcal{Y}_0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

En conditions de « small detuning », on a $\Omega = 1 + \xi\delta = 1 + \varepsilon\xi_1\delta$ et donc $\Omega^2 = 1 + 2\varepsilon\xi_1\delta + \text{ord}(\varepsilon^2)$. Dès lors, en laissant tomber les termes d'ordre 2, le système d'équations précédent devient

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_0 + 2\varepsilon \partial_{\tau T}^2 \mathcal{Y}_0 + \varepsilon \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_1 + 2\varepsilon \xi_1 \partial_\tau \mathcal{Y}_0 + \mathcal{Y}_0 + \varepsilon \mathcal{Y}_1 &= -\mu_1 \varepsilon \mathcal{M}_0 \partial_\tau^2 \mathcal{U}_0 \\ \partial_\tau^2 \mathcal{U}_0 + 2\varepsilon \partial_{\tau T}^2 \mathcal{U}_0 + \varepsilon \partial_\tau^2 \mathcal{U}_1 + 2\varepsilon \mu_1 (\mathcal{U}_0^2 - 1) \partial_\tau \mathcal{U}_0 + (1 + 2\varepsilon\delta) (\mathcal{U}_0 + \varepsilon \mathcal{U}_1) &= -\mu_1 \varepsilon \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_0. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Une identification des termes en puissances semblables de ε amène, pour ε^0 ,

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_0 + \mathcal{Y}_0 &= 0 \\ \partial_\tau^2 \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Les solutions de ce système d'équations différentielles homogènes sont données par

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_0 &= R_y(T) \cos(\tau + \varphi(T)) \\ \mathcal{U}_0 &= R_u(T) \cos(\tau + \varphi(T) + \psi(T)) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

où $R_y(T)$ et $R_u(T)$ sont des amplitudes lentes et $\psi(T)$ est une phase relative.

Pour les termes en ε^1 , il vient

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_1 &= -\mu_1 \mathcal{M}_0 \mathcal{U}_0 - 2\partial_{\tau T}^2 \mathcal{Y}_0 - 2\xi_1 \partial_\tau \mathcal{Y}_0 \\ \partial_\tau^2 \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_1 &= -\mu_1 \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_0 - 2\partial_{\tau T}^2 \mathcal{U}_0 - 2\mu_1 (\mathcal{U}_0^2 - 1) \partial_\tau \mathcal{U}_0 - 2\delta \mathcal{U}_0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Les termes séculaires apparaissent en développant le membre de droite des deux expressions précédentes. En introduisant les expressions de \mathcal{Y}_0 et \mathcal{U}_0 , il vient après quelques développements,

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_1 &= (\mu_1 \mathcal{M}_0 R_u \cos \psi + 2R_y \varphi') \cos(\tau + \varphi(T)) \\ &\quad + (-\mu_1 \mathcal{M}_0 R_u \sin \psi + 2R_y' + 2\xi_1 R_y) \sin(\tau + \varphi(T)) \\ \partial_\tau^2 \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_1 &= \left[\mu_1 R_y + 2R_u' \sin \psi + 2R_u(\varphi' + \psi') \cos \psi \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_1}{2} R_u^3 \sin \psi - 2\mu_1 R_u \sin \psi - 2\delta R_u \cos \psi \right] \cos(\tau + \varphi(T)) \\ &\quad + \left[2R_u' \cos \psi - 2R_u(\varphi' + \psi') \sin \psi \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_1}{2} R_u^3 \cos \psi - 2\mu_1 R_u \cos \psi + 2\delta R_u \sin \psi \right] \sin(\tau + \varphi(T)) \\ &\quad + \frac{\mu_1}{2} R_u^3 \sin(3((\tau + \varphi(T)) + \psi)). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Ainsi, il apparait que les amplitudes et les phases lentes introduites précédemment dans

$\mathcal{Y}_0(\tau, T)$ et $\mathcal{U}_0(\tau, T)$ doivent satisfaire les conditions suivantes

$$\begin{aligned}
R'_y &= \frac{\mu_1}{2} \mathcal{M}_0 R_u \sin \psi - \xi_1 R_y \\
R'_u &= \mu_1 \left(R_u - \frac{1}{4} R_u^3 - \frac{1}{2} R_y \sin \psi \right) \\
\varphi' &= -\frac{\mu_1}{2} \mathcal{M}_0 \frac{R_u}{R_y} \cos \psi \\
\psi' &= \delta + \frac{\mu_1}{2} \left(\mathcal{M}_0 \frac{R_u}{R_y} - \frac{R_y}{R_u} \right) \cos \psi.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

B

Analyse par échelles multiples du système à un mode de vibration avec prise en compte de la forme modale

Le système étudié sous forme adimensionnelle est donné par

$$\begin{cases} \mathcal{Y}'' + 2\varepsilon\xi_1\mathcal{Y}' + \mathcal{Y} = -\varepsilon\mu_1\mathcal{M}_0\mathcal{U}'' \sin(\mathcal{V}\xi_1\varepsilon\tau) \\ \mathcal{U}'' + 2\varepsilon\mu_1\Omega\mathcal{U}'(\mathcal{U}^2 - 1) + \Omega^2\mathcal{U} = -\varepsilon\mu_1\mathcal{Y}'' \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

La solution recherchée est de la forme de l'ansatz (3.16), qui est pour rappel,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\tau; \varepsilon) &= \mathcal{Y}_0[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \varepsilon\mathcal{Y}_1[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \dots \\ \mathcal{U}(\tau; \varepsilon) &= \mathcal{U}_0[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \varepsilon\mathcal{U}_1[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Après introduction de l'échelle de temps lente t^*/ε et du temps lent $T = t/(t^*/\varepsilon) = \varepsilon\tau$, il convient de remplacer les dérivées temporelles par des dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= \partial_\tau + \varepsilon\partial_T \\ \frac{d^2}{d\tau^2} &= \partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_\tau\partial_T + \varepsilon^2\partial_T^2. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

L'ansatz (B.2) est ensuite introduit dans les équations (B.1). En se limitant au second ordre, il vient

$$\begin{aligned} &(\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_\tau\partial_T + \varepsilon^2\partial_T^2)(\mathcal{Y}_0 + \varepsilon\mathcal{Y}_1) + 2\varepsilon\xi_1(\partial_\tau + \varepsilon\partial_T)(\mathcal{Y}_0 + \varepsilon\mathcal{Y}_1) + (\mathcal{Y}_0 + \varepsilon\mathcal{Y}_1) \\ &\quad = -\varepsilon\mu_1\mathcal{M}_0 \sin(\mathcal{V}\xi_1\varepsilon\tau) (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_\tau\partial_T + \varepsilon^2\partial_T^2)(\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) \\ &(\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_\tau\partial_T + \varepsilon^2\partial_T^2)(\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) + 2\varepsilon\mu_1\Omega(\partial_\tau + \varepsilon\partial_T)(\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1)(\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1)^2 - 1) \\ &\quad + \Omega^2(\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) = -\varepsilon\mu_1(\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_\tau\partial_T + \varepsilon^2\partial_T^2)(\mathcal{Y}_0 + \varepsilon\mathcal{Y}_1). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Le paramètre ε étant un petit nombre, on peut se limiter dans les développements aux termes

en ε^0 et ε^1 . Ainsi, il vient

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_0 + 2\varepsilon \partial_{\tau T}^2 \mathcal{Y}_0 + \varepsilon \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_1 + 2\varepsilon \xi_1 \partial_\tau \mathcal{Y}_0 + \mathcal{Y}_0 + \varepsilon \mathcal{Y}_1 &= -\mu_1 \varepsilon \mathcal{M}_0 \sin(\mathcal{V} \xi_1 \varepsilon \tau) \partial_\tau^2 \mathcal{U}_0 \\ \partial_\tau^2 \mathcal{U}_0 + 2\varepsilon \partial_{\tau T}^2 \mathcal{U}_0 + \varepsilon \partial_\tau^2 \mathcal{U}_1 + 2\varepsilon \mu_1 \Omega (\mathcal{U}_0^2 - 1) \partial_\tau \mathcal{U}_0 + \Omega^2 (\mathcal{U}_0 + \varepsilon \mathcal{U}_1) &= -\mu_1 \varepsilon \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_0. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

En conditions de « small detuning », on a $\Omega = 1 + \xi \delta = 1 + \varepsilon \xi_1 \delta$ et donc $\Omega^2 = 1 + 2\varepsilon \xi_1 \delta + \text{ord}(\varepsilon^2)$. Dès lors, en laissant tomber les termes d'ordre 2, le système d'équations précédent devient

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_0 + 2\varepsilon \partial_{\tau T}^2 \mathcal{Y}_0 + \varepsilon \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_1 + 2\varepsilon \xi_1 \partial_\tau \mathcal{Y}_0 + \mathcal{Y}_0 + \varepsilon \mathcal{Y}_1 &= -\mu_1 \varepsilon \mathcal{M}_0 \sin(\mathcal{V} \xi_1 \varepsilon \tau) \partial_\tau^2 \mathcal{U}_0 \\ \partial_\tau^2 \mathcal{U}_0 + 2\varepsilon \partial_{\tau T}^2 \mathcal{U}_0 + \varepsilon \partial_\tau^2 \mathcal{U}_1 + 2\varepsilon \mu_1 (\mathcal{U}_0^2 - 1) \partial_\tau \mathcal{U}_0 + (1 + 2\varepsilon \delta) (\mathcal{U}_0 + \varepsilon \mathcal{U}_1) &= -\mu_1 \varepsilon \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_0. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Une identification des termes en puissances semblables de ε amène, pour ε^0 ,

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_0 + \mathcal{Y}_0 &= 0 \\ \partial_\tau^2 \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Les solutions de ce système d'équations différentielles homogènes sont données par

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_0 &= R_y(T) \cos(\tau + \varphi(T)) \\ \mathcal{U}_0 &= R_u(T) \cos(\tau + \varphi(T) + \psi(T)) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

où $R_y(T)$ et $R_u(T)$ sont des amplitudes lentes et $\psi(T)$ est une phase relative.

Pour les termes en ε^1 , il vient

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_1 &= -\mu_1 \mathcal{M}_0 \sin(\mathcal{V} \xi_1 \varepsilon \tau) \mathcal{U}_0 - 2\partial_{\tau T}^2 \mathcal{Y}_0 - 2\xi_1 \partial_\tau \mathcal{Y}_0 \\ \partial_\tau^2 \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_1 &= -\mu_1 \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_0 - 2\partial_{\tau T}^2 \mathcal{U}_0 - 2\mu_1 (\mathcal{U}_0^2 - 1) \partial_\tau \mathcal{U}_0 - 2\delta \mathcal{U}_0 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Les termes séculaires apparaissent en développant le membre de droite des deux expressions précédentes. En introduisant les expressions de \mathcal{Y}_0 et \mathcal{U}_0 , il vient après quelques déve-

loppements,

$$\begin{aligned}
\partial_\tau^2 \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_1 &= (\mu_1 \mathcal{M}_0 \sin(\mathcal{V} \xi_1 \varepsilon \tau) R_u \cos \psi + 2R_y \varphi') \cos(\tau + \varphi(T)) \\
&\quad + \left(-\mu_1 \mathcal{M}_0 \sin(\mathcal{V} \xi_1 \varepsilon \tau) R_u \sin \psi + 2R'_y + 2\xi_1 R_y \right) \sin(\tau + \varphi(T)) \\
\partial_\tau^2 \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_1 &= \left[\mu_1 R_y + 2R'_u \sin \psi + 2R_u(\varphi' + \psi') \cos \psi \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu_1}{2} R_u^3 \sin \psi - 2\mu_1 R_u \sin \psi - 2\delta R_u \cos \psi \right] \cos(\tau + \phi(T)) \\
&\quad + \left[2R'_u \cos \psi - 2R_u(\varphi' + \psi') \sin \psi \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu_1}{2} R_u^3 \cos \psi - 2\mu_1 R_u \cos \psi + 2\delta R_u \sin \psi \right] \sin(\tau + \phi(T)) \\
&\quad + \frac{\mu_1}{2} R_u^3 \sin(3((\tau + \phi(T)) + \psi)) .
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Ainsi, il apparait que les amplitudes et les phases lentes introduites précédemment dans $\mathcal{Y}_0(\tau, T)$ et $\mathcal{U}_0(\tau, T)$ doivent satisfaire les conditions suivantes

$$\begin{aligned}
R'_y &= \frac{\mu_1}{2} \mathcal{M}_0 R_u \sin(\mathcal{V} \xi_1 \varepsilon \tau) \sin \psi - \xi_1 R_y \\
R'_u &= \mu_1 \left(R_u - \frac{1}{4} R_u^3 - \frac{1}{2} R_y \sin \psi \right) \\
\varphi' &= -\frac{\mu_1}{2} \mathcal{M}_0 \frac{R_u}{R_y} \sin(\mathcal{V} \xi_1 \varepsilon \tau) \cos \psi \\
\psi' &= \delta + \frac{\mu_1}{2} \left(\mathcal{M}_0 \sin(\mathcal{V} \xi_1 \varepsilon \tau) \frac{R_u}{R_y} - \frac{R_y}{R_u} \right) \cos \psi .
\end{aligned} \tag{B.11}$$

C

Analyse par échelles multiples du système à deux modes de vibration

Le système étudié sous forme adimensionnelle est donnée par

$$\begin{cases} \mathcal{Y}^{(\text{I})''} + 2\varepsilon\xi_1^* \mathcal{Y}^{(\text{I})'} + \mathcal{Y}^{(\text{I})} = -\varepsilon^2 \mu^{*2} \nu \mathcal{M}_\text{I} \mathcal{Y}^{(\text{III})''} - \varepsilon \mu^* \mathcal{M}_\text{I} \mathcal{U}'' \\ \mathcal{Y}^{(\text{II})''} + 2\varepsilon\xi_2^* \nu \mathcal{Y}^{(\text{II})'} + \nu^2 \mathcal{Y}^{(\text{II})} = -\varepsilon^2 \mu^{*2} \nu \mathcal{M}_\text{II} \mathcal{Y}^{(\text{I})''} - \varepsilon \mu^* \nu \mathcal{M}_\text{II} \mathcal{U}'' \\ \mathcal{U}'' + 2\varepsilon \mu^* \Omega \mathcal{U}' \left(\beta u^{*2} \mathcal{U}^2 - 1 \right) + \Omega^2 \mathcal{U} = -\varepsilon \mu^* \mathcal{Y}^{(\text{I})''} - \varepsilon \mu^* \nu \mathcal{Y}^{(\text{II})''} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

La solution recherchée est de la forme de l'ansatz (4.16), qui est pour rappel,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^{(\text{I})}(\tau; \varepsilon) &= \mathcal{Y}_0^{(\text{I})}[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \varepsilon \mathcal{Y}_1^{(\text{I})}[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \dots \\ \mathcal{Y}^{(\text{II})}(\tau; \varepsilon) &= \mathcal{Y}_0^{(\text{II})}[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \varepsilon \mathcal{Y}_1^{(\text{II})}[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \dots \\ \mathcal{U}(\tau; \varepsilon) &= \mathcal{U}_0[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \varepsilon \mathcal{U}_1[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Après introduction de l'échelle de temps lente t^*/ε et du temps lent $T = t/(t^*/\varepsilon) = \varepsilon\tau$, il convient de remplacer les dérivées temporelles par des dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= \partial_\tau + \varepsilon \partial_T \\ \frac{d^2}{d\tau^2} &= \partial_\tau^2 + 2\varepsilon \partial_\tau \partial_T + \varepsilon^2 \partial_T^2. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

L'ansatz (C.2) est ensuite introduit dans les équations (C.1). En se limitant au second ordre, il vient

$$\begin{aligned}
& (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{I})}) + 2\varepsilon\xi_1^* (\partial_\tau + \varepsilon\partial_T) (\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{I})}) + (\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{I})}) \\
& \quad = -\varepsilon^2\mu^{*2}\nu\mathcal{M}_\text{I} (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{II})}) \\
& \quad \quad - \varepsilon\mu^*\mathcal{M}_\text{I} (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) \\
& (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{II})}) + 2\varepsilon\xi_\text{II}^* \nu (\partial_\tau + \varepsilon\partial_T) (\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{II})}) + \nu^2 (\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{II})}) \\
& \quad = -\varepsilon^2\mu^{*2}\nu\mathcal{M}_\text{II} (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{I})}) \\
& \quad \quad - \varepsilon\mu^*\nu\mathcal{M}_\text{II} (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) \\
& (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) + 2\varepsilon\mu_1\Omega (\partial_\tau + \varepsilon\partial_T) (\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) (\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1)^2 - 1) \\
& \quad + \Omega^2 (\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) \\
& \quad = -\varepsilon\mu^* (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{I})}) \\
& \quad \quad - \varepsilon\mu^*\nu (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{II})}).
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Le paramètre ε étant un petit nombre, on peut se limiter dans les développements aux termes en ε^0 et ε^1 . De plus, en conditions de « small detuning », on a $\Omega = 1 + \varepsilon\delta$ et donc $\Omega^2 = 1 + 2\varepsilon\delta + \text{ord}(\varepsilon^2)$ mais également $\nu^2 = 1 + \varepsilon\Delta$ et donc $\nu^2 = 1 + 2\varepsilon\Delta + \text{ord}(\varepsilon^2)$. Ainsi, en laissant tomber les termes en ε^2 et plus, il vient

$$\begin{aligned}
& \partial_\tau^2\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \varepsilon\partial_\tau^2\mathcal{Y}_1^{(\text{I})} + 2\varepsilon\xi_1^*\partial_\tau\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{I})} = -\mu^*\varepsilon\mathcal{M}_\text{I}\partial_\tau^2\mathcal{U}_0 \\
& \partial_\tau^2\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \varepsilon\partial_\tau^2\mathcal{Y}_1^{(\text{II})} + 2\varepsilon\xi_\text{II}^*\partial_\tau\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{II})} = -\mu^*\varepsilon\mathcal{M}_\text{II}\partial_\tau^2\mathcal{U}_0 - 2\varepsilon\Delta\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} \\
& \partial_\tau^2\mathcal{U}_0 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2\mathcal{U}_0 + \varepsilon\partial_\tau^2\mathcal{U}_1 + 2\varepsilon\mu_1(\mathcal{U}_0^2 - 1)\partial_\tau\mathcal{U}_0 + (1 + 2\varepsilon\delta)(\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) \\
& \quad = -\mu^*\varepsilon\partial_\tau^2\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} - \mu^*\varepsilon\partial_\tau^2\mathcal{Y}_0^{(\text{II})}.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Une identification des termes en puissances semblables de ε amène, pour ε^0 ,

$$\begin{aligned}
& \partial_\tau^2\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \mathcal{Y}_0^{(\text{I})} = 0 \\
& \partial_\tau^2\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} = 0 \\
& \partial_\tau^2\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_0 = 0.
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Les solutions de ce système d'équations différentielles homogènes sont données par

$$\begin{aligned}
& \mathcal{Y}_0^{(\text{I})} = R_y^{(\text{I})}(T) \cos(\tau + \varphi(T)) \\
& \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} = R_y^{(\text{II})}(T) \cos(\tau + \varphi(T) + \phi(T)) \\
& \mathcal{U}_0 = R_u(T) \cos(\tau + \varphi(T) + \phi(T) + \psi(T))
\end{aligned} \tag{C.7}$$

où $R_y^{(\text{I})}(T)$, $R_y^{(\text{II})}(T)$ et $R_u(T)$ sont des amplitudes lentes et $\phi(T)$, $\psi(T)$ des phases relatives.

Pour les termes en ε^1 , il vient

$$\begin{aligned}\partial_\tau^2 \mathcal{Y}_1^{(\text{I})} + \mathcal{Y}_1^{(\text{I})} &= -\mu^\star \mathcal{M}_\text{I} \mathcal{U}_0 - 2\partial_{\tau T}^2 \mathcal{Y}_0^{(\text{I})} - 2\xi_\text{I}^\star \partial_\tau \mathcal{Y}_0^{(\text{I})} \\ \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_1^{(\text{II})} + \mathcal{Y}_1^{(\text{II})} &= -\mu^\star \mathcal{M}_\text{II} \mathcal{U}_0 - 2\partial_{\tau T}^2 \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} - 2\xi_\text{II}^\star \partial_\tau \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} - 2\Delta \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} \\ \partial_\tau^2 \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_1 &= -\mu^\star \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_0^{(\text{I})} - \mu^\star \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} - 2\partial_{\tau T}^2 \mathcal{U}_0 - 2\mu_1 (\mathcal{U}_0^2 - 1) \partial_\tau \mathcal{U}_0 - 2\delta \mathcal{U}_0\end{aligned}\tag{C.8}$$

Les termes séculaires apparaissent en développant le membre de droite des trois expressions précédentes. En introduisant les expressions de $\mathcal{Y}_0^{(\text{I})}$, $\mathcal{Y}_0^{(\text{II})}$ et \mathcal{U}_0 , il vient après quelques développements,

$$\begin{aligned}\partial_\tau^2 \mathcal{Y}_1^{(\text{I})} + \mathcal{Y}_1^{(\text{I})} &= \left(\mu^\star \mathcal{M}_\text{I} R_u \cos \phi \cos \psi + 2R_y^{(\text{I})} \phi' - \mathcal{M}_\text{I} \mu^\star R_u \sin \phi \sin \psi \right) \cos(\tau + \varphi(T)) \\ &\quad + \left(-\mu^\star \mathcal{M}_\text{I} R_u \cos \phi \sin \psi - \mu^\star \mathcal{M}_\text{I} R_u \sin \phi \cos \psi + 2R_y^{(\text{I})'} + 2\xi_\text{I}^\star R_y^{(\text{I})} \right) \sin(\tau + \varphi(T)) \\ \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_1^{(\text{II})} + \mathcal{Y}_1^{(\text{II})} &= \left[\mu^\star \mathcal{M}_\text{II} R_u \cos \phi \cos \psi + 2R_y^{(\text{II})} (\phi' + \phi') \cos \phi - \mathcal{M}_\text{II} \mu^\star R_u \sin \phi \sin \psi \right. \\ &\quad \left. + 2\xi_\text{II}^\star R_y^{(\text{II})} \sin \phi - 2\Delta R_y^{(\text{II})} \cos \phi + 2R_y^{(\text{II})'} \sin \phi \right] \cos(\tau + \varphi(T)) \\ &\quad + \left[-\mu^\star \mathcal{M}_\text{II} R_u \cos \phi \sin \psi - \mu^\star \mathcal{M}_\text{II} R_u \sin \phi \cos \psi + 2R_y^{(\text{II})'} \cos \phi \right. \\ &\quad \left. + 2\xi_\text{II}^\star R_y^{(\text{II})} \cos \phi + 2\Delta \sin \phi R_y^{(\text{II})} - 2R_y^{(\text{II})} \sin \phi (\phi' + \phi') \right] \sin(\tau + \varphi(T)) \\ \partial_\tau^2 \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_1 &= \left[-2R_u' \cos \psi \sin \phi - 2R_u' \sin \psi \cos \phi - 2\delta R_u \sin \psi \sin \phi \right. \\ &\quad \left. + 2\delta R_u \cos \psi \cos \phi - \frac{1}{2} \mu^\star R_u^3 \cos \psi \sin \phi - \frac{1}{2} \mu^\star R_u^3 \sin \psi \cos \phi \right. \\ &\quad \left. + 2\mu^\star R_u \cos \psi \sin \phi + 2\mu^\star R_u \sin \psi \cos \phi + 2R_u \phi' \sin \psi \sin \phi \right. \\ &\quad \left. - 2R_u \phi' \cos \psi \cos \phi + 2R_u \phi' \sin \psi \sin \phi - 2R_u \phi' \cos \psi \cos \phi \right. \\ &\quad \left. + 2R_u \psi' \sin \psi \sin \phi - 2R_u \psi' \cos \psi \cos \phi - \mu^\star R_y^{(\text{I})} - \mu^\star R_y^{(\text{II})} \cos \phi \right] \cos(\tau + \phi(T)) \\ &\quad + \left[2R_u' \sin \psi \sin \phi - 2R_u' \cos \psi \cos \phi - 2\delta R_u \cos \psi \sin \phi \right. \\ &\quad \left. - 2\delta R_u \sin \psi \cos \phi + \frac{1}{2} \mu^\star R_u^3 \sin \psi \sin \phi - 2\mu^\star R_u \sin \psi \sin \phi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \mu^\star R_u^3 \cos \psi \cos \phi + 2\mu^\star R_u \cos \psi \cos \phi + 2R_u \cos \phi' \psi \sin \phi \right. \\ &\quad \left. + 2R_u \sin \phi' \psi \cos \phi + 2R_u \phi' \cos \psi \sin \phi + 2R_u \phi' \sin \psi \cos \phi \right. \\ &\quad \left. + 2R_u \psi' \cos \psi \sin \phi + 2R_u \psi' \sin \psi \cos \phi + \mu^\star R_y^{(\text{II})} \sin \phi \right] \sin(\tau + \phi(T)) \\ &\quad + \frac{\mu^\star}{2} R_u^3 \sin(3((\tau + \phi(T)) + \psi)).\end{aligned}\tag{C.9}$$

Ainsi, il apparait que les amplitudes et les phases lentes introduites précédemment dans

$\mathcal{Y}_0^{(\text{I})}(\tau, T)$, $\mathcal{Y}_0^{(\text{II})}(\tau, T)$ et $\mathcal{U}_0(\tau, T)$ doivent satisfaire les conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} R_y^{(\text{I})'} = -\xi_1^\star R_y^{(\text{I})} + \frac{\mu^\star}{2} \mathcal{M}_\text{I} R_u \sin(\phi + \psi) \\ R_y^{(\text{II})'} = -\xi_\text{II}^\star R_y^{(\text{II})} + \frac{\mu^\star}{2} \mathcal{M}_\text{II} R_u \sin \psi \\ R_u' = \mu^\star \left(R_u - \frac{1}{4} R_u^3 - \frac{1}{2} R_y^{(\text{I})} \sin(\phi + \psi) - \frac{1}{2} R_y^{(\text{II})} \sin \psi \right) \\ \phi' = \Delta + \frac{\mu^\star}{2} R_u \left(\frac{\mathcal{M}_\text{I}}{R_y^{(\text{I})}} \cos(\phi + \psi) - \frac{\mathcal{M}_\text{II}}{R_y^{(\text{II})}} \cos \psi \right) \\ \varphi' = -\frac{\mu^\star}{2} \mathcal{M}_\text{I} \frac{R_u}{R_y^{(\text{I})}} \cos(\phi + \psi) \\ \psi' = \delta - \Delta + \frac{\mu^\star}{2} \left(\mathcal{M}_\text{II} \frac{R_u}{R_y^{(\text{II})}} \cos \psi - \frac{R_y^{(\text{I})}}{R_u} \cos(\phi + \psi) - \frac{R_y^{(\text{II})}}{R_u} \cos \psi \right). \end{array} \right. \quad (\text{C.10})$$

D

Analyse par échelles multiples du système à deux modes de vibration avec prise en compte des formes modales

Le système étudié sous forme adimensionnelle est donné par

$$\begin{cases} \mathcal{Y}^{(\text{I})''} + 2\xi^{(\text{I})} \mathcal{Y}^{(\text{I})'} + \mathcal{Y}^{(\text{I})} = \left(-\mu^2 \nu \mathcal{M}_{\text{I}} \mathcal{Y}^{(\text{II})''} - \mu \mathcal{M}_{\text{I}} \mathcal{U}'' \right) \sin(\nu \varepsilon \xi_1^* \tau) \\ \mathcal{Y}^{(\text{II})''} + 2\xi^{(\text{II})} \nu \mathcal{Y}^{(\text{II})'} + \nu^2 \mathcal{Y}^{(\text{II})} = \left(-\mu^2 \nu \mathcal{M}_{\text{II}} \mathcal{Y}^{(\text{I})''} - \mu \nu \mathcal{M}_{\text{II}} \mathcal{U}'' \right) \sin(2\nu \varepsilon \xi_1^* \tau) \\ \mathcal{U}'' + 2\mu\Omega \mathcal{U}' (\mathcal{U}^2 - 1) + \Omega^2 \mathcal{U} = -\mu \mathcal{Y}^{(\text{I})''} - \mu \nu \mathcal{Y}^{(\text{II})''}. \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

La solution recherchée est de la forme de l'ansatz (4.16), qui est pour rappel,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^{(\text{I})}(\tau; \varepsilon) &= \mathcal{Y}_0^{(\text{I})}[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \varepsilon \mathcal{Y}_1^{(\text{I})}[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \dots \\ \mathcal{Y}^{(\text{II})}(\tau; \varepsilon) &= \mathcal{Y}_0^{(\text{II})}[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \varepsilon \mathcal{Y}_1^{(\text{II})}[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \dots \\ \mathcal{U}(\tau; \varepsilon) &= \mathcal{U}_0[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \varepsilon \mathcal{U}_1[\tau, T(\tau); \varepsilon] + \dots \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Après introduction de l'échelle de temps lente t^*/ε et du temps lent $T = t/(t^*/\varepsilon) = \varepsilon\tau$, il convient de remplacer les dérivées temporelles par des dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= \partial_\tau + \varepsilon \partial_T \\ \frac{d^2}{d\tau^2} &= \partial_\tau^2 + 2\varepsilon \partial_\tau \partial_T + \varepsilon^2 \partial_T^2. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

L'ansatz (D.2) est ensuite introduit dans les équations (D.1). En se limitant au second ordre, il vient

$$\begin{aligned}
& (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{I})}) + 2\varepsilon\xi_1^* (\partial_\tau + \varepsilon\partial_T) (\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{I})}) + (\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{I})}) \\
& \quad = -\varepsilon^2\mu^{*2}\nu\mathcal{M}_\text{I} \sin(\mathcal{V}\varepsilon\xi_1^*\tau) (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{II})}) \\
& \quad \quad - \varepsilon\mu^*\mathcal{M}_\text{I} \sin(\mathcal{V}\varepsilon\xi_1^*\tau) (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) \\
& (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{II})}) + 2\varepsilon\xi_\text{II}^*\nu (\partial_\tau + \varepsilon\partial_T) (\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{II})}) + \nu^2 (\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{II})}) \\
& \quad = -\varepsilon^2\mu^{*2}\nu\mathcal{M}_\text{II} \sin(2\mathcal{V}\varepsilon\xi_1^*\tau) (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{I})}) \\
& \quad \quad - \varepsilon\mu^*\nu\mathcal{M}_\text{II} \sin(2\mathcal{V}\varepsilon\xi_1^*\tau) (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) \\
& (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) + 2\varepsilon\mu_1\Omega (\partial_\tau + \varepsilon\partial_T) (\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) (\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1)^2 - 1) \\
& \quad \quad + \Omega^2 (\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) \\
& \quad = -\varepsilon\mu^* (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{I})}) \\
& \quad \quad - \varepsilon\mu^*\nu (\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2) (\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{II})}).
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Le paramètre ε étant un petit nombre, on peut se limiter dans les développements aux termes en ε^0 et ε^1 . De plus, en conditions de « small detuning », on a $\Omega = 1 + \varepsilon\delta$ et donc $\Omega^2 = 1 + 2\varepsilon\delta + \text{ord}(\varepsilon^2)$ mais également $\nu^2 = 1 + \varepsilon\Delta$ et donc $\nu^2 = 1 + 2\varepsilon\Delta + \text{ord}(\varepsilon^2)$. Ainsi, en laissant tomber les termes en ε^2 et plus, il vient

$$\begin{aligned}
& \partial_\tau^2\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \varepsilon\partial_\tau^2\mathcal{Y}_1^{(\text{I})} + 2\varepsilon\xi_1^*\partial_\tau\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{I})} = -\mu^*\varepsilon\mathcal{M}_\text{I} \sin(\mathcal{V}\varepsilon\xi_1^*\tau) \partial_\tau^2\mathcal{U}_0 \\
& \partial_\tau^2\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \varepsilon\partial_\tau^2\mathcal{Y}_1^{(\text{II})} + 2\varepsilon\xi_\text{II}^*\partial_\tau\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \varepsilon\mathcal{Y}_1^{(\text{II})} = -\mu^*\varepsilon\mathcal{M}_\text{II} \sin(2\mathcal{V}\varepsilon\xi_1^*\tau) \partial_\tau^2\mathcal{U}_0 - 2\varepsilon\Delta\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} \\
& \partial_\tau^2\mathcal{U}_0 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2\mathcal{U}_0 + \varepsilon\partial_\tau^2\mathcal{U}_1 + 2\varepsilon\mu_1(\mathcal{U}_0^2 - 1)\partial_\tau\mathcal{U}_0 + (1 + 2\varepsilon\delta)(\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1) \\
& \quad = -\mu^*\varepsilon\partial_\tau^2\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} - \mu^*\varepsilon\partial_\tau^2\mathcal{Y}_0^{(\text{II})}.
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Une identification des termes en puissances semblables de ε amène, pour ε^0 ,

$$\begin{aligned}
& \partial_\tau^2\mathcal{Y}_0^{(\text{I})} + \mathcal{Y}_0^{(\text{I})} = 0 \\
& \partial_\tau^2\mathcal{Y}_0^{(\text{II})} + \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} = 0 \\
& \partial_\tau^2\mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_0 = 0.
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Les solutions de ce système d'équations différentielles homogènes sont données par

$$\begin{aligned}
& \mathcal{Y}_0^{(\text{I})} = R_y^{(\text{I})}(T) \cos(\tau + \varphi(T)) \\
& \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} = R_y^{(\text{II})}(T) \cos(\tau + \varphi(T) + \phi(T)) \\
& \mathcal{U}_0 = R_u(T) \cos(\tau + \varphi(T) + \phi(T) + \psi(T))
\end{aligned} \tag{D.7}$$

où $R_y^{(\text{I})}(T)$, $R_y^{(\text{II})}(T)$ et $R_u(T)$ sont des amplitudes lentes et $\phi(T)$, $\psi(T)$ des phases relatives.

Pour les termes en ε^1 , il vient

$$\begin{aligned}
\partial_\tau^2 \mathcal{Y}_1^{(\text{I})} + \mathcal{Y}_1^{(\text{I})} &= -\mu^* \mathcal{M}_\text{I} \sin(\mathcal{V}_\varepsilon \xi_\text{I}^* \tau) \mathcal{U}_0 - 2\partial_{\tau T}^2 \mathcal{Y}_0^{(\text{I})} - 2\xi_\text{I}^* \partial_\tau \mathcal{Y}_0^{(\text{I})} \\
\partial_\tau^2 \mathcal{Y}_1^{(\text{II})} + \mathcal{Y}_1^{(\text{II})} &= -\mu^* \mathcal{M}_\text{II} \sin(2\mathcal{V}_\varepsilon \xi_\text{I}^* \tau) \mathcal{U}_0 - 2\partial_{\tau T}^2 \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} - 2\xi_\text{II}^* \partial_\tau \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} - 2\Delta \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} \\
\partial_\tau^2 \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_1 &= -\mu^* \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_0^{(\text{I})} - \mu^* \partial_\tau^2 \mathcal{Y}_0^{(\text{II})} - 2\partial_{\tau T}^2 \mathcal{U}_0 - 2\mu_1 (\mathcal{U}_0^2 - 1) \partial_\tau \mathcal{U}_0 - 2\delta \mathcal{U}_0
\end{aligned} \tag{D.8}$$

Les termes séculaires apparaissent en développant le membre de droite des trois expressions précédentes. En introduisant les expressions de $\mathcal{Y}_0^{(\text{I})}$, $\mathcal{Y}_0^{(\text{II})}$ et \mathcal{U}_0 , il vient après quelques développements,

$$\begin{aligned}
\partial_\tau^2 \mathcal{Y}_1^{(\text{I})} + \mathcal{Y}_1^{(\text{I})} &= \left[\mu^\star \mathcal{M}_\text{I} \sin(\mathcal{V} \varepsilon \xi_1^\star \tau) R_u \cos \phi \cos \psi + 2R_y^{(\text{I})} \varphi' \right. \\
&\quad \left. - \mu^\star \mathcal{M}_\text{I} \sin(\mathcal{V} \varepsilon \xi_1^\star \tau) R_u \sin \phi \sin \psi \right] \cos(\tau + \varphi(T)) \\
&\quad + \left[-\mu^\star \mathcal{M}_\text{I} \sin(\mathcal{V} \varepsilon \xi_1^\star \tau) R_u \cos \phi \sin \psi - \mu^\star \mathcal{M}_\text{I} \sin(\mathcal{V} \varepsilon \xi_1^\star \tau) R_u \sin \phi \cos \psi \right. \\
&\quad \left. + 2R_y^{(\text{I})'} + 2\xi_1^\star R_y^{(\text{I})} \right] \sin(\tau + \varphi(T)) \\
\partial_\tau^2 \mathcal{Y}_1^{(\text{II})} + \mathcal{Y}_1^{(\text{II})} &= \left[\mu^\star \mathcal{M}_\text{II} \sin(2\mathcal{V} \varepsilon \xi_1^\star \tau) R_u \cos \phi \cos \psi + 2R_y^{(\text{II})} (\varphi' + \phi') \cos \phi \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{M}_\text{II} \sin(2\mathcal{V} \varepsilon \xi_1^\star \tau) \mu^\star R_u \sin \phi \sin \psi + 2\xi_1^\star R_y^{(\text{II})} \sin \phi \right. \\
&\quad \left. - 2\Delta R_y^{(\text{II})} \cos \phi + 2R_y^{(\text{II})'} \sin \phi \right] \cos(\tau + \varphi(T)) \\
&\quad + \left[-\mu^\star \mathcal{M}_\text{II} \sin(2\mathcal{V} \varepsilon \xi_1^\star \tau) R_u \cos \phi \sin \psi \right. \\
&\quad \left. - \mu^\star \mathcal{M}_\text{II} \sin(2\mathcal{V} \varepsilon \xi_1^\star \tau) R_u \sin \phi \cos \psi + 2R_y^{(\text{II})'} \cos \phi \right. \\
&\quad \left. + 2\xi_1^\star R_y^{(\text{II})} \cos \phi + 2\Delta \sin \phi R_y^{(\text{II})} - 2R_y^{(\text{II})} \sin \phi (\varphi' + \phi') \right] \sin(\tau + \varphi(T)) \\
\partial_\tau^2 \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_1 &= \left[-2R_u' \cos \psi \sin \phi - 2R_u' \sin \psi \cos \phi - 2\delta R_u \sin \psi \sin \phi \right. \\
&\quad + 2\delta R_u \cos \psi \cos \phi - \frac{1}{2} \mu^\star R_u^3 \cos \psi \sin \phi - \frac{1}{2} \mu^\star R_u^3 \sin \psi \cos \phi \\
&\quad + 2\mu^\star R_u \cos \psi \sin \phi + 2\mu^\star R_u \sin \psi \cos \phi + 2R_u \phi' \sin \psi \sin \phi \\
&\quad - 2R_u \phi' \cos \psi \cos \phi + 2R_u \phi' \sin \psi \sin \phi - 2R_u \phi' \cos \psi \cos \phi \\
&\quad + 2R_u \psi' \sin \psi \sin \phi - 2R_u \psi' \cos \psi \cos \phi - \mu^\star R_y^{(\text{I})} - \mu^\star R_y^{(\text{II})} \cos \phi \left. \right] \cos(\tau + \phi(T)) \\
&\quad + \left[2R_u' \sin \psi \sin \phi - 2R_u' \cos \psi \cos \phi - 2\delta R_u \cos \psi \sin \phi \right. \\
&\quad - 2\delta R_u \sin \psi \cos \phi + \frac{1}{2} \mu^\star R_u^3 \sin \psi \sin \phi - 2\mu^\star R_u \sin \psi \sin \phi \\
&\quad - \frac{1}{2} \mu^\star R_u^3 \cos \psi \cos \phi + 2\mu^\star R_u \cos \psi \cos \phi + 2R_u \cos \phi' \psi \sin \phi \\
&\quad + 2R_u \sin \phi' \psi \cos \phi + 2R_u \phi' \cos \psi \sin \phi + 2R_u \phi' \sin \psi \cos \phi \\
&\quad + 2R_u \psi' \cos \psi \sin \phi + 2R_u \psi' \sin \psi \cos \phi + \mu^\star R_y^{(\text{I})} \sin \phi \left. \right] \sin(\tau + \phi(T)) \\
&\quad + \frac{\mu^\star}{2} R_u^3 \sin(3((\tau + \phi(T)) + \psi)) .
\end{aligned}$$

(D.9)

Ainsi, il apparait que les amplitudes et les phases lentes introduites précédemment dans

$\mathcal{Y}_0^{(\text{I})}(\tau, T)$, $\mathcal{Y}_0^{(\text{II})}(\tau, T)$ et $\mathcal{U}_0(\tau, T)$ doivent satisfaire les conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} R_y^{(\text{I})'} = -\xi_1^* R_y^{(\text{I})} + \frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_\text{I} \sin(\mathcal{V} \varepsilon \xi_1^* \tau) R_u \sin(\phi + \psi) \\ R_y^{(\text{II})'} = -\xi_\text{II}^* R_y^{(\text{II})} + \frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_\text{II} \sin(2\mathcal{V} \varepsilon \xi_1^* \tau) R_u \sin \psi \\ R_u' = \mu^* \left(R_u - \frac{1}{4} R_u^3 - \frac{1}{2} R_y^{(\text{I})} \sin(\phi + \psi) - \frac{1}{2} R_y^{(\text{II})} \sin \psi \right) \\ \phi' = \Delta + \frac{\mu^*}{2} R_u \left(\frac{\mathcal{M}_\text{I}}{R_y^{(\text{I})}} \sin(\mathcal{V} \varepsilon \xi_1^* \tau) \cos(\phi + \psi) - \frac{\mathcal{M}_\text{II}}{R_y^{(\text{II})}} \sin(2\mathcal{V} \varepsilon \xi_1^* \tau) \cos \psi \right) \\ \varphi' = -\frac{\mu^*}{2} \mathcal{M}_\text{I} \sin(\mathcal{V} \varepsilon \xi_1^* \tau) \frac{R_u}{R_y^{(\text{I})}} \cos(\phi + \psi) \\ \psi' = \delta - \Delta + \frac{\mu^*}{2} \left(\mathcal{M}_\text{II} \sin(2\mathcal{V} \varepsilon \xi_1^* \tau) \frac{R_u}{R_y^{(\text{II})}} \cos \psi - \frac{R_y^{(\text{I})}}{R_u} \cos(\phi + \psi) - \frac{R_y^{(\text{II})}}{R_u} \cos \psi \right). \end{array} \right. \quad (\text{D.10})$$

E.1 Équations moyennées pour le système à 1 mode

Le système (3.9) ainsi que les équations moyennées (3.19) ont été résolus pour les mêmes paramètres que ceux donnés à la Table 3.2 mais pour une valeur de μ légèrement supérieure ($\mu = 0.2$). Les résultats obtenus sont donnés à la Figure E.1.

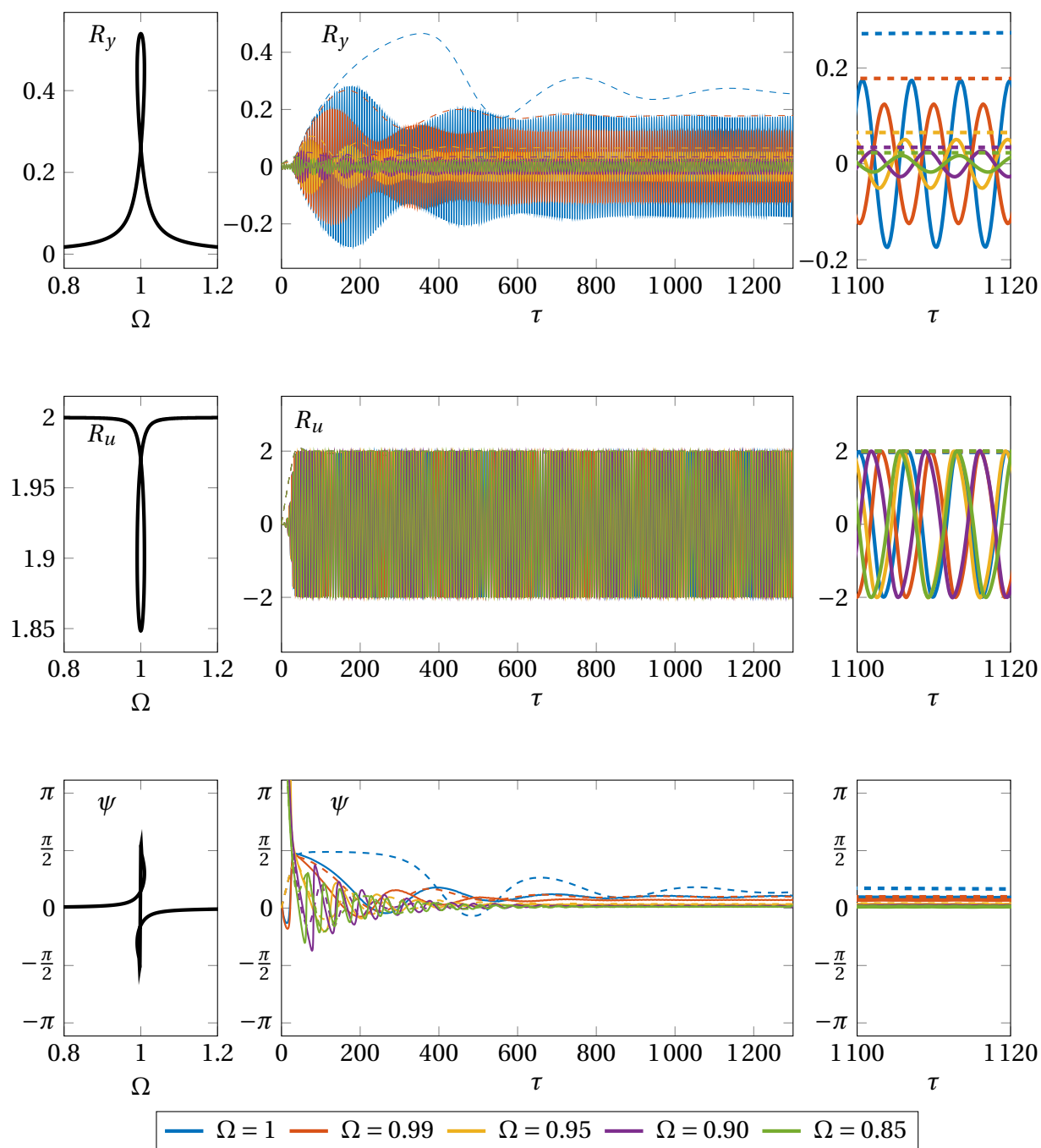


Figure E.1 – Validation des équations moyennées pour le système couplé pour différentes valeurs de Ω (data set 1 avec $\mu = 0.2$).

E.2 Passerelle de Mantes-la-Jolie - Limay

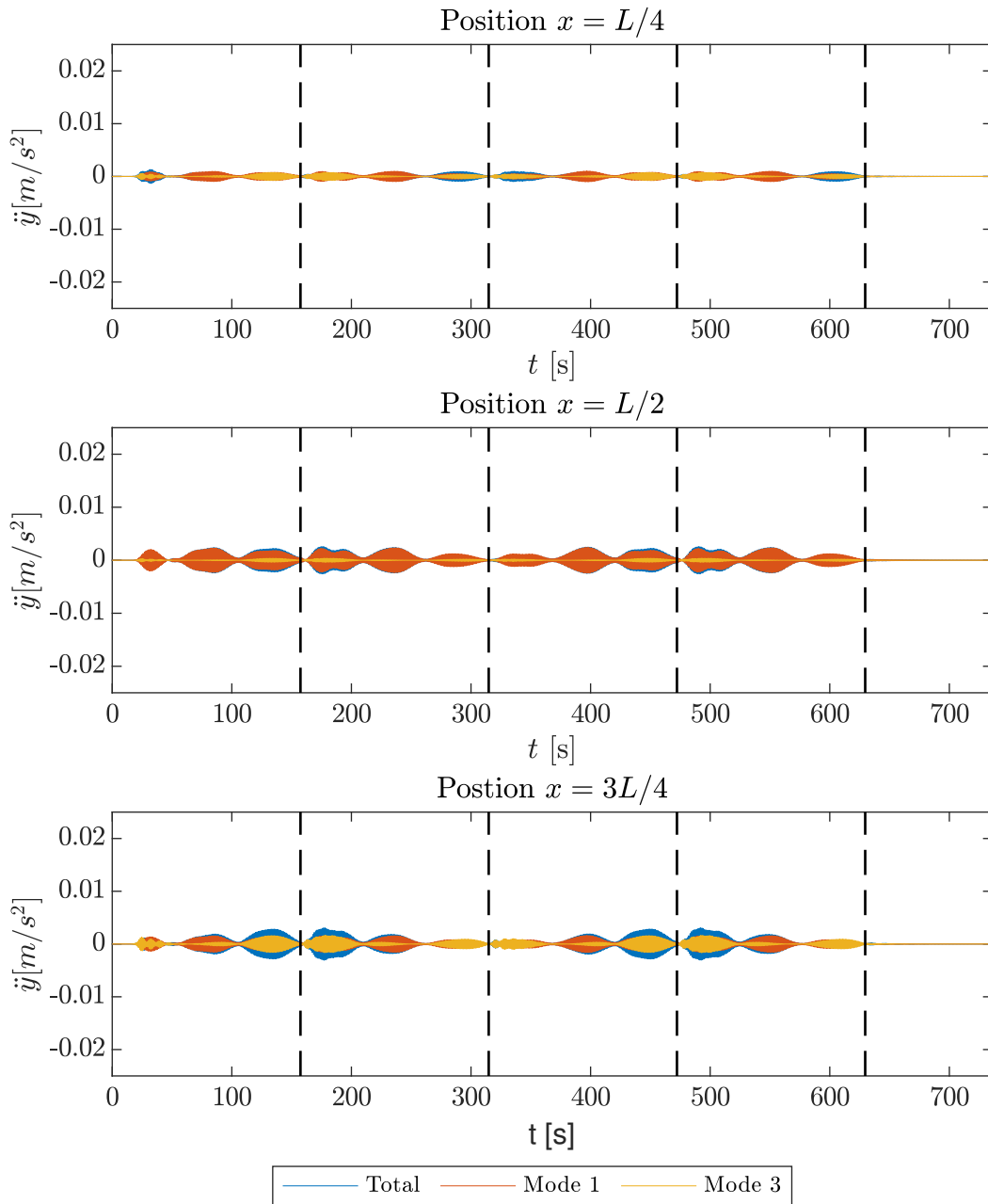


Figure E.2 – Accélération de la structure au cours du temps en $x = \frac{L}{4}$, $x = \frac{L}{2}$ et $x = \frac{3L}{4}$ pour $f_p = 0.9\text{ Hz}$.

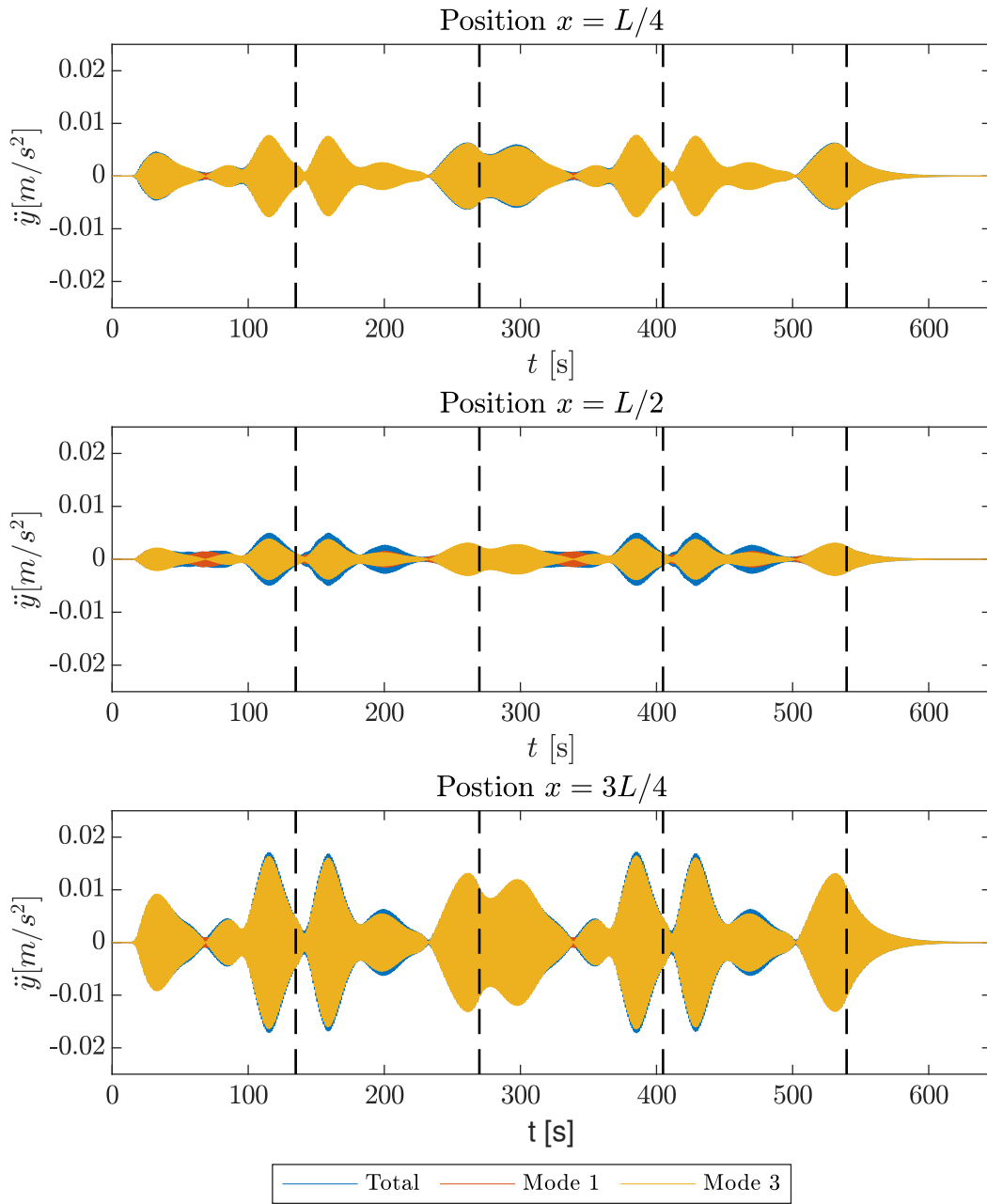


Figure E.3 – Accélération de la structure au cours du temps en $x = \frac{L}{4}$, $x = \frac{L}{2}$ et $x = \frac{3L}{4}$ pour $f_p = 1.05\text{Hz}$.

Références

- [1] Bachmann, H. et W. Ammann: *Vibrations in Structures: Induced by Man and Machines*. International Association of Bridge and Structural Engineering (IABSE), 1987. 5, 9, 12
- [2] Bocian, M., J. H. G. Macdonald et J. F. Burn: *Influence of visual information on pedestrian actions on laterally oscillating structures – experimental study using virtual reality environments*. Procedia Engineering, 2017.
- [3] Bodgi, J.: *Synchronisation piétons-structure : Application aux vibrations des passerelles souples*. Thèse de doctorat, Ecole des Ponts ParisTech, Septembre 2008. 12, 21
- [4] Bruno, L., A. Corbetta et A. Tosin: *From individual behaviour to an evaluation of the collective evolution of crowds along footbridges*. Journal of Engineering Mathematics, (1):153–173, 2016.
- [5] Daamen, W. et S. P. Hoogendoorn: *Experimental research of pedestrian walking behavior*. Transportation Research Record, 2003.
- [6] Dallard, P., A. J. Fitzpatrick, A. Flint, S. L. Bourva, A. Low, R. M. R. Smith et M. Willford: *The London Millennium Footbridge*. The Structural Engineer, Novembre 2001. 1, 10, 21
- [7] Denoël, V.: *Analyse des Structures II, Notes de cours*. Centrale des Cours, ULiège, 2017. <http://hdl.handle.net/2268/130616>.
- [8] Denoël, V.: *Derivation of a slow phase model of vortex-induced vibrations for smooth and turbulent flows*. Soumis au Journal of Fluids and Structures, Février 2020. 24
- [9] Denoël, V. et F. Rigo: *Rapport de mesures sur la passerelle de Mantes-la-Jolie - Limay*, Février 2019. 94
- [10] Erlicher, S., A. Trovato et P. Argoul: *Modeling the lateral pedestrian force on a rigid floor by a self-sustained oscillator*. Mechanical Systems and Signal Processing, 2010. 21, 23, 24, 28

- [11] Erlicher, S., A. Trovato et P. Argoul: *A modified hybrid van der pol/rayleigh model for the lateral pedestrian force on a periodically moving floor*. Mechanical Systems and Signal Processing, 2013. [20](#), [21](#), [23](#), [24](#), [50](#)
- [12] Griffin, M. J.: *Handbook of Human Vibration*. Academic Press Inc., 1990.
- [13] Heinemeyer, C. et M. Feldmann: *European design guide for footbridge vibration*. Dans *Proceedings of the Third International Conference on Footbridges*, Porto, Portugal, July 2008.
- [14] Ingólfsson, E., C. Georgakis et J. Jönsson: *Pedestrian-induced lateral vibrations of footbridges: A literature review*. Engineering Structures, (45):pg 21–52, 2012. [10](#), [11](#)
- [15] Ingólfsson, E., C. Georgakis, F. Ricciardelli et L. Procino: *Lateral human-structure interaction on footbridges*. Dans *Proceedings of the 10th International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*, 2010. [13](#)
- [16] Ingólfsson, E. T.: *Pedestrian-induced lateral vibrations of footbridges: Experimental studies and probabilistic modelling*. Thèse de doctorat, Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark, 2011. [11](#)
- [17] Kanamaru, T.: *Van der Pol oscillator*. Scholarpedia, 2(1):2202, 2007. [18](#)
- [18] Lievens, K.: *Robust vibration serviceability assessment and design of footbridges under walking loading*. Thèse de doctorat, KU Leuven, 2018. [6](#)
- [19] Macdonald, J. H. G.: *Lateral excitation of bridges by balancing pedestrians*. The Royal Society, 2008. [13](#), [21](#)
- [20] Matlab: *Matlab*. The Mathworks, Inc., Natick, Massachusetts, Release 2019b. [35](#)
- [21] Nakamura, S.: *Model for lateral excitation of footbridges by synchronous walking*. Journal of structural engineering, 2004. [10](#)
- [22] Nakamura, S. et Y. Fujino: *Lateral vibration on a pedestrian cable-stayed bridge*. Structural Engineering International, 2002. [2](#), [10](#), [13](#)
- [23] Nakamura, S. et T. Kawasaki: *Lateral vibration of footbridges by synchronous walking*. Journal of Constructional Steel Research, 2006. [10](#)
- [24] Nayfeh, A. H. et D. T. Mook: *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, 1995. [18](#)
- [25] Paulissen, J. et A. Metrikine: *Non-linear dynamic modeling of adaptive pedestrian behavior on lively footbridges*. Dans *Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2011*, Leuven, Belgique, 2011. [21](#), [23](#)

- [26] Pécol, P.: *Modélisation 2D discrète du mouvement des piétons : application à l'évacuation des structures du génie civil et à l'interaction foule-passerelle*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, Décembre 2011. [21](#)
- [27] Piccardo, G. et F. Tubino: *Parametric resonance of flexible footbridges under crowd-induced lateral excitation*. Journal of Sound and Vibration, 2007. [21](#)
- [28] Pikovsky, A., M. Rosenblum et J. Kurths: *Synchronization: A universal concept in non-linear sciences*. Cambridge University Press, 2001. [13](#), [14](#), [15](#), [16](#), [17](#), [27](#)
- [29] Ricciardelli, F. et A. D. Pizzimenti: *Lateral walking-induced forces on footbridges*. Journal of Bridge Engineering, 12(6):677–688, 2007. [6](#), [8](#), [9](#), [12](#)
- [30] Service Public de Wallonie (SPW): *“La Belle Liégeoise” - Techniques spécifiques pour le suivi et la réception de la passerelle*. [2](#)
- [31] Sétra: *Passerelles piétonnes - Évaluation du comportement vibratoire sous l'action des piétons*, 2006. [10](#), [21](#), [22](#)
- [32] Smith, R. A.: *Density, velocity and flow relationships for closely packed crowds*. Safety Science, (18):321–327, 1995. [7](#)
- [33] Venuti, F. et L. Bruno: *The synchronous lateral excitation phenomenon: modelling framework and an application*. Comptes Rendus Mécaniques, 355(12):pg 739–745, 2007.
- [34] Venuti, F. et L. Bruno: *Crowd-structure interaction in lively footbridges under synchronous lateral excitation: A literature review*. Physics of Life Reviews, 6:176–206, 2009.
- [35] Venuti, F. et L. Bruno: *Mitigation of human-induced lateral vibrations on footbridges through walkway shaping*. Engineering Structures, (56):pg 95–104, 2013. [22](#)
- [36] Venuti, F., L. Bruno et N. Bollomo: *Crowd dynamics on a moving platform: mathematical modelling and application to lively footbridges*. Mathematical and Computer Modelling, 2007. [21](#)
- [37] Venuti, F., L. Bruno et P. Napoli: *Pedestrian lateral action on lively footbridges: A new load model*. Structural Engineering International, 17(3):236–241, 2007. [21](#)
- [38] Živanović, S., A. Pavić et P. Reynolds: *Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review*. Journal of Sound and Vibration, (279):pg 1–74, 2005. [2](#)
- [39] Živanović, S., V. Racić, I. El-Bahnasy et A. Pavić: *Statistical characterisation of parameters defining human walking as observed on an indoor passerelle*. Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures, 2007.

- [40] Whittle, M.: *Gait Analysis : An Introduction*. Heidi Harrison, 2007. [4](#)
- [41] Yamasaki, M., T. Sasaki et M. Torii: *Sex difference in the pattern of lower limb movement during treadmill walking*. European Journal of Applied Physiology and Occupational Physiology, 1991. [6](#), [7](#)